ЛЕКЦИЯ 6

Различные обобщения и границы применимости

§ 10. Непродолжаемое решение интегрального уравнения Вольтерра

1. Существование и единственность непродолжаемого решения интегрального уравнения. Рассмотрим в банаховом пространстве B с нормой $\|\cdot\|$ интегральное уравнение

$$u(t) = \bar{u}(t) + \int_0^t K(t,\tau)A(\tau, u(\tau))\,d\tau. \tag{1}$$

Условия на ядро $K(t,\tau) : \mathbb{R}_+^2 \to L(B,B)$[1] и функции $A(t,u) : \mathbb{R}_+ \times B \to B$, $\bar{u}(t) : \mathbb{R}_+ \to B$ будут сформулированы ниже. Интегралы здесь и далее понимаются в смысле Римана (см. лекцию 1).

Определение 1. Назовём функцию $u(t)$ *решением уравнения* (1) *на промежутке* $\mathcal{T} \equiv [0;T]$[2], если $u(t) \in C(\mathcal{T}, B)$ и $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) при всех $t \in \mathcal{T}$.

Замечание 1. В дальнейшем слова «уравнения (1)» будем часто опускать.

Замечание 2. Как видно, мы используем не понятие «решение», а понятие «решение на промежутке». Если $u_1(t)$, $u_2(t)$ — решения соответственно на промежутках $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ и $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$, то они считаются *разными* решениями независимо от совпадения значений функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ на $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$.

Определение 2. Назовём решение u_2 на промежутке $\mathcal{T}_2$ *продолжением* решения $u_1(t)$ на промежутке $\mathcal{T}_1$, если

$$1)\ \mathcal{T}_2 \supseteq \mathcal{T}_1 \text{ и } 2)\ u_2(t) = u_1(t) \text{ на } \mathcal{T}_1.$$

Замечание 3. Нам удобно использовать такую терминологию, в которой решение является своим собственным продолжением.

Определение 3. Решение u_2 на промежутке $\mathcal{T}$ назовём *непродолжаемым*, если оно не имеет продолжения, отличного от него самого, т. е. если не существует такого решения $\tilde{u}(t)$ на промежутке $\widetilde{\mathcal{T}}$, что

$$1)\ \tilde{u}(t) \text{ — продолжение решения } u(t),\ 2)\ \widetilde{\mathcal{T}} \supsetneq \mathcal{T}.$$

Если же такое решение $\tilde{u}(t)$ существует, то решение $u(t)$ назовём *продолжаемым.*

Для формулировки условий на функцию $A(t,u)$ рассмотрим метрическое пространство $\mathbb{R}_+ \times B$ с расстоянием

$$\rho\big((t_1,u_1),(t_2,u_2)\big) = \max(|t_1-t_2|, \|u_1-u_2\|). \tag{2}$$

Очевидно, это пространство полно. Пусть отображение

$$A(t,u) : \mathbb{R}_+ \times B \to B$$

[1] Здесь и далее $\mathbb{R}_+ \equiv [0;+\infty)$.

[2] Т. е. $\mathcal{T} = [0;T]$ или $\mathcal{T} = [0;T)$, причём в последнем случае допускается $T = +\infty$. Если не оговорено иное, промежуток $\mathcal{T}$ всегда начинается с 0 и $0 \in \mathcal{T}$.

обладает свойствами (A_1) и (A_2):

(A_1) оно непрерывно в смысле метрики (2);

(A_2) существует такая функция

$$\mu(t,s) : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+,$$

ограниченная на каждом прямоугольнике $[0;T] \times [0;S]$ $(T, S > 0)$, что

$$\forall t \geqslant 0,\ \forall u_1, u_2 \in B\ \ \|A(t,u_1) - A(t,u_2)\| \leqslant \mu(t, \max(\|u_1\|, \|u_2\|))\|u_1 - u_2\|.$$

Сразу отметим, что из (A_1) вытекает свойство (A_3):

(A_3) функция $\nu(t) \equiv \|A(t,\theta)\|$ (где θ — нулевой элемент пространства B) ограниченна на каждом отрезке $[0;T]$. Действительно, в силу (A_1) числовая функция $\|A(t,\theta)\|$ непрерывна при всех $t \geqslant 0$.

