Вопросы к экзамену по курсу "Методы математической физики"
(астрономическое отделение)

1-й семестр (осень)

1. Сформулируйте лемму о поведении в особых точках линейно независимых решений уравнения специальных функций математической физики.
2. Напишите уравнение Бесселя и определите его фундаментальные системы решений. Дайте определение функций, входящих в эти фундаментальные системы решений.
3. Дайте определение цилиндрической функции. Приведите пример цилиндрических функций.
4. Определите функцию Бесселя полуцелого и целого порядков с использованием обобщенных степенных рядов.
5. Напишите рекуррентные формулы для функций Бесселя.
6. Напишите формулы для функций $J_{1/2}(x)$ и $J_{-1/2}(x)$. Всегда ли функции Бесселя полуцелого порядка можно выразить через элементарные функции?
7. Напишите интегральное представление для функции Бесселя.
8. Дайте определение функций Бесселя, Неймана и Ханкеля. Как связаны функции Бесселя, Неймана и Ханкеля?
9. Напишите формулу, связывающую функции Ханкеля, имеющие показатели противоположных знаков.
10. Напишите рекуррентные формулы для функций Ханкеля.
11. Напишите выражения для определителя Вронского, построенного на функциях $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$, $J_\nu(x)$ и $H_\nu^{(1)}(x)$, $J_\nu(x)$ и $H_\nu^{(2)}(x)$, $J_\nu(x)$ и $N_\nu(x)$. Исходя из этого, какой вывод можно сделать относительно линейной независимости этих цилиндрических функций?
12. Опишите поведение функций Бесселя, Неймана и Ханкеля в окрестности нуля.
13. Опишите поведение функций Бесселя, Неймана и Ханкеля при больших значениях аргумента.
14. Поставьте задачу на собственные функции и собственные значения оператора Лапласа в круге в случае граничных условий первого рода. Напишите решение этой задачи и выражение для квадрата нормы собственных функций.
15. Поставьте задачу на собственные функции и собственные значения оператора Лапласа в круге в случае граничных условий второго рода. Напишите решение этой задачи и выражение для квадрата нормы собственных функций.
16. Напишите уравнение для цилиндрических функций чисто мнимого аргумента и общее решение этого уравнения.
17. Дайте определение функций Инфельда и Макдональда.
18. Опишите поведение функции Инфельда при малых и больших значениях аргумента.
19. Опишите поведение функции Макдональда при малых и больших значениях аргумента.
20. Дайте определение классических ортогональных полиномов.
21. Сформулируйте теорему о нулях классических ортогональных полиномов.
22. Являются ли производные классических ортогональных полиномов классическими ортогональными полиномами? Если да, то с каким весом они ортогональны?
23. Какому дифференциальному уравнению удовлетворяют классические ортогональные полиномы? Поставьте краевую задачу для этого уравнения на отрезке с условиями в особых точках и напишите формулу для собственных значений данной задачи.
24. Напишите обобщенную формулу Родрига.
25. Дайте определение производящей функции классических ортогональных полиномов.
26. Определите полиномы Якоби и напишите формулу Родрига для полиномов Якоби.
27. Дайте определение полиномов Лежандра и сформулируйте краевую задачу, собственными функциями которой являются полиномы Лежандра. Чему равны

