Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Физический факультет
Кафедра математики

Линейная алгебра
Домашнее задание № 2
Срок сдачи
15 апреля 2026 г.

Москва
2026

ИНСТРУКЦИЯ
по выполнению домашних заданий по линейной алгебре

Каждый студент физического факультета при изучении курса линейной алгебры во втором семестре обучения должен выполнить четыре домашних задания. Выполнение всех домашних заданий в полном объёме является необходимым условием получения зачёта по дисциплине линейная алгебра в конце семестра. Это означает, что студент, не выполнивший хотя бы одной задачи из домашнего задания, не может претендовать на получение зачёта по линейной алгебре.

Выполнение домашнего задания состоит из трёх частей:

(i) изучение теоретического материала, необходимого для решения задач, по материалам лекций и учебных пособий;
(ii) изучение методов решения типовых задач, изложенных в разделах «Примеры решения задач»;
(iii) самостоятельное решение задач, предложенных в соответствующих разделах данного пособия.

Домашние задания оформляются согласно изложенным ниже правилам и сдаются для проверки преподавателю, ведущему семинарские занятия в группе.

1. Результаты работы оформляются на одной стороне бумажного листа формата А4. Работа должны быть написана чётким разборчивым почерком без помарок и исправлений ручкой синего или чёрного цвета. Использование карандашей или принтеров не допускается. С каждой стороны листа оставляются поля: слева — 4 см, сверху, снизу и справа — по 2 см.

2. Первым листом выполненной работы является титульный лист, на котором указываются следующие данные:

(1) Фамилия, имя, отчество студента в именительном падеже.
(2) Номер группы.
(3) Фамилия и инициалы преподавателя, ведущего семинарские занятия в группе, в именительном падеже.

(4) Номер домашнего задания.

Пример:

Каценеленбоген Вахтисий Сосипатрович
Группа 123
Преподаватель Иванов И. И.
Домашнее задание № 1

2. Оформление каждой задачи начинается на новом листе. На одном листе не может содержаться информация, относящаяся к разным задачам. В верхней части листа указывается название (номер) задачи. Если задача содержит несколько вопросов, решение каждого из них должно начинаться на новой странице.

3. В выполненной работе задачи должны быть расположены в том же порядке, что и в сборнике заданий. Страницы должны быть пронумерованы; номер ставится на каждой странице в правом нижнем углу страницы.

4. После титульной страницы следуют листы, на которых законспектированы примеры решения задач, приведённые в пособии. Это неотъемлемая часть работы; без неё работа не считается выполненной. Далее следуют листы с задачами для самостоятельного решения.

5. При самостоятельном решении задач студент должен убедиться, что решение верно, сравнив свой ответ с приведённым в пособии. Ответы имеются для всех задач.

6. Листы с заданиями должны быть скреплены при помощи степлера. Нельзя скреплять листы скрепками или помещать их в пластиковые папки или файлы; во избежание утери фрагментов работы соединение должно быть неразъёмным.

7. Работа должны быть сдана на проверку в срок, указанный лектором или преподавателем, ведущим семинарские занятия.

ТЕМА 4

Двойственное пространство

Примеры решения задач

Пример 4.1. Рассматривается векторное пространство $\mathbb{R}[t]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени $\leqslant 3$. Каждому вектору (многочлену) $\boldsymbol{p} = p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leqslant 3}$ ставится в соответствие число

$$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{p}) = \int_0^1 (1 + t^2)\, p(t)\, dt.$$

Докажите, что заданное таким образом отображение $\boldsymbol{\xi} : \mathbb{R}[t]_{\leqslant 3} \to \mathbb{R}$ является линейным функционалом на пространстве $\mathbb{R}[t]_{\leqslant 3}$, и найдите его координаты в стандартном базисе, состоящем из векторов $\boldsymbol{e}_0 = 1$, $\boldsymbol{e}_1 = t$, $\boldsymbol{e}_2 = t^2$, $\boldsymbol{e}_3 = t^3$.