Далее, из (A_2) и (A_3) следует свойство

(A_4) существует такая функция

$$\lambda(t,s) : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+,$$

ограниченная на каждом прямоугольнике $[0;T] \times [0;S]$ $(T, S > 0)$, что

$$\forall t \geqslant 0,\ \forall u \in B\ \ \|A(t,u)\| \leqslant \lambda(t, \|u\|).$$

Действительно, имеем

$$\|A(t,u)\| \leqslant \|A(t,\theta)\| + \|A(t,u) - A(t,\theta)\| \leqslant \nu(t) + \mu(t,\|u\|)\|u\| =: \lambda(t,\|u\|),$$

причём

$$\sup_{\substack{t\,\in\,[0;T]\\ s\,\in\,[0;S]}} \lambda(t,s) \leqslant \sup_{t\in[0;T]} \nu(t) + S \sup_{\substack{t\,\in\,[0;T]\\ s\,\in\,[0;S]}} \mu(t,s).$$

Нам понадобится лемма, доказанная в лекции 3. Для удобства напомним её формулировку.

Лемма 1. Пусть $u(t) \in C([a;b], B)$, $[a;b] \subset \mathbb{R}_+$. Тогда сложная функция $f(t) \equiv A(t, u(t))$ (где A — введённое выше отображение) непрерывна: $f(t) \in C([a;b], B)$.

Теперь сформулируем и докажем основную теорему.

Теорема 1. Пусть

1) $\bar{u}(t) \in C(\mathbb{R}_+, B)$;

2) ядро $K(t,\tau)$ непрерывно по совокупности переменных на $\mathbb{R}_+^2$ (в равномерной операторной топологии, т. е. по норме банаховой алгебры $L(B,B)$);

3) функция $A(t,u)$ обладает свойствами (A_1) и (A_2).

Тогда верны следующие утверждения.

1. Существует хотя бы одно решение $u(t)$ на промежутке $\mathcal{T}$, $\mathcal{T} \neq \varnothing$, $\mathcal{T} \neq \{0\}$.

2. Из любых двух решений u_1, u_2 одно является продолжением другого. (В частности, совпадающие решения являются продолжениями друг друга.)

3. Если $u(t)$ — решение на *отрезке* $[0;T]$, то решение $u(t)$ продолжаемо. (В частности, «решение» $\bar{u}(0)$ продолжаемо с «отрезка» $\{0\}$, как следует из п. 1.)

4. Существует такое $T_0 > 0$ и такое решение $u_0(t)$ на промежутке $\mathcal{T}_0 = [0;T_0)$, что $u_0(t)$ — непродолжаемое решение.

5. Непродолжаемое решение единственно.

6. Для непродолжаемого решения верно, что если $T_0 < +\infty$, то

$$\limsup_{t\to T_0-0} \|u(t)\| = +\infty. \tag{3}$$

При этом если $K(t,\tau) \equiv I$ (единичный оператор), то непродолжаемое решение является не просто неограниченным, но бесконечно большим:

$$\lim_{t\to T_0-0} \|u(t)\| = +\infty. \tag{4}$$

В случае $T_0 = +\infty$ соотношение (3) (соответственно (4)) может как выполняться, так и не выполняться.

Замечание 4. В частности, можно рассматривать числовые ядра $K(t,\tau) : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$: банахова алгебра $\mathbb{R}$ изометрически изоморфна подалгебре скалярных операторов в $L(B,B)$.

Доказательство.