собственные значения этой задачи? Напишите выражение для квадрата нормы собственных функций.
28. Напишите формулу Родрига для полиномов Лежандра.
29. Напишите выражение для производящей функции полиномов Лежандра.
30.Дайте определение полиномов Лаггера и сформулируйте задачу, собственными функциями которой являются полиномы Лаггера. Чему равны собственные значения этой задачи? Напишите выражение для квадрата нормы собственных функций.
31. Напишите формулу Родрига для полиномов Лаггера.
32. Напишите выражение для производящей функции полиномов Лаггера.
33.Дайте определение полиномов Эрмита и сформулируйте задачу, собственными функциями которой являются полиномы Эрмита. Чему равны собственные значения этой задачи? Напишите выражение для квадрата нормы собственных функций.
34. Напишите формулу Родрига для полиномов Эрмита.
35. Напишите выражение для производящей функции полиномов Эрмита.
36. Дайте определение присоединенных функций Лежандра и сформулируйте краевую задачу, собственными функциями которой являются присоединенных функций Лежандра. Чему равны собственные значения этой задачи? Напишите выражение для квадрата нормы собственных функций.
37. Поставьте задачу на собственные функции и собственные значения сферического оператора Лапласа. Определите собственные функции этой задачи.
38. Напишите условие ортогональности и выражение для квадрата нормы сферических функций.
39. Дайте определение и получите явный вид шаровых функций.
40. Поставьте задачу на собственные функции и собственные значения оператора Лапласа в шаре с граничными условиями Дирихле. Напишите решение этой задачи и выражение для квадрата нормы собственных функций.
41. Поставьте задачу на собственные функции и собственные значения оператора Лапласа в шаре с граничными условиями Неймана. Напишите решение этой задачи и выражение для квадрата нормы собственных функций.
42. Дайте определение ортогональной и ортонормированной системы функций.
43. Дайте определение полной и замкнутой системы функций в $L_2(D)$.
44. Сформулируйте необходимое и достаточное условие замкнутости ортонормированной системы функций в $L_2(D)$. Следует ли из замкнутости ортонормированной системы функций в $L_2(D)$ ее полнота?
45.Сформулируйте теорему о замкнутости системы полиномов Лежандра $\{P_n(x)\}$ в пространстве $L_2(-1,1)$ и следствия из этой теоремы: полнота системы $\{P_n(x)\}$ в $L_2(-1,1)$, свойство системы $\{P_n(x)\}$ как собственных функций краевой задачи для уравнения Лежандра, теорема Стеклова.
46. Сформулируйте теорему о замкнутости системы присоединенных функций Лежандра $\left\{P_n^{(m)}(x)\right\}$ в пространстве $L_2(-1,1)$ и следствия из этой теоремы: полнота системы $\left\{P_n^{(m)}(x)\right\}$ в $L_2(-1,1)$, свойство системы $\left\{P_n^{(m)}(x)\right\}$ как собственных функций краевой задачи для уравнения присоединенных функций Лежандра, теорема Стеклова.
47. Сформулируйте теорему о замкнутости системы сферических функций $\left\{Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)\right\}$ в пространстве $L_2(\Omega)$ и следствия из этой теоремы: полнота системы функций $\left\{Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)\right\}$ в пространстве $L_2(\Omega)$, свойство системы $\left\{Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)\right\}$ как собственных функций задачи на собственные функции и собственные значения сферического оператора Лапласа, теорема Стеклова.

48. Сформулируйте теорему о замкнутости и полноте системы полиномов Лаггера $\{L_n(x)\}$ в пространстве $C(0,+\infty)$ и следствие из этой теоремы относительно свойства системы $\{L_n(x)\}$ как собственных функций задачи для уравнения Чебышева-Лаггера.
49. Сформулируйте теорему о замкнутости и полноте системы полиномов Эрмита $\{H_n(x)\}$ в пространстве $C(-\infty,+\infty)$ и следствие из этой теоремы относительно свойства системы $\{H_n(x)\}$ как собственных функций задачи для уравнения Чебышева-Эрмита.
50. Дайте определения уравнений эллиптического, гиперболического и параболического типов в случае двух независимых переменных и напишите для этих уравнений канонические формы. Приведите примеры таких уравнений.
51. Дайте определение уравнения параболического типа в случае многих независимых переменных и напишите для него каноническую форму. Приведите пример уравнения такого типа.
52. Дайте определения уравнений гиперболического и ультрагиперболического типов в случае многих независимых переменных и напишите для них канонические формы. Приведите пример уравнения соответствующего типа.
53. Дайте определение уравнения эллиптического типа в случае многих независимых переменных и напишите для него каноническую форму. Приведите пример уравнения такого типа.
54.Приведите примеры постановок начально-краевых задач для уравнений теплопроводности и колебаний в ограниченной области и определите классические решения этих задач. Сформулируйте необходимое условие существования классического решения в каждом из 2-х случаев.
55. Дайте определение корректно поставленной задачи по Адамару.
56. Изложите общую схему метода разделения переменных в отношении начально-краевых задач. В чем состоит процедура редукции общей задачи?

