

А. В. Овчинников

СЕМИНАРЫ ПО АЛГЕБРЕ

Часть 2

МОСКВА

2026

Оглавление

Глава 8.	Системы линейных уравнений	4
1.	Основные понятия и факты	4
2.	Примеры решения задач	23
3.	Задачи для самостоятельного решения	33
Глава 9.	Применения алгоритма Гаусса—Жордана	36
1.	Основные понятия и факты	36
2.	Примеры решения задач	45
3.	Задачи для самостоятельного решения	48
Глава 10.	Векторные пространства. I	50
1.	Основные понятия и факты	50
2.	Примеры решения задач	50
3.	Задачи для самостоятельного решения	60

ГЛАВА 8

Системы линейных уравнений

1. Основные понятия и факты

А. Арифметическое пространство $\mathbb{K}^n$.

8.1. Напомним (см. п. 5.4, с. 69), что *арифметическим пространством* $\mathbb{K}^n$ называется множество всех вектор-столбцов высоты n , элементами которых являются числа из поля $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{K}^n = \left\{ X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \mid x^1, x^2, \dots, x^n \in \mathbb{K} \right\}.$$

На пространстве $\mathbb{K}^n$ можно ввести линейные операции: сложение столбцов и умножение столбца на число из поля $\mathbb{K}$ (см. гл. 5, раздел 1.Б, с. 71). Указанные операции обладают свойствами, перечисленными в теореме 5.8 (см. с. 71). Далее вводятся понятия линейной комбинации и линейной оболочки заданного семейства столбцов, а также линейно зависимых и линейно независимых семейств столбцов (см. гл. 5, раздел 1.В, с. 73). В дальнейшем элементы арифметического пространства будем часто называть *векторами*.

8.2. Линейно независимые векторы

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

обладают тем свойством, что любой другой вектор можно представить в виде их линейной комбинации:

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = x^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Семейство этих векторов называется *стандартным базисом* пространства $\mathbb{K}^n$.

8.3. Определение. Подмножество $\mathcal{P}$ арифметического пространства $\mathbb{K}^n$ называется *подпространством*, если для любых элементов $X, Y \in \mathcal{P}$ и любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ выполняется соотношение

$$\alpha X + \beta Y \in \mathcal{P}.$$

Тот факт, что $\mathcal{P}$ является подпространством в $\mathbb{K}^n$, будем обозначать символом $\subseteq$, т.е. $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{K}^n$, оставляя символ $\subset$ для обозначения произвольных подмножеств (которые могут являться подпространствами или нет).

8.4. Например, подпространствами в $\mathbb{K}^n$ являются следующие множества:

- (а) само пространство $\mathbb{K}^n$ и множество, состоящее из одного нулевого столбца (нулевое подпространство); эти подпространства называются *тривиальными*;
- (б) множество $\mathcal{P}$ всех столбцов $(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^n)^T$, у которых $x^{k+1} = \dots = x^n = 0$; очевидно, подпространство $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{K}^n$ можно отождествить с пространством $\mathbb{K}^k$;
- (в) множество $\mathcal{Q}$ всех столбцов $(x^1, \dots, x^n)^T$, удовлетворяющих условию $x^1 + x^2 + \dots + x^n = 0$;
- (г) линейная оболочка любого семейства столбцов (см. пример 8.1).

Множество всех столбцов, у которых $x^1 = 1$, не является подпространством.

8.5. Теорема (транзитивность линейной оболочки). *Если столбцы $Y_1, \dots, Y_s$ принадлежат линейной оболочке столбцов $X_1, \dots, X_r$, то*

$$L(Y_1, \dots, Y_s) \subseteq L(X_1, \dots, X_r).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $Y_j \in L(X_1, \dots, X_r)$, $j = 1, \dots, s$, то

$$Y_1 = a_1^1 X_1 + \dots + a_1^r X_r, \quad \dots, \quad Y_s = a_s^1 X_1 + \dots + a_s^r X_r.$$

Введя матрицы $\mathbf{X} = \|X_1, \dots, X_r\|$, $\mathbf{Y} = \|Y_1, \dots, Y_s\|$, $A = (a_j^k)_s^r$, запишем эти соотношения в виде одного матричного равенства

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}A.$$

Далее, пусть $Z \in L(Y_1, \dots, Y_s)$, т.е.

$$Z = b^1 Y_1 + \dots + b^s Y_s;$$

введя вектор-столбец $B = (b^1, \dots, b^s)^T$, запишем это соотношение в виде $Z = YB$. Далее,

$$Z = YB = (XA)B = X(AB) = XA,$$

где $C = AB$ — вектор-столбец. Последнее соотношение показывает, что столбец Z является линейной комбинацией столбцов $X_1, \dots, X_r$; это и означает, что $Z \in L(X_1, \dots, X_r)$ и, следовательно, $L(Y_1, \dots, Y_s) \subseteq L(X_1, \dots, X_r)$. $\square$

8.6. Определение. Базисом подпространства $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{K}^n$ называется семейство векторов $X_1, \dots, X_s$, лежащих в $\mathcal{P}$ и удовлетворяющих следующим условиям:

- (i) векторы $X_1, \dots, X_s$ линейно независимы;
- (ii) для любого вектора $X \in \mathcal{P}$ существует такой набор чисел $x^1, \dots, x^s$ из числового поля $\mathbb{K}$, что

$$X = x^1 X_1 + \dots + x^s X_s. \quad (8.1)$$

Соотношение (8.1) называется *разложением вектора X по базису $X_1, \dots, X_s$* , а числа $x^1, \dots, x^s$ — *координатами* вектора X в базисе $X_1, \dots, X_s$.

8.7. Теорема. В любом подпространстве $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{K}^n$, отличном от нулевого подпространства, существует базис.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем в $\mathcal{P}$ произвольный вектор $X_1 \neq O$; если линейная оболочка $L(X_1)$ совпадает с подпространством $\mathcal{P}$, доказательство завершено. В противном случае найдётся ненулевой вектор $X_2 \notin L(X_1)$; рассмотрим линейную оболочку $L(X_1, X_2)$ и т. д. $\square$

8.8. Единственность разложения произвольного вектора по произвольному базису доказывается точно так же, как теорема 4.39 (см. с. 57).

8.9. Пусть $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ — заданная матрица. Рассмотрим отображение $\mathbf{A}$ пространства $\mathbb{K}^n$ в пространство $\mathbb{K}^m$, заданное формулой

$$\mathbf{A} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m, \quad X \mapsto Y = AX.$$

Это отображение обладает свойством линейности:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) &= A(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = \\ &= \alpha_1 AX_1 + \alpha_2 AX_2 = \alpha_1 \mathbf{A}(X_1) + \alpha_2 \mathbf{A}(X_2) \end{aligned}$$

и называется *матричным линейным оператором*, порождённым матрицей A .

8.10. Определение. Ядром $\ker \mathbf{A}$ матричного линейного оператора $\mathbf{A} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ называется множество всех векторов пространства $\mathbb{K}^n$, которые при действии оператора превращаются в нулевой вектор пространства $\mathbb{K}^m$:

$$\ker \mathbf{A} = \left\{ X \in \mathbb{K}^n \mid AX = O \in \mathbb{K}^m \right\}.$$

8.11. Определение. Образом $\operatorname{im} \mathbf{A}$ матричного линейного оператора $\mathbf{A} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ называется множество всех векторов пространства $\mathbb{K}^m$, которые могут быть получены из векторов пространства $\mathbb{K}^n$ при действии оператора:

$$\operatorname{im} \mathbf{A} = \left\{ Y \in \mathbb{K}^m \mid Y = AX, X \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

Иными словами, образ оператора — это его множество значений.

8.12. Теорема. Ядро и образ матричного линейного оператора $\mathbf{A} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ являются подпространствами в $\mathbb{K}^n$ и $\mathbb{K}^m$ соответственно:

$$\ker \mathbf{A} \in \mathbb{K}^n, \quad \operatorname{im} \mathbf{A} \in \mathbb{K}^m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X_1, X_2 \in \ker \mathbf{A}$, т.е. выполняются соотношения $AX_1 = O$ и $AX_2 = O$. Тогда для любых чисел $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) &= A \cdot (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = \\ &= \alpha_1 \cdot AX_1 + \alpha_2 \cdot AX_2 = O, \end{aligned}$$

т.е. $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \in \ker \mathbf{A}$.

Пусть $Y_1, Y_2 \in \operatorname{im} \mathbf{A}$, т.е. существует такие $X_1, X_2 \in \mathbb{K}^n$, что $Y_1 = AX_1$, $Y_2 = AX_2$. Для любых чисел $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{K}$ имеем

$$\begin{aligned} \beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_2 &= \beta_1 \cdot AX_1 + \beta_2 \cdot AX_2 = \\ &= A \cdot (\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2) = \mathbf{A}(\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2), \end{aligned}$$

т.е. $\beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_2 \in \operatorname{im} \mathbf{A}$. □

8.13. Для матричного линейного оператора $\mathbf{A} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$, порождённого матрицей $A = \|A_1, A_2, \dots, A_n\|$, можем записать

$$Y = \mathbf{A}(X) = \|A_1, \dots, A_n\| \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = A_1 x^1 + \dots + A_n x^n \in \operatorname{im} \mathbf{A}.$$

Таким образом, образ оператора $\mathbf{A}$ представляет собой линейную оболочку столбцов матрицы A :

$$\operatorname{im} \mathbf{A} = L(A_1, A_2, \dots, A_n).$$

8.14. Рассмотрим систему, состоящую из m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \cdots + a_n^1 x^n = b^1, \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \cdots + a_n^2 x^n = b^2, \\ \vdots \\ a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \cdots + a_n^m x^n = b^m. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} = \|A_1, A_2, \dots, A_n\|, \quad B = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 & \left| \begin{matrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{matrix} \right. \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m & \end{pmatrix} = \|A \mid B\|, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix};$$
$$AX = B, \quad A_1x^1 + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n = B.$$

8.16. Упорядоченный набор чисел $(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$ (или, в матричной записи, столбец $X_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)^T$) называется *решением* системы, если при подстановке этих чисел в каждое из уравнений системы получается верное числовое равенство (при подстановке столбца в матричное уравнение получается верное матричное равенство).

8.17. Система называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет решений.

В. Однородные системы.

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \cdots + a_n^1 x^n = 0, \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \cdots + a_n^2 x^n = 0, \\ \vdots \\ a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \cdots + a_n^m x^n = 0; \end{cases}$$
$$AX = O \quad \text{или} \quad A_1x^1 + A_2x^2 + \dots + A_nx^n = O.$$

8.20. Теорема (принцип линейной суперпозиции для однородных систем). Если X_1, X_2 — два решения однородной системы $AX = O$, то любая их линейная комбинация также является решением этой системы.

$$AX_1 = O, \quad AX_2 = O,$$
$$A(c^1X_1 + c^2X_2) = c^1AX_1 + c^2AX_2 = O,$$

8.21. Теорема 8.20 означает, что множество всех решений однородной системы является подпространством в пространстве столбцов $\mathbb{K}^n$ (см. определение 8.3).

8.22. Нетривиальная совместность однородной системы означает существование такого набора чисел $x^1, x^2, \dots, x^n$, среди которых имеется хотя бы одно ненулевое, что выполняется соотношение

$$A_1 x^1 + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n = O,$$

т.е. факт линейной зависимости столбцов $A_1, A_2, \dots, A_n$ основной матрицы. Таким образом, решение однородной системы эквивалентно исследованию линейной зависимости (независимости) заданных столбцов $A_1, A_2, \dots, A_n$.

8.23. Вектор $X \in \mathbb{K}^n$, для которого $AX = O$, принадлежит ядру линейного оператора $\mathbf{A} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$, заданного формулой $\mathbf{A}(X) = AX$ (см. п. 8.10). Таким образом, процесс решения однородной системы эквивалентен нахождению ядра матричного линейного оператора. Поэтому теорема 8.20 вытекает из теоремы 8.12.

8.24. Определение. *Фундаментальное семейство решений* (сокращённо ФСР) однородной системы — это такое семейство линейно независимых решений $X_1, X_2, \dots, X_s$, что любое решение данной системы можно представить в виде их линейной комбинации:

$$X = c^1 X_1 + c^2 X_2 + \dots + c^s X_s, \quad (8.2)$$

где $c^1, c^2, \dots, c^s$ — произвольные числа. Выражение (8.2), позволяющее с помощью надлежащего выбора чисел $c^1, c^2, \dots, c^s$ получить любое решение однородной системы, называется *общим решением* данной системы.

8.25. Согласно определению 8.6 фундаментальное семейство решений однородной системы линейных уравнений является *базисом* в подпространстве пространства $\mathbb{K}^n$, состоящем из всех решений этой системы.

8.26. Матрица Φ , столбцами которой являются столбцы ФСР, называется *фундаментальной матрицей* данной системы:

$$\Phi = \left\| X_1, X_2, \dots, X_s \right\|.$$

Общее решение системы выражается через фундаментальную матрицу по формуле

$$X = \Phi \cdot \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ \vdots \\ c^s \end{pmatrix}, \quad (8.3)$$

где $c^1, c^2, \dots, c^s$ — произвольные постоянные. Формула (8.3) определяет отображение $\Phi : \mathbb{K}^s \rightarrow \mathbb{K}^n$, которое каждому вектору

$C = (c^1, c^2, \dots, c^s)^T \in \mathbb{K}^s$ ставит в соответствие некоторое решение однородной системы $AX = O$:

$$\Phi : \mathbb{K}^s \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad C \mapsto X = \Phi C,$$

т.е. определяет *вложение* пространства $\mathbb{K}^s$ в пространство $\mathbb{K}^n$ — изоморфизм $\mathbb{K}^s \rightarrow \Phi(\mathbb{K}^s) \subseteq \mathbb{K}^n$, отображающий векторы стандартного базиса $e_1, \dots, e_s$ пространства $\mathbb{K}^s$ в векторы фундаментального семейства решений $X_1, \dots, X_s$ соответствующей системы. При этом числа $c^1, \dots, c^s$, фигурирующие в формуле (8.3), представляют собой координаты вектора X — решения однородной системы — в базисе $X_1, \dots, X_s$ пространства решений, состоящем из векторов ФСР.