1. Для каждого $T > 0$ рассмотрим банахово пространство

$$\mathbb{B}_T := C([0;T],B), \quad \|u\|_{\mathbb{B}_T} \equiv \sup_{t\in[0;T]} \|u(t)\|,$$

и оператор $\mathbb{A}_T : \mathbb{B}_T \to \mathbb{B}_T$,

$$\mathbb{A}_T(u) := \bar{u}(t) + \int_0^t K(t,\tau)A(\tau,u(\tau))\,d\tau.$$

Заметим, что при условии непрерывности функции $u(t)$ интеграл в правой части последней формулы непрерывен. (Это следует из леммы 1 и стандартных оценок, использующих равномерную непрерывность ядра $K(t,\tau)$ на любом прямоугольнике $[0;T_1] \times [0;T_2]$). Поэтому функция $u(t) \in C([0;T],B)$ будет решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда она является решением уравнения

$$u = \mathbb{A}_T(u) \tag{5}$$

в банаховом пространстве $\mathbb{B}_T$.

Сейчас мы укажем, как выбрать $T > 0$ таким образом, чтобы доказать однозначную разрешимость уравнения (5) методом сжимающих отображений. Для этого зафиксируем некоторое произвольно выбранное $R > 0$ и рассмотрим замкнутое подмножество

$$\mathbb{B}_T^R = \left\{ u(t) \in \mathbb{B}_T \mid \sup_{t\in[0;T]} \|u(t) - \bar{u}(t)\| \equiv \|u - \bar{u}\|_{\mathbb{B}_T} \leqslant R \right\}.$$

В силу общих свойств метрических пространств множество $\mathbb{B}_T^R$ само является полным метрическим пространством относительно расстояния, порождённого нормой пространства $\mathbb{B}_T$. Итак, нам требуется, чтобы оператор $\mathbb{A}_T$ а) не выводил из множества $\mathbb{B}_T^R$; б) являлся в нём сжимающим.

Для а) проведём оценку

$$\left\|\int_0^t K(t,\tau)A(\tau,u(\tau))\,d\tau\right\|_{\mathbb{B}_T} \equiv \sup_{t\in[0;T]}\left\|\int_0^t K(t,\tau)A(\tau,u(\tau))\,d\tau\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T \|K(t,\tau)\|\|A(\tau,u(\tau))\|\,d\tau \leqslant T\sup_{t,\tau\in[0;T]}\|K(t,\tau)\| \sup_{\substack{t\,\in\,[0;T]\\ s\,\in\,[0;\,\|\bar{u}(t)\|_{\mathbb{B}_T}+R]}} \lambda(t,s). \quad (6)$$

Для б) — оценку

$$\left\|\int_0^t K(t,\tau)A(\tau,u_1(\tau))\,d\tau - \int_0^t K(t,\tau)A(\tau,u_2(\tau))\,d\tau\right\|_{\mathbb{B}_T} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T \|K(t,\tau)\|\|A(\tau,u_1(\tau))-A(\tau,u_2(\tau))\|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t,\tau\in[0;T]}\|K(t,\tau)\| \sup_{\substack{t\,\in\,[0;T]\\ s\,\in\,[0;\,\|\bar{u}(t)\|_{\mathbb{B}_T}+R]}} \mu(t,s)\int_0^T \|u_1(\tau)-u_2(\tau)\|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant T\sup_{t,\tau\in[0;T]}\|K(t,\tau)\| \sup_{\substack{t\,\in\,[0;T]\\ s\,\in\,[0;\,\|\bar{u}(t)\|_{\mathbb{B}_T}+R]}} \mu(t,s)\|u_1-u_2\|_{\mathbb{B}_T}. \quad (7)$$

Заметим, что в силу свойств функций μ и λ, а также непрерывности функций $\bar{u}(t)$ и $K(t,\tau)$ точные верхние грани в (6) и (7) конечны (и, очевидно, не возрастают при уменьшении T). Поэтому существует такое $T>0$, что выполняются условия

$$\begin{cases} T\sup\limits_{t,\tau\in[0;T]}\|K(t,\tau)\| \sup\limits_{\substack{t\,\in\,[0;T]\\ s\,\in\,[0;\,\|\bar{u}(t)\|_{\mathbb{B}_T}+R]}} \lambda(t,s) \leqslant R, \\ T\sup\limits_{t,\tau\in[0;T]}\|K(t,\tau)\| \sup\limits_{\substack{t\,\in\,[0;T]\\ s\,\in\,[0;\,\|\bar{u}(t)\|_{\mathbb{B}_T}+R]}} \mu(t,s) \leqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

В этом случае в силу принципа сжимающих отображений уравнение (5) однозначно разрешимо, а поэтому и исходное уравнение (1) имеет единственное решение на промежутке $[0;T]$.