Решение. Проверим линейность:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}\,(\alpha\boldsymbol{p} + \beta\boldsymbol{q}) = \int_0^1 (1 + t^2)\,(\alpha p(t) + \beta q(t))\, dt = \\ = \alpha \int_0^1 (1 + t^2) p(t) dt + \beta \int_0^1 (1 + t^2) q(t) dt = \\ = \alpha\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{p}) + \beta\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{q}).\end{aligned}$$

Таким образом, отображение $\boldsymbol{\xi} : \mathbb{R}[t]_{\leqslant 3} \to \mathbb{R}$ линейно. Для нахождения его координат в стандартном базисе $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ пространства $\mathbb{R}[t]_{\leqslant 3}$ найдем значения функционала $\boldsymbol{\xi}$ на векторах базиса:

$$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{e}_0) = \int_0^1 (1 + t^2) \cdot 1\, dt = \frac{4}{3}, \qquad \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{e}_1) = \int_0^1 (1 + t^2) \cdot t\, dt = \frac{3}{4},$$
$$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{e}_2) = \int_0^1 (1 + t^2) \cdot t^2\, dt = \frac{8}{15}, \quad \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{e}_3) = \int_0^1 (1 + t^2) \cdot t^3\, dt = \frac{5}{12}.$$

Таким образом, координатная строка линейного функционала (ковектора) $\boldsymbol{\xi}$ в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}[t]_{\leqslant 3}$ имеет вид

$\left(\frac{4}{3}; \frac{3}{4}; \frac{8}{15}; \frac{5}{12}\right)$. Это означает, что значение ковектора $\boldsymbol{\xi}$ на векторе $\boldsymbol{p} = p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$ равно $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{p}) = \frac{4}{3}a + \frac{3}{4}b + \frac{8}{15}c + \frac{5}{12}d.$

Пример 4.2. Найдите ядро линейного функционала из примера 4.1.

Решение. Ядро $\ker \boldsymbol{\xi}$ линейного функционала $\boldsymbol{\xi} : \mathbb{R}[t]_{\leqslant 3} \to \mathbb{R}$ состоит из всех векторов $\boldsymbol{x}$, для которых $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}) = 0$. Обозначим через x^0, x^1, x^2, x^3 координаты (неизвестного) вектора $\boldsymbol{x}$ в стандартном базисе пространства, т.е. $\boldsymbol{x} = x^0\boldsymbol{e}_0 + x^1\boldsymbol{e}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2 + x^3\boldsymbol{e}_3$. Условие $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}) = 0$ в координатах имеет вид линейного уравнения

$$\frac{4}{3}x^0 + \frac{3}{4}x^1 + \frac{8}{15}x^2 + \frac{5}{12}x^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 80x^0 + 45x^1 + 32x^2 + 25x^3 = 0.$$

Решая эту однородную систему, состоящую из одного уравнения, получаем её фундаментальную совокупность решений:

$$\begin{pmatrix} -9 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Конструируя элементы пространства $\mathbb{R}[t]_{\leqslant 3}$ по их координатам, получаем, что ядро линейного функционала $\boldsymbol{\xi}$ является линейной оболочкой элементов $-9 + 16t$, $-2 + 5t^2$ и $-5 + 16t^3$:

$$\ker \boldsymbol{\xi} = L\big(-9 + 16t;\ -2 + 5t^2;\ -5 + 16t^3\big).$$

Пример 4.3. Рассмотрим отображения $\boldsymbol{\xi}^0$, $\boldsymbol{\xi}^1$, $\boldsymbol{\xi}^2$, $\boldsymbol{\xi}^3$ пространства $\mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$ вещественных многочленов степени $\leqslant 2$ в множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел, заданные следующим образом: отображение $\boldsymbol{\xi}^k$ ставит в соответствие многочлену $\boldsymbol{p} \equiv p(t)$ его значение при $t = k + 1$: $\boldsymbol{\xi}^k(\boldsymbol{p}) = p(k + 1)$. Докажите, что указанные отображения являются линейными функционалами (ковекторами) на $\mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$. Докажите, что ковекторы $\boldsymbol{\xi}^0$, $\boldsymbol{\xi}^1$, $\boldsymbol{\xi}^2$ образуют базис в двойственном пространстве $\mathbb{R}[t]^*_{\leqslant 2}$, и разложите ковектор $\boldsymbol{\xi}^3$ по этому базису.