Г. Неоднородные системы.

8.27. Система $AX = B$ называется *неоднородной*, если $B \neq O$. Часто неоднородную систему $AX = B$ рассматривают вместе с однородной системой $AX = O$, которую называют *сопутствующей*.

8.28. Теорема. Если X_1, X_2 — два решения неоднородной системы $AX = B$, то их разность $X_1 - X_2$ является решением сопутствующей однородной системы $AX = O$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $AX_1 = B, AX_2 = B$. Тогда

$$A(X_1 - X_2) = AX_1 - AX_2 = B - B = O,$$

что и требовалось. $\square$

8.29. Таким образом, любое решение неоднородной системы (т.е. выражение для общего решения, ОРНС) можно представить в виде суммы некоторого частного решения этой неоднородной системы (ЧРНС) и подходящего решения однородной системы (т.е. выражения для её общего решения, ОРОС):

$$\text{ОРНС} = \text{ЧРНС} + \text{ОРОС}.$$

Это утверждение называется *принципом линейной суперпозиции*.

8.30. Итак, общее решение неоднородной системы имеет вид

$$X = X_0 + c^1 X_1 + \dots + c^s X_s, \quad (8.4)$$

где X_0 — какое-либо частное решение этой системы, а $X_1, \dots, X_s$ — ФСР сопутствующей однородной системы.

8.31. Записав неоднородную систему $AX = B$ в «полуматричной» форме

$$A_1 x^1 + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n = B,$$

видим, что решение существует тогда и только тогда, когда вектор B может быть линейно выражен через векторы $A_1, A_2, \dots, A_n$, т.е. $B \in \text{im } A$, где A — матричный линейный оператор, порождённый основной матрицей системы A . Таким образом, решение неоднородной системы линейных уравнений эквивалентно исследованию вопроса о том, лежит ли вектор B правой части системы в образе $\text{im } A$ оператора A , т.е. в линейной оболочке столбцов основной матрицы A (см. п. 8.13).

Д. Системы упрощённого вида.

8.32. Неизвестная x^k называется *базисной*, если она входит только в одно уравнение системы.

8.33. Система называется *системой упрощённого вида*, если в каждом уравнении имеется базисная неизвестная; в случае, если некоторое уравнение содержит более одной неизвестной, входящей только в это уравнение, в качестве базисной неизвестной выбирается одна (любая) из них¹. Итак, в системе упрощённого вида количество базисных неизвестных равно количеству уравнений в системе.

8.34. В системе упрощённого вида неизвестные, не являющиеся базисными, называются *свободными*. Происхождение терминов «базисная неизвестная» и «свободная неизвестная» станет ясным из дальнейшего изложения.

8.35. Рассмотрим однородную систему упрощённого вида, в которой для удобства рассуждений будем считать, что базисными неизвестными являются $x^1, \dots, x^r$, а коэффициенты при этих неизвестных равны 1 (этого легко добиться умножением уравнения на подходящий коэффициент):

$$\begin{cases} x^1 & + a_{r+1}^1 x^{r+1} + \dots + a_n^1 x^n = 0, \\ & x^2 & + a_{r+1}^2 x^{r+1} + \dots + a_n^2 x^n = 0, \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & x^r & + a_{r+1}^r x^{r+1} + \dots + a_n^r x^n = 0. \end{cases}$$

¹Например, в системе

$$\begin{cases} x^1 + x^2 + x^4 = 0 \\ x^3 + x^4 = 0 \end{cases}$$

неизвестные x^1 и x^2 входят только в первое уравнение, а x^3 — только во второе; в этом случае лишь одну из неизвестных x^1 или x^2 будем относить к числу базисных. Таким образом, в этой системе базисными неизвестными можно считать либо x^1 и x^3 , либо x^2 и x^3 .

8.37. Если число неизвестных в однородной системе упрощённого вида больше числа уравнений, то такая система имеет нетривиальные решения. Действительно, такая система содержит кроме базисных неизвестных (число которых равно числу уравнений) также и свободные неизвестные. Выбирая значения этих свободных неизвестных произвольным образом, можно получить нетривиальное решение системы.

$$\Phi = \begin{pmatrix} -a_{r+1}^1 & -a_{r+2}^1 & \cdots & -a_n^1 \\ -a_{r+1}^2 & -a_{r+2}^2 & \cdots & -a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{r+1}^r & -a_{r+2}^r & \cdots & -a_n^r \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix};$$

8.39. Ситуация в случае неоднородной системы аналогична. Перепишем упрощённую неоднородную систему

$$\left\{ \begin{array}{l} x^1 + a_{r+1}^1 x^{r+1} + \dots + a_n^1 x^n = b^1, \\ x^2 + a_{r+1}^2 x^{r+1} + \dots + a_n^2 x^n = b^2, \\ \vdots \\ x^r + a_{r+1}^r x^{r+1} + \dots + a_n^r x^n = b^r \end{array} \right.$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}A. \quad (8.5)$$
[illegible]
$$z_0^1 Y_1 + z_0^2 Y_2 + \cdots + z_0^s Y_s \equiv \mathbf{Y} Z_0.$$
$$YZ_0 = (XA)Z_0 = X(AZ_0) = XO = O,$$

Контрапозицией теоремы 8.40 является следующая теорема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим в подпространстве $\mathcal{P}$ два различных базиса $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_r)$ и $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_s)$. Поскольку $Y_1, \dots, Y_s \in L(X_1, \dots, X_r)$, согласно теореме 8.41 имеем $s \leq r$. Аналогично получаем $r \leq s$, откуда $s = r$. $\square$

1. Пусть $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ — два подпространства в $\mathbb{K}^n$, причём $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$. Тогда $\dim \mathcal{Q} \leq \dim \mathcal{P}$.
2. Пусть $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ — два подпространства в $\mathcal{V}$, причём $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ и $\dim \mathcal{P} = \dim \mathcal{Q}$. Тогда $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $X_1, \dots, X_r$ — базис в $\mathcal{P}$, т.е. $\dim \mathcal{P} = r$, а $Y_1, \dots, Y_s$ — базис в $\mathcal{Q}$, т.е. $\dim \mathcal{Q} = s$. По теореме 8.41 имеем $s \leq r$, что и требовалось.

2. Пусть $Y_1, \dots, Y_s$ — базис в $\mathcal{Q}$, т.е. $\dim \mathcal{Q} = s$. Предположим, что $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$, но $\mathcal{Q} \neq \mathcal{P}$. Тогда существует такой вектор $Z \in \mathcal{P}$, что $Z \notin \mathcal{Q}$. Поскольку Z не может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $Y_1, \dots, Y_s$, делаем вывод, что семейство $Z, Y_1, \dots, Y_s$ линейно независимо. Таким образом, $\mathcal{P}$ содержит не менее $s + 1$ линейно независимых векторов, т.е. $\dim \mathcal{P} \geq s + 1$. Получили противоречие с условием $\dim \mathcal{P} = \dim \mathcal{Q}$. $\square$

Ж. Элементарные преобразования системы уравнений.

8.44. Очевидно, следующие преобразования системы уравнений переводят её в эквивалентную систему:

- (i) перестановка двух уравнений местами;
- (ii) умножение любого уравнения системы на ненулевое число;
- (iii) прибавление к любому уравнению системы другого уравнения.

Эти преобразования систем линейных уравнений называются *элементарными преобразованиями*.

8.45. Вместо преобразований самой системы удобно выполнять преобразования расширенной матрицы этой системы; ясно, что при этом элементарным преобразованиям системы соответствуют следующие элементарные преобразования строк расширенной матрицы:

- (i) перестановка двух строк местами;
- (ii) умножение любой строки на ненулевое число;
- (iii) прибавление к любой строке другой строки.

8.46. Будем называть *ведущим элементом строки* первый ненулевой элемент этой строки (при отсчёте слева направо).

8.47. Говорят, что матрица имеет *упрощённый вид*, если она является расширенной матрицей линейной системы упрощённого вида. Матрица упрощённого вида имеет следующую структуру:

- (а) все нулевые строки располагаются ниже всех ненулевых;
- (б) *ведущий элемент* каждой строки располагается строго правее ведущего элемента строки, лежащей выше;
- (в) ведущий элемент каждой ненулевой строки равен единице и является единственным ненулевым элементом в своём столбце; соответствующие строки и столбцы называются *базисными*.

Таким образом, матрица упрощённого вида выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & * & 0 & * & 0 & * & \cdots & 0 & * & * \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & * & 0 & * & \cdots & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & * & \cdots & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{1} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (8.6)$$

базисные столбцы и ведущие элементы выделены.

8.48. Очевидны следующие свойства матриц упрощённого вида:

- (1) некоторые столбцы матрицы являются последовательными столбцами единичной матрицы; эти столбцы, являющиеся не чем иным, как базисными столбцами, отвечают базисным неизвестным системы линейных уравнений;
- (2) любой столбец, не являющийся базисным, представляет собой линейную комбинацию *предшествующих* базисных столбцов.

3. Алгоритм Гаусса—Жордана.

8.49. Алгоритм приведения произвольной матрицы к упрощённому виду при помощи элементарных преобразований строк называется *алгоритмом Гаусса—Жордана*. Он позволяет получить матрицу упрощённого вида из исходной матрицы, содержащей m строк, не более чем за m шагов; один шаг алгоритма описан ниже.

8.50. Шаг № k .

1. Среди строк матрицы с номерами $k, \dots, m$ выберем строку, ведущий элемент которой расположен *не правее* ведущих элементов остальных рассматриваемых строк. Выбранную строку назовём *ведущей строкой*; *ведущим столбцом* назовём столбец, в котором располагается ведущий элемент ведущей строки.
2. Разделим ведущую строку на её ведущий элемент; в полученной новой (k -й) ведущей строке ведущий элемент будет равен 1.
3. Переставим ведущую строку на k -е место.

4. Вычтем из каждой строки матрицы ведущую строку, умноженную на коэффициенты, подобранные таким образом, чтобы все элементы ведущего столбца (кроме самого ведущего элемента) обратились в нуль. После этого ведущий столбец будет представлять собой k -й столбец единичной матрицы.

Процесс завершается, когда каждая строка матрицы уже побывала в роли ведущей строки или когда ведущую строку выбрать невозможно.

И. «Правило прямоугольников».

8.51. Подбор коэффициентов в процессе применения алгоритма Гаусса—Жордана к матрице с целочисленными элементами может приводить к вычислениям с дробями, доставляющим определённые неудобства (ср. пример 8.4, с. 25). Появления дробных коэффициентов можно избежать, если применить модификацию алгоритма, которую разъясним на следующем примере. Рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} p & q & r & s \\ a & b & \mathbf{c} & d \\ x & y & z & u \end{pmatrix}.$$

Проведём один шаг алгоритма Гаусса—Жордана с ведущим элементом c ($c \neq 0$); задачей является обращение в нуль всех элементов ведущего столбца (разумеется, кроме ведущего элемента). Для уничтожения элемента r (при условии $r \neq 0$ — в противном случае соответствующая строка не требует обработки) выполним предварительно следующие вспомогательные элементарные преобразования:

- (а) первую строку матрицы умножим на ведущий элемент c ;
- (б) вторую (ведущую) строку умножим на r ;

в результате получим матрицу

$$\begin{pmatrix} cp & cq & \mathbf{cr} & cs \\ ra & rb & \mathbf{rc} & rd \\ x & y & z & u \end{pmatrix}.$$

Вычитая теперь из первой строки вторую (ведущую) и после этого возвращая ведущей строке её первоначальный вид (т.е. деля её на r), получим

$$\begin{pmatrix} cp-ra & cq-rb & 0 & cs-rd \\ ra & rb & \mathbf{rc} & rd \\ x & y & z & u \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} cp-ra & cq-rb & 0 & cs-rd \\ a & b & \mathbf{c} & d \\ x & y & z & u \end{pmatrix}.$$

Аналогично уничтожаем элемент z (если $z \neq 0$), для чего сначала выполняем вспомогательные преобразования:

- (а) третью строку матрицы умножим на ведущий элемент c ;
- (б) вторую (ведущую) строку умножим на z ;

в результате получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} cp-ra & cq-rb & 0 & cs-rd \\ za & zb & \mathbf{zc} & zd \\ cx & cy & \mathbf{cz} & cu \end{pmatrix}.$$

Вычитая из третьей строки вторую (ведущую) и после этого возвращая ведущей строке её первоначальный вид, получим

$$\begin{pmatrix} cp-ra & cq-rb & 0 & cs-rd \\ za & zb & \mathbf{zc} & zd \\ cx-za & cy-zb & 0 & cu-zd \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} cp-ra & cq-rb & 0 & cs-rd \\ a & b & \mathbf{c} & d \\ cx-za & cy-zb & 0 & cu-zd \end{pmatrix}.$$

Цель достигнута: все элементы ведущего столбца, кроме ведущего элемента, равны нулю. Если все элементы исходной матрицы были целыми числами, то и в процессе вычислений нам не придётся работать с дробями.

