

Разностные схемы для нелинейных задач.

Квазилинейное уравнение переноса.

Для численного решения нелинейных задач в различных ситуациях используют как линейные, так и нелинейные схемы. Устойчивость соответствующих схем исследуют, проводя их линеаризацию и применяя «замораживание» коэффициентов. Все эти рассуждения не строги, но позволяют выявлять заведомо негодные схемы. При построении разностных схем для нелинейных задач большую роль играют тестовые задачи — частные случаи задач рассматриваемого класса, имеющие аналитические решения.

1 Линейные схемы для нелинейных задач

Пусть, например, нам необходимо построить разностную схему, аппроксимирующую на сетке начально-краевую задачу для квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(u)[u] + f, \quad (1.1)$$

где $L(u)[\cdot]$ — дифференциальный оператор, содержащий производные по пространственным переменным, причем коэффициенты при этих производных зависят от искомой функции u . Сами производные функции u входят в выражение $L(u)[u]$ линейным образом. Пусть $\Lambda(u^j)[\cdot]$ — разностная аппроксимация оператора $L(u)[\cdot]$, такая что коэффициенты при производных аппроксимируются с использованием значений функции u на j -м временном слое сетки. Тогда в соответствие дифференциальному уравнению (1.1) можно поставить *линейное* разностное уравнение

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \Lambda(y^j)[y^{j+1}] + \varphi, \quad (1.2)$$

где все коэффициенты оператора Λ берутся на слое j , на котором решение y^j уже известно. Сеточная функция φ в уравнении (1.2) представляет собой аппроксимацию правой части f уравнения (1.1) на сетке.

Коэффициенты в разностном уравнении (1.2) в общем случае являются переменными. Для исследования устойчивости полученной схемы можно использовать метод «замороженных» коэффициентов. На практике для уравнения с гладкими коэффициентами и гладкими решениями критерии устойчивости, полученные этим способом, хорошо согласуются с результатами численных расчетов. Однако для ряда задач с разрывными, недифференцируемыми и даже кусочно-гладкими коэффициентами построены примеры, когда «замораживание» коэффициентов приводит к ошибочным заключениям. Поэтому данный подход хорош для выявления заведомо негодных схем.

2 Нелинейные схемы

Для аппроксимации оператора $L(u)[\cdot]$ в уравнении (1.1) можно использовать не только значения функции u на слое j , но и на слое $j+1$. Например, пусть $\Lambda(u^{j+1})[\cdot]$ — разностная аппроксимация оператора $L(u)[\cdot]$. При этом в соответствие дифференциальному уравнению (1.1) ставится *нелинейное* разностное уравнение, например:

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \underbrace{\Lambda(y^{j+1})[y^{j+1}]}_{\tilde{\Lambda}(y^{j+1})} + \varphi. \quad (2.1)$$

Нелинейные разностные схемы представляют собой системы нелинейных алгебраических уравнений относительно значений сеточной функции в узлах сетки. Основной вопрос — есть ли у этой системы вещественное решение, и если есть, то как его построить. Если у исходной дифференциальной начально-краевой задачи решение существует, то при достаточно малых шагах сетки сеточное решение также должно существовать. На грубой сетке численного решения может не быть. Если сетка достаточно подробна и решение существует, его можно искать итерационными методами, например, с помощью метода Ньютона. При этом за начальное приближение естественно принять значение функции y на предыдущем слое по времени.

Для исследования схемы (2.1) на устойчивость проводят ее линеаризацию. Предположим, что на слое j мы допускаем ошибку δy^j , а на слое $j+1$ — ошибку δy^{j+1} :

$$y^j = \bar{y}^j + \delta y^j, \quad y^{j+1} = \bar{y}^{j+1} + \delta y^{j+1},$$

где \bar{y} — точное решение уравнения (2.1). Тогда

$$\frac{\bar{y}^{j+1} - \bar{y}^j}{\tau} + \frac{\delta y^{j+1} - \delta y^j}{\tau} = \tilde{\Lambda}(\bar{y}^{j+1} + \delta y^{j+1}) + \varphi.$$

Если выражение $\tilde{\Lambda}(y^{j+1})$ является непрерывно дифференцируемым по своим аргументам $y_0^{j+1}, y_1^{j+1}, \dots, y_N^{j+1}$, то, предполагая что ошибка δy^{j+1} достаточно мала, выражение $\tilde{\Lambda}(\bar{y}^{j+1} + \delta y^{j+1})$ можно представить в виде:

$$\tilde{\Lambda}(\bar{y}^{j+1} + \delta y^{j+1}) = \tilde{\Lambda}(\bar{y}^{j+1}) + \left. \frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial y^{j+1}} \right|_{y^{j+1}=\bar{y}^{j+1}} \cdot \delta y^{j+1} + O(\|\delta y^{j+1}\|^2),$$

где $\frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial y^{j+1}}$ — матрица производных. С учетом того, что

$$\frac{\bar{y}^{j+1} - \bar{y}^j}{\tau} = \tilde{\Lambda}(\bar{y}^{j+1}) + \varphi,$$

оставляя в уравнении для погрешности только слагаемые первого порядка малости, получаем линеаризованное разностное уравнение:

$$\frac{\delta y^{j+1} - \delta y^j}{\tau} = \left. \frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial y^{j+1}} \right|_{y^{j+1}=\bar{y}^{j+1}} \cdot \delta y^{j+1}. \quad (2.2)$$

Так как уравнение (2.2) является линейным уравнением с переменными коэффициентами, для его исследования на устойчивость можно применять метод «замороженных» коэффициентов. Хотя проведенные рассуждения не строгие, на практике они позволяют определить заведомо неустойчивую или условно устойчивую схему.

