

### Список вопросов к экзамену по ММФ (2025)

*Для получения оценки выше «удовлетворительно» нужно уметь выводить и доказывать сформулированные ниже формулы, утверждения и теоремы (в рамках лекционного курса).*

1. Сформулируйте лемму о поведении двух линейно независимых решений уравнения спец функций в особой точке.
2. Напишите уравнение Бесселя и его фундаментальную систему решений. Дайте определение функций, входящих в эту фундаментальную систему решений и приведите их графики.
3. Дайте определение цилиндрической функции. Приведите пример цилиндрической функции и ее график.
4. Дайте определение функции Бесселя с помощью обобщенного степенного ряда. Приведите график.
5. Напишите формулы для функций Бесселя порядков  $1/2$  и  $-1/2$ . Всегда ли функции Бесселя полуполого порядка можно выразить через элементарные функции? Почему?
6. Напишите интегральное представление для функции Бесселя и других цилиндрических функций.
7. Дайте определение функций Бесселя, Неймана и Ханкеля. Как они связаны друг с другом?
8. Напишите формулу, связывающую функции Ханкеля положительного и отрицательного индексов. Каким методом она выводится?
9. Как связаны функции Бесселя и функции Ханкеля?
10. Как связаны функции Неймана и функции Ханкеля?
11. Напишите асимптотические формулы при больших значениях аргумента для функций Бесселя, Неймана и Ханкеля первого и второго рода.
12. Напишите асимптотические формулы при малых значениях аргумента для функций Бесселя.
13. Опишите поведение функций Бесселя, Неймана и Ханкеля в окрестности нуля.
14. Поставьте задачу на собственные значения для функций Бесселя. Где она возникает?
15. Сформулируйте теорему Стеклова в случае задачи на собственные значения для функций Бесселя.
16. Поставьте задачу Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа в круге в случае граничных условий 1-ого рода. Напишите собственные функции.
17. Поставьте задачу Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа в круге в случае граничных условий 2-ого рода. Напишите собственные функции.
18. Напишите характеристическое уравнение для определения собственных значений задачи Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа в круге для случаев граничных условий различных типов.
19. Напишите общую формулу для квадрата нормы собственной функции задачи на собственные значения для цилиндрических функций. Каков способ ее получения?
20. Напишите уравнение для цилиндрических функций чисто мнимого аргумента. Напишите фундаментальную систему решений этого уравнения. Приведите графики функций, входящих в фундаментальную систему.
21. Дайте определение функции Инфельда. Ее график.

22. Напишите асимптотическую формулу при больших значениях аргумента для функции Инфельда. Откуда она следует?
23. Дайте определение функции Макдональда. Ее график.
24. Напишите асимптотическую формулу для функции Макдональда при больших значениях аргумента. Откуда она следует?
25. Дайте определение классических ортогональных полиномов.
26. Сформулируйте теорему о нулях классических ортогональных полиномов.
27. Являются ли производные классических ортогональных полиномов классическими ортогональными полиномами? Если да, то с каким весом они ортогональны?
28. Напишите уравнение для классических ортогональных полиномов.
29. Поставьте задачу на собственные значения для классических ортогональных полиномов на отрезке с условиями в особых точках.
30. Напишите формулу для собственных значений задачи Штурма-Лиувилля для классических ортогональных полиномов.
31. Напишите общую формулу для классических ортогональных полиномов (общую формулу Родрига).
32. Дайте определение полиномов Эрмита. Сформулируйте задачу, решениями которой они являются.
33. Дайте определение полиномов Лагерра. Сформулируйте задачу, решениями которой они являются.
34. Дайте определение полиномов Якоби. Сформулируйте задачу, решениями которой они являются.
35. Напишите формулу Родрига для полиномов Якоби.
36. Дайте определение полиномов Лежандра. Сформулируйте задачу, решениями которой они являются.
37. Поставьте задачу на собственные значения для полиномов Лежандра. Напишите выражение собственных значений для полиномов Лежандра.
38. Напишите выражение квадрата нормы для полиномов Лежандра.
39. Рекуррентные формулы для полиномов Лежандра. Каким методом можно их получить?
40. Дайте определение производящей функции классических ортогональных полиномов.
41. Напишите выражение производящей функции полиномов Лежандра, Эрмита, Лагерра.
42. Является ли система полиномов Лежандра замкнутой и полной? Сформулируйте соответствующие утверждения.
43. Сформулируйте теорему Стеклова для полиномов Лежандра.
44. Дайте определение присоединенных функций Лежандра.
45. Поставьте задачу на собственные значения для присоединенных функций Лежандра. Напишите собственные значения для присоединенных функций Лежандра.
46. Напишите выражение квадрата нормы для присоединенных функций Лежандра.
47. Является ли система присоединенных функций Лежандра замкнутой и полной? Сформулируйте соответствующие утверждения.
48. Сформулируйте теорему Стеклова для присоединенных функций Лежандра.
49. Дайте определение сферических функций. Поставьте задачу на собственные значения для сферических функций.
50. Является ли система сферических функций замкнутой и полной? Сформулируйте соответствующие утверждения.
51. Напишите условие ортогональности для сферических функций.