8.52. Сформулируем теперь правило, по которому вычисляются элементы преобразованной матрицы:

$$\begin{pmatrix} p & q & r & s \\ a & b & \mathbf{c} & d \\ x & y & z & u \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} cp-ra & cq-rb & 0 & cs-rd \\ a & b & \mathbf{c} & d \\ cx-za & cy-zb & 0 & cu-zd \end{pmatrix}.$$

Например, элемент p превращается в элемент $cp - ra$; отметим участвующие в этом выражении элементы исходной матрицы:

$$\begin{pmatrix} p & q & r & s \\ a & b & \mathbf{c} & d \\ x & y & z & u \end{pmatrix}.$$

Выражение $cp - ra$ представляет собой разность двух выражений: (i) произведения cp ведущего элемента c и преобразуемого элемента p , расположенных в противоположных углах воображаемого прямоугольника, и (ii) произведения ra элементов r и a матрицы, расположенных в двух других противоположных углах того же прямоугольника. Для остальных элементов ситуация аналогична:

$$q \mapsto cq - rb : \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ a & b & \mathbf{c} & d \\ x & y & z & u \end{pmatrix}, \quad s \mapsto cs - rd : \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ a & b & \mathbf{c} & d \\ x & y & z & u \end{pmatrix}.$$

Полученное правило пересчёта элементов будем называть *правилом прямоугольников*; оно может быть сформулировано следующим образом:

- (а) в матрице выбирается ведущий элемент a_t^s ;
- (б) ведущая строка (строка A^s) переписывается без изменений;
- (в) все элементы ведущего столбца (столбца A_t), кроме ведущего элемента, заменяются нулями;
- (г) каждый элемент a_j^i матрицы, не принадлежащий ведущей строке или ведущему столбцу, заменяется на число $a_j^i a_t^s - a_t^i a_j^s$.

Схематическая иллюстрация:

$$\begin{pmatrix} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cdots & a_j^i & \cdots & a_t^i & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cdots & a_j^s & \cdots & a_t^s & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cdots & a_j^i a_t^s - a_t^i a_j^s & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cdots & a_j^s & \cdots & a_t^s & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}.$$

К. Алгоритм Гаусса.

8.53. Алгоритм Гаусса отличается от алгоритма Гаусса—Жордана тем, что при выполнении элементарных преобразований на каждом шаге обращают в нуль не *все* элементы ведущего столбца (за исключением, разумеется, ведущего элемента), а только элементы, лежащие *ниже* ведущего элемента. В результате матрица приводится к так называемому *ступенчатому виду*:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & \cdots & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * & \cdots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & \cdots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.7)$$

Матрица ступенчатого вида имеет следующую структуру:

- (а) все нулевые строки располагаются ниже всех ненулевых;

- (b) ведущий элемент каждой строки располагается строго правее ведущего элемента строки, лежащей выше.

В отличие от определения матрицы упрощённого вида здесь отсутствует требование, чтобы ведущий элемент каждой ненулевой строки был равен единице и являлся единственным ненулевым элементом в своём столбце. Очевидно, объём вычислений при использовании алгоритма Гаусса несколько меньше, чем при использовании алгоритма Гаусса—Жордана, однако он не позволяет непосредственно выписывать решение системы линейных уравнений и указывать линейные зависимости между столбцами матрицы.

Л. Восстановление однородной системы по заданному фундаментальному семейству решений.

8.54. Пусть имеется семейство линейно независимых столбцов $X_1, \dots, X_p \in \mathbb{K}^n$, $p < n$. Требуется составить однородную систему $AX = O$, для которой данный набор столбцов образует фундаментальное семейство решений. (Случай $p = n$ не представляет интереса, поскольку тогда столбцы $X_1, \dots, X_n$ образуют базис в $\mathbb{K}^n$, т.е. любой вектор пространства $\mathbb{K}^n$ удовлетворяет системе и, стало быть, система тривиальна: $A = O$.)

8.55. Число уравнений в искомой системе не может быть менее $n - p$. Действительно, число p столбцов, составляющих ФСР, равно числу *свободных* неизвестных в системе, которое, в свою очередь, равно разности числа n *всех* неизвестных и числа *базисных* неизвестных, равного числу линейно независимых уравнений. Будем искать именно такие *минимальные* системы, т.е. системы, состоящие из $n - p$ линейно независимых уравнений.

8.56. Рассмотрим систему линейно независимых уравнений

$$\underset{m \times n}{A} \underset{n \times 1}{X} = \underset{m \times 1}{O};$$

иными словами, строки матрицы A линейно независимы. Пусть $\Phi = \|X_1, \dots, X_p\|$ — фундаментальная матрица этой системы: столбцы $X_1, \dots, X_p$ линейно независимы и $AX_j = O$ для любого $j = 1, \dots, p$. Последние уравнения можно объединить в матричное уравнение

$$\underset{m \times n}{A} \underset{n \times p}{\Phi} = \underset{m \times p}{O}.$$

Транспонируем обе части это уравнения:

$$\underset{p \times n}{\Phi^T} \underset{n \times m}{A^T} = \underset{p \times m}{O}.$$

Таким образом, столбцы матрицы A^T (т.е. транспонированные строки матрицы A) являются решениями однородной системы

$$\begin{matrix} \Phi^T & Y & = & O. \\ p \times n & n \times 1 & & p \times 1 \end{matrix}$$

Фундаментальное семейство решений этой системы состоит из $n - p \stackrel{\text{def}}{=} m$ столбцов, которые после транспонирования становятся строками основной матрицы A искомой системы $AX = O$.

М. Исторические и терминологические замечания.

8.57. Первое известное упоминание алгоритма Гаусса (см. п. К) содержится в древнекитайском математическом трактате «Математика в девяти книгах», скомпилированном из трудов разных авторов X в. до н. э. — II в. до н. э. Алгоритм Гаусса¹—Жордана² — модификация этого древнего алгоритма, предложенная В. Йорданом.

8.58. В отечественной литературе нет устоявшегося названия для матриц, получаемых в результате применения алгоритма Гаусса или алгоритма Гаусса—Жордана. Для матриц вида (8.7) используются наименования «ступенчатый вид» или «ступенчатый вид по строкам»; в английской литературе используется термин «row echelon form». Матрицы вида (8.6) называют матрицами «упрощённого вида», «приведённого ступенчатого вида» и т. п. («reduced row echelon form»). Сам алгоритм носит название «Gaussian elimination»; его модификация, описанная в п. И, позволяющая избежать появления дробей в преобразовании целочисленных матриц, называют «fraction-free Gaussian elimination».

2. Примеры решения задач

Пример 8.1. Докажите, что линейная оболочка любого семейства векторов $Z_1, \dots, Z_p$ арифметического пространства $\mathbb{K}^n$ является подпространством в $\mathbb{K}^n$.

Решение. Рассмотрим произвольные векторы $X, Y \in L(Z_1, \dots, Z_p)$, составим из них линейную комбинацию $\alpha X + \beta Y$ с произвольными

¹Карл Фридрих Гаусс (Carl Friedrich Gauß; 1777–1855) — великий немецкий математик, механик, физик, астроном, геодезист.

²Вильгельм Йордан (Wilhelm Jordan; 1842–1899) — немецкий геодезист. В русском языке распространена ошибочная транслитерация фамилии («Жордан»). Мари Энмон Камиль Жордан (Marie Ennemond Camille Jordan; 1838–1922) — французский математик; к методу Гаусса—Жордана не имеет отношения.

коэффициентами α и β и убедимся, что она принадлежит линейной оболочке $L(Z_1, \dots, Z_p)$. Действительно,

$$\begin{aligned} X \in L(Z_1, \dots, Z_p) &\iff X = \alpha_1 Z_1 + \dots + \alpha_p Z_p \\ Y \in L(Z_1, \dots, Z_p) &\iff Y = \beta_1 Z_1 + \dots + \beta_p Z_p \end{aligned} \Bigg\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha X + \beta Y = \alpha(\alpha_1 Z_1 + \dots + \alpha_p Z_p) + \beta(\beta_1 Z_1 + \dots + \beta_p Z_p) = \\ = (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)Z_1 + \dots + (\alpha\alpha_p + \beta\beta_p)Z_p \in L(Z_1, \dots, Z_p).$$

Пример 8.2. Решите однородную систему

$$\begin{cases} x^1 + 3x^3 + x^5 = 0, \\ x^2 + 4x^3 + 2x^5 = 0, \\ x^4 + 2x^5 = 0 \end{cases}$$

Решение. Данная система имеет упрощённый вид: базисными неизвестными являются x^1, x^2, x^4 , свободными — x^3, x^5 . Перепишем систему, оставив базисные неизвестные (они выделены) в левых частях уравнений и переноса свободные неизвестные в правые части:

$$\begin{cases} x^1 + 3x^3 + x^5 = 0, \\ x^2 + 4x^3 + 2x^5 = 0, \\ x^4 + 2x^5 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x^1 = -3x^3 - x^5, \\ x^2 = -4x^3 - 2x^5, \\ x^4 = -x^5. \end{cases}$$

Если вместо свободных неизвестных x^3 и x^5 подставлять произвольные числа, $x^3 = c^1$, $x^5 = c^2$, и вычислять x^1, x^2, x^4 по указанным формулам, то получим общее решение системы:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3c^1 - c^2 \\ -4c^1 - 2c^2 \\ c^1 \\ -c^2 \\ c^2 \end{pmatrix} = \underbrace{c^1 \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c^2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{ОРОС}}.$$

Нормальное фундаментальное семейство решений (X_1, X_2) и нормальная фундаментальная матрица Φ данной системы имеют вид

$$X_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь выделены элементы матрицы, в которых находятся значения свободных неизвестных; матрица, составленная из выделенных элементов, является единичной матрицей порядка 2. Общее решение системы представляется через нормальное фундаментальное семейство решений и через нормальную фундаментальную матрицу по формулам

$$X = c^1 X_1 + c^2 X_2 = c^1 \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c^2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \end{pmatrix}.$$

Пример 8.3. Решите неоднородную систему

$$\begin{cases} x^1 + 3x^3 + x^5 = 1, \\ x^2 + 4x^3 + 2x^5 = 2, \\ x^4 + 2x^5 = 3. \end{cases}$$

Решение. Данная система имеет упрощённый вид, базисными неизвестными являются x^1, x^2, x^4 , свободными — x^3, x^5 . Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x^1 + 3x^3 + x^5 = 1, \\ x^2 + 4x^3 + 2x^5 = 2, \\ x^4 + 2x^5 = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x^1 = 1 - 3x^3 - x^5, \\ x^2 = 2 - 4x^3 - 2x^5, \\ x^4 = 3 - x^5; \end{cases}$$

Общее решение системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3c^1 - c^2 \\ 2 - 4c^1 - 2c^2 \\ c^1 \\ 3 - c^2 \\ c^2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{ЧРНС}} + c^1 \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{ОРОС}} + c^2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{ОРОС}}$$

(здесь выделены значения свободных неизвестных). Базисное решение неоднородной системы представляет собой её частное решение, отвечающее нулевым значениям свободных неизвестных.

Пример 8.4. При помощи алгоритма Гаусса—Жордана приведите к упрощённому виду матрицу

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccc} 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{array}.$$

Решение. Шаг 1. В качестве ведущей строки можно выбрать вторую или четвёртую строку; выберем вторую. Ведущий элемент равен 2; делим ведущую строку на 2 и переставляем на первое место:

$$\left(\begin{array}{cccccc} 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ \mathbf{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ \mathbf{3} & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Ведущей строкой теперь является первая строка, а ведущим столбцом — первый столбец.

Обратим в нуль все элементы ведущего (первого) столбца, кроме ведущего элемента; единственный такой элемент — это 3 в четвёртой строке (этот элемент выделен жирным шрифтом). Выполним следующее элементарное преобразование: к четвёртой строке прибавим ведущую (первую), умноженную на (-3) :

$$\left(\begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ \mathbf{3} & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array} \right).$$

Первый столбец полученной матрицы теперь является первым столбцом единичной матрицы порядка 4.

Шаг 2. На втором шаге в качестве ведущей строки можно выбрать вторую, третью или четвёртую строку. Выберем третью, разделим её на ведущий элемент (-1) (он выделен) и переставим на второе место:

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & \mathbf{-1} & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array} \right).$$

Ведущей строкой теперь является вторая строка, а ведущим столбцом — второй столбец.

Обратим в нуль все элементы ведущего (второго) столбца, кроме ведущего элемента (они выделены жирным шрифтом). Выполним следующие элементарные преобразования:

- (а) к первой строке прибавляем ведущую (вторую) строку, умноженную на $(-1/2)$;
- (б) к третьей строке прибавляем ведущую (вторую) строку, умноженную на 2;
- (в) к четвёртой строке прибавляем ведущую (вторую) строку, умноженную на $1/2$.

Результат выполнения:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Второй столбец полученной матрицы теперь является вторым столбцом единичной матрицы порядка 4.

Шаг 3. В качестве ведущей строки можно выбрать только четвёртую строку. Делим её на ведущий элемент $-1/2$ (он выделен) и переставляем на третье место:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ведущей строкой теперь является третья строка, а ведущим столбцом — четвёртый столбец.

Обратим в нуль элементы ведущего (четвёртого) столбца, кроме ведущего элемента (они выделены жирным шрифтом), для чего выполним следующие элементарные преобразования:

- (а) к первой строке прибавим ведущую (третью) строку, умноженную на $-1/2$;
- (б) к первой строке прибавляем ведущую (третью) строку.

Результат выполнения:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Четвёртый столбец полученной матрицы теперь является третьим столбцом единичной матрицы порядка 4.

Ещё один шаг выполнить невозможно, так как четвертую строку нельзя выбрать в качестве ведущей: в ней нет ненулевых элементов. Процедура закончена, а полученная матрица имеет упрощённый вид:

$$A' = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 8.5. Приведите к упрощённому виду матрицу A из примера 8.4, используя при необходимости правило прямоугольников, и решите однородную систему $AX = O$.