3 Примеры реализации линейных и нелинейных схем для квазилинейного уравнения переноса

Построим линейную и нелинейную разностные схемы для простейшего квазилинейного уравнения переноса. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in (0, 1], t \in (0, 1], \\ u(x, 0) = 2x - x^2 + 1, \\ u(0, t) = 1. \end{cases} \quad (3.1)$$

Задача (3.1) допускает аналитическое решение, которое можно найти методом характеристик. Проекции характеристик на плоскость x, t в данном случае представляют собой прямые

$$t = \frac{x - x_0}{\varphi(x_0)}, \quad \varphi(x_0) = 2x_0 - x_0^2 + 1, \quad x_0 \in [0, 1],$$

по которым переносится начальное условие, и прямые

$$t - t_0 = x, \quad t_0 \in [0, 1],$$

по которым переносится граничное условие. В области $t \geq x$ функция $u(x, t)$ остается равной 1, а в области $t < x$ решение $u(x, t)$ определяется начальным условием. Выберем произвольную точку (x, t) в области $t < x$ и выразим через x и t координату x_0 пересечения проекции характеристики с осью Ox , на которой задано начальное условие:

$$t = \frac{x - x_0}{2x_0 - x_0^2 + 1} \Leftrightarrow x_0^2 - \left(2 + \frac{1}{t}\right)x_0 + \left(\frac{x}{t} - 1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$x_0^\pm = 1 + \frac{1}{2t} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2t}\right)^2 - \frac{x}{t} + 1}.$$

В область $[0, 1]$ попадает только x_0^- . Следовательно, при $t < x$ решение имеет вид:

$$u(x, t) = 2x_0(x, t) - x_0^2(x, t) + 1, \quad x_0(x, t) = 1 + \frac{1}{2t} - \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2t}\right)^2 - \frac{x}{t} + 1}.$$

График аналитического решения задачи (3.1) и профили функции $u(x, t)$ для нескольких фиксированных моментов времени представлены на рис. 1.

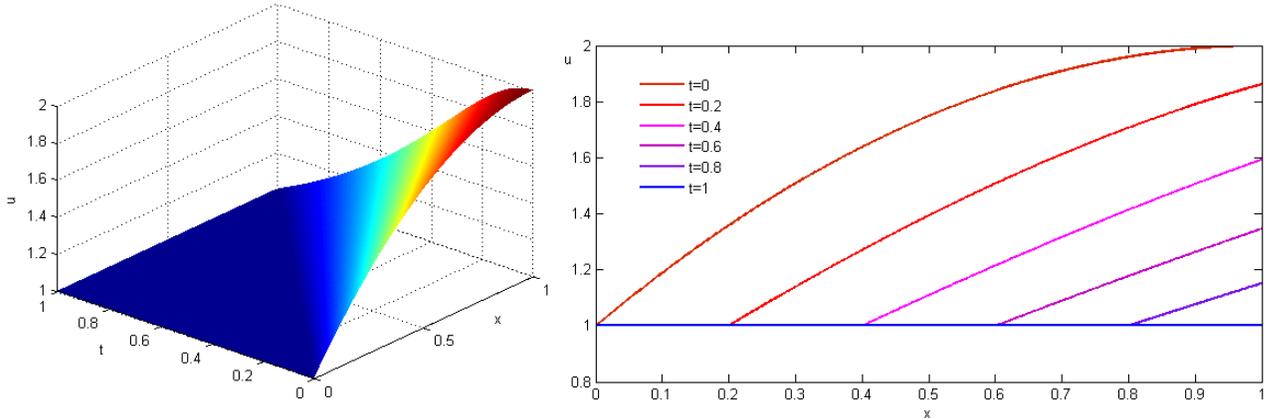


Рис. 1: Аналитическое решение задачи (3.1)

Реализуем теперь для рассматриваемой задачи несколько возможных разностных схем. Введем в расчетной области равномерную сетку:

$$x_n = nh, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad Nh = 1, \quad t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad J\tau = 1.$$

Рассмотрим явную линейную схему:

$$\begin{cases} \frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} + y_n^j \frac{y_n^j - y_{n-1}^j}{h} = 0, & n = 1, 2, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, J - 1, \\ y_n^0 = 2x_n - x_n^2 + 1, & n = 0, 1, \dots, N, \\ y_0^j = 1, & j = 0, 1, \dots, J. \end{cases} \quad (3.2)$$

Используя метод замороженных коэффициентов, получаем следующее условие устойчивости схемы (3.2):

$$\tau \cdot \max y_n^j \leq h.$$

Так как в любой точке расчетной области решение уравнения переноса равно либо начальному, либо граничному значению в соответствующей точке, то решение не может достигать значений, больших максимального и меньших минимального из начальных и граничных значений. Поскольку

$$\max_{0 \leq x_n \leq 1} (2x_n - x_n^2 + 1) = 2 \quad \text{и} \quad \min_{0 \leq x_n \leq 1} (2x_n - x_n^2 + 1) = 1,$$

то $\max y_n^j = 2$. Следовательно, условие устойчивости схемы (3.2) принимает вид $2\tau \leq h$.

Результаты численного решения задачи (3.1) по схеме (3.2) приведены на рис. 2 - 3.

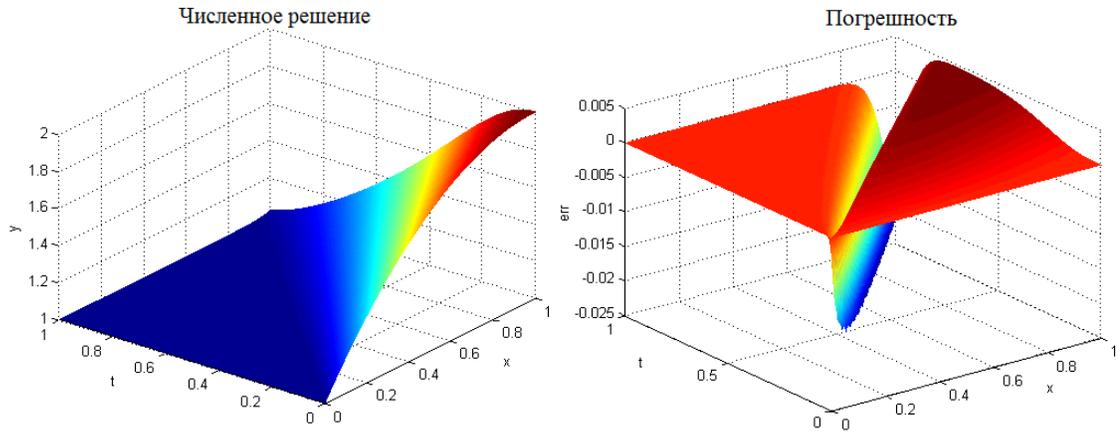


Рис. 2: Численное решение задачи (3.1) по схеме (3.2) при $N = 100$, $J = 200$.