Вопросы с доказательством

1. Докажите лемму о поведении в особых точках линейно независимых решений уравнения специальных функций математической физики.
2. Получите решения уравнения Бесселя в виде обобщенных степенных рядов в случаях полуцелых и целых порядков.
3. Получите рекуррентные формулы, связывающие функции Бесселя разных порядков.
4. Получите выражения для функций $J_{1/2}(x)$ и $J_{-1/2}(x)$ через элементарные функции.
5. Получите интегральное представление для функции Бесселя.
6. Получите решения уравнения Бесселя в виде контурных интегралов по комплексной плоскости (функции Ханкеля 1-го и 2-го рода).
7. Получите формулу, связывающую функции Ханкеля с показателями противоположных знаков.
8. Получите рекуррентные формулы, связывающие функции Ханкеля разных порядков.
9. Получите формулы, устанавливающие связь между функциями Ханкеля, Бесселя и Неймана.
10. Докажите линейную независимость функций: а) $J_\nu(x)$ и $N_\nu(x)$; б) $H_\nu^{(1)}(x)$ и $H_\nu^{(2)}(x)$.
11. Получите асимптотическую формулу для функции Инфельда при больших значениях аргумента.
12. Получите асимптотическую формулу для функции Макдональда при больших значениях аргумента.
13. Докажите теорему о нулях классических ортогональных полиномов.

14. Докажите, что производные классических ортогональных полиномов являются классическими ортогональными полиномами.
15. Получите дифференциальное уравнение для классических ортогональных полиномов.
16. Получите обобщенную формулу Родрига (явное представление для классических ортогональных полиномов) и, как следствие, выражение для квадрата нормы классических ортогональных полиномов.
17. Получите общее выражение для производящей функции классических ортогональных полиномов.
18. Получите выражение для квадрата нормы полиномов Лежандра.
19. Получите выражение для производящей функции полиномов Лежандра.
20. Получите выражение для производящей функции полиномов Лагерра.
21. Получите выражение для производящей функции полиномов Эрмита.
22. Решите задачу на собственные функции и собственные значения сферического оператора Лапласа. Получите выражение для квадрата нормы собственных функций.
23. Решите задачу на собственные функции и собственные значения оператора Лапласа в шаре с граничными условиями Дирихле. Получите выражение для квадрата нормы собственных функций.
24. Решите задачу на собственные функции и собственные значения оператора Лапласа в шаре с граничными условиями Неймана. Получите выражение для квадрата нормы собственных функций.
25. Определите пространство Лебега $L_2(D)$, скалярное произведение и норму в $L_2(D)$ и в $L_{2,\rho}(D)$. Определите интеграл Лебега по схеме Даниэля.
26. Сформулируйте необходимое и достаточное условие замкнутости ортонормированной системы функций в $L_2(D)$ и докажите, что при выполнении этого условия ортонормированная система функций полна в $L_2(D)$.
27. Докажите теорему о замкнутости системы полиномов Лежандра $\{P_n(x)\}$ в пространстве $L_2(-1,1)$ и следствие из этой теоремы относительно свойства системы $\{P_n(x)\}$ как собственных функций краевой задачи для уравнения Лежандра.
28. Докажите теорему о замкнутости системы присоединенных функций Лежандра $\left\{P_n^{(m)}(x)\right\}$ в пространстве $L_2(-1,1)$ и следствие из этой теоремы относительно свойства системы $\left\{P_n^{(m)}(x)\right\}$ как собственных функций краевой задачи для уравнения присоединенных функций Лежандра.
29. Докажите теорему о замкнутости системы сферических функций $\left\{Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)\right\}$ в пространстве $L_2(\Omega)$ и следствие из этой теоремы относительно свойства системы $\left\{Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)\right\}$ как собственных функций задачи на собственные функции и собственные значения сферического оператора Лапласа.
30. В случае двух независимых переменных приведите уравнение гиперболического типа к каноническому виду.
31. В случае двух независимых переменных приведите уравнение эллиптического типа к каноническому виду.
32. В случае двух независимых переменных приведите уравнение параболического типа к каноническому виду.
33. Поэтапно опишите применение метода разделения переменных при решении общей начально-краевой задачи.