Решение. Докажем линейность. Пусть $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Имеем:

$$\boldsymbol{\xi}_k\big(\alpha\boldsymbol{p} + \beta\boldsymbol{q}\big) = \big(\alpha p + \beta q\big)(k + 1) = \\ = \alpha p(k + 1) + \beta q(k + 1) = \alpha\boldsymbol{\xi}_k(\boldsymbol{p}) + \beta\boldsymbol{\xi}_k(\boldsymbol{q}).$$

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$ стандартный базис $\boldsymbol{e}_0 = 1$, $\boldsymbol{e}_1 = t$, $\boldsymbol{e}_2 = t^2$ (напомним, что $\dim \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2} = 3$); произвольный элемент $\boldsymbol{p} = p(t) = a + bt + ct^2$ имеет в этом базисе столбец координат $(a; b; c)^T$. Значения функционалов $\boldsymbol{\xi}^0$, $\boldsymbol{\xi}^1$, $\boldsymbol{\xi}^2$, $\boldsymbol{\xi}^3$ на этом векторе равны

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi}^0(\boldsymbol{p}) &= p(1) = a + b + c = (1; 1; 1) \cdot (a; b; c)^T, \\
\boldsymbol{\xi}^1(\boldsymbol{p}) &= p(2) = a + 2b + 4c = (1; 2; 4) \cdot (a; b; c)^T, \\
\boldsymbol{\xi}^2(\boldsymbol{p}) &= p(3) = a + 3b + 9c = (1; 3; 9) \cdot (a; b; c)^T, \\
\boldsymbol{\xi}^3(\boldsymbol{p}) &= p(4) = a + 4b + 16c = (1; 4; 16) \cdot (a; b; c)^T.
\end{aligned}$$

Таким образом, координатные строки функционалов $\boldsymbol{\xi}^0$, $\boldsymbol{\xi}^1$, $\boldsymbol{\xi}^2$, $\boldsymbol{\xi}^3$ в стандартном базисе суть $(1; 1; 1)$, $(1; 2; 4)$, $(1; 3; 9)$, $(1; 4; 16)$. Это векторы арифметического пространства строк $\mathbb{R}^{3*}$, изоморфного арифметическому пространству столбцов $\mathbb{R}^3$; для установления факта их линейной зависимости или независимости можно применить метод Гаусса—Жордана:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Г.-Ж.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ковекторы $\boldsymbol{\xi}^0$, $\boldsymbol{\xi}^1$, $\boldsymbol{\xi}^2$ линейно независимы, а $\boldsymbol{\xi}^3$ является их линейной комбинацией:

$$\boldsymbol{\xi}^3 = \boldsymbol{\xi}^0 - 3\boldsymbol{\xi}^1 + 3\boldsymbol{\xi}^2.$$

Кроме того, поскольку $\dim \mathbb{R}[t]^*_{\leqslant 2} = \dim \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2} = 3$, линейно независимые ковекторы $\boldsymbol{\xi}^0$, $\boldsymbol{\xi}^0$, $\boldsymbol{\xi}^2$ образуют базис в $\mathbb{R}[t]^*_{\leqslant 2}$.

Пример 4.4. В векторном пространстве $V^* = \mathbb{R}[t]^*_{\leqslant 2}$, двойственном к пространству $V = \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$ многочленов степени $\leqslant 2$, рассматриваются ковекторы $\boldsymbol{\xi}^0$, $\boldsymbol{\xi}^1$, $\boldsymbol{\xi}^2$, заданные соотношениями $\boldsymbol{\xi}^k(\boldsymbol{p}) = p(k+1)$ для любого элемента $\boldsymbol{p} \equiv p(t) \in V$. В примере 4.3 было доказано, что эти ковекторы образуют базис в пространстве V^*. Найдите базис $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ пространства V, двойственный базису $\boldsymbol{\xi}^0$, $\boldsymbol{\xi}^1$, $\boldsymbol{\xi}^2$ пространства V^*.