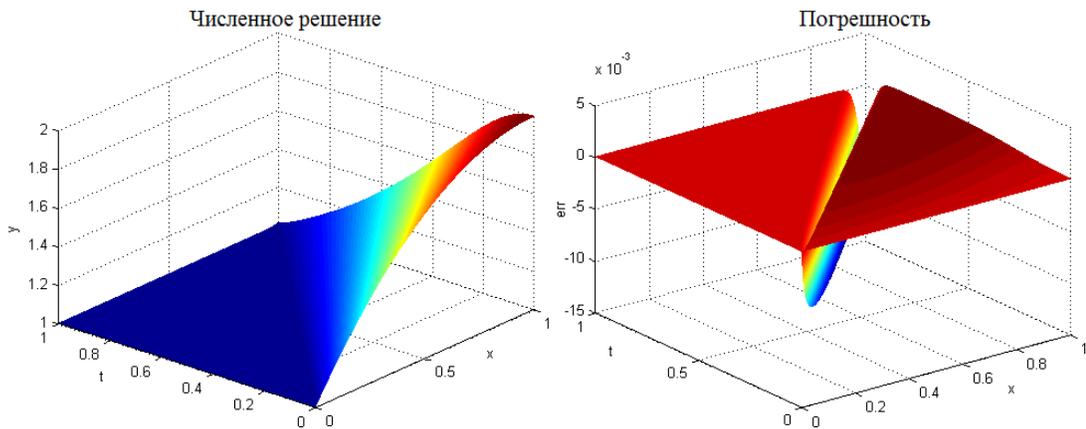


Рис. 3: Численное решение задачи (3.1) по схеме (3.2) при $N = 500$, $J = 1000$.

Максимальную погрешность численное решение имеет в окрестности линии $t = x$, так как на этой линии аналитическое решение, оставаясь непрерывным, претерпевает скачок производной.

Рассмотрим теперь неявную линейную схему:

$$\begin{cases} \frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} + y_n^j \frac{y_n^{j+1} - y_{n-1}^{j+1}}{h} = 0, & n = 1, 2, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, J - 1, \\ y_n^0 = 2x_n - x_n^2 + 1, & n = 0, 1, \dots, N, \\ y_0^j = 1, & j = 0, 1, \dots, J. \end{cases} \quad (3.3)$$

Используя метод «замороженных» коэффициентов, приходим к выводу, что схема (3.3) безусловно устойчива. Результаты численного решения задачи (3.1) по схеме (3.3) приведены на рис. 4 - 5.

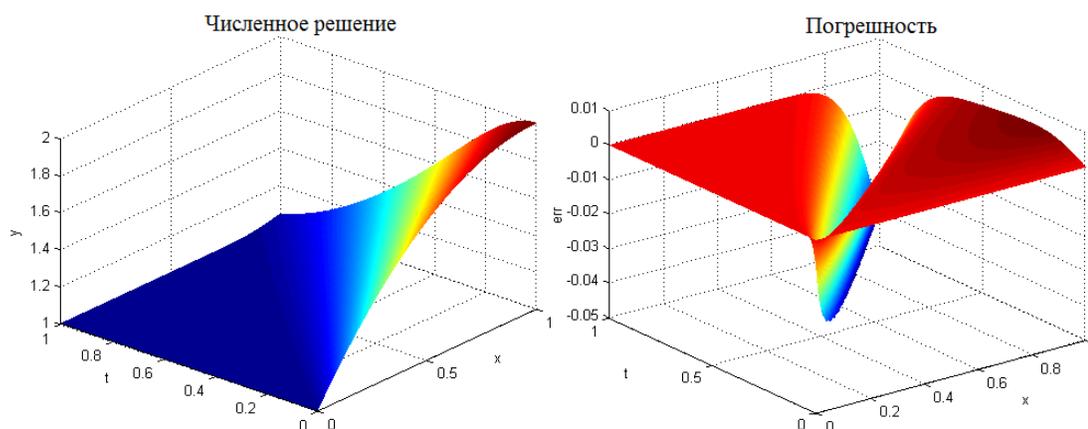


Рис. 4: Численное решение задачи (3.1) по схеме (3.3) при $N = 100$, $J = 200$.

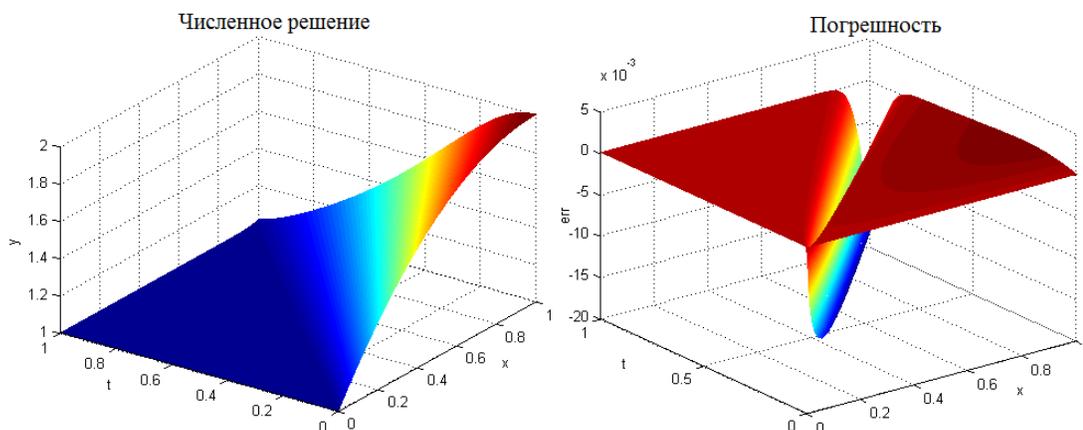


Рис. 5: Численное решение задачи (3.1) по схеме (3.3) при $N = 500$, $J = 1000$.

Итак, хотя схема (3.3) безусловно устойчива, на одной и той же сетке она дает результат несколько хуже, чем схема (3.2).

Рассмотрим также линейную схему для задачи (3.1), построенную с помощью четырехточечного шаблона:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y_n^{j+1} - y_n^j + y_{n-1}^{j+1} - y_{n-1}^j}{2\tau} + \frac{y_n^j + y_{n-1}^j}{2} \cdot \frac{y_n^{j+1} - y_{n-1}^{j+1} + y_n^j - y_{n-1}^j}{2h} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N, \\ y_n^0 = 2x_n - x_n^2 + 1, \quad n = 0, 1, \dots, N, \\ y_0^j = 1, \quad j = 0, 1, \dots, J. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Как и в предыдущем случае, на основании метода «замороженных» коэффициентов можно сделать вывод о безусловной устойчивости схемы (3.4). Однако данная схема является *немонотонной*. Для задачи, имеющей непрерывное решение без резких фронтов, это не приводит к ошибочным результатам, хотя небольшие колебания решения вблизи линии излома можно видеть на графике погрешности (см. рис. 6 - 7).