Шаг 1. В качестве ведущей выберем вторую строку и переставим её на первое место:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

На первом шаге требуется все элементы ведущего (первого) столбца, кроме самого ведущего элемента, сделать равными нулю. Два из них (во второй и третьей строках) и так равны нулю, поэтому соответствующие строки преобразовывать не требуется (впрочем, можно разделить их на (-2) и (-1) соответственно), а элементы третьей строки преобразуем по правилу прямоугольников (показано вычисление элемента последней строки второго столбца):

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & \mathbf{3 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 3} & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. В качестве ведущей выберем вторую строку. Вычтя из третьей строки матрицы вторую, получим нулевую строку, которую сразу переставим на последнее место:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

На втором шаге нужно обратить в нуль все элементы ведущего (второго) столбца (кроме самого ведущего элемента). В данной ситуации, по-видимому, вместо применения правила прямоугольников удобнее просто ведущую строку вычесть из первой строки и прибавить к третьей:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. В качестве ведущей строки выберем третью; после преобразований получаем

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

в последней матрице выделены базисные столбцы.

Полученная матрица является основной матрицей следующей однородной системы, в которой необходимо оставить базисные неизвестные x^1, x^2, x^4 в левых частях уравнений, а свободные неизвестные x^3, x^5, x^6 перенести в правые части:

$$\begin{cases} x^1 + 2x^3 + x^5 - x^6 = 0 \\ x^2 - 3x^3 - 2x^5 + 3x^6 = 0 \\ x^4 + 2x^5 + 2x^6 = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^1 = -2x^3 - x^5 + x^6 \\ x^2 = 3x^3 + 2x^5 - 3x^6 \\ x^4 = -2x^5 - 2x^6. \end{cases}$$

Придав свободным неизвестным произвольные значения: $x^3 = c^1$, $x^5 = c^2$, $x^6 = c^3$, и выразив значения базисных неизвестных x^1, x^2, x^4 через свободные, запишем ответ (общее решение системы):

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \\ x^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c^1 - c^2 + c^3 \\ 3c^1 + 2c^2 - 3c^3 \\ c^1 \\ -2c^2 - 2c^3 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix} = c^1 \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_1} + c^2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_2} + c^3 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X_3}.$$

Векторы X_1, X_2, X_3 образуют нормальное фундаментальное семейство решений системы, а составленная из них матрица

$$\Phi = \|X_1, X_2, X_3\| = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

является нормальной фундаментальной матрицей. Общее решение системы выражается через неё формулой

$$X = \Phi C,$$

где $C \in \mathbb{K}^3$ — произвольный трёхэлементный столбец.

Пример 8.6. Решите однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 8x^1 - 5x^2 + 3x^3 - 6x^4 = 0, \\ -11x^1 + 8x^2 - 6x^3 + 9x^4 = 0. \end{cases}$$

Запишите фундаментальную совокупность решений и фундаментальную матрицу системы.

Решение. Выпишем основную матрицу системы и приведём её к упрощённому виду при помощи метода Гаусса—Жордана (комментарии опущены, ведущие строки и столбцы выделены):

$$\begin{pmatrix} \boxed{8} & -5 & 3 & -6 \\ -11 & 8 & -6 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & -5 & 3 & -6 \\ 0 & 9 & -15 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & -5 & 3 & -6 \\ 0 & \boxed{3} & -5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 24 & 0 & -16 & -8 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Преобразованная система имеет вид

$$\begin{cases} 3x^1 - 2x^3 - x^4 = 0, \\ 3x^2 - 5x^3 + 2x^4 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^1 = \frac{1}{3}(2x^3 + x^4), \\ x^2 = \frac{1}{3}(5x^3 - 2x^4). \end{cases}$$

Неизвестные x^1 и x^2 являются базисными, x^3 и x^4 — свободными. Придавая свободным неизвестным произвольные значения $x^3 = 3c^1$ и $x^4 = 3c^2$, получаем

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c^1 + c^2 \\ 5c^1 - 2c^2 \\ 3c^1 \\ 3c^2 \end{pmatrix} = c^1 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_1} + c^2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{X_2}.$$

Столбцы $X_1 = (2; 5; 3; 0)^T$ и $X_2 = (1; -2; 0; 3)^T$ образуют фундаментальную совокупность решений (ФСР), т.е. базис в пространстве решений исходной однородной линейной системы: любое решение X системы можно представить в виде $X = c^1 X_1 + c^2 X_2$. Матрица

$$\Phi = \|X_1, X_2\| = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

состоящая из этих столбцов, называется фундаментальной матрицей исходной системы; любое решение системы выражается через фундаментальную матрицу формулой $X = \Phi C$, где $C = (c^1, c^2)^T$ — столбец, состоящий из произвольных постоянных.

Пример 8.7. Решите две неоднородные системы $AX = B_1$ и $AX = B_2$, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 17 & 2 & -8 \\ -3 & 3 & -15 & -2 & 9 \\ 2 & -2 & 10 & 2 & -8 \\ -1 & 1 & -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Поскольку системы имеют одну и ту же основную матрицу, процесс приведения расширенных матриц $\|A \mid B_1\|$ и $\|A \mid B_2\|$ к упрощённому виду методом Гаусса—Жордана можно проводить одновременно (вычисления опущены):

$$\begin{aligned} & \|A \mid B_1 \mid B_2\| = \\ & = \left(\begin{array}{ccccc|c|c} 4 & -3 & 17 & 2 & -8 & -1 & 8 \\ -3 & 3 & -15 & -2 & 9 & 1 & -5 \\ 2 & -2 & 10 & 2 & -8 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -5 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Преобразованная расширенная матрица первой системы и сама система имеют вид

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \begin{cases} x^1 + 2x^3 + x^5 = 0, \\ x^2 - 3x^3 + 2x^5 = 0, \\ x^4 - 3x^5 = 0, \\ 0x^1 + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + 0x^5 = 1; \end{cases}$$

последнее уравнение, а с ним и вся система несовместны. Этот же факт вытекает из теоремы Кронекера—Капелли: ранги основной и расширенной матриц системы не совпадают, $\text{rk } A = 3$, $\text{rk } \|A \mid B_1\| = 4$.

Для второй системы имеем

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad \begin{cases} x^1 & + 2x^3 & + x^5 = 3, \\ & x^2 - 3x^3 & + 2x^5 = 2, \\ & & x^4 - 3x^5 = 1, \\ 0x^1 + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + 0x^5 = 0. \end{cases}$$

В этом случае $\text{rk } A = \text{rk } \|A \mid B_2\| = 3$, так что по теореме Кронекера–Капелли система $AX = B_2$ совместна. Неизвестные x^1, x^2, x^4 являются базисными, x^3, x^5 — свободными. Перепишав систему в виде

$$\begin{cases} x^1 = 3 - 2x^3 - x^5, \\ x^2 = 2 + 3x^3 - 2x^5, \\ x^4 = 1 + 3x^5 \end{cases}$$

и придавая свободным переменным произвольные значения $x^3 = c^1$ и $x^5 = c^2$, получаем выражение для произвольного решения системы $AX = B_2$:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2c^1 - c^2 \\ 2 + 3c^1 - 2c^2 \\ c^1 \\ 1 + 3c^1 \\ c^2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_0} + c^1 \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_1} + c^2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X_2}.$$

Здесь столбец X_0 представляет собой частное решение исходной неоднородной системы $AX = B_2$, соответствующее нулевым значениям свободных неизвестных, а столбцы X_1 и X_2 образуют фундаментальную совокупность решений (ФСР) сопутствующей однородной системы $AX = O$.

Пример 8.8. Составьте однородную систему уравнений, для которой столбцы $X_1 = (1; 2; 3; 4)^T$ и $X_2 = (5; 6; 7; 8)^T$ образуют фундаментальную совокупность решений.

Решение. Если Φ — фундаментальная матрица однородной системы $AX = O$, то выполняется соотношение $A\Phi = O$. Транспонируя это уравнение, получаем $\Phi^T A^T = O^T$; если матрица Φ задана, то $\Phi^T A^T = O^T$ — уравнение для нахождения матрицы A^T : каждый столбец, удовлетворяющий этому матричному уравнению, после транспонирования становится строкой коэффициентов однородного линейного уравнения, которому удовлетворяет каждый столбец матрицы Φ .

Итак, требуется решить однородную систему с матрицей

$$\Phi^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

линейно независимыми решениями однородной системы с такой основной матрицей будут, например, столбцы $(1; -2; 1; 0)^T$ и $(2; -3; 0; 1)^T$. Транспонируя эти столбцы, находим строки матрицы искомой системы и выписываем саму систему:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x^1 - 2x^2 + x^3 = 0, \\ 2x^1 - 3x^2 + x^4 = 0. \end{cases}$$

3. Задачи для самостоятельного решения

8.1. Для следующих однородных систем упрощённого вида укажите базисные и свободные неизвестные, найдите ФСР и запишите общее решение:

$$\begin{array}{ll} \text{(а)} & x^1 + x^2 = 0; \\ \text{(б)} & x^1 + x^2 + x^3 = 0; \\ \text{(в)} & \begin{cases} x^1 + x^3 = 0, \\ x^2 + x^3 = 0; \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(г)} \quad \begin{cases} x^1 + x^3 + x^4 = 0, \\ x^2 + x^3 + x^4 = 0; \end{cases} \\ \text{(д)} \quad \begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 = 0, \\ x^1 - x^2 + x^4 = 0. \end{cases} \end{array}$$

8.2. Для следующих неоднородных систем упрощённого вида укажите базисные и свободные неизвестные, запишите общее решение:

$$\begin{array}{ll} \text{(а)} & x^1 + x^2 = 1; \\ \text{(б)} & x^1 + x^2 + x^3 = 1; \\ \text{(в)} & \begin{cases} x^1 + x^3 = 1, \\ x^2 + x^3 = 2; \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(г)} \quad \begin{cases} x^1 + x^3 + x^4 = 1, \\ x^2 + x^3 + x^4 = 2; \end{cases} \\ \text{(д)} \quad \begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 = 1, \\ x^1 - x^2 + x^4 = 2. \end{cases} \end{array}$$

8.3. Решите следующие однородные системы при помощи алгоритма Гаусса—Жордана:

$$\begin{array}{ll} \text{(а)} & \begin{cases} 2x^1 + x^2 + 3x^3 + 5x^4 = 0, \\ 3x^1 + 2x^2 + 4x^3 + 7x^4 = 0; \end{cases} \\ \text{(б)} & \begin{cases} 2x^1 - x^2 + 8x^3 + 3x^4 + 13x^5 = 0, \\ 2x^2 - 4x^3 + 4x^4 - 4x^5 = 0, \\ 5x^1 + x^2 + 13x^3 - 3x^4 + 8x^5 = 0; \end{cases} \\ \text{(в)} & \begin{cases} 4x^1 - x^2 - 7x^3 + 5x^5 - x^6 + 4x^7 = 0, \\ -2x^1 + 3x^2 + 11x^3 - 3x^4 - 11x^5 - 6x^6 + 4x^7 = 0, \\ x^1 + 2x^2 + 5x^3 + x^4 + x^5 + 5x^6 - x^7 = 0; \end{cases} \end{array}$$

$$(\Gamma) \begin{cases} 2x^1 + x^2 + 4x^3 + x^4 - x^5 + 5x^6 + x^7 = 0, \\ -x^1 + 2x^2 - 7x^3 + 3x^4 + 10x^5 + 2x^6 - 5x^7 = 0, \\ 3x^1 + 9x^3 + x^4 - 4x^5 + 8x^6 + x^7 = 0, \\ 2x^1 - x^2 + 8x^3 + 2x^4 - x^5 + 9x^6 - 3x^7 = 0, \\ 3x^1 + x^2 + 7x^3 + x^4 - 3x^5 + 7x^6 + 2x^7 = 0. \end{cases}$$

8.4. Решите следующие неоднородные системы при помощи алгоритма Гаусса—Жордана (ср. задачу 8.3):

$$(a) \begin{cases} 2x^1 + x^2 + 3x^3 = 5, \\ 3x^1 + 2x^2 + 4x^3 = 7; \end{cases} \quad (б) \begin{cases} 2x^1 - x^2 + 8x^3 + 3x^4 = 13, \\ 2x^2 - 4x^3 + 4x^4 = -4, \\ 5x^1 + x^2 + 13x^3 - 3x^4 = 8; \end{cases}$$

$$(в) \begin{cases} 4x^1 - x^2 - 7x^3 + 5x^5 - x^6 = 4, \\ -2x^1 + 3x^2 + 11x^3 - 3x^4 - 11x^5 - 6x^6 = 4, \\ x^1 + 2x^2 + 5x^3 + x^4 + x^5 + 5x^6 = -1; \end{cases}$$

$$(\Gamma) \begin{cases} 2x^1 + x^2 + 4x^3 + x^4 - x^5 + 5x^6 = 1, \\ -x^1 + 2x^2 - 7x^3 + 3x^4 + 10x^5 + 2x^6 = -5, \\ 3x^1 + 9x^3 + x^4 - 4x^5 + 8x^6 = 1, \\ 2x^1 - x^2 + 8x^3 + 2x^4 - x^5 + 9x^6 = -3, \\ 3x^1 + x^2 + 7x^3 + x^4 - 3x^5 + 7x^6 = 2. \end{cases}$$

8.5. При помощи метода Гаусса—Жордана решите однородные системы уравнений, заданные основными матрицами:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 & -5 & -6 & -10 \\ -2 & 5 & 16 & 12 & 15 & 24 \\ -5 & 12 & 39 & 30 & 37 & 59 \\ 6 & -15 & -48 & -38 & -47 & -74 \end{pmatrix}; \quad (б) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & -1 & 4 & -7 & -10 & -13 \\ -1 & -2 & 3 & -4 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Запишите фундаментальную систему решений, фундаментальную матрицу и формулу, выражающую произвольное решение через фундаментальную матрицу.