2-й семестр (весна)

1. Изложите общую схему метода построения решения эллиптического уравнения в виде разложения по собственным функциям.
2. Сформулируйте определение обобщенной функции. Определите операции над обобщенными функциями, правило дифференцирования обобщенных функций и понятие слабой сходимости. Приведите примеры обобщенных функций.
3. Как вводится сходимость в пространстве основных и в пространстве обобщенных функций?
4. Что называется обобщенным решением дифференциального уравнения? Приведите примеры обобщенных решений.
5. Как вводится понятие фундаментального решения уравнения? Приведите примеры фундаментальных решений.
6. Напишите первую и вторую формулы Грина. Каковы условия их применимости?
7. Напишите третью формулу Грина для двумерного и трехмерного случая.
8. Приведите пример постановки краевой задачи для уравнения Лапласа. Сформулируйте определение классического решения такой задачи.
9. Дайте определение гармонической функции. Приведите примеры. Является ли гармоническая функция бесконечно дифференцируемой? Обоснуйте ответ.
10. Сформулируйте теорему Гаусса и теорему о среднем для гармонических функций.
11. Сформулируйте принцип максимума и принцип сравнения для гармонических функций.
12. Приведите примеры постановок внутренней и внешней краевых задач для уравнения Лапласа. Дайте определения классических решений таких задач.
13. Сформулируйте и докажите теорему единственности классического решения внутренней краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа.
14. Сформулируйте теорему об устойчивости классического решения внутренней краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа по отношению к граничным условиям.
15. Имеет ли место теорема единственности классического решения внутренней краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа? Обоснуйте ответ.
16. Сформулируйте теорему единственности классического решения внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа в случае граничных условий третьего рода. Каким методом она доказывается?
17. Дайте определение регулярной на бесконечности функции в случае двух и трех независимых переменных. Сформулируйте достаточные условия, обеспечивающие регулярность функций на бесконечности.
18. Сформулируйте теорему единственности классического решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в трехмерном случае. Каким методом она доказывается?
19. Сформулируйте теорему единственности классического решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двумерном случае. Каким методом она доказывается?
20. В чем состоит различие в постановках и свойствах классических решений внутренних и внешних краевых задач для уравнения Лапласа в двумерном и трехмерном случаях? Ответ обоснуйте.
21. Дайте определение функции Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в трехмерном случае и запишите решение задачи с помощью функции Грина.
22. Дайте определение функции Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двумерном случае и запишите решение задачи с помощью функции Грина.

23. Дайте определение функции Грина внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа в трехмерном случае и запишите решение задачи с помощью функции Грина.
24. Перечислите основные свойства функции Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Какова физическая интерпретация функции Грина и как она используется при построении функции Грина задачи Дирихле? Приведите пример такого построения.
25. Приведите пример постановки начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в ограниченной области и дайте определение классического решения такой задачи. Сформулируйте необходимое условие существования классического решения.
26. Сформулируйте принцип максимума и принцип сравнения для уравнения параболического типа.
27. Сформулируйте теорему единственности и терему устойчивости по отношению к начальным и граничным условиям классического решения внутренней начально-краевой задачи Дирихле для уравнения теплопроводности.
28. Сформулируйте теорему существования классического решения начально-краевой задачи Дирихле для однородного уравнения теплопроводности на отрезке.
29. На основе метода разделения переменных получите функцию Грина для уравнения теплопроводности на отрезке в случае граничных условий Дирихле. В чем состоит ее физический смысл?
30. Поставьте задачу Коши для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой. Сформулируйте определение классического решения такой задачи и теорему единственности классического решения.
31. Напишите решение задачи Коши для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой в виде интеграла Пуассона и сформулируйте условия, при которых данное интегральное представление определяет классическое решение.
32. Напишите фундаментальное решение уравнения теплопроводности на бесконечной прямой. Каковы его свойства и физический смысл?
33. Что такое "парадокс бесконечной теплопроводности"? Чем его можно объяснить?
34. Поставьте задачу Коши для уравнения теплопроводности в пространстве и сформулируйте определение классического решения этой задачи. Напишите представление решения в виде интеграла Пуассона и сформулируйте условия, при которых данное представление определяет классическое решение.
35. Приведите пример постановки начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой и дайте определение классического решения этой задачи. Сформулируйте необходимое условие существования классического решения.
36. В чем заключается "метод продолжения начальных данных" при построении решений начально-краевых задач Дирихле и Неймана для однородного уравнения теплопроводности на полупрямой?
37. Приведите пример постановки начально-краевой задачи для уравнения колебаний в ограниченной области и дайте определение классического решения такой задачи. Сформулируйте необходимые условия существования классического решения.
38. Сформулируйте теорему единственности классического решения общей начально-краевой задачи для уравнения колебаний в ограниченной области. Каким методом она доказывается?
39. Сформулируйте теорему существования классического решения начально-краевой задачи Дирихле для однородного уравнения колебаний на отрезке.
40. На основе метода разделения переменных получите функцию Грина для уравнения колебаний на отрезке в случае граничных условий Дирихле. В чем состоит ее физический смысл?