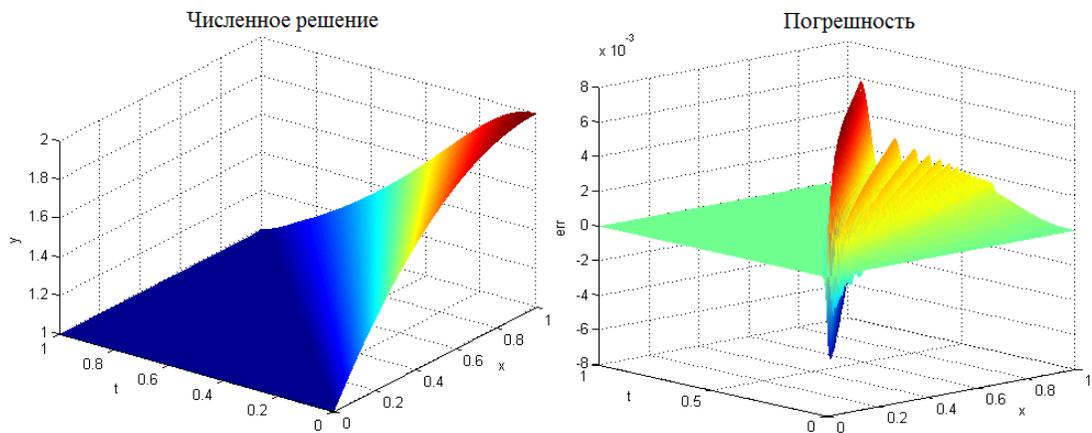


Рис. 6: Численное решение задачи (3.1) по схеме (3.4) при $N = 100$, $J = 200$.

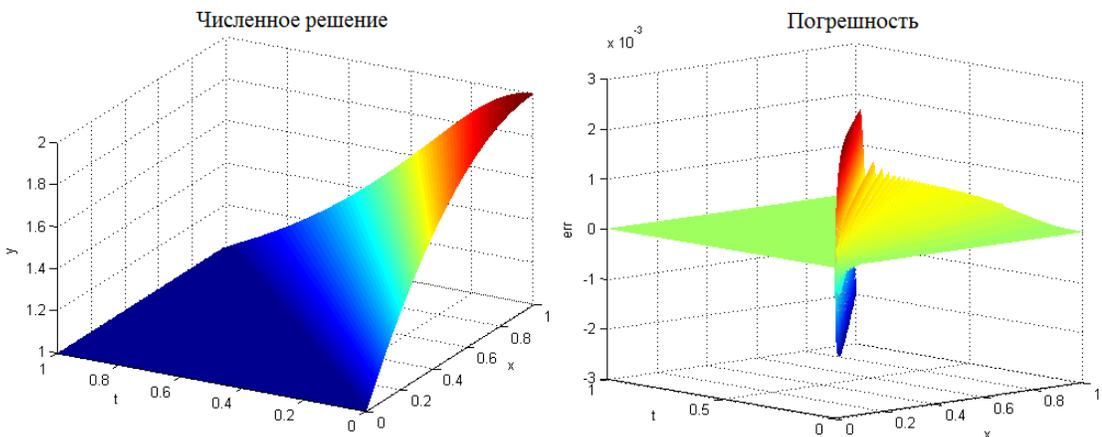


Рис. 7: Численное решение задачи (3.1) по схеме (3.4) при $N = 500$, $J = 1000$.

Заметим, что в рассмотренных примерах линейные схемы (3.2), (3.3) и (3.4) сходятся к решению задачи (3.1) потому, что в начальный момент времени функция $u(x, 0)$ отлична от нуля. Если бы в задаче было нулевое начальное условие, то при $n = 1, 2, \dots, N$ решение разностных схем (3.2) и (3.3) оставалось бы равным нулю при всех $j = 0, 1, \dots, J$, так как разностные уравнения в этих схемах вырождались бы в уравнение $y_n^{j+1} = y_n^j$ при всех возможных n и j . Схема (3.4) также не сходилась бы к решению задачи (3.1). Это означает, что линейные схемы при решении нелинейных задач следует использовать с осторожностью и анализировать результат их применения.

Рассмотрим пример нелинейной неявной схемы для задачи (3.1):

$$\begin{cases} \frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} + y_n^{j+1} \frac{y_n^{j+1} - y_{n-1}^{j+1}}{h} = 0, & n = 1, 2, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, J-1, \\ y_n^0 = 2x_n - x_n^2 + 1, & n = 0, 1, \dots, N, \\ y_0^j = 1, & j = 0, 1, \dots, J. \end{cases} \quad (3.5)$$

Линеаризуем схему (3.5) и исследуем ее на устойчивость. Пусть \bar{y}_n^j — точное решение, δy_n^j — его погрешность. Тогда для δy_n^j получаем следующее линеаризованное уравнение:

$$\frac{\delta y_n^{j+1} - \delta y_n^j}{\tau} + \delta y_n^{j+1} \frac{\bar{y}_n^{j+1} - \bar{y}_{n-1}^{j+1}}{h} + \bar{y}_n^{j+1} \frac{\delta y_n^{j+1} - \delta y_{n-1}^{j+1}}{h} = 0.$$

Если $\bar{y}_n^{j+1} - \bar{y}_{n-1}^{j+1} \geq 0$ для всех n и j (что имеет место в рассматриваемой задаче), то схема безусловно устойчива. В самом деле, «замораживая» коэффициенты, получаем:

$$\frac{\delta y_n^{j+1} - \delta y_n^j}{\tau} + C_1 \delta y_n^{j+1} + C_2 \frac{\delta y_n^{j+1} - \delta y_{n-1}^{j+1}}{h} = 0,$$

где $C_1 = (\bar{y}_n^{j+1} - \bar{y}_{n-1}^{j+1})/h$ и $C_2 = \bar{y}_n^{j+1}$ при некоторых фиксированных значениях n и j .

Применяя метод гармоник, находим множители роста:

$$\lambda = \frac{1}{1 + C_1\tau + C_2\tau/h - (C_2\tau/h)e^{-i\alpha}}.$$

В рассматриваемом случае в силу монотонности схемы и выбора начальных и граничных условий выполняются неравенства $C_1 \geq 0$ и $C_2 > 0$ при всех $n = 1, 2, \dots, N$ и $j = 0, 1, \dots, J-1$, обеспечивающие выполнение условия $|\lambda| \leq 1$ для любого вещественного α во всех узлах сетки. Следовательно, можно ожидать безусловной устойчивости схемы.

При каждом $n = 1, 2, \dots, N$ и $j = 0, 1, \dots, J-1$ неизвестным в уравнении (3.5) является y_n^{j+1} . Уравнение для y_n^{j+1} можно переписать в виде:

$$f(y_n^{j+1}) = 0, \quad \text{где} \quad f(y_n^{j+1}) = y_n^{j+1} + \frac{\tau}{h} (y_n^{j+1})^2 - \frac{\tau}{h} y_n^{j+1} y_{n-1}^{j+1} - y_n^j. \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) является нелинейным алгебраическим уравнением относительно y_n^{j+1} . В данной задаче это уравнение квадратное и его можно решить аналитически. В общем случае при использовании нелинейных схем получаются системы нелинейных алгебраических уравнений, которые аналитически не решаются. Если соответствующая нелинейная система имеет решение, то ее можно решить приближенно, используя итерационные методы.