52. Напишите выражение квадрата нормы для сферических функций.
53. Сформулируйте теорему Стеклова для сферических функций.
54. Дайте определение шаровых функций. Являются ли шаровые функции собственными функциями соответствующей задачи на собственные значения? Обоснуйте ответ.
55. Поставьте задачу на собственные значения для шара в случае линейных граничных условий различного типа.
56. Напишите собственные функции шара для граничных условий Дирихле и Неймана.
57. Что такое характеристики уравнения в частных производных второго порядка в случае двух переменных?
58. Дайте определения уравнений эллиптического, гиперболического и параболического типов в случае двух переменных и напишите для них канонические формы.
59. Дайте определение уравнения параболического типа в случае многих переменных и напишите для него каноническую форму.
60. Дайте определение уравнения гиперболического типа в случае многих переменных и напишите для него каноническую форму.
61. Дайте определение уравнения эллиптического типа в случае многих переменных и напишите для него каноническую форму.
62. Приведите примеры постановки начально-краевых задач для уравнения теплопроводности и колебаний и приведите определения классических решений этих задач.
63. Дайте определение обобщенного решения краевой задачи для оператора Лапласа.
64. Изложите общую схему метода разделения переменных (метода Фурье). К решению каких задач можно свести решение общей начально-краевой задачи в линейном случае (редукция полной задачи)?
65. Поставьте задачу Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа с граничными условиями Дирихле на границе  $S$  области  $D$  и перечислите основные свойства собственных функций и собственных значений этой задачи.
66. Напишите первую и вторую формулы Грина. Каковы условия их применимости?
67. Напишите третью (основную интегральную) формулу Грина для двумерного и трехмерного случая.
68. Приведите пример постановки краевой задачи для уравнения Лапласа.
69. Дайте определение гармонических функций. Приведите примеры. Является ли гармоническая функция бесконечно дифференцируемой?
70. Обоснуйте ответ.
71. Сформулируйте теорему Гаусса и теорему о среднем значении для гармонических функций.
72. Сформулируйте принцип максимума и принцип сравнения для гармонических функций.
73. Сформулируйте теорему единственности решения внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа в случае граничных условий Дирихле. Каким методом она доказывается?
74. Сформулируйте теорему единственности решения внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа в случае граничных условий третьего рода. Каким методом она доказывается?
75. Имеет ли место единственность решения внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа в случае граничных условий второго рода?

76. Обоснуйте ответ.
77. Дайте определение регулярной на бесконечности функции в случае двух и трех переменных.
78. Сформулируйте теорему единственности решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в трехмерном случае. Каким методом она доказывается?
79. Сформулируйте теорему единственности решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двумерном случае. Каким методом она доказывается?
80. Имеет ли место единственность решения внешней краевой задачи с граничными условиями Неймана для уравнения Лапласа в двумерном и трехмерном случаях? Обоснуйте ответ.
81. Поставьте внутреннюю и внешнюю краевые задачи для уравнения Лапласа в двумерном и трехмерном случаях с граничными условиями 3 рода.
82. Метод функций Грина решения краевых задач для уравнения Лапласа.
83. Дайте определение функции Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в трехмерном случае и запишите решение задачи с помощью функции Грина.
84. Дайте определение функции Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двумерном случае и запишите решение задачи с помощью функции Грина.
85. Дайте определение функции Грина внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа в трехмерном случае и запишите решение задачи с помощью функции Грина.
86. Дайте определение функции Грина внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа в трехмерном случае и запишите решение задачи с помощью функции Грина.
87. Методы построения функции Грина (источника) для уравнения Лапласа (метод электростатических отображений, метод конформных отображений, построение функции Грина в виде разложения по собственным функциям соответствующей задачи Штурма-Лиувилля).
88. Дайте определение объемного потенциала. Сведение уравнения Пуассона к однородному уравнению с его помощью.
89. Дайте определение равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.
90. Дайте определения потенциалов простого и двойного слоя в двумерном и трехмерном случаях.
91. Дайте определение поверхности Ляпунова.
92. Сформулируйте теорему о существовании и непрерывности потенциала простого слоя.
93. Сформулируйте теорему о существовании потенциала двойного слоя.
94. Претерпевает ли разрыв при переходе через несущую поверхность потенциал простого слоя? Обоснуйте ответ.
95. Чему равно значение потенциала двойного слоя с постоянной плотностью внутри, на и вне несущей поверхности? Напишите формулу скачка потенциала двойного слоя при переходе через несущую поверхность.
96. Метод сведения краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа к союзным интегральным уравнениям Фредгольма.
97. Сформулируйте теорему существования решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Назовите метод ее доказательства.