41. Поставьте задачу Коши для уравнения колебаний на бесконечной прямой. Сформулируйте определение классического решения такой задачи.
42. Напишите формулу Даламбера. При каких условиях она определяет классическое решение задачи Коши для однородного уравнения колебаний на бесконечной прямой? Имеет ли место единственность классического решения в случае его существования?
43. Приведите пример постанови начально-краевой задачи для уравнения колебаний на полупрямой и дайте определение классического решения такой задачи. Сформулируйте необходимые условия существования классического решения.
44. В чем заключается "метод продолжения начальных данных" при построении решений начально-краевых задач Дирихле и Неймана для однородного уравнения колебаний на полупрямой?
45. В чем заключается метод распространяющихся волн? Приведите пример задачи, решение которой может быть получено с использованием данного метода и напишите это решение.
46. Поставьте задачу Коши для уравнения колебаний в пространстве и определите классическое решение этой задачи.
47. Сформулируйте определение равномерно сходящегося в точке несобственного интеграла 2-го рода, зависящего от параметра, и достаточное условие его непрерывности в точке.
48. Дайте определения потенциалов простого и двойного слоя в двумерном и трехмерном случаях.
49. Дайте определение поверхности Ляпунова и кривой класса “A” (двумерного аналога поверхности Ляпунова).
50. Сформулируйте теорему о существовании и непрерывности логарифмического потенциала простого слоя на плоскости.
51. Сформулируйте теорему о существовании логарифмического потенциала двойного слоя на плоскости.
52. Чему равно значение потенциала двойного слоя с постоянной плотностью в двумерном и трехмерном случае внутри, на и вне несущей поверхности?
53. Сформулируйте теорему о разрывных свойствах логарифмического потенциала двойного слоя с непрерывной и ограниченной плотностью при переходе через несущую кривую.
54. Опишите разрывные свойства нормальной производной логарифмического потенциала простого слоя при переходе через несущую кривую.
55. Дайте определения поверхностных потенциалов простого и двойного слоя. Сформулируйте основные свойства потенциалов.
56. В чем состоит и для чего используется метод сведения краевых задач для уравнения Лапласа к интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода? В качестве примера рассмотрите внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа.
57. Сформулируйте теорему существования классического решения внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа. Изложите схему доказательства теоремы.
58. Сформулируйте задачу на собственные функции и собственные значения оператора Лапласа с граничным условием Дирихле и перечислите основные свойства собственных функций и собственных значений этой задачи.
59. Приведите пример постановки внутренней краевой задачи для уравнения Гельмгольца и дайте определение классического решения такой задачи. В каком случае имеет место теорема единственности классического решения внутренней краевой задачи для уравнения Гельмгольца? Приведите соответствующую формулировку.
60. Сформулируйте принцип максимума для уравнения Гельмгольца.

61. Напишите фундаментальные решения уравнения Гельмгольца в двумерном и трехмерном случаях. Дайте определения поверхностных потенциалов простого и двойного слоя для уравнения Гельмгольца и перечислите их основные свойства. С какой целью используются потенциалы?

Вопросы с доказательством

1. Поэтапно опишите применение метода разделения переменных при решении краевых задач для уравнений эллиптического типа (разложение решения по собственным функциям области).
2. Получите первую и вторую формулы Грина. Каковы условия их применимости?
3. Получите третью формулу Грина в трехмерном случае.
4. Перечислите и докажите основные свойства гармонических функций (существование производной любого порядка, теорема Гаусса и теорема о среднем).
5. Докажите принцип максимума и принцип сравнения для гармонических функций.
6. Сформулируйте и докажите теорему единственности классического решения внутренней третьей краевой задачи для уравнения Лапласа.
7. Докажите теорему об устойчивости классического решения внутренней краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа по отношению к граничным условиям.
8. Докажите теорему единственности классического решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в трехмерном случае.
9. Докажите теорему единственности классического решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двумерном случае.
10. Докажите теорему единственности классического решения внешней задачи Неймана в трехмерном случае. Имеет ли место аналогичная теорема в двумерном случае? Ответ обоснуйте.
11. На основе метода функции Грина получите интегральное представление решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в трехмерном случае. Какой вид имеет аналогичное представление в случае задачи на плоскости?
12. На основе метода функции Грина получите интегральное представление решения внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа в трехмерном случае.
13. Докажите принцип максимума для уравнения параболического типа и, как следствие, принцип сравнения.
14. Докажите теорему единственности и теоремы устойчивости по отношению к начальным и граничным условиям классического решения внутренней начально-краевой задачи Дирихле для уравнения теплопроводности.
15. Докажите теорему существования классического решения начально-краевой задачи Дирихле для однородного уравнения теплопроводности на отрезке.
16. Докажите теорему единственности классического решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.
17. Получите решение задачи Коши для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой в виде интеграла Пуассона и сформулируйте условия, при которых данное интегральное представление определяет классическое решение задачи. Докажите теорему существования классического решения задачи Коши.
18. При каких условиях классическое решение задачи Коши для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой устойчиво по отношению к входным данным? Сформулируйте и докажите соответствующие утверждения.