Решим уравнение (3.6) с помощью метода Ньютона. При фиксированных n и j нам необходимо найти корень уравнения $f(v) = 0$. Соответствующий итерационный процесс нахождения этого корня имеет вид:

$$v^{s+1} = v^s - \frac{f(v^s)}{f'(v^s)}, \quad f'(v^s) = 1 + \frac{2\tau}{h}v^s - \frac{\tau}{h}y_n^{j+1}.$$

В качестве начального приближения для v можно взять значение сеточной функции y со слоя j : $v^0 = y_n^j$. Итерационный процесс завершается при выполнении условия:

$$\left| \frac{v^{s+1} - v^s}{1 - q} \right| < \varepsilon, \quad q = \frac{v^{s+1} - v^s}{v^s - v^{s-1}}.$$

На рис. 8 - 9 приведены результаты расчета по схеме (3.5) для $\varepsilon = 10^{-11}$.

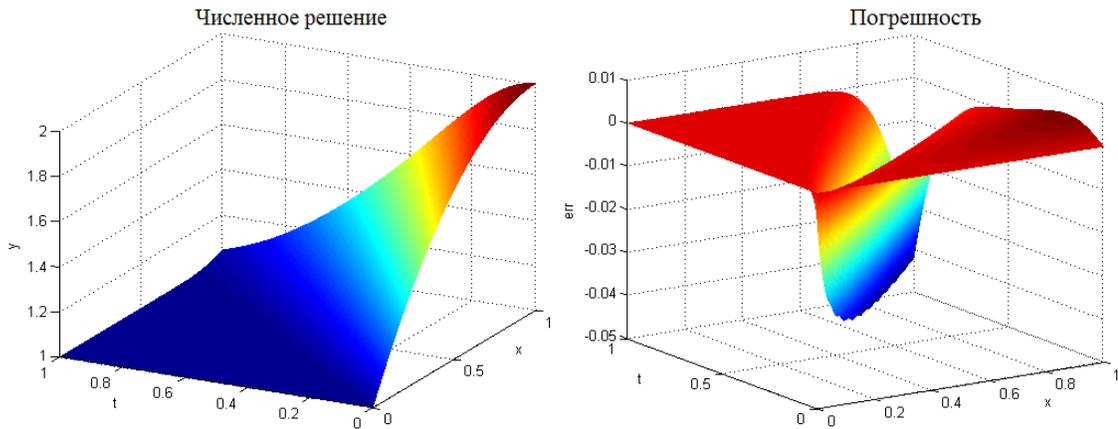


Рис. 8: Численное решение задачи (3.1) по схеме (3.5) при $N = 100$, $J = 200$.

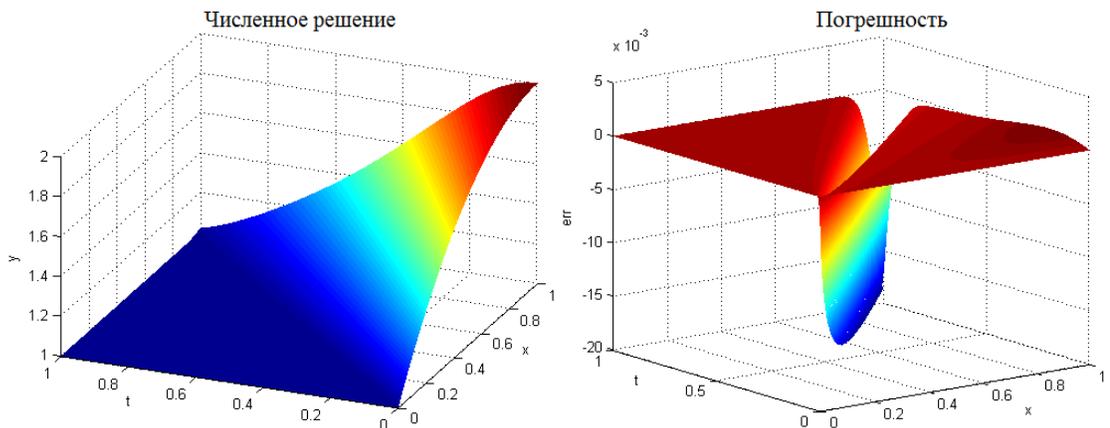


Рис. 9: Численное решение задачи (3.1) по схеме (3.5) при $N = 500$, $J = 1000$.

4 Консервативность и ложная сходимость

Если при помощи разностной схемы ищется обобщенное решение начально-краевой задачи, то есть решение, которое может иметь изломы и даже разрывы, то нужно быть особенно внимательным при обосновании аппроксимации разностным уравнением исходного дифференциального. Все оценки порядков аппроксимации, получаемые разложением функций в разностных выражениях в ряды Тейлора, справедливы только для гладких функций. Формальное применение схем, обладающих той или иной аппроксимацией на гладком решении, в случае обобщенного решения может приводить к ошибочному результату.

Пусть, например, мы ищем разрывное решение квазилинейного уравнений переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (4.1)$$

которое в некоторый момент времени t имеет вид:

$$u(x, t) = \begin{cases} a, & x < \xi(t) \\ b, & x > \xi(t). \end{cases}$$

Тогда скорость движения разрыва равна $\frac{d\xi}{dt} = \frac{a+b}{2}$.