98. Сформулируйте теорему существования решения внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа в трехмерном случае. Назовите метод ее доказательства.
99. Сформулируйте теорему существования решения внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа. Назовите метод ее доказательства.
100. Сформулируйте теорему существования решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Назовите метод ее доказательства.
101. Напишите необходимое и достаточное условие разрешимости внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа. Откуда оно следует?
102. Напишите фундаментальное решение уравнения Гельмгольца в двумерном и трехмерном случаях.
103. Дайте определение объемного потенциала, поверхностных потенциалов простого и двойного слоя для уравнения Гельмгольца.
104. В чем отличие принципа максимума для уравнения Лапласа и Гельмгольца?
105. В каком случае имеет место единственность решения внутренних краевых задач для уравнения Гельмгольца? Приведите формулировки соответствующих теорем.
106. Сформулируйте принцип максимума и принцип сравнения для уравнения параболического типа.
107. Сформулируйте теорему единственности решения внутренней начально-краевой задачи Дирихле для уравнения параболического типа. Назовите метод их доказательства.
108. Сформулируйте теорему существования классического решения начально-краевой задачи Дирихле для однородного уравнения теплопроводности на отрезке.
109. Напишите функцию Грина для уравнения теплопроводности на отрезке в случае граничных условий Дирихле. В чем ее физический смысл?
110. Поставьте начальную задачу для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой. Сформулируйте теорему единственности решения начальной задачи для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.
111. Сформулируйте теорему существования классического решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.
112. Напишите фундаментальное решение уравнения теплопроводности на бесконечной прямой, его свойства и физический смысл.
113. Поставьте начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой. В чем заключается "метод продолжения" для построения решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой для задач Дирихле и Неймана?
114. Напишите функцию источника для уравнения теплопроводности на полупрямой в случае граничных условий Дирихле.
115. Напишите функцию источника для уравнения теплопроводности на полупрямой в случае граничных условий Неймана.
116. Напишите функцию источника для уравнения теплопроводности на полупрямой в случае граничных условий 3-ого рода.
117. Напишите общий вид решения начально-краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности на полупрямой в случае однородных граничных условий.

118. Поставьте начальную задачу для уравнения теплопроводности в пространстве и сформулируйте теорему единственности ее решения.
119. Сформулируйте теорему существования классического решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в пространстве.
120. Напишите общий вид решения однородного уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой при однородном начальном и неоднородном граничном условии Дирихле. Сформулируйте принцип Дюамеля.
121. Сформулируйте теорему единственности решения общей начально-краевой задачи для уравнения колебаний. Каким методом она доказывается?
122. Сформулируйте теорему существования классического решения начально-краевой задачи для однородного уравнения колебаний на отрезке в случае однородных граничных условий Дирихле.
123. Дайте определение функции влияния мгновенного точечного импульса (функции Грина) для уравнения колебаний на отрезке.
124. Поставьте начальную задачу для уравнения колебаний на бесконечной прямой.
125. Напишите формулу Даламбера. Какими способами ее можно получить?
126. Решение уравнения колебаний методом характеристик. Метод распространяющихся волн для решения задач с однородным уравнением колебаний.
127. Сформулируйте теорему существования и единственности классического решения задачи Коши для однородного уравнения колебаний на бесконечной прямой.
128. Что такое “характеристический треугольник” на фазовой плоскости?
129. В чем состоит метод интегрирования по фазовой плоскости?
130. Напишите общую формулу решения начальной задачи для неоднородного уравнения колебаний на бесконечной прямой.
131. Сформулируйте теорему существования и единственности классического решения неоднородного уравнения колебаний на бесконечной прямой.
132. В чем состоит "метод продолжения" построения решения начально-краевой задачи для уравнения колебаний на полупрямой в случае однородных граничных условий Дирихле и Неймана?
133. Напишите решение начально-краевой задачи для однородного уравнения колебаний на полупрямой в случае однородного начального условия и неоднородного граничного условия Дирихле. Каким методом можно его получить?
134. Поставьте задачу Коши для уравнения колебаний в пространстве.
135. Напишите формулу Кирхгофа.
136. Напишите формулу Пуассона, выражающую решение задачи Коши для уравнения колебаний в трехмерном пространстве.
137. В чем состоит "метод спуска" Адамара?
138. Напишите формулу Пуассона, выражающую решение задачи Коши для уравнения колебаний в двумерном пространстве.
139. Качественное отличие в поведении решений задач Коши в двумерном и трехмерном случаях для однородного уравнения колебаний во всем пространстве при финитных начальных условиях.