Домашнее задание 1

Упражнения и задачи

1.1. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение, A и B — подмножества множества X. Докажите следующие соотношения:

(а) $(A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B)) \not\Leftarrow (A \subset B)$;
(б) $(A \neq \varnothing) \Rightarrow (f(A) \neq \varnothing)$;
(в) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;
(г) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

1.2. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение, A' и B' — подмножества множества Y. Докажите следующие соотношения:

(а) $(A' \subset B') \Rightarrow (f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B'))$;
(б) $f^{-1}(A' \cap B') \subset f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$;
(в) $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$.

1.3. Докажите, что отображение $f\colon X \to Y$ сюръективно в том и только том случае, если

$$\forall B' \subset Y: \quad f(f^{-1}(B')) = B'.$$

1.4. Докажите, что отображение $f\colon X \to Y$ биективно в том и только том случае, если для

$$\forall A \subset X,\ \forall B' \subset Y: \quad \big(f^{-1}(f(A)) = A\big) \wedge \big(f(f^{-1}(B') = B')\big).$$

1.5. Докажите, что следующие утверждения относительно отображения $f\colon X \to Y$ эквивалентны:

(а) f инъективно;

(б) $\forall A \subset X\colon f^{-1}(f(A)) = A$;
(в) $\forall A \subset X, \forall B \subset X\colon f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$;
(г) $f(A) \cap f(B) = \varnothing \ \Leftrightarrow\ A \cap B = \varnothing$;
(д) если $X \supset A \supset B$, то $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

1.6. (а) Докажите, что для любого отображения $f\colon X \to Y$ отображение $F\colon X \to X \times Y$, заданное правилом $x \xmapsto{F} (x, f(x))$, является инъективным.

(б) Частица движется равномерно по окружности Y. Пусть X — ось времени и $x \xmapsto{F} y$ — соответствие между моментом времени x и положением $y = f(x) \in Y$ частицы. Изобразите график функции $f\colon X \to Y$ в декартовом произведении $X \times Y$.