Аппроксимируем уравнение (4.1) с помощью линейной явной схемы:

$$\frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} + y_n^j \frac{y_n^j - y_{n-1}^j}{h} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_n^{j+1} = y_n^j - \frac{\tau y_n^j}{h} (y_n^j - y_{n-1}^j).$$

Пусть в момент времени t_j разрыв решения находится на участке $[x_{n_0}, x_{n_0+1}]$:

$$y_n^j = \begin{cases} a, & n \leq n_0, \\ b, & n \geq n_0 + 1. \end{cases}$$

Тогда на следующем слое по времени решение будет иметь вид:

$$y_n^{j+1} = \underbrace{y_n^j}_a - \frac{\tau}{h} \underbrace{y_n^j}_a (\underbrace{y_n^j}_a - \underbrace{y_{n-1}^j}_a) = a, \quad n \leq n_0,$$

$$y_{n_0+1}^{j+1} = \underbrace{y_{n_0+1}^j}_b - \frac{\tau}{h} \underbrace{y_{n_0+1}^j}_b (\underbrace{y_{n_0+1}^j}_b - \underbrace{y_{n_0}^j}_a) = b - \frac{b\tau}{h}(b-a),$$

$$y_n^{j+1} = \underbrace{y_n^j}_b - \frac{\tau}{h} \underbrace{y_n^j}_b (\underbrace{y_n^j}_b - \underbrace{y_{n-1}^j}_b) = b, \quad n \geq n_0 + 2.$$

Следовательно, если $\tau = \frac{h}{b}$, то

$$y_n^{j+1} = \begin{cases} a, & n \leq n_0 + 1, \\ b, & n \geq n_0 + 2, \end{cases}$$

то есть форма решения сохраняется, но разрыв движется со скоростью b , так как за один шаг по времени он проходит один шаг по координате. При этом в аналитическом решении разрыв движется со скоростью $\frac{a+b}{2}$. Если устремить шаги τ и h к нулю так, чтобы между ними сохранялось соотношение $\frac{h}{\tau} = b$, то будет иметь место так называемая *ложная сходимость*, когда разностное решение сходится к некоторой функции, не совпадающей с аналитическим решением. Причина этого явления заключается в том, что рассмотренная разностная схема на разрыве решения не аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение.

Для того чтобы избежать ложной сходимости, нужно использовать так называемые *консервативные схемы*, которые отражают на сетке те же законы сохранения, что были в исходном дифференциальном уравнении.

При выводе уравнения переноса из закона баланса сначала получается интегральное уравнение

$$\int_{x_1}^{x_2} (u(x, t_2) - u(x, t_1)) dx = \int_{t_1}^{t_2} (c \cdot u|_{x_1} - c \cdot u|_{x_2}) dt, \quad (4.2)$$

где $c = c(x, t, u)$ — скорость переноса, x_1, x_2 — произвольные значения переменной x в расчетной области, такие что $x_1 < x_2$, t_1, t_2 — произвольные моменты времени, такие что $0 < t_1 < t_2$.

От интегрального уравнения (4.2) можно перейти к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (c \cdot u) = 0, \quad (4.3)$$

используя теорему о среднем и предполагая, что u и c — дифференцируемые функции. Разрывные решения уравнения (4.3) являются обобщенными и в действительности они удовлетворяют интегральному уравнению (4.2). Поэтому при построении консервативной схемы для уравнения (4.3) за основу нужно брать уравнение (4.2).

Рассмотрим уравнение (4.2) на произвольной ячейке сетки:

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} (u(x, t_{j+1}) - u(x, t_j)) dx = \int_{t_j}^{t_{j+1}} (c \cdot u|_{x_{n-1}} - c \cdot u|_{x_n}) dt. \quad (4.4)$$

Построим разностную схему уравнения (4.3), исходя из уравнения (4.4). Используем для этого, например, шаблон, приведенный на рис. 10. Аппроксимируя интегралы в уравнении

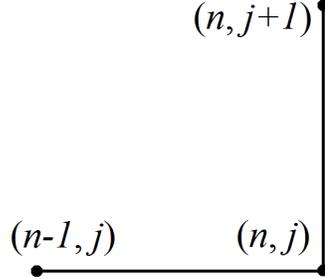


Рис. 10: Шаблон консервативной схемы для уравнения (4.3)

(4.4) по формуле прямоугольников, получаем разностное уравнение:

$$(y_n^{j+1} - y_n^j)h = - \{ (cy)_n^j - (cy)_{n-1}^j \} \tau,$$

или, что то же самое, уравнение

$$\frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} + \frac{(cy)_n^j - (cy)_{n-1}^j}{h} = 0,$$

которое будет отражать на сетке закон сохранения (4.2).

Заметим, что для построения консервативной схемы для уравнения переноса не обязательно переходить к интегральному уравнению. Достаточно представить дифференциальное уравнение в *дивергентном* виде и аппроксимировать его на сетке в соответствии с выбранным шаблоном.

5 Пример реализации консервативных схем для квазилинейного уравнения переноса

Рассмотрим начально-краевую задачу для того же уравнения, что и в примере (3.1),

но с нулевым начальным условием:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in (0, 1], t \in (0, 1], \\ u(x, 0) = 0, & u(0, t) = 4t. \end{cases} \quad (5.1)$$

Найдем ее аналитическое решение с помощью метода характеристик. Характеристики квазилинейного уравнения переноса для рассматриваемой задачи имеют вид:

$$\begin{cases} t - t_0 = \frac{x - x_0}{u(x_0, t_0)}, \\ u(x, t) = u(x_0, t_0). \end{cases}$$

Если взять $(x_0, t_0) = (x_0, 0)$, где $x_0 \in [0, 1]$, то проекции характеристик на плоскость x, t принимают вид $x = x_0$, так как $u(x_0, 0) = 0$. По этим прямым переносятся начальное условие $u(x, 0) = 0$.

Если выбрать $(x_0, t_0) = (0, t_0)$, где $t_0 \in [0, 1]$, то проекции характеристик на плоскость x, t будут иметь вид $t - t_0 = \frac{x}{4t_0}$, так как $u(0, t_0) = 4t_0$. Из этого уравнения можно выразить t_0 как функцию x и t :

$$t_0^2 - tt_0 + \frac{x}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0^\pm = \frac{t}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{x}{t^2}} \right).$$

Так как при $x = 0$ должно получаться равенство $t = t_0$ (что следует из уравнения проекций характеристик), то

$$t_0(x, t) = \frac{t}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{x}{t^2}} \right).$$

Полученное выражение является вещественным только в области $x \leq t^2$, то есть решение задачи (5.1) может определяться граничным условием $u(0, t_0) = 4t_0$ только при $x \leq t^2$.

Прямые $t - t_0 = \frac{x}{4t_0}$, по которым переносятся граничное условие, пересекаются с прямыми $x = x_0$, по которым переносятся начальное условие (см. рис. 11), то есть решение задачи (5.1) имеет разрыв. Линия разрыва выходит из начала координат. В области выше линии разрыва решение определяется граничным условием и имеет вид:

$$u(x, t) = u(0, t_0(x, t)) = 4t_0(x, t) = 2t \left(1 + \sqrt{1 - \frac{x}{t^2}} \right).$$

В области ниже линии разрыва решение определяется начальным условием и остается равным нулю.