2. Рассмотрим сначала случай, когда $\mathcal{T}_1=\mathcal{T}_2=:\mathcal{T}$. Предположим, что $u_1(t)\not\equiv u_2(t)$ на $\mathcal{T}$. Заметим, что множество точек t, где $u_1(t)=u_2(t)$, является замкнутым подмножеством промежутка $\mathcal{T}$ как прообраз замкнутого множества $\{\theta\}$ при непрерывном отображении u_2-u_1, а

поэтому множество $\mathfrak{T}$, где равенство решений нарушается, открыто в $\mathcal{T}$. Следовательно, имеется точка $T^* = \inf \mathfrak{T}$, причём $u_1(T^*) = u_2(T^*) =: u^*$, и такое T^{**}, что $(T^*; T^{**}] \subset \mathfrak{T}$. Но тогда каждая из функций $u_1(t)$, $u_2(t)$ является решением уравнения

$$u(t) = \bar{u}(t) + u^* - \bar{u}(T^*) + \int_{T^*}^{t} K(t,\tau)A(\tau, u(\tau))\, d\tau$$

на отрезке $[T^*; T^{**}]$. Уменьшив, если потребуется, величину T^{**}, мы с помощью рассуждений, аналогичных п. 1, сможем доказать единственность решения этого уравнения на отрезке $[T^*; T^{**}]$ и прийти к противоречию.

Теперь рассмотрим случай, когда промежутки $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ различны. Пусть для определённости $\mathcal{T}_2 \supsetneq \mathcal{T}_1$. Тогда, перейдя к функциям $u_1(t)$ и $u_2|_{\mathcal{T}_1}(t)$, мы получаем предыдущий случай, невозможность которого уже доказана.

3. Представим уравнение (1) в виде

$$u(t) = \bar{u}(t) + \int_{T}^{0} K(t,\tau)A(\tau, u(\tau))\, d\tau + \int_{T}^{t} K(t,\tau)A(\tau, u(\tau))\, d\tau.$$

Заметим, что $\bar{u}(t)$ — заданная функция, а функция $\int_T^0 K(t,\tau)A(\tau, u(\tau))\, d\tau$ аргумента t тоже известна при всех t, поскольку интегрирование в этом интеграле, зависящем от u, распространяется лишь на отрезок $[0, T]$, где функция u уже предполагается известной. Следовательно, можно положить

$$\bar{\bar{u}}(t) := \bar{u}(t) + \int_{T}^{0} K(t,\tau)A(\tau, u(\tau))\, d\tau$$

и рассмотреть при $t \geqslant T$ уравнение

$$u(t) = \bar{\bar{u}}(t) + \int_{T}^{t} K(t,\tau)A(\tau, u(\tau))\, d\tau,$$

аналогичное исходному. Осталось применить рассуждения, аналогичные п. 1. Очевидно, что полученные решения будут «сшиваться» непрерывно и дадут продолжение решения $u(t)$ с отрезка $[0, T]$ на больший отрезок.