8.6. Дана блочная матрица $\|A \mid B_1 \mid B_2\|$. При помощи метода Гаусса—Жордана решите две неоднородные системы $AX = B_1$ и $AX = B_2$.

$$\|A \mid B_1 \mid B_2\| = \left(\begin{array}{ccccc|c|c} 1 & 2 & 4 & 2 & -3 & 3 & 24 \\ 2 & 5 & 11 & 5 & -7 & 8 & 57 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & -5 & 3 & 28 \\ 2 & 5 & 11 & 5 & -7 & 9 & 57 \end{array} \right).$$

8.7. Составьте однородную систему уравнений, для которой заданные столбцы образуют фундаментальную совокупность решений:

-
- (а) $X_1 = (3; -5; 1; -2; 1; 1)^T$, $X_2 = (3; -7; -1; -1; -1; 5)^T$;
(б) $Y_1 = (1; -7; -1; -1; -5; -1)^T$, $Y_2 = (3; -5; 1; 1; -3; 1)^T$.

ГЛАВА 9

Применения алгоритма Гаусса—Жордана

1. Основные понятия и факты

А. Связь элементарных преобразований строк и операции умножения матриц.

9.1. Предложение. Пусть A — некоторая матрица, $R(A)$ — матрица, полученная из A элементарными преобразованиями строк R . Тогда

$$R(A) = R(\mathbf{1}) \cdot A,$$

где $\mathbf{1}$ — единичная матрица, $R(\mathbf{1})$ — матрица, полученная из единичной с помощью тех же самых элементарных преобразований строк R . Матрица $R(\mathbf{1})$, называемая матрицей элементарных преобразований, обратима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При умножении матриц каждый столбец матрицы-произведения равен произведению матрицы-первого сомножителя на соответствующий столбец матрицы-второго сомножителя (см. теорему 5.32, с. 79), поэтому достаточно проверить утверждение теоремы для матрицы A , состоящей из одного столбца.

9.2. Пусть R — перестановка строк с номерами s и t . Применяя это преобразование к единичной матрице, получаем матрицу элементарного преобразования

$$R(\mathbf{1}) = R \left(\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \mathbf{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \mathbf{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножая эту матрицу на столбец A , находим

$$R(\mathbf{1}) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \mathbf{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^s \\ \vdots \\ a^t \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^t \\ \vdots \\ a^s \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} = R(A).$$

Обратимость матрицы $R(\mathbf{1})$ элементарного преобразования очевидна: обратная матрица, осуществляющая обратное элементарное преобразование, совпадает с исходной (т.е. является *инволюцией*).

9.3. Пусть R — элементарное преобразование, состоящее в умножении строки с номером s на число $\lambda \neq 0$. Применяя это преобразование к единичной матрице, получим матрицу элементарного преобразования

$$R(\mathbf{1}) = R \left(\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножая эту матрицу на столбец A , находим:

$$R(\mathbf{1}) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^s \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ \lambda a^s \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} = R(A).$$

Обратимость матрицы $R(\mathbf{1})$ элементарного преобразования здесь также очевидна:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1/\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

9.4. Наконец, рассмотрим элементарное преобразование, состоящее в прибавлении строки с номером s , умноженной на число λ , к

строке с номером t (для определённости рассмотрим случай $s < t$):

$$\begin{aligned}
 R(\mathbf{1}) &= R \left(\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \boxed{1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \boxed{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \boxed{1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \boxed{\lambda} & \cdots & \boxed{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \\
 R(\mathbf{1}) \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \boxed{1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \boxed{\lambda} & \cdots & \boxed{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^s \\ \vdots \\ a^t \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^s \\ \vdots \\ \boxed{\lambda a^s + a^t} \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} = R(A).
 \end{aligned}$$

Обратное преобразование состоит в вычитании умноженной на λ строки с номером s из строки с номером t ; этому преобразованию соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \boxed{1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \boxed{-\lambda} & \cdots & \boxed{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

9.5. Если несколько элементарных преобразований выполняются последовательно, то утверждение теоремы также остаётся верным. Действительно, пусть R_1 и R_2 — два элементарных преобразования, $R_2 \circ R_1$ — их композиция (сначала выполняется R_1 , затем R_2). Тогда

$$\begin{aligned}
 (R_2 \circ R_1)(A) &= R_2(R_1(A)) = R_2(\mathbf{1}) \cdot R_1(A) = \\
 &= R_2(\mathbf{1}) \cdot (R_1(\mathbf{1}) \cdot A) = (R_2(\mathbf{1}) \cdot R_1(\mathbf{1})) \cdot A = \\
 &= R_2(R_1(\mathbf{1})) \cdot A = (R_2 \circ R_1)(\mathbf{1}) \cdot A.
 \end{aligned}$$

Итак, любая композиция элементарных преобразований строк матрицы эквивалентна умножению этой матрицы слева на некоторую обратимую квадратную матрицу. Предложение 9.1 доказано. $\square$

Б. Сохранение линейной зависимости и независимости столбцов матрицы при элементарных преобразованиях строк.

9.6. Предложение. Пусть матрица A' получена из матрицы A элементарными преобразованиями строк.

- (i) Если столбцы матрицы A линейно независимы, то столбцы матрицы A' также линейно независимы.
- (ii) Если между столбцами матрицы A имеется линейная зависимость

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_n A_n = O,$$

то столбцы матрицы A' связаны такой же линейной зависимостью:

$$\alpha_1 A'_1 + \alpha_2 A'_2 + \cdots + \alpha_n A'_n = O.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначив через C матрицу выполненных элементарных преобразований, можем записать $A'_j = CA_j$. Отметим, что матрица C обратима (см. предложение 9.1).

1. Пусть столбцы $A_1, \dots, A_n$ матрицы A линейно независимы. Предположим, что столбцы преобразованной матрицы A' , напротив, линейно зависимы, т.е. существуют такие коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, среди которых имеется хотя бы один ненулевой, что

$$\alpha_1 A'_1 + \alpha_2 A'_2 + \cdots + \alpha_n A'_n = O.$$

Заменяя A'_j на CA_j и вынося за скобки матрицу C , получаем

$$\alpha_1 CA_1 + \alpha_2 CA_2 + \cdots + \alpha_n CA_n = O$$

т.е.

$$C(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_n A_n) = O.$$

Умножая обе части равенства слева на C^{-1} , находим

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_n A_n = O,$$

что означает линейную зависимость столбцов матрицы A ; противоречие.

2. Умножая слева на C обе части равенства

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_n A_n = O$$

и замечая, что $CA_j = A'_j$, получаем

$$\alpha_1 A'_1 + \alpha_2 A'_2 + \cdots + \alpha_n A'_n = O.$$

$\square$

Так как все элементарные преобразования обратимы, то имеет место также и обратное вложение

$$L(A^1, A^2, \dots, A^m) \subset L(A'^1, A'^2, \dots, A'^m),$$

откуда и следует требуемое равенство линейных оболочек, а следовательно, и равенство их размерностей. $\square$

9.9. Обратите внимание, что после выполнения элементарных преобразований строк матрицы линейная оболочка столбцов изменяется, но сохраняются номера базисных столбцов. Напротив, линейная оболочка строк остаётся неизменной, но номера базисных строк преобразованной матрицы не совпадают, вообще говоря, с номерами базисных строк исходной матрицы.

9.10. До настоящего момента термины «базисный столбец» и «базисная строка» означали строки и столбцы специального вида, образующиеся при приведении матрицы к упрощённому виду (см. определение на с. 17). Теперь становится понятным, что *базисные строки и столбцы матрицы образуют соответственно базисы в линейных оболочках строк и столбцов*, чем и объясняется их название.

9.11. Предположим без ограничения общности, что базисными столбцами матрицы $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ являются первые r столбцов $A_1, \dots, A_r$, а остальные столбцы суть их линейные комбинации:

$$A_k \in L(A_1, \dots, A_r), \quad k = \overline{r+1, n}.$$

Тогда в силу транзитивности линейной комбинации

$$L(A_1, \dots, A_r, A_{r+1}, \dots, A_n) = L(A_1, \dots, A_r).$$

Эта линейная оболочка является образом матричного линейного оператора $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$, порождённого матрицей A (см. пп. 8.9–8.13), так что столбцы $A_1, \dots, A_r$ образуют базис в подпространстве $\text{im } A \in \mathbb{K}^m$.

Г. Ранг матрицы.

9.12. Теорема. Для любой матрицы $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ размерность линейной оболочки её столбцов равна размерности линейной оболочки строк:

$$\dim L(A_1, A_2, \dots, A_n) = \dim L(A^1, A^2, \dots, A^m);$$

эта размерность называется *рангом матрицы* и обозначается $\text{rk } A$, $\text{rank } A$, $\text{rang } A$, $r(A)$ и т. п.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведём матрицу A к упрощённому виду при помощи алгоритма Гаусса—Жордана:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & * & 0 & * & 0 & * & \cdots & 0 & * & * \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & * & 0 & * & \cdots & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & * & \cdots & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{1} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, количество базисных строк (равное максимальному количеству линейно независимых строк матрицы, т.е. размерности линейной оболочки строк) совпадает с количеством базисных столбцов, что и требовалось. $\square$

9.13. Если $\mathbf{A} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ — матричный линейный оператор, порождённый матрицей $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, то в силу факта, установленного в п. 9.11,

$$\dim \operatorname{im} \mathbf{A} = \operatorname{rk} A.$$

9.14. Множество решений однородной линейной системы $AX = O$, где $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, представляет собой ядро матричного линейного оператора $\mathbf{A} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$. В процессе решения системы по методу Гаусса—Жордана производится разделение неизвестных $x^1, \dots, x^n$ (компонент искомого столбца X) на базисные и свободные. Количество базисных неизвестных, т.е. количество базисных столбцов матрицы A (см. п. 9.10) равно её рангу $r = \operatorname{rk} A$, поэтому количество свободных неизвестных равно $n - r$, а это число есть не что иное, как количество столбцов, образующих ФСР системы $AX = O$, т.е. размерность ядра $\ker \mathbf{A}$:

$$\dim \ker \mathbf{A} = n - \operatorname{rk} A.$$

Итак, для матричного линейного оператора $\mathbf{A} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ имеем

$$\dim \operatorname{im} \mathbf{A} + \dim \ker \mathbf{A} = n. \quad (9.1)$$

9.15. Для нахождения ранга матрицы можно использовать как алгоритм Гаусса—Жордана, так и алгоритм Гаусса. При использовании первого из них получаем не только значение ранга, но и линейные зависимости между столбцами, т.е. номера базисных столбцов и разложения всех остальных столбцов в линейные комбинации базисных столбцов. При использовании алгоритма Гаусса можно найти лишь номера базисных столбцов матрицы и их количество, но разложение каждого столбца в линейную комбинацию базисных столбцов останется неизвестным.

Д. Совместность неоднородных систем.

9.16. Теорема (теорема Кронекера—Капелли¹). *Неоднородная система $AX = B$ совместна тогда и только тогда, когда ранги её основной и расширенной матриц совпадают:*

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \|A \mid B\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку линейная оболочка столбцов основной матрицы системы содержится в линейной оболочке столбцов расширенной матрицы, $L(A_1, \dots, A_n) \subset L(A_1, \dots, A_n, B)$, имеем неравенство $\operatorname{rk} A \leq \operatorname{rk} \|A \mid B\|$, справедливое для любой системы (совместной или несовместной).

Согласно п. 8.31 совместность рассматриваемой системы эквивалентна тому факту, что

$$B \in \operatorname{im} A = L(A_1, \dots, A_n) \iff L(A_1, \dots, A_n, B) \subset L(A_1, \dots, A_n)$$

и потому $\operatorname{rk} \|A \mid B\| \leq \operatorname{rk} A$. Таким образом, для совместных систем и только для них $\operatorname{rk} \|A \mid B\| = \operatorname{rk} A$. $\square$

9.17. При решении неоднородных систем методом Гаусса—Жордана использовать теорему Кронекера—Капелли нет необходимости, поскольку из упрощённого вида матрицы системы факт совместности или несовместности системы очевиден. У несовместных систем несовпадение рангов основной и расширенной матриц проявляется в появлении строк вида $(0, 0, \dots, 0, 1)$, отвечающих несовместным уравнениям $0 \cdot x^1 + \dots + 0 \cdot x^n = 1$.

Е. Ранг произведения матриц.

9.18. Предложение. *Если существует произведение матриц A и B , то*

$$\operatorname{rk}(AB) \leq \operatorname{rk} A, \quad \operatorname{rk}(AB) \leq \operatorname{rk} B, \quad (9.2)$$

¹Альфредо Капелли (Alfredo Capelli; 1855–1910) — итальянский математик.

т.е. ранг произведения матриц не превышает ранга каждого из сомножителей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое неравенство. Столбцы матрицы

$$C = \begin{matrix} & A & B \\ m \times s & m \times n & n \times s \end{matrix}$$

суть линейные комбинации столбцов матрицы A (см. теорему 5.32, с. 79), так что в силу транзитивности линейной комбинации

$$L(C_1, C_2, \dots, C_s) \subset L(A_1, A_2, \dots, A_n)$$

и поэтому

$$\dim L(C_1, C_2, \dots, C_s) \leq \dim L(A_1, A_2, \dots, A_n). \quad \square$$

Ж. Вычисление обратной матрицы.

