

План лекций по ММФ (2026) на 2 потоке.

Вступительное слово.

Литература.

Часть 1. Специальные функции математической физики

Введение

§-1. Повтор схемы метода Фурье

§-2. Уравнение для специальных функций

Глава 1. Цилиндрические функции

§-1. Определение цилиндрических функций. Функция Бесселя

№1. Г-функция и ее свойства

№2. Функция Бесселя

§-2. Контурные интегралы.

§-3. Функции Ханкеля

№1. Определение функций Ханкеля.

№2. Вывод рекуррентных соотношений

№3. Связь функций Ханкеля ν и $-\nu$ порядка

№4. Связь функций Ханкеля с функциями Бесселя. Функция Неймана

№5. Вопрос линейной независимости функций J_ν , N_ν , H_ν

№6. Асимптотика цилиндрических функций при малых x

№7. Построение асимптотики при больших x методом перевала

№8. Графики функций Бесселя и Неймана

§-4. Задача Штурма-Лиувилля в круге

№1. Решение задачи Штурма-Лиувилля в круге

№2. Теорема Стеклова. Норма функции Бесселя

§-5. Модифицированное уравнение Бесселя

Глава 2. Классические ортогональные полиномы

§-1. Свойства классических ортогональных полиномов

§-2. Частные случаи классических ортогональных полиномов

№1. Полиномы Эрмита

№2. Полиномы Лагерра

№3. Полиномы Якоби.

№4. Частный случай полиномов Якоби – полиномы Лежандра

§-3. Присоединенные функции Лежандра

§-4. Задача Штурма-Лиувилля в шаре

№1. Задача для оператора Лапласа в шаре. Шаровые функции

§-5. Приложение. Некоторые задачи квантовой механики

№1. Уравнение Шредингера

№2. Задача о гармонических колебаниях частицы

№3. Задача о ротаторе

№4. Движение электрона в кулоновском поле (атом водорода)

Часть 2. Уравнения и задачи математической физики

Введение

§-1. Классификация уравнений в частных производных 2-ого порядка для случая двух независимых переменных

§-2. Классификация уравнений в частных производных 2-ого порядка для случая многих независимых переменных

§-3. Постановки физических задач

№1. Задача о продольных колебаниях стержня

№2. Задача об электромагнитных колебаниях

№3. Задача теплопроводности

Глава 1. Уравнения эллиптического типа

§-1. Формулы Грина

№1. Первая формула Грина

№2. Вторая формула Грина

№3. Третья (большая интегральная) формула Грина.

§-2. Свойства гармонических функций

№1. Теорема Гаусса

№2. Формула среднего значения

№3. Бесконечная дифференцируемость гармонической функции

№4. Принцип максимума

№5. Принцип сравнения

§-3. Постановки внутренних краевых задач с уравнением Лапласа

№1. Первая краевая задача (задача Дирихле)

№2. Вторая краевая задача (задача Неймана)

№3. Третья краевая задача (задача Робена)

№4. Пример задачи Дирихле с разрывом граничной функции

§-4. Постановки внешних краевых задач

№1. Примеры

№2. Определение и свойства регулярной на бесконечности функции

№3. Вопросы единственности решения краевых задач

§-5. Обобщенные функции. Функция Грина.

№1. Обобщенные функции и их свойства.

№2. Фундаментальное решение уравнения Лапласа.

§-6. Метод функции Грина

№1. Решение задачи Дирихле. Свойства функции Грина

№2. Решение задачи Неймана

№3. Решение задачи Робена

№4. Двумерный случай на примере задачи Дирихле

№5. Решение внешней краевой задачи Дирихле

№6. Методы построения функции Грина

1. Метод электростатических отображений

а) задача на сфере / шаре

б) задача в полупространстве ($z>0$)

2. Метод конформного преобразования (в 2d случае)

в) задача на полуплоскости ($y>0$)

