

Вопросы к второй части экзамена по курсу «Математический анализ» для второго курса потока лектора Щепетилова А.В. Январь 2020 г.

1. Получить формулу для градиента в ортогональных криволинейных координатах.
2. Докажите признак д'Аламбера сходимости числового ряда.
3. Докажите признак Коши сходимости числового ряда.
4. Докажите интегральный признак Коши-Маклорена сходимости числового ряда.
5. Докажите признак Абеля сходимости числового ряда.
6. Докажите критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности.
7. Докажите теорему о непрерывности предела функциональной последовательности.
8. Докажите теорему об интегрировании предела функциональной последовательности.
9. Докажите теорему о дифференцировании предела функциональной последовательности.
10. Сформулировать и обосновать соотношение между равномерной и поточечной сходимостями функциональных последовательностей.
11. Сформулировать и обосновать соотношение между равномерной сходимостью функциональной последовательности и сходимостью в среднем квадратичном.
12. Сформулировать и обосновать соотношение между поточечной сходимостью функциональной последовательности и сходимостью в среднем квадратичном.
13. Докажите критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла первого рода, зависящего от параметра.
14. Докажите признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла первого рода, зависящего от параметра.
15. Докажите теорему о дифференцировании по параметру несобственного интеграла первого рода, зависящего от параметра.
16. Докажите критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла второго рода, зависящего от параметра.
17. Докажите теорему об экстремальном свойстве коэффициентов Фурье.
18. Докажите неравенство Бесселя.
19. Докажите теорему о сходимости ряда Фурье по основной тригонометрической системе в среднеквадратичном.
20. Докажите теорему о равномерной аппроксимации непрерывной на заданном отрезке функции тригонометрическим многочленом.
21. Докажите теорему о равномерной аппроксимации непрерывной на заданном отрезке функции алгебраическим многочленом.

22. Докажите, что основная тригонометрическая система является замкнутой в пространстве кусочно-непрерывных функций.
23. Докажите, что замкнутая ортогональная система является полной.
24. Дайте определение пространства \mathcal{D} финитных бесконечно-дифференцируемых функций и сходимости в этом пространстве. Докажите, что \mathcal{D} – бесконечномерно.
25. Дайте определение пространства \mathcal{D}' обобщенных функций и сходимости в этом пространстве. Что такое регулярные обобщенные функции?
26. Докажите, что δ -функция является линейным непрерывным функционалом на пространстве \mathcal{D} основных функций, но не является регулярной обобщенной функцией.
27. Докажите, что δ -функция является пределом в пространстве \mathcal{D}' последовательности регулярных обобщенных функций.
28. Дайте определение дифференцирования в пространстве обобщенных функций \mathcal{D}' . Представьте δ -функцию в виде производной от обобщенной функции и найдите $(D^{(k)}\delta)[\varphi]$, $\varphi \in \mathcal{D}$.
29. Дайте определение пространства \mathcal{S} быстроубывающих функций и сходимости в этом пространстве. Покажите, что $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$, но $\mathcal{D} \neq \mathcal{S}$. Докажите, что преобразование Фурье переводит пространство \mathcal{S} в \mathcal{S} .
30. Дайте определение пространства \mathcal{S}' обобщенных функций. Покажите, что $\mathcal{D}' \supset \mathcal{S}'$, но $\mathcal{D}' \neq \mathcal{S}'$. Определите преобразование Фурье в пространстве \mathcal{S}' .
31. Докажите теорему о непрерывности в точке M_0 зависящего от параметра трехкратного интеграла, равномерно сходящегося в этой точке.
32. Докажите критерий замкнутости ортогональной системы функций в бесконечномерном евклидовом пространстве.
33. Докажите теорему о замкнутости полной ортогональной системы функций в полном бесконечномерном евклидовом пространстве.
34. Получить формулу для ротора в ортогональных криволинейных координатах.
35. Получить формулу для дивергенции в ортогональных криволинейных координатах.
36. Докажите теорему Коши о перестановке членов абсолютно сходящегося числового ряда.
37. Докажите теорему Римана о перестановке членов условно сходящегося числового ряда.
38. Докажите признак Дирихле сходимости числового ряда.
39. Докажите признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда.
40. Докажите признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда.
41. Докажите теорему Арцела.
42. Докажите признак Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

43. Докажите возможность вычисления первых частных производных ньютоновского потенциала дифференцированием под знаком интеграла.
44. Докажите существование вторых частных производных ньютоновского потенциала и получите уравнение Пуассона для него.
45. Докажите теорему о поточечной сходимости ряда Фурье по основной тригонометрической системе.
46. Докажите теорему о равномерной сходимости ряда Фурье по основной тригонометрической системе.
47. Докажите теорему о почленном дифференцировании ряда Фурье по основной тригонометрической системе.
48. Докажите теорему о представлении функции интегралом Фурье.