19. На основе "метода продолжения начальных данных" постройте функцию Грина задачи Дирихле для уравнения теплопроводности на полупрямой. Каков ее физический смысл?
20. На основе "метода продолжения начальных данных" постройте функцию Грина задачи Неймана для уравнения теплопроводности на полупрямой. Каков ее физический смысл?
21. Получите решение задачи Коши для уравнения теплопроводности в пространстве.
22. Получите решение начально-краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности с неоднородным граничным условием Дирихле на полупрямой (задача о распространении краевого режима).
23. Докажите теорему единственности классического решения общей начально-краевой задачи для уравнения колебаний в ограниченной области.
24. В чем состоит метод распространяющихся волн? Получите формулу Даламбера на основе данного метода.
25. С использованием формулы Даламбера докажите теоремы существования, единственности и устойчивости по отношению к начальным данным классического решения задачи Коши для однородного уравнения колебаний на бесконечной прямой.
26. С использованием фазовой плоскости получите решение задачи Коши для неоднородного уравнения колебаний на бесконечной прямой.
27. Получите решение начально-краевой задачи для однородного уравнения колебаний с неоднородным граничным условием Дирихле на полупрямой (задача о распространении краевого режима).
28. Получите формулу Кирхгофа и, как следствие, формулу Пуассона, описывающую распространение волн в пространстве.
29. В чем состоит "метод спуска" Адамара?
30. Докажите теорему о существовании и непрерывности логарифмического потенциала простого слоя на плоскости.
31. Докажите теорему о существовании логарифмического потенциала двойного слоя на плоскости.
32. Докажите теорему о разрывных свойствах логарифмического потенциала двойного слоя с непрерывной и ограниченной плотностью при переходе через несущую кривую.
33. Определите величину скачка нормальной производной логарифмического потенциала простого слоя при переходе через несущую кривую.
34. Дайте определения поверхностных потенциалов простого и двойного слоя. Сформулируйте и докажите основные свойства потенциалов.
35. Сформулируйте и докажите теоремы существования классических решений внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа в трехмерном случае.
36. Сведите задачу на собственные функции и собственные значения оператора Лапласа с граничным условием Дирихле к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода со слабо полярным симметрическим ядром. Обоснуйте эквивалентность и практическую значимость такого подхода.
37. Докажите, что собственные функции задачи на собственные функции и собственные значения оператора Лапласа с граничными условиями 1-го, 2-го или 3-го рода, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны.
38. Докажите, что собственные значения задачи на собственные функции и собственные значения оператора Лапласа с граничными условиями 1-го, 2-го или 3-го рода вещественны и неотрицательны.

39. Сформулируйте теорему Стеклова о разложимости функции $f(M)$ по собственным функциям задачи на собственные функции и собственные значения оператора Лапласа с граничным условием 3-го рода и докажите эту теорему для частного случая граничных условий 1-го рода.
40. Докажите полноту системы собственных функций задачи на собственные функции и собственные значения оператора Лапласа с граничным условием Дирихле.
41. Докажите принцип максимума и теорему единственности классического решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца. При каком условии эти теоремы имеют место?
42. На основе метода функции Грина получите интегральное представление решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в трехмерном случае.

Указание. Экзаменационный билет состоит из шести вопросов. Первый вопрос билета – это задача, шестой вопрос билета содержит вопрос на доказательство утверждений или на вывод определенных соотношений.