9.19. Алгоритм Гаусса—Жордана доставляет удобный метод вычисления обратной матрицы. Действительно, если при помощи элементарных преобразований строк привести данную квадратную матрицу A к единичной матрице, то, в силу предложения 9.1 матрицей преобразования будет A^{-1} . На практике удобно поступить следующим образом: составить блочную матрицу $\|A \mid \mathbf{1}\|$ и элементарными преобразованиями строк привести её левый блок к единичной матрице; тогда в правом блоке образуется матрица A^{-1} :

$$\|A \mid \mathbf{1}\| \xrightarrow[\text{строк}]{\text{эл. преобр.}} \|\mathbf{1} \mid A^{-1}\|.$$

Может оказаться, что приведение левого блока (т.е. матрицы A) к единичной матрице невозможно (т.е. столбцы матрицы линейно зависимы); это означает, что матрица A не имеет обратной. Это явление будет объяснено в теореме ?? (см. с. ??).

9.20. Аналогичную методику можно использовать для вычисления матрицы $A^{-1}B$:

$$\|A \mid B\| \xrightarrow[\text{строк}]{\text{эл. преобр.}} \|\mathbf{1} \mid A^{-1}B\|.$$

9.21. В частном случае, когда B — столбец, описанный в п. 9.20 алгоритм есть не что иное, как нахождение решения $X = A^{-1}B$ неоднородной системы $AX = B$ методом Гаусса—Жордана.

9.22. Если требуется найти матрицу BA^{-1} , можно подобным образом использовать элементарные преобразования столбцов, однако на практике поступают следующим образом:

$$\left\| \begin{array}{c|c} A^T & B^T \end{array} \right\| \xrightarrow[\text{строк}]{\text{эл. преобр.}} \left\| \begin{array}{c|c} \mathbf{1} & (A^T)^{-1}B^T \end{array} \right\| \xrightarrow[\text{рование}]{\text{транспони-}} \left((A^T)^{-1}B^T \right)^T = BA^{-1}.$$

2. Примеры решения задач

Пример 9.1. Для матрицы из примера 8.4 укажите базисные столбцы и линейные зависимости между столбцами, найдите ранг:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица была приведена к упрощённому виду в примерах 8.4 и 8.5:

$$A' = \begin{pmatrix} A'_1 & A'_2 & A'_3 & A'_4 & A'_5 & A'_6 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Её первый, второй и четвёртый столбцы (A'_1, A'_2, A'_4) являются базисными (они представляют соответственно собой первый, второй и третий столбцы единичной матрицы размера порядка 4), а остальные столбцы являются линейными комбинациями базисных:

$$\begin{aligned} A'_3 &= 2A'_1 - 3A'_2, \\ A'_5 &= A'_1 - 2A'_2 + 2A'_4, \\ A'_6 &= -A'_1 + 3A'_2 + 2A'_4. \end{aligned}$$

Коэффициенты этих линейных комбинаций суть элементы соответствующих столбцов преобразованной матрицы.

В силу предложения 9.6 (см. с. 39) указанные зависимости имеют место не только для столбцов преобразованной матрицы, но и для столбцов исходной:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2A_1 - 3A_2,$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A_1 - 2A_2 + A_4,$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -A_1 + 3A_2 + 2A_4.$$

Ранг матрицы A (как и ранг матрицы A') равен количеству её линейно независимых столбцов: $\text{rk } A = \text{rk } A' = 3$.

Пример 9.2. Для линейного оператора $A : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^4$, заданного формулой $X \mapsto Y = AX$, где A — матрица из примера 9.1, найдите ядро $\ker A$ и образ $\text{im } A$.

Решение. Ядро $\ker A$ оператора — это подпространство, состоящее из всех векторов, удовлетворяющих условию $AX = O$, т.е. множество решений однородной системы; оно было найдено в примере 8.5:

$$\ker A = L \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \in \mathbb{R}^6; \quad \dim \ker A = 3.$$

Образ $\text{im } A$ оператора — это подпространство, представляющее собой линейную оболочку столбцов матрицы A :

$$\text{im } A = L(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6).$$

В примере 9.1 было установлено, что столбцы матрицы A линейно зависимы, а в качестве базиса в линейной оболочке $L(A_1, \dots, A_6)$ можно взять векторы A_1, A_2, A_4 . Таким образом,

$$\text{im } A = L \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \in \mathbb{R}^4, \quad \dim \text{im } A = 3.$$

В соответствии с формулой (9.1) имеем $\dim \text{im } A + \dim \ker A = 3 + 3 = 6$.

Пример 9.3. Методом элементарных преобразований строк (методом Гаусса—Жордана) найдите обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 3 & -8 & -12 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим блочную матрицу $\|A \mid I\|$, где I — единичная матрица, и при помощи элементарных преобразований (используем метод прямоугольников) строк добьёмся того, чтобы в левом блоке образовалась единичная матрица; тогда в правом блоке образуется обратная матрица A^{-1} :

$$\begin{aligned} \|A \mid I\| &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -8 & -12 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 2 & 1 \end{array} \right) = \|I \mid A^{-1}\|. \end{aligned}$$

Итак,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 12 & -3 & -2 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 9.4. Для данных матриц A и B найдите $A^{-1}B$ и BA^{-1} , не вычисляя отдельно A^{-1} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 3 & -8 & -12 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для вычисления $A^{-1}B$ составим блочную матрицу $\|A \mid B\|$ и при помощи элементарных преобразований строк добьёмся того, чтобы в левом блоке образовалась единичная матрица: $\|A \mid B\| \rightarrow \|I \mid A^{-1}B\|$; тогда в правом блоке образуется матрица $A^{-1}B$:

$$\begin{aligned} \|A \mid B\| &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -4 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -8 & -12 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 8 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -14 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 8 & 5 \end{array} \right) = \|I \mid A^{-1}B\|. \end{aligned}$$

Итак,

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -4 \\ -5 & -14 & -9 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления BA^{-1} заметим, что $(BA^{-1})^T = (A^T)^{-1}B^T$; поэтому применим только что использованный алгоритм к матрицам A^T и B^T : записав блочную матрицу $\|A^T \mid B^T\|$ и получив при помощи элементарных преобразований единичную матрицу в левом блоке,

найдем в правом блоке матрицу $(A^T)^{-1}B^T$; останется лишь транспонировать результат:

$$\begin{aligned} \|A^T \mid B^T\| &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -8 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & -12 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 7 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 11 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right) = \|I \mid (A^T)^{-1}B^T\|, \end{aligned}$$

так что

$$BA^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 11 & -2 & -2 \\ 16 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Задачи для самостоятельного решения

9.1. При помощи метода Гаусса—Жордана для каждой из заданных матриц (см. задачу 8.5) установите линейные зависимости между столбцами, и укажите базис в линейной оболочке столбцов, найдите ранг:

$$(a) \left(\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & -7 & -5 & -6 & -10 \\ -2 & 5 & 16 & 12 & 15 & 24 \\ -5 & 12 & 39 & 30 & 37 & 59 \\ 6 & -15 & -48 & -38 & -47 & -74 \end{array} \right); \quad (б) \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & -1 & 4 & -7 & -10 & -13 \\ -1 & -2 & 3 & -4 & -5 & -6 \end{array} \right).$$

Укажите базисы в ядре и образе матричных операторов, заданных этими матрицами. Проверьте выполнение соотношения (9.1).

9.2. Для данных матриц найдите обратные методом элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.3. Для матриц A и B из задачи 9.2 найдите матрицы $A^{-1}B$, BA^{-1} двумя способами: (1) перемножая нужные сомножители и (2) не используя отдельно вычисленную матрицу A^{-1} (ср. пример 9.4). Найдите матрицы $B^{-1}A$, AB^{-1} тремя способами: (1) перемножая нужные сомножители, (2) не используя отдельно вычисленную матрицу B^{-1} и (3) обращая матрицы $A^{-1}B$, BA^{-1} .

9.4. Для данных матриц найдите обратные методом элементарных преобразований:

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad (б) \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.5. Пусть X_0, Y_0 — решения систем $AX = B$ и $AY = C$ соответственно, β, γ — некоторые числа. Какой системе удовлетворяет $Z = \beta X_0 + \gamma Y_0$?

9.6. Столбцы $X_1, \dots, X_k$ являются решениями неоднородной системы $AX = B$. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты линейной комбинации $X = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k$, чтобы эта комбинация была решением системы (а) $AX = B$; (б) $AX = O$?

9.7 (y). Докажите, что система $AX = B$ совместна при любой правой части тогда и только тогда, когда строки её основной матрицы линейно независимы.

9.8. Пусть $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ и $C \in \mathbb{K}^{1 \times n}$. Докажите, что системы $AX = O$ и $\begin{cases} AX = O \\ CX = 0 \end{cases}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда вектор-строка C линейно выражается через строки матрицы A .

ГЛАВА 10

Векторные пространства. I

1. Основные понятия и факты

Теория изложена в главе 5 лекционного курса.

2. Примеры решения задач

Пример 10.1. Докажите, что множество $\mathbb{C}^n$, элементами которого являются n -компонентные комплекснозначные столбцы вида

$$Z = \begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 + iy^1 \\ \vdots \\ x^n + iy^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = X + iY$$

образует векторное пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ относительно следующих операций:

$$\begin{pmatrix} z_1^1 \\ \vdots \\ z_1^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_2^1 \\ \vdots \\ z_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^1 + z_2^1 \\ \vdots \\ z_1^n + z_2^n \end{pmatrix}, \quad \alpha \cdot \begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z^1 \\ \vdots \\ \alpha z^n \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Укажите какой-либо базис и найдите размерность этого векторного пространства, обозначаемого символом $\mathbb{C}^n(\mathbb{R})$.

Решение. В рассматриваемом примере при образовании линейных комбинаций в качестве числовых коэффициентов разрешены лишь вещественные числа, поэтому векторы стандартного базиса пространства $\mathbb{C}^n$, т.е.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

не образуют базиса. Добавив к указанным векторам ещё векторы

$$\mathbf{e}_{-1} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{-2} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_{-n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ i \end{pmatrix}$$

(для их обозначения мы используем отрицательные целые числа, однако можно использовать и другие способы нумерации), убеждаемся, что любой вектор с комплексными компонентами можно представить в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{-1}, \dots, \mathbf{e}_{-n}$:

$$\begin{pmatrix} x^1 + iy^1 \\ \vdots \\ x^n + iy^n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n x^k \mathbf{e}_k + \sum_{k=1}^n y^k \mathbf{e}_{-k}.$$

Линейная независимость семейства векторов $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{-1}, \dots, \mathbf{e}_{-n}$ очевидна, а их количество $2n$ равно размерности рассматриваемого векторного пространства: $\dim \mathbb{C}^n(\mathbb{R}) = 2n$.

В частности, поле $\mathbb{C}$ можно рассматривать как двумерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, естественным базисом в котором являются элементы 1 и i .

Пример 10.2. Докажите, что векторное пространство $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ над полем рациональных чисел, векторами которого являются вещественные числа, бесконечномерно.

Решение. Предположим, что $\dim \mathbb{R}(\mathbb{Q}) = n$; это означает, что в $\mathbb{R}$ найдётся n -элементный базис, т.е. такой упорядоченный набор векторов (вещественных чисел) $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, что любой вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ допускает разложение $\mathbf{x} = x^k \mathbf{e}_k$ (суммирование по $k = 1, \dots, n$). Поэтому пространство $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ изоморфно пространству столбцов $\mathbb{Q}^n$. Однако это невозможно, так как множество $\mathbb{Q}^n$ счётно, а $\mathbb{R}$ имеет мощность континуума, т.е. между ними не существует взаимно однозначного соответствия.

Пример 10.3. Докажите, что множество $\mathbb{R}_{>0}$ положительных вещественных чисел является векторным пространством над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел относительно следующих двух операций: «сложения» $\mathbf{x} \boxplus \mathbf{y} \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot y$ (т.е. обычное умножение x и y) и «умножения на вещественное число» $\alpha \boxtimes \mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} x^\alpha$ (возведение в степень); здесь мы обозначаем положительное вещественное число x символом $\mathbf{x}$, если требуется трактовать его как элемент векторного пространства.

Решение. Проверим выполнение аксиом векторного пространства.