3. Построение функции Грина через решение задачи

Штурма-Лиувилля

Глава 2. Теория потенциалов

§-1. Объемные и поверхностные потенциалы

§-2. Метод интегральных уравнений для решения задач с оператором Лапласа

№1. Внутренняя задача Дирихле и внешняя задача Неймана

№2. Внешняя задача Дирихле и внутренняя задача Неймана

§-3. Уравнение Гельмгольца в ограниченной области

№1. Физические примеры

№2. Вопрос единственности решения краевых задач при разных знаках коэффициента c

№3. Фундаментальное решение уравнения

№4. Метод функции Грина

№5. Сведение задачи к интегральному уравнению

- Глава 3. Уравнения параболического типа. Уравнение теплопроводности
- §-1. Постановки задачи
 - §-2. Принцип максимума. Принцип сравнения
 - §-3. Единственность решения начально-краевой задачи. Устойчивость решения.
 - №1. Задача Дирихле
 - №2. Задачи Неймана и Робена
 - §-4. Существование решения начально-краевой задачи
 - №1. Простейшая задача
 - №2. Общая задача
 - №3. Физический смысл функции точечного источника
 - §-5. Задача теплопроводности на неограниченной прямой
 - №1. Постановка задачи
 - №2. Вопрос единственности решения
 - №3. Построение решения через интегральное преобразование Фурье
 - №4. Физический смысл функции точечного импульса
 - №5. Доказательство существования решения однородной задачи
 - №6. Пример. Состыкованные стержни
 - №7. Неоднородная задача. Нахождение решения методом интегральных преобразования Фурье
 - №8. Задача на плоскости.
 - §-6. Задача теплопроводности на полупрямой. Метод продолжения
 - №1. Постановка задачи. Редукция
 - №2. Однородная задача а) с однородным условием Дирихле
 - №3. Физический смысл функции точечного воздействия
 - №4. Однородная задача а) с однородным условием Неймана
 - №5. Однородная задача а) с однородным условием Робена
 - №6. Краевой режим. Задача б) с условием Дирихле. Принцип Дюамеля
 - №7. №6. Краевой режим. Задача б) с условием Неймана.
- Глава 4. Уравнения гиперболического типа. Уравнение колебаний
- §-1. Начально-краевая задача в ограниченной области
 - №1. Постановка задачи.
 - №2. Вопрос единственности решения
 - №3. Вопрос существования решения. Построение решения простейшей задачи
 - №4. Построение решения для задачи с однородным условием Дирихле через функцию точечного источника
 - №5. Физический смысл функции Грина
 - §-2. Уравнение колебаний на бесконечной прямой
 - №1. Постановка задачи. Редукция
 - №2. Решение задачи а) методом характеристик
 - №3. Примеры
 - №4. Сравнение формы решений в ограниченной и неограниченной области (для задачи с однородным уравнением а))
 - №5. Решение неоднородной задачи б)
 - №6. Итоги
 - §-3. Уравнение колебаний на полубесконечном участке
 - №1. Постановка общей задачи. Редукция

- №2. Задача а) с условием Дирихле
- №3. Задача а) с условием Неймана
- №4. Краевой режим. Задача б) с условием Дирихле.
- №5. Задача б) с условиями 2 и 3 рода.
- §-4. Задача колебаний в бесконечной области
 - №1. Радиально-симметричный случай
 - №2. Общий случай. Формула Кирхгофа. Принцип Гюйгенса
 - №3. Формула Пуассона для задачи Коши
 - №4. Функция точечного импульса
 - №5. Решение задачи Коши в двумерном случае методом спуска
 - №6. Решение задачи Коши в одномерном случае. Формула Даламбера
 - №7. Случай финитных начальных условий

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. «Уравнения математической физики»
2. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. «Лекции по математической физике»
3. Владимиров В.С. «Уравнения математической физики»
4. Арсенин В.Я. «Методы математической физики и специальные функции»
5. Тихонов Н.А., Токмачев М.Г., Галанин М.П. «Математические модели и методы их исследования», 2024.

Задачники:

1. Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. «Задачи по математической физике»
2. Будак Б.М. Самарский А.А., Тихонов А.Н. «Сборник задач по математической физике»