4. Пусть

$$\mathfrak{T} = \{T > 0 : \text{ существует решение задачи (1) на промежутке } [0; T]\}, \quad T_0 = \sup \mathfrak{T} \leqslant +\infty.$$

В силу п. 1 множество $\mathfrak{T}$ непусто и содержит некоторый отрезок ненулевой длины. Поэтому $T_0 > 0$ и существует такая последовательность решений $\{u_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ на промежутках $[0; T_n]$, что $T_n > 0$, $T_n \uparrow T_0$. В силу п. 2 любые два решения уравнения (1) совпадают на их общей области определения. Поэтому при всех $n \in \mathbb{N}$ решение $u_{n+1}(t)$ есть продолжение решения $u_n(t)$. Тогда можно построить функцию

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & t \in [0; T_1], \\ u_{n+1}(t), & t \in (T_n; T_{n+1}], \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Эта функция будет решением уравнения (1) на промежутке $[0; T_0)$. Если $T_0 = +\infty$, то $u(t)$ будет очевидным образом непродолжаемым. Если $T_0 < +\infty$, то по самому определению T_0 максимально возможный промежуток существования решения — это либо полуинтервал $[0; T_0)$, либо отрезок $[0; T_0]$. Однако последнее исключается в силу п. 3, ведь тогда существовало бы некоторое решение на промежутке, большем отрезка $[0; T_0]$, а следовательно, и на некотором отрезке $[0; T_1]$ с $T_1 > T_0$. Следовательно, решение $u(t)$, $t \in [0; T_0)$, непродолжаемо.

Итак, существует непродолжаемое решение, определённое на полуоткрытом промежутке $[0; T_0)$ с $T_0 \leqslant +\infty$.

5. Пусть $u_1(t)$, $u_2(t)$ — два непродолжаемых решения. Тогда в силу п. 2 одно из них является продолжением другого. Следовательно, или они совпадают, или одно из них является продолжаемым.

6. Пусть $u(t)$ — решение на $[0; T_0)$, $T_0 < +\infty$ и $u(t)$ — непродолжаемое решение. Будем доказывать от противного. Предположим, что решение $u(t)$ ограниченно, т. е. существует число C_0 такое, что

$$\|u(t)\| \leqslant C_0, \quad t \in [0; T_0).$$

Но интеграл в правой части уравнения (1) удовлетворяет в левой полуокрестности точки T_0 условию Коши. Это вытекает из неравенства (где $0 < t_1 < t_2 < T_0$)

$$\left\| \int_0^{t_2} K(t_2, \tau) A(\tau, u(\tau))\, d\tau - \int_0^{t_1} K(t_1, \tau) A(\tau, u(\tau))\, d\tau \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^{t_1} \|K(t_2, \tau) - K(t_1, \tau)\| \|A(\tau, u(\tau))\|\, d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \|K(t_2, \tau)\| \|A(\tau, u(\tau))\|\, d\tau \quad (8)$$

с использованием равномерной непрерывности ядра $K(t, \tau)$ на любом прямоугольнике и свойства (A_4). С другой стороны, функция $\bar{u}(t)$ непрерывна всюду по условию. Следовательно, функция $u(t)$ непрерывно продолжима в точку T_0. Обозначим продолженную функцию через $\tilde{u}(t)$. Тогда функция

$$\bar{u}(t) + \int_0^t K(t, \tau) A(\tau, \tilde{u}(\tau))\, d\tau,$$

заведомо совпадающая с $u(t) = \bar{u}(t) + \int_0^t K(t, \tau) A(\tau, u(\tau))\, d\tau$ на $[0; T_0)$, существует и непрерывна на $[0; T_0]$, а следовательно, её значение в точке T_0 совпадает с $\tilde{u}(T_0)$ в силу единственности непрерывного продолжения на замыкание. Следовательно, функция $\tilde{u}(t)$ является решением уравнения (1) на отрезке $[0; T_0]$, что противоречит условию непродолжаемости решения $u(t)$ на промежутке $[0; T_0)$. Таким образом, соотношение (3) доказано.

Замечание 5. Дальнейшие рассуждения аналогичны проведённым в лекции 3 для дифференциального уравнения.