Для того, чтобы получить уравнение линии разрыва, воспользуемся условиями Гюгонио, которые для рассматриваемого квазилинейного уравнения переноса принимают вид:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u^+ + u^-}{2},$$

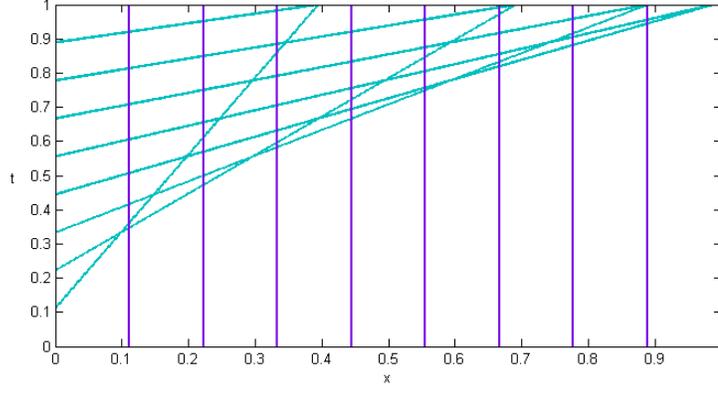


Рис. 11: Проекция характеристик задачи (5.1) на плоскость x, t . Зеленым цветом обозначены прямые, по которым переносится граничное значение, сиреневым — прямые, по которым переносится начальное значение.

где $x = x(t)$ — линия разрыва решения, $u^+(x, t) = 2t \left(1 + \sqrt{1 - x/t^2} \right)$ — предельное значение функции u в точке (x, t) , принадлежащей линии разрыва, если приближаться к (x, t) в области выше разрыва, а $u^-(x, t) = 0$ — предельное значение функции u в той же точке, если приближаться к ней в области ниже линии разрыва. Учитывая, что разрыв решения начинается в начале координат, для функции $x = x(t)$ получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = t \left(1 + \sqrt{1 - \frac{x}{t^2}} \right), \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Будем искать решение задачи (5.2) в виде $x = At^2$. Тогда

$$\begin{cases} 2A = 1 + \sqrt{1 - A}, \\ A \leq 1, \quad A \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 4A^2 - 3A = 0 \Rightarrow A = \frac{3}{4}.$$

Итак, аналитическое решение задачи (5.1) имеет вид:

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{если } x > \frac{3t^2}{4}, \\ 2t \left(1 + \sqrt{1 - \frac{x}{t^2}} \right), & \text{если } x < \frac{3t^2}{4}. \end{cases} \quad (5.3)$$

График аналитического решения задачи (5.1) и профили функции $u(x, t)$ для нескольких фиксированных моментов времени представлены на рис. 12.

Численное решение задачи (5.1) будем строить с помощью консервативных схем. Для этого представим уравнение в дивергентном виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0.$$

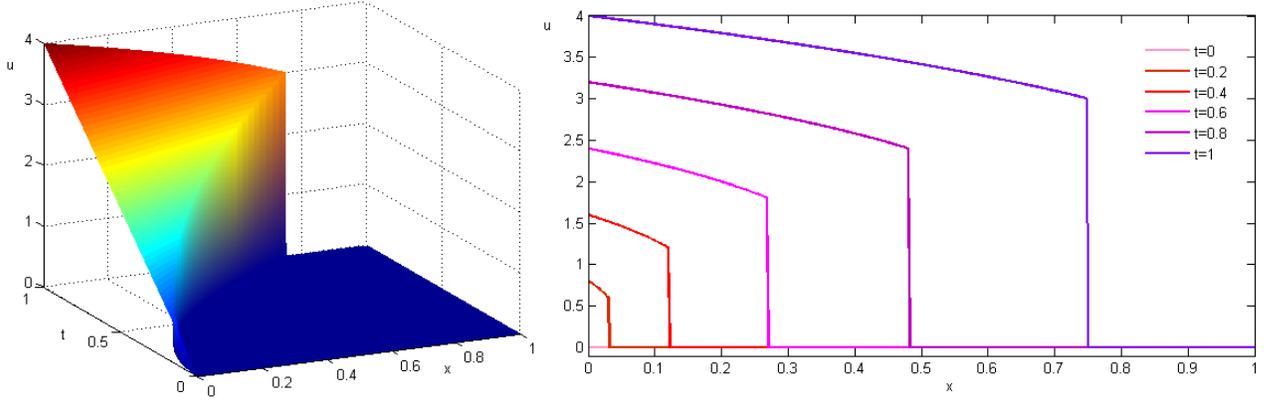


Рис. 12: Аналитическое решение задачи (5.1)

Так как в начальный момент времени искомая функция $u(x, t)$ равна нулю, в данном случае нельзя пользоваться явными схемами. Построим консервативную неявную схему, пользуясь шаблоном, приведенным на рис. 13.

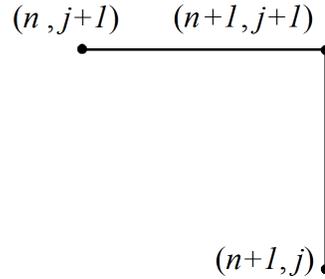


Рис. 13: Шаблон неявной консервативной схемы для задачи (5.1)

Соответствующая разностная схема имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{y_{n+1}^{j+1} - y_{n+1}^j}{\tau} + \frac{(y_{n+1}^{j+1})^2 - (y_{n+1}^j)^2}{2h} = 0, & n = 0, 1, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, J-1, \\ y_n^0 = 0, & n = 0, 1, \dots, N, \\ y_0^j = 4t_j, & j = 0, 1, \dots, J. \end{cases} \quad (5.4)$$

Исследуем схему (5.4) на устойчивость. Для этого проведем ее линейризацию, а затем используем метод «замороженных» коэффициентов.

Пусть \bar{y}_n^j — точное решение системы (5.4), а δy_n^j — его погрешность. Тогда линейризованное разностное уравнение схемы (5.4) будет иметь вид:

$$\frac{\delta y_{n+1}^{j+1} - \delta y_{n+1}^j}{\tau} + \frac{\bar{y}_{n+1}^{j+1} \cdot \delta y_{n+1}^{j+1} - \bar{y}_n^{j+1} \cdot \delta y_n^{j+1}}{h} = 0. \quad (5.5)$$

Применяя к уравнению (5.5) «замораживание» коэффициентов, можно сделать вывод, что схема (5.4) безусловно устойчива (скорее всего).

При каждом фиксированном n и j неизвестным в разностном уравнении схемы (5.4) является y_{n+1}^{j+1} . Будем искать его методом Ньютона, используя в качестве начального приближения уже найденное значение y_{n+1}^j .

Результаты расчетов по схеме (5.4) для набора параметров $N = J = 1000$, $\varepsilon = 10^{-11}$ приведены на рис. 14 - 15.