ВП1 (коммутативность «сложения»):

$$\mathbf{x} \boxplus \mathbf{y} \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot y = y \cdot x = \mathbf{y} \boxplus \mathbf{x};$$

ВП2 (ассоциативность «сложения»):

$$(\mathbf{x} \boxplus \mathbf{y}) \boxplus \mathbf{z} \stackrel{\text{def}}{=} (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = \mathbf{x} \boxplus (\mathbf{y} \boxplus \mathbf{z});$$

ВП3 (существование нулевого вектора): нулевым вектором $\mathbf{0}$ служит вещественное число 1, поскольку

$$\mathbf{0} \boxplus \mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} 1 \cdot x = x = \mathbf{x};$$

ВП4 (существование противоположного вектора): для каждого вектора $\mathbf{x} = x$ противоположным является вектор $-\mathbf{x} = 1/x$; действительно,

$$\mathbf{x} \boxplus (-\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot \frac{1}{x} = 1 = \mathbf{0};$$

ВП5 (свойство единицы):

$$1 \boxtimes \mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} x^1 = x = \mathbf{x};$$

ВП6 («ассоциативность» «умножения на число»):

$$(\alpha \cdot \beta) \boxtimes \mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} x^{\alpha\beta} = (x^\beta)^\alpha = \alpha \boxtimes (\beta \boxtimes \mathbf{x});$$

ВП7 (дистрибутивность «умножения вектора на число» относительно «сложения» векторов):

$$\alpha \boxtimes (\mathbf{x} \boxplus \mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} (xy)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha = (\alpha \boxtimes \mathbf{x}) \boxplus (\alpha \boxtimes \mathbf{y});$$

ВП8 (дистрибутивность «умножения вектора на число» относительно сложения чисел):

$$(\alpha + \beta) \boxtimes \mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \cdot x^\beta = (\alpha \boxtimes \mathbf{x}) \boxplus (\beta \boxtimes \mathbf{x}).$$

Пример 10.4. Докажите, что в векторном пространстве $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ вещественных квадратных (2×2) -матриц элементы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

образуют базис и разложите по этому базису элемент

$$X = \begin{pmatrix} 16 & 11 \\ 18 & -20 \end{pmatrix}.$$

Решение. Векторное пространство $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ изоморфно арифметическому пространству $\mathbb{R}^4$. Рассмотрим какой-нибудь изоморфизм, например,

$$F: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix},$$

и образы $F(A_1)$, $F(A_2)$, $F(A_3)$, $F(A_4)$, $F(X)$ заданных в условии матриц:

$$\begin{aligned} F(A_1) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, & F(A_2) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ F(A_3) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, & F(A_4) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, & F(X) &= \begin{pmatrix} 16 \\ 11 \\ 18 \\ -20 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для анализа линейной зависимости столбцов $F(A_1)$, $F(A_2)$, $F(A_3)$, $F(A_4)$ и разложения $F(X)$ в их линейную комбинацию составим из указанных столбцов матрицу и приведём её к упрощённому виду методом Гаусса—Жордана:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -1 & 3 & 16 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 11 \\ -1 & 3 & 3 & 1 & 18 \\ 2 & -1 & -4 & -2 & -20 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right).$$

Отсюда ясно, что элементы $F(A_1)$, $F(A_2)$, $F(A_3)$, $F(A_4) \in \mathbb{R}^4$ (а вместе с ними и элементы $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$) линейно независимы и — поскольку их количество равно $4 = \dim \mathbb{R}^4 = \dim \mathbb{R}^{2 \times 2}$ — образуют базисы в пространствах $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ соответственно; элементы $F(X) \in \mathbb{R}^4$ и $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ разлагаются по указанным базисам следующим образом:

$$\begin{aligned} F(X) &= F(A_1) + 2F(A_2) + 3F(A_3) + 4F(A_4), \\ X &= A_1 + 2A_2 + 3A_3 + 4A_4, \end{aligned}$$

Пример 10.5. В арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы элементы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$. Найдите базис в линейной оболочке $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$, дополните его векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ стандартного базиса пространства $\mathbb{R}^4$ до базиса пространства $\mathbb{R}^4$ и разложите

векторы стандартного базиса по построенному базису:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Приведём к упрощённому виду матрицу, столбцами которой являются заданные элементы и элементы стандартного базиса пространства $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{a}'_1 & \mathbf{a}'_2 & \mathbf{a}'_3 & \mathbf{a}'_4 & \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_3 & \mathbf{e}'_4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Базис в линейной оболочке $L(\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \mathbf{a}'_3, \mathbf{a}'_4)$ образуют столбцы $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2$; столбцы $\mathbf{a}'_3$ и $\mathbf{a}'_4$ выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'_3 &= 2\mathbf{a}'_1 + \mathbf{a}'_2, \\ \mathbf{a}'_4 &= 2\mathbf{a}'_1 - \mathbf{a}'_2 \end{aligned} \Rightarrow L(\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \mathbf{a}'_3, \mathbf{a}'_4) = L(\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2).$$

Поэтому базис в линейной оболочке $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$ образуют столбцы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$; столбцы $\mathbf{a}_3$ и $\mathbf{a}_4$ выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_3 &= 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \\ \mathbf{a}_4 &= 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 \end{aligned} \Rightarrow L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2).$$

Базис в $\mathbb{R}^4$ может быть получен пополнением базиса $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ линейной оболочки $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$ векторами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$; при этом

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 - 3\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_4 = \mathbf{a}_2 - 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2.$$

Пример 10.6. Докажите, что каждая из двух упорядоченных пар векторов $\mathbf{E} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ и $\mathbf{F} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$, где

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \\ 1 \\ 18 \end{pmatrix},$$

является базисом в линейной оболочке $\mathcal{P} = L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \in \mathbb{R}^4$. Найдите матрицы перехода от базиса $\mathbf{E}$ к базису $\mathbf{F}$ и от базиса $\mathbf{F}$ к базису $\mathbf{E}$.

Решение. Составим из данных столбцов матрицу $X = \|\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\|$ и приведем ее к упрощенному виду методом Гаусса—Жордана (вычисления опускаем):

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 11 & 15 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 13 & 18 \end{pmatrix} \rightarrow X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в матрице X' первые два столбца — базисные, а третий и четвертый являются их линейными комбинациями; такие же факты имеют место для столбцов матрицы X :

$$\mathbf{b}_1 = 3\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2, \quad \mathbf{b}_2 = 4\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2.$$

Поскольку $\text{rk } X = \text{rk } X' = \dim \mathcal{P} = 2$, упорядоченная пара линейно независимых векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ образует базис в $\mathcal{P}$. Чтобы проверить, что упорядоченная пара векторов $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ также является базисом в $\mathcal{P}$, достаточно убедиться в их линейной независимости (так как их количество — два — равно размерности рассматриваемой линейной оболочки). Столбцы координат B_1 и B_2 векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ в базисе $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ равны

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix};$$

линейную независимость этих столбцов (а следовательно, и линейную независимость самих векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$) проще всего проверить с помощью определителя:

$$\det \|B_1, B_2\| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Согласно определению матрица $C = \|B_1, B_2\|$ является матрицей перехода от базиса $\mathbf{E} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ к базису $\mathbf{F} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$: $\mathbf{F} = \mathbf{E}C$; это легко проверить вычислением:

$$\mathbf{E}C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 15 \\ 1 & 1 \\ 13 & 18 \end{pmatrix} = \|\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\|.$$

Матрица перехода от базиса $\mathbf{F} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ к базису $\mathbf{E} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ получается обращением матрицы C : $\mathbf{E} = \mathbf{F}C^{-1}$; имеем

$$\det C = 1, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Аналогичные результаты получаются, если начинать не с векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, а с векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$: приводя к упрощенному виду матрицу

$Y = \|\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\|$, находим

$$Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 11 & 15 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 13 & 18 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

т.е. линейно независимая пара $\mathbf{F} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ является базисом в cP , пара $\mathbf{E} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, будучи линейно независимой (линейная независимость проверяется, как и выше, при помощи определителя, составленного из столбцов координат векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ в базисе $\mathbf{F}$), также является базисом в $\mathcal{P}$, причем матрица перехода от базиса $\mathbf{F}$ к базису $\mathbf{E}$ равна C^{-1} (см. выше).

Пример 10.7. В пространстве $S\mathbb{R}^{3 \times 3}$ вещественных симметричных (3×3) -матриц заданы элементы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Достройте это семейство матриц до базиса в пространстве $S\mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Решение. Пространство $S\mathbb{R}^{3 \times 3}$ вещественных симметричных (3×3) -матриц имеет размерность 6 и поэтому изоморфно вещественному арифметическому пространству $\mathbb{R}^6$; рассмотрим, например, изоморфизм

$$F : S\mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^6, \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & f \\ c & f & g \end{pmatrix} \mapsto (a, b, c, d, f, g)^T.$$

Образами заданных в условии матриц являются столбцы

$$\mathbf{a}_1 = F(A_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = F(A_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = F(A_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Самый простой способ достроить заданный набор векторов пространства $\mathbb{R}^6$ до базиса — использовать векторы стандартного базиса. Рассмотрим матрицу, столбцами которой являются столбцы $F(A_1), F(A_2), F(A_3)$ и векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6$ стандартного

базиса пространства $\mathbb{R}^6$, и приведём её к упрощённому виду методом Гаусса—Жордана:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_5 & \mathbf{e}_6 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{a}'_1 & \mathbf{a}'_2 & \mathbf{a}'_3 & \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_3 & \mathbf{e}'_4 & \mathbf{e}'_5 & \mathbf{e}'_6 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что столбцы $\mathbf{a}_3$ и $\mathbf{e}_1$ являются линейными комбинациями столбцов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, а столбцы $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5$ дополняют пару $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ до базиса пространства $\mathbb{R}^6$. При помощи обратного изоморфизма $F^{-1}: \mathbb{R}^6 \rightarrow S\mathbb{R}^{3 \times 3}$ переносим базис $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5$ пространства $\mathbb{R}^6$ в пространство $S\mathbb{R}^{3 \times 3}$:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, & A_2 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, & F^{-1}(\mathbf{e}_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ F^{-1}(\mathbf{e}_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & F^{-1}(\mathbf{e}_4) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & F^{-1}(\mathbf{e}_5) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Пример 10.8. В векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ подпространство $\mathcal{P}$ задано как линейная оболочка двух векторов, а подпространство $\mathcal{Q}$ как пространство решений однородной линейной системы:

$$\mathcal{P} = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}\right), \quad \mathcal{Q}: \begin{cases} 8x^1 - 5x^2 + 3x^3 - 6x^4 = 0, \\ -11x^1 + 8x^2 - 6x^3 + 9x^4 = 0. \end{cases}$$

Найдите сумму $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$ и пересечение $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ этих подпространств.

Решение. Для нахождения суммы подпространств каждое из этих подпространств должно быть задано как линейная оболочка некоторого семейства векторов, а для нахождения пересечения — как пространство решений некоторой однородной системы. Подпространство $\mathcal{P}$ можно задать как пространство решений однородной системы, построенной в примере 8.8; обозначим через $\hat{P}$ матрицу соответствующей однородной системы, а через $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ — базис в $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P} = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}\right) = L(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2), \quad \hat{P} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подпространство $\mathcal{Q}$ можно задать как линейную оболочку векторов, найденных в примере 8.6; обозначим эти векторы через $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$, а матрицу однородной системы, задающей подпространство $\mathcal{Q}$, через $\widehat{Q}$:

$$Q = L\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = L(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2), \quad \widehat{Q} = \begin{pmatrix} 8 & -5 & 3 & -6 \\ -11 & 8 & -6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для каждого из подпространств $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ имеются оба способа задания.

Найдем базис в сумме подпространств $\mathcal{P} + \mathcal{Q} = L(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$

$$\|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\| = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 5 & -2 \\ 3 & 7 & 3 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.1)$$

Итак, базисом в $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$ могут служить векторы $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_1$.

Для нахождения базиса в $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ требуется решить систему, состоящую из уравнений, определяющих подпространство $\mathcal{P}$, и уравнений, определяющих подпространство $\mathcal{Q}$ (вычисления опущены):

$$\left\| \begin{matrix} \widehat{P} \\ \widehat{Q} \end{matrix} \right\| = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 8 & -5 & 3 & -6 \\ -11 & 8 & -6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{системы}]{\text{решение}} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = L(\mathbf{x})$.

Пересечение подпространств можно найти иначе. Из (10.1) следует, что $\mathbf{q}_2 \in L(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_1)$, а именно, $\mathbf{q}_2 = -\frac{3}{4}\mathbf{p}_1 + \frac{3}{4}\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1$, так что

$$\mathbf{y} = \underbrace{\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1}_{\in \mathcal{Q}} = \underbrace{-\frac{3}{4}\mathbf{p}_1 + \frac{3}{4}\mathbf{p}_2}_{\in \mathcal{P}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\mathbf{x} \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$$

и поэтому $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = L(\mathbf{x}) = L(\mathbf{y})$.

Пример 10.9. В трёхмерном вещественном векторном пространстве $\mathcal{V}$ заданы два базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}$, связанные следующим образом:

$$\mathbf{e}_{1'} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_{2'} = -2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 - 8\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_{3'} = -3\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2 - 12\mathbf{e}_3.$$

Известны столбец $X = (1; 1; 1)^T$ координат вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и столбец $Y' = (1; 2; -3)^T$ координат вектора $\mathbf{y}$ в базисе $\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}$. Найдите столбец X' координат вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}$ и столбец Y координат вектора $\mathbf{y}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Решение. Составим матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}$ и найдём обратную к ней матрицу (см. пример 9.3):

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 3 & -8 & -12 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 12 & -3 & -2 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$X' = C^{-1}X = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 12 & -3 & -2 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix};$$

$$Y = CY' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 3 & -8 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

Произведение $C^{-1}X$ можно найти без предварительного вычисления обратной матрицы C^{-1} , как объяснено в примере 9.4; конечно, это то же самое, что решение неоднородной системы $CX' = X$ с заданными матрицами C и X методом Гаусса—Жордана:

$$\|C \mid X\| = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & -4 & 1 \\ 3 & -8 & -12 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right).$$

Пример 10.10. В арифметическом пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы два базиса

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e}_{1'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{2'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{3'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу перехода от первого базиса ко второму.

Решение. Составим из заданных столбцов матрицы

$$\mathbf{E} = \|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\| = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 3 & -8 & -12 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}' = \|\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Формула замены базиса имеет вид $\mathbf{E}' = \mathbf{E}C$, где C — матрица перехода от базиса $\mathbf{E} = \|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\|$ к базису $\mathbf{E}' = \|\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\|$. Поскольку матрицы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{E}'$ являются квадратными числовыми матрицами, матрицу перехода можно найти по формуле $C = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{E}'$. Замечая, что матрица $\mathbf{E}$ совпадает с матрицей из примера 9.3, можно воспользоваться полученным там результатом:

$$\begin{aligned} C = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{E}' &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 3 & -8 & -12 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 12 & -3 & -2 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Задачи для самостоятельного решения

10.1. Выясните, является ли линейным подпространством в $\mathbb{K}^n$ данное множество векторов, и если является, то найдите его размерность и укажите какой-либо базис:

- (а) множество векторов, все компоненты которых равны между собой;
- (б) множество векторов, первая компонента которых равна 0;
- (в) множество векторов, сумма компонент которых равна 0;
- (г) множество векторов, сумма компонент которых равна 1.