Покажем теперь, что в случае $K(t, \tau) \equiv I$ выполняется предельное соотношение (4). Надо доказать:

$$\forall M > 0\ \exists \delta > 0\ \forall t \in (T_0 - \delta; T_0) \cap [0; T_0)\ \ \|u(t)\| > M.$$

Предположим противное:

$$\exists M > 0\ \forall \delta > 0\ \exists t \in (T_0 - \delta; T_0) \cap [0; T_0)\ \ \|u(t)\| \leqslant M. \tag{9}$$

Зафиксируем M из (9). В силу свойства (A_4) будем иметь

$$\forall t \in [0; T_0),\ \forall z \in B\ \left(\|z\| \leqslant 2M \Rightarrow \|A(t,z)\| \leqslant \sup_{\substack{t \in [0;T_0] \\ s \in [0;2M]}} \lambda(t,s) =: E\right). \tag{10}$$

Выберем $\delta \leqslant \frac{M}{4E}$ из условия

$$\|\bar{u}(t'') - \bar{u}(t')\| < \frac{M}{4} \quad \text{при} \quad |t'' - t'| < \delta.$$

(Это возможно, поскольку функция $\bar{u}(t)$, как непрерывная на $\mathbb{R}_+$, равномерно непрерывна на отрезке $[0; T_0]$.) Возьмём из (9) такое $t = t^*$, что $T_0 - \delta < t^* < T_0$, $\|u(t^*)\| \leqslant M$. В силу (3) существует такое t^{**}, что $T_0 - \delta < t^* < t^{**} < T_0$ и $\|u(t^{**})\| \geqslant 2M$. Но тогда в силу непрерывности функции $u(t)$ существует такое $t^{***} \in (t^*; t^{**}]$, что

$$\|u(t^{***})\| = 2M, \quad \|u(t)\| < 2M \text{ при всех } t \in (t^*; t^{***}). \tag{11}$$

Имеем тогда, с одной стороны,

$$\|u(t^{***}) - u(t^*)\| \geqslant \|u(t^{***})\| - \|u(t^*)\| = M,$$

а с другой, в силу уравнения (1), утверждений (11) и (10), а также выбора δ:

$$\|u(t^{***}) - u(t^*)\| \leqslant \|\bar{u}(t^{***}) - \bar{u}(t^*)\| + \int_{t^*}^{t^{***}} \|A(\tau, u(\tau))\|\, d\tau <$$

$$< \frac{M}{4} + |t^{***} - t^*| E \leqslant \frac{M}{4} + \delta E \leqslant \frac{M}{2}.$$

Полученное противоречие завершает доказательство п. 6 и всей теоремы.

Теорема доказана.

Замечание 6. Легко видеть, что в случае, когда ядро K не зависит от t и является непрерывной функцией аргумента τ, оно может быть «включено» в $A(t,u)$, и поэтому соотношение (4) верно и в этом случае.

2. Пример непродолжаемого решения, не имеющего предела. В случае ядра, зависящего от t и удовлетворяющего условиям теоремы 1, соотношение (4) может не выполняться. Приведём один из возможных примеров. Для этого рассмотрим функцию

$$u(t) = 1 + \frac{1}{T_0 - t} \cos^2 \frac{1}{T_0 - t} \in C[0; T_0), \quad T_0 = \frac{2}{\pi}, \tag{12}$$

и построим интегральное уравнение вида (1), решением которого является функция (12), причём его ядро будет зависеть лишь от переменной t. Легко видеть, что при $t \to T_0 - 0$ функция (12) предела не имеет (потому что она принимает значение 1 сколь угодно близко к точке T_0), но

$$\limsup_{t \to T_0 - 0} |u(t)| = +\infty.$$

Таким образом, функция (12) удовлетворяет соотношению (3), но не соотношению (4). Нужно найти такую функцию $K(t) \in C[0; +\infty)$, чтобы при $t \in [0; T_0)$ выполнялось тождество

$$u(t) = u(0) + K(t) \int_0^t (u(s))^k ds.$$

Натуральное k будет выбрано ниже. Поскольку $u(0) = 1$, имеем

$$1 + \frac{1}{T_0 - t} \cos^2 \frac{1}{T_0 - t} = 1 + K(t) \int_0^t \left(1 + \frac{1}{T_0 - s} \cos^2 \frac{1}{T_0 - s}\right)^k ds,$$