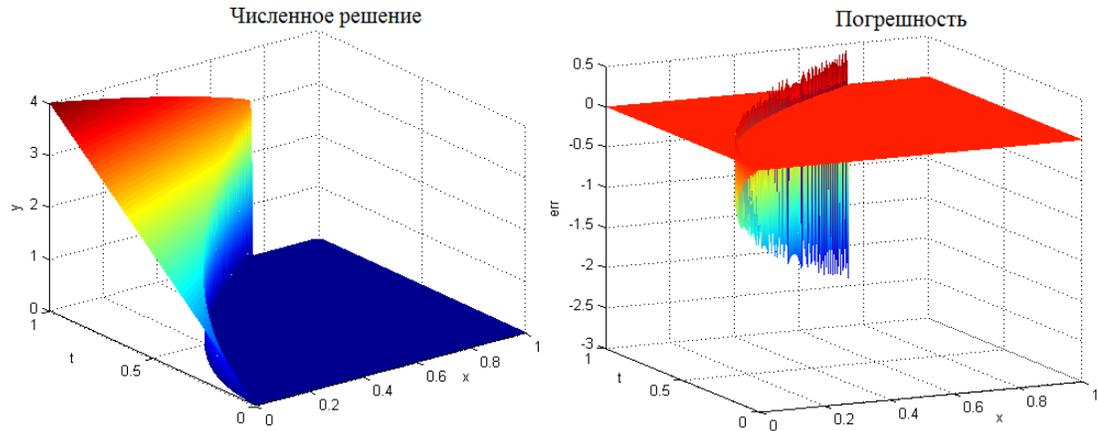


Рис. 14: Численное решение задачи (5.1) по схеме (5.4) и его погрешность

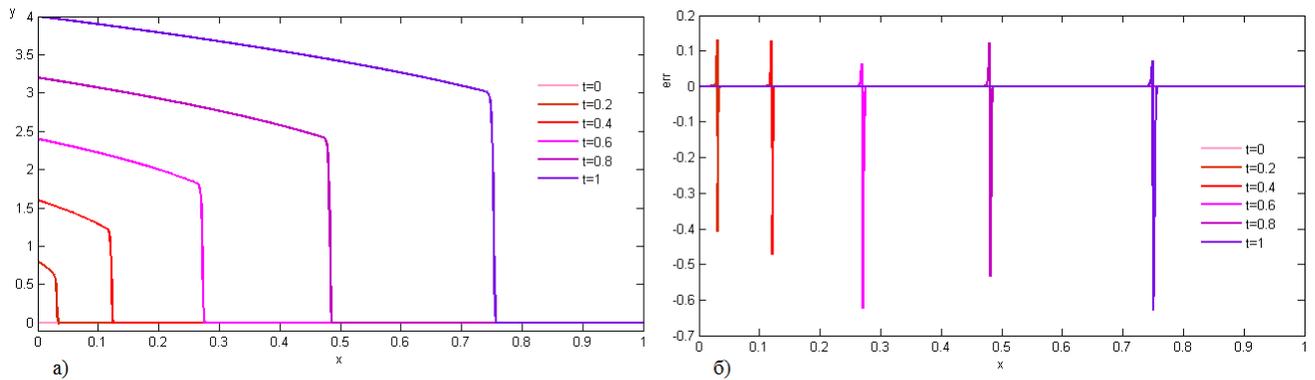


Рис. 15: Профиль численного решения задачи (5.1) по схеме (5.4) для нескольких моментов времени (а) и отношение погрешности к максимальному значению $u(x, t)$ в эти же моменты времени (б).

Всплеск ошибки в окрестности разрыва связан с тем, что численное решение сглаживает фронт волны (см. рис. 15).

Для задач с разрывными решениями или непрерывными решениями, имеющими резкие фронты, схемы, построенные с помощью четырехточечного шаблона, обладают сильной немонотонностью. Немонотонность проявляется в том, что вблизи фронтов или разрывов у численного решения появляется характерная «разболтка», которая нарастает с уменьшением шагов сетки.

В качестве примера рассмотрим консервативную схему с четырехточечным шаблоном для задачи (5.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y_{n+1}^{j+1} - y_{n+1}^j + y_n^{j+1} - y_n^j}{2\tau} + \frac{(y_{n+1}^{j+1})^2 - (y_n^{j+1})^2 + (y_{n+1}^j)^2 - (y_n^j)^2}{4h} = 0, \quad \begin{array}{l} n = 0, 1, \dots, N-1, \\ j = 0, 1, \dots, J-1, \end{array} \\ y_n^0 = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N, \\ y_0^j = 4t_j, \quad j = 0, 1, \dots, J. \end{array} \right. \quad (5.6)$$

Как и в случае схемы (5.4), при каждом фиксированном n и j неизвестным в системе (5.6) является значение y_{n+1}^{j+1} , которое может быть найдено приближенно при помощи метода Ньютона.

Результаты расчетов по схеме (5.6) для набора параметров $N = J = 50$, $\varepsilon = 10^{-9}$ приведены на рис. 16.

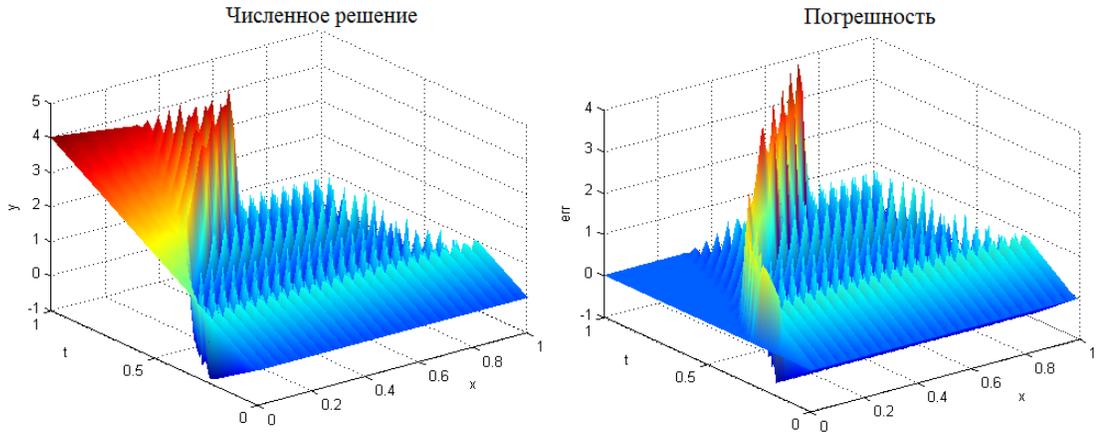


Рис. 16: Численное решение задачи (5.1) по немонотонной схеме (5.6) и его погрешность