10.2. Выясните, является ли линейным подпространством в $\mathbb{K}^{n \times n}$ данное множество квадратных матриц, и если является, то найдите его размерность и укажите какой-либо базис:

- (а) множество матриц с нулевой первой строкой;
- (б) множество диагональных матриц;
- (в) множество верхнетреугольных матриц;
- (г) множество симметричных матриц;
- (д) множество кососимметричных матриц.

10.3 (у). Пусть $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ — множество состоящее из n элементов. На множестве $\mathcal{P}(A)$ всех его подмножеств определим следующие операции: «сложение» подмножеств

$$X \boxplus Y \stackrel{\text{def}}{=} (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$$

и «умножение» на элементы конечного поля $\mathbb{Z}_2 = \{0; 1\}$:

$$0 \boxtimes X = \emptyset, \quad 1 \boxtimes X = X.$$

Докажите, что множество $\mathcal{P}(A)$ является векторным пространством относительно указанных операций, укажите в нём какой-либо базис и найдите размерность.

10.4. Докажите, что для любых трёх векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ произвольного векторного пространства над полем $\mathbb{C}$ и любых трёх чисел $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ векторы $\alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{b}$, $\gamma\mathbf{b} - \alpha\mathbf{c}$, $\beta\mathbf{c} - \gamma\mathbf{a}$ линейно зависимы.

10.5 (р). Докажите, что в векторном пространстве $\mathbb{C}[t]$ многочленов с коэффициентами из поля $\mathbb{C}$ семейство многочленов $\mathbf{x}_0 = 1$, $\mathbf{x}_1 = t$, $\dots$, $\mathbf{x}_n = t^n$, $t \in \mathbb{C}$, линейно независимо.

10.6 (у). Докажите, что семейство функций $f_1(t) = e^{pt}$, $f_2(t) = xe^{pt}$, $\dots$, $f_n(t) = t^{n-1}e^{pt}$, $t \in \mathbb{R}$, линейно независимо.

10.7 (р). Выясните, являются ли линейно зависимыми следующие функции:

- (а) $f_1(x) = \arcsin x$, $f_2(x) = \arccos x$, $f_3(x) = 1$, $x \in (-1; 1)$;
- (б) $g_1(x) = x$, $g_2(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

10.8 (см. задачу 6.8). (а) Убедитесь, что заданные многочлены $\mathbf{e}_1(t)$, $\mathbf{e}_2(t)$, $\mathbf{e}_3(t)$ образуют базис в пространстве $\mathbb{R}[t]_3$ многочленов степени ≤ 3 , и разложите многочлен $\mathbf{x}(t)$ по этому базису: $\mathbf{e}_1(t) = 2 - t - 3t^2$, $\mathbf{e}_2(t) = 1 + 2t - t^2$, $\mathbf{e}_3 = -3 + 5t + 4t^2$, $\mathbf{x}(t) = 8 - 5t - 11t^2$.

(б) Убедитесь, что заданные матрицы A_1 , A_2 , A_3 образуют базис в пространстве $S\mathbb{R}^{2 \times 2}$ симметричных (2×2) -матриц, и разложите матрицу X по этому базису:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}.$$

10.9 (см. задачу 8.5). (а) В линейной оболочке заданных матриц M_k , $k = 1, \dots, 6$, найдите базис и разложите каждую из этих матриц по найденному базису:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} -2 & 12 \\ 5 & -15 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} -7 & 39 \\ 16 & -48 \end{pmatrix},$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} -5 & 30 \\ 12 & -38 \end{pmatrix}, \quad M_5 = \begin{pmatrix} -6 & 37 \\ 15 & -47 \end{pmatrix}, \quad M_6 = \begin{pmatrix} -10 & 59 \\ 24 & -74 \end{pmatrix}.$$

(б) В линейной оболочке многочленов $\mathbf{x}_k(t)$, $k = 1, \dots, 6$, найдите базис и разложите каждый из этих многочленов по найденному базису:

$$\mathbf{x}_1(t) = 1 + 3t + 2t^2 - t^3, \quad \mathbf{x}_2(t) = 1 + 4t - t^2 - 2t^3,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_3(t) &= -1 - 5t + 4t^2 + 3t^3, & \mathbf{x}_4(t) &= 1 + 6t - 7t^2 - 4t^3, \\ \mathbf{x}_5(t) &= 1 + 7t - 10t^2 - 5t^3, & \mathbf{x}_6(t) &= 1 + 8t - 13t^2 - 6t^3. \end{aligned}$$

10.10. В пространстве $\mathbb{R}[t]_4$ многочленов степени ≤ 4 заданы элементы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$. Найдите базис в линейной оболочке $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5)$, дополните его векторами $\mathbf{e}_0 = 1, \mathbf{e}_1 = t, \mathbf{e}_2 = t^2, \mathbf{e}_3 = t^3, \mathbf{e}_4 = t^4$ стандартного базиса пространства $\mathbb{R}[t]_4$ до базиса пространства $\mathbb{R}[t]_4$ и разложите векторы стандартного базиса по построенному базису:

$$\mathbf{a}_1 = (t-1)^4, \mathbf{a}_2 = t(t-1)^3, \mathbf{a}_3 = (t-1)^3, \mathbf{a}_4 = t(t-1)^2, \mathbf{a}_5 = (t-1)^2.$$

10.11 (см. задачу 9.3). (а) В векторном пространстве $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ вещественных многочленов степени ≤ 2 заданы два базиса:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1(t) &= 2 + t, & \mathbf{e}_2(t) &= 2 + t + t^2, & \mathbf{e}_3(t) &= 1 + t^2, \\ \mathbf{e}_{1'}(t) &= 1 + t, & \mathbf{e}_{2'}(t) &= 1 + 2t + t^2, & \mathbf{e}_{3'}(t) &= 1 + t + t^2. \end{aligned}$$

Найдите матрицу перехода от первого базиса ко второму.

(б) В векторном пространстве $A\mathbb{R}^{3 \times 3}$ вещественных кососимметричных матриц третьего порядка заданы два базиса:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & A_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, & A_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ A_{1'} &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & A_{2'} &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, & A_{3'} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Найдите матрицу перехода от первого базиса ко второму.

10.12. В арифметическом пространстве $\mathbb{R}^6$ подпространство $\mathcal{Q}$ задано как множество решений однородной системы, основной матрицей которой является

- (а) матрица из задачи 9.1(а);
- (б) матрица из задачи 9.1(б).

Найдите базис в подпространстве $\mathcal{Q}$.

10.13. В арифметическом пространстве $\mathbb{R}^6$ заданы подпространства $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$:

- (а) $\mathcal{P}$ — линейная оболочка столбцов X_1, X_2 из задачи 8.7(а), $\mathcal{Q}$ — подпространство из задачи 10.12(а);
- (б) $\mathcal{P}$ — линейная оболочка столбцов Y_1, Y_2 из задачи 8.7(б), $\mathcal{Q}$ — подпространство из задачи 10.12(б).

Найдите размерность и базис суммы $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$ и пересечения $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ указанных подпространств.

Указания и решения

9.7. Приведите матрицу системы к упрощённому виду.

10.3. Аксиомы векторного пространства проверяются непосредственно. В указанном векторном пространстве нулевой вектор $\mathbf{0} = \emptyset$, противоположный вектор $-\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Базис образуют одноточечные подмножества $\mathbf{e}_1 = \{a_1\}, \dots, \mathbf{e}_n = \{a_n\}$.

10.6. Ср. с задачей 10.5.

Ответы

8.1. ФСР: (а) $(-1, 1)^T$; (б) $(-1, 1, 0)^T$, $(-1, 0, 1)^T$; (в) $(-1, -1, 1)^T$; (г) $(-1, -1, 1, 0)^T$, $(-1, -1, 0, 1)^T$; (д) $(1, 0, -1, -1)^T$, $(0, 1, -1, 1)^T$.

8.2. ФСР сопутствующей однородной системы см. в ответе к задаче 8.1; базисное решение неоднородной системы: (а) $(1, 0)^T$; (б) $(1, 0, 0)^T$; (в) $(1, 2, 0)^T$; (г) $(1, 2, 0, 0)^T$; (д) $(0, 0, 1, 2)^T$.

8.3. НФСР системы: (а) $\{-2, 1, 1, 0\}^T$, $\{-1, -2, 0, 1\}^T$; (б) $\{-3, 2, 1, 0, 0\}^T$, $\{-3, 4, 0, -1, 1\}^T$;

$$(в) \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (г) \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

8.4. Общее решение системы:

$$(а) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (б) \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$(в) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c^1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c^3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$(г) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c^1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c^2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c^3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

8.5. Преобразованные матрицы систем:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (б) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальные матрицы систем:

$$(a) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (б) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & -4 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.6. Первая система несовместна, вторая имеет общее решение

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = c^1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

8.7. Матрица системы

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (б) \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

9.1. См. ответ к задаче 8.5.

9.2. Матрицы A^{-1} , B^{-1} , C^{-1} , D^{-1} равны соответственно

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

9.3.

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad AB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.4.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad (б) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

9.5. $AZ = \beta B + \gamma C$.9.6. (a) $\sum \alpha_j = 1$; (б) $\sum \alpha_j = 0$.9.8. Первая система является следствием второй. Обратно, вторая система является следствием первой тогда и только тогда, когда уравнение $CX = 0$ является следствием уравнений $AX = 0$.10.1. (a) $\dim = 1$; базис состоит из единственного столбца $(1, 1, \dots, 1)^T$; (б) $\dim = n - 1$; базис $e_1 = (0, 1, 0, \dots, 0)^T$, $e_2 = (0, 0, 1, \dots, 0)^T$, ..., $e_{n-1} = (0, 0, 0, \dots, 1)^T$; (в) $\dim = n - 1$; базис $e_1 = (1, 0, \dots, 0, -1)^T$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0, -1)^T$, ..., $e_{n-1} = (0, 0, \dots, 1, -1)^T$. (г) не является.10.2. (a) $\dim = n(n - 1)$, базис $E_{21}, E_{22}, \dots, E_{2n}, \dots, E_{nn}$, где E_{jk} — матричные единицы; (б) $\dim = n$, базис $E_{11}, \dots, E_{nn}$; (в) $\dim = n(n + 1)/2$, базис $E_{11}, \dots, E_{1n}, E_{22}, \dots, E_{2n}, \dots, E_{nn}$; (г) $\dim = n(n + 1)/2$, базис $E_{11}, \dots, E_{nn}, E_{12} + E_{21}, E_{13} + E_{31}, \dots, E_{n,n-1} + E_{n-1,n}$; (д) $\dim = n(n - 1)/2$, базис $E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, \dots, E_{n,n-1} - E_{n-1,n}$. Обратите внимание, что подпространства из примеров (3) и (4) изоморфны.

10.5. Предположим, что существует нетривиальная линейная комбинация

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \equiv 0 \iff \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n \equiv 0.$$

Ненулевой многочлен степени $\leq n$, стоящий в левой части, не может иметь более n корней, т.е. существует точка t_0 , в которой $\alpha_0 + \alpha_1 t_0 + \dots + \alpha_n t_0^n \neq 0$, противоречие.10.7. (a) Поскольку $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$, видим, что данные функции линейно зависимы:

$$1 \cdot f_1(x) + 1 \cdot f_2(x) - \frac{\pi}{2} \cdot f_3(x) = 0.$$

(б) Выясним, при каких коэффициентах α_1, α_2 равенство

$$\alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) = 0$$

выполняется при всех $x \in \mathbb{R}$. При $x > 0$ это равенство даёт $\alpha_1 x + \alpha_2 x = 0 \iff \alpha_1 + \alpha_2 = 0$, а при $x < 0$ — $\alpha_1 x - \alpha_2 x = 0 \iff \alpha_1 - \alpha_2 = 0$. Система уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

имеет лишь решение $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, что означает линейную независимость рассматриваемых функций.

10.8. (а) $\mathbf{x}(t) = 2\mathbf{e}_1(t) + \mathbf{e}_2(t) - \mathbf{e}_3(t)$; (б) $X = A_1 + 2A_2 + 3A_3$.

10.9. (а) M_1, M_2, M_4 линейно независимы; $M_3 = -3M_1 + 2M_2$; $M_5 = M_1 + M_2 + M_4$; $M_6 = -M_1 + 2M_2 + M_4$.

(б) $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)$ линейно независимы;

$$\mathbf{x}_3(t) = \mathbf{x}_1(t) - 2\mathbf{x}_2(t), \quad \mathbf{x}_4(t) = -2\mathbf{x}_1(t) + 3\mathbf{x}_2(t),$$

$$\mathbf{x}_5(t) = -3\mathbf{x}_1(t) + 4\mathbf{x}_2(t), \quad \mathbf{x}_6(t) = -4\mathbf{x}_1(t) + 5\mathbf{x}_2(t).$$

10.10. Базис в линейной оболочке $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5)$ образуют $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$; $\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$; $\mathbf{a}_5 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4$. Базис в $\mathbb{R}[t]_4$ образуют векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4, \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1$, при этом $\mathbf{e}_2 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4 - \mathbf{e}_0 + 2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3 = 2\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_4 - 2\mathbf{e}_0 + 3\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_4 = 3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + 6\mathbf{a}_4 - 3\mathbf{e}_0 + 4\mathbf{e}_2$.

10.11.

$$(a) \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad (б) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

10.12.

$$(a) \quad \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$(б) \quad \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

10.13. В обозначениях задач 8.7 и 10.12:

(а) $\mathcal{P} + \mathcal{Q} = L(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, X_2) = L(X_1, X_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$; $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = L(X_1)$;

(б) $\mathcal{P} + \mathcal{Q} = L(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4, Y_1) = L(Y_1, Y_2, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$;

$\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = L((2; -2; 1; 1; -1; 1)^T)$.