или

$$K(t) = \frac{\frac{1}{T_0 - t} \cos^2 \frac{1}{T_0 - t}}{\int_0^t \left(1 + \frac{1}{T_0 - s} \cos^2 \frac{1}{T_0 - s}\right)^k ds}, \quad T_0 = \frac{2}{\pi}. \tag{13}$$

При всех натуральных k дробь в правой части доставляет непрерывную на интервале $t \in (0; T_0)$ функцию. С помощью правила Лопиталя нетрудно получить, что $K(t) \to 0$ при $t \to +0$. Если к тому же

$$K(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to T_0 - 0, \tag{14}$$

то функция $K(t)$ может быть продолжена до непрерывной функции аргумента $t \in [0; +\infty)$ и, тем самым, будет удовлетворять условию теоремы 1. Будем добиваться выполнения условия (14).

В силу бинома Ньютона с учётом неотрицательности второго слагаемого имеем при всех $k \geqslant 3$, $k \in \mathbb{N}$, $s \in [0; T_0)$

$$\left(1 + \frac{1}{T_0 - s} \cos^2 \frac{1}{T_0 - s}\right)^k \geqslant \frac{k(k-1)(k-2)}{6} \frac{1}{(T_0 - s)^3} \cos^6 \frac{1}{T_0 - s}, \tag{15}$$

откуда при всех $t \in [0; T_0)$

$$\int_0^t \left(1 + \frac{1}{T_0 - s} \cos^2 \frac{1}{T_0 - s}\right)^k ds \geqslant \frac{k(k-1)(k-2)}{6} \int_0^t \frac{1}{(T_0 - s)^3} \cos^6 \frac{1}{T_0 - s} ds. \tag{16}$$

Вычислим интеграл в правой части последней формулы:

$$\int_0^t \frac{1}{(T_0 - s)^3} \cos^6 \frac{1}{T_0 - s} ds = \left\{ y = \frac{1}{T_0 - s} \right\} = \int_{\frac{1}{T_0}}^{\frac{1}{T_0 - t}} y \cos^6 y \, dy =$$

$$= \frac{5}{32} y^2 + \frac{15}{32} \left(\frac{y \sin 2y}{2} + \frac{\cos 2y}{4} \right) + \frac{6}{32} \left(\frac{y \sin 4y}{4} + \frac{\cos 4y}{16} \right) + \frac{1}{32} \left(\frac{y \sin 6y}{6} + \frac{\cos 6y}{36} \right) \Bigg|_{\frac{1}{T_0}}^{\frac{1}{T_0 - t}} =$$

$$= \frac{5}{32} \frac{1}{(T_0 - t)^2} + O\left(\frac{1}{T_0 - t}\right) \quad \text{при} \quad t \to T_0 - 0. \tag{17}$$

Из (13), (15)—(17) получаем

$$0 \leqslant K(t) \leqslant \frac{6}{k(k-1)(k-2)} \frac{\frac{1}{T_0-t}\cos^2\frac{1}{T_0-t}}{\frac{5}{32}\frac{1}{(T_0-t)^2} + O\left(\frac{1}{T_0-t}\right)} =$$

$$= \frac{32\cdot 6}{5k(k-1)(k-2)} \frac{\cos^2\frac{1}{T_0-t}}{\frac{1}{T_0-t} + O(1)} \to +0 \quad \text{при} \quad t \to T_0 - 0.$$

Это и доказывает предельное соотношение (14) в случае выбора, например, $k = 3$.

