

Список вопросов для коллоквиума по ММФ (2025)

1. Сформулируйте лемму о поведении решений уравнения $(k(x)u'(x))' - q(x)u = 0$, $x \in (a, b)$, где $k(x) = (x - a)\varphi(x)$, $\varphi(a) \neq 0$, в особых точках.
2. Напишите уравнение Бесселя, его фундаментальные системы решений - вещественную и комплексную. Дайте определение функций, входящих в эти системы решений, для вещественной системы приведите графики функций.
3. Дайте определение функции Бесселя с помощью обобщенного степенного ряда. Напишите формулы для функций Бесселя порядков $1/2$ и $-1/2$. Всегда ли функции Бесселя полуцелого порядка можно выразить через элементарные функции?
4. Поставьте задачу на собственные значения для оператора Бесселя. Сформулируйте теорему Стеклова о разложимости функций по собственным функциям этой задачи. Напишите общую формулу для квадрата нормы собственной функции.
5. Дайте определение функций Ханкеля и Неймана. Напишите интегральное представление для функции Бесселя и функций Ханкеля первого и второго рода. Как связаны между собой эти функции? Приведите график функции Неймана. Могут ли функции Ханкеля иметь вещественные нули?
6. Напишите асимптотические формулы при больших и малых значениях аргумента для функций Бесселя, Неймана и Ханкеля. Каким образом получают эти формулы?
7. Приведите рекуррентные формулы, связывающие цилиндрические функции различных порядков. Каким способом можно получить эти формулы?
8. Какие из цилиндрических функций образуют пары линейно-независимых решений уравнения Бесселя? Напишите выражения для определителя Вронского для функций Бесселя положительного и отрицательного порядков, для функций Бесселя и Неймана, для функций Бесселя и Ханкеля.
9. Напишите уравнение для цилиндрических функций чисто мнимого аргумента. Приведите фундаментальную систему решений этого уравнения. Дайте определение функции Инфельда и Макдональда, приведите их графики. Укажите поведение этих функций при больших и малых значениях аргумента.
10. Дайте определение классических ортогональных полиномов. Напишите уравнение, которому удовлетворяют эти функции. Сформулируйте теорему о нулях классических ортогональных полиномов. Образуют ли производные классических ортогональных полиномов также систему классических

ортогональных полиномов? Если образуют, то с каким весом? Откуда это следует?

11. Поставьте задачу на собственные значения для классических ортогональных полиномов на отрезке с условиями в особых точках. Напишите формулу для собственных значений этой задачи. Как получают эту формулу?

12. Сформулируйте задачи, решениями которых являются полиномы Лагерра и полиномы Эрмита. Дайте определение этих полиномов. Приведите формулу Родрига. Напишите выражения для квадрата нормы.

13. Напишите общую формулу для классических ортогональных полиномов (формулу Родрига). Как она выводится? Приведите формулу Родрига для полиномов Лежандра. С ее помощью постройте P_0 и P_1 .

14. Приведите рекуррентную формулу, связывающую полиномы Лежандра различных порядков. Каким способом можно ее получить?

15. Дайте определение производящей функции классических ортогональных полиномов. Напишите выражение производящей функции полиномов Лежандра. Как получают это выражение?

16. Является ли система полиномов Лежандра замкнутой и полной? Обоснуйте соответствующие утверждения. Сформулируйте теорему Стеклова для полиномов Лежандра.

17. Напишите уравнение Лежандра. Поставьте задачу на собственные значения для полиномов Лежандра. Напишите выражение для собственных значений этой задачи и выражение квадрата нормы для полиномов Лежандра. Как получают эти выражения?

18. Дайте определение присоединенных функций Лежандра. Поставьте задачу на собственные значения для присоединенных функций Лежандра. Напишите собственные значения для присоединенных функций Лежандра и выражение для квадрата нормы.

19. Является ли система присоединенных функций Лежандра замкнутой и полной? Сформулируйте соответствующие утверждения. Сформулируйте теорему Стеклова для присоединенных функций Лежандра.

20. Дайте определение сферических функций. Поставьте задачу на собственные значения для этих функций. Напишите условие ортогональности для сферических функций. Приведите выражение квадрата нормы. Сформулируйте теорему Стеклова о разложимости в ряд по сферическим

функциям. Дайте определение шаровых функций.

21. Дайте определение собственных функций шара. Напишите характеристическое уравнение для определения собственных значений в случае граничных условий третьего рода. Напишите выражение для квадрата нормы.

22. Поставьте задачу Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа с граничными условиями Дирихле и перечислите основные свойства собственных функций и собственных значений этой задачи.

23. Поставьте задачу Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа в круге в случае граничных условий 1-ого и 2-ого рода. Приведите характеристические уравнения для определения собственных значений задач Штурма-Лиувилля в этих случаях и напишите собственные функции.

24. Поставьте задачу Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа в шаре в случае граничных условий 1-ого и 2-ого рода. Приведите уравнения для определения собственных значений задач Штурма-Лиувилля в этих случаях и напишите собственные функции.

25. Дайте определения уравнений эллиптического, гиперболического и параболического типов в случае двух переменных и в случае многих переменных. Напишите канонические формы для уравнений разных типов с двумя независимыми переменными.