Итак, уравнение имеет вид

$$u(t) = 1 + \int_0^t K(t)(u(s))^3 ds,$$

где

$$K(t) = \begin{cases} \frac{\frac{1}{T_0-t}\cos^2\frac{1}{T_0-t}}{\int_0^t \left(1+\frac{1}{T_0-s}\cos^2\frac{1}{T_0-s}\right)^3 ds}, & t \in (0; T_0), \\ 0, & t \in \{0\} \cup [T_0; +\infty), \end{cases}$$

$T_0 = \frac{2}{\pi}$, а соответствующее решение —

$$u(t) = 1 + \frac{1}{T_0 - t}\cos^2\frac{1}{T_0 - t}.$$

Замечание 7. К данному результатату примыкает результат работы

V. Komornik, P. Martinez, M. Pierre, J. Vanconsenoble. “Blow-up” of bounded solutions of differential equations.
Acta Sci. Math. (Szeged). Vol. 69. Pp. 651–657 (2003),

где показано, что непродолжаемое решение задачи Коши для автономного абстрактного дифференциального уравнения

$$u' = f(u)$$

с локально липшицевой правой частью $f(u)$ в произвольном бесконечномерном банаховом пространстве B может (в отличие от случаев (3) и (4)) быть даже ограниченным, если $f(u)$, являясь локально липшиц-непрерывной, не является ограниченной на каждом ограниченном подмножестве пространства B.

Замечание 8. Важно различать *ограниченно липшиц-непрерывные* и *локально липшиц-непрерывные* функции. Последние – это такие, что для любой точки найдётся окрестность, в которой такая функция липшиц-непрерывна. В бесконечномерном банаховом пространстве эти условия не равносильны.

§ 11. Теорема Пеано

Теорема 2. (Пеано.) Рассмотрим дифференциальное уравнение относительно скалярной функции $u(t)$

$$u' = f(t, u). \tag{18}$$

Если правая часть $f(t, u)$ непрерывна в некоторой ограниченной замкнутой области G, то через каждую внутреннюю точку (t_0, u_0) этой области проходит *хотя бы одна* интегральная кривая этого уравнения.

Легко видеть, что единственность не гарантируется этой теоремой не случайно: достаточно рассмотреть задачу Коши

$$\begin{cases} u' = 3u^{\frac{2}{3}}, \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Задача (19) имеет как тривиальное решение $u = 0$, так и решение $u = t^3$. Кроме того, при любом t_0 функция $(t - t_0)^3$ также является решением уравнения задачи (19), причём

$$\frac{d}{dt}(t - t_0)^3 \bigg|_{t=t_0} = 0.$$

Следовательно, решения $u = 0$ и $u = (t - t_0)^3$ можно гладко сшить и получить (при произвольном $t_0 > 0$) решение

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, t_0), \\ (t - t_0)^3, & t \in [t_0, +\infty), \end{cases} \tag{20}$$

также являющееся решением задачи (19). Итак, задача (19) имеет не два, а бесконечно много решений, определённых на всей полупрямой $t \geqslant 0$.

Оказывается, существуют и более «патологические» примеры. Не будем приводить их ввиду громоздкости построения, но отметим лишь, что существует такая функция $f(t, u)$, непрерывная на всей плокости (t, u), что для любой пары (t_0, u_0) задача Коши

$$\begin{cases} u' = f(t, u), \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

имеет более одного решения *на любом отрезке* $[t_0, t_0 + \varepsilon]$. (Задача (19) обладает таким свойством лишь при $u_0 = 0$.)

Не случайно мы сформулировали теорему Пеано для скалярной функции. Дело в том, что теорема Пеано верна только для конечномерных линейных пространств. Напротив, в любом бесконечномерномерном банаховом пространстве задача (18) может не иметь ни одного (даже локального по времени) решения. Этот результат был получен в

А. Н. Годунов, О теореме Пеано в банаховых пространствах.
Функц. анализ и его прил., 1975, том 9, выпуск 1, 59—60.

Задачи для самостоятельного решения

1. Опираясь на задачу (19) (или подобные ей), построить задачу Коши со следующими свойствами:

1) её тривиальное решение $u = 0$ существует на полупрямой;

2) для любого $T > 0$ существует нетривиальное решение на промежутке $[0, T)$ (возможно, продолжаемое), 3) никакое её нетривиальное решение не продолжаемо на всю полупрямую.

2*. Привести пример локально липшиц-непрерывной, но не ограниченно липшиц-непрерывной функции.