Решение. Взаимно двойственные базисы $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ в векторном пространстве $V = \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$ вещественных многочленов степени $\leqslant 2$ и $\boldsymbol{\xi}^0$, $\boldsymbol{\xi}^1$, $\boldsymbol{\xi}^2$ в двойственном пространстве $V^* = \mathbb{R}[t]^*_{\leqslant 2}$ обладают свойством

$$\boldsymbol{\xi}^k(\boldsymbol{x}_j) = \delta^k_j \quad \Leftrightarrow \quad \langle \boldsymbol{\xi}^k, \boldsymbol{x}_j \rangle = \delta^j_j$$

для любых $j, k = 0, 1, 2$. Для удобства положим $t_0 = 1$, $t_1 = 2$, $t_2 = 3$; тогда свойство, определяющее ковекторы $\boldsymbol{\xi}^0$, $\boldsymbol{\xi}^1$, $\boldsymbol{\xi}^2$, запишется в виде $\boldsymbol{\xi}^k(\boldsymbol{p}) = p(t_k)$ для любого $k = 0, 1, 2$ и любого вектора (многочлена) $\boldsymbol{p} = p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$. (Отметим, что введение этого обозначения позволит легко обобщить задачу на случай пространства $\mathbb{R}[t]_{\leqslant n}$ любой размерности.) Задача состоит в нахождении многочленов $\boldsymbol{x}_0 = x_0(t)$, $\boldsymbol{x}_1 = x_1(t)$, $\boldsymbol{x}_2 = x_2(t)$ степени $\leqslant 2$, удовлетворяющих условиям

$$
\begin{array}{lll}
\langle \boldsymbol{\xi}^0, \boldsymbol{x}_0 \rangle = 1, & \langle \boldsymbol{\xi}^0, \boldsymbol{x}_1 \rangle = 0, & \langle \boldsymbol{\xi}^0, \boldsymbol{x}_2 \rangle = 0, \\
\langle \boldsymbol{\xi}^1, \boldsymbol{x}_0 \rangle = 0, & \langle \boldsymbol{\xi}^1, \boldsymbol{x}_1 \rangle = 1, & \langle \boldsymbol{\xi}^1, \boldsymbol{x}_2 \rangle = 0, \\
\langle \boldsymbol{\xi}^2, \boldsymbol{x}_0 \rangle = 0, & \langle \boldsymbol{\xi}^2, \boldsymbol{x}_1 \rangle = 0, & \langle \boldsymbol{\xi}^2, \boldsymbol{x}_2 \rangle = 1,
\end{array}
$$

или, в других обозначениях,

$$
\begin{array}{lll}
x_0(t_0) = 1, & x_1(t_0) = 0, & x_2(t_0) = 0, \\
x_0(t_1) = 0, & x_1(t_1) = 1, & x_2(t_1) = 0,. \\
x_0(t_2) = 0, & x_1(t_2) = 0, & x_2(t_2) = 1.
\end{array}
$$

Из приведённых условий видно, что каждый из трёх искомых многочленов имеет не менее двух корней, т.е. его степень $\geqslant 2$. Поэтому каждый из многочленов $x_0(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ имеет степень 2 и может быть представлен в виде $A(t-\alpha)(t-\beta)$, где α, β — его корни. Имеем:

$$
\begin{aligned}
x_0(t) &= A_0(t - t_1)(t - t_2) = A_0(t-2)(t-3), \\
x_1(t) &= A_1(t - t_0)(t - t_2) = A_1(t-1)(t-3), \\
x_2(t) &= A_2(t - t_0)(t - t_1) = A_2(t-1)(t-2).
\end{aligned}
$$

Коэффициенты A_j определяются из условий $x_j(t_j) = 1$:

$$
\begin{aligned}
x_0(t_0) &= A_0(t_0 - t_1)(t_0 - t_2) = 1 \quad \Rightarrow A_0 = \frac{1}{(t_0 - t_1)(t_0 - t_2)} = \frac{1}{2}, \\
x_1(t_1) &= A_1(t_1 - t_0)(t_1 - t_2) = 1 \quad \Rightarrow A_1 = \frac{1}{(t_1 - t_0)(t_1 - t_2)} = -1, \\
x_2(t_2) &= A_2(t_2 - t_0)(t_2 - t_1) = 1 \quad \Rightarrow A_2 = \frac{1}{(t_2 - t_0)(t_2 - t_1)} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Итак,

$$
\begin{aligned}
x_0(t) &= \frac{1}{2}(t-2)(t-3) = 3 - \frac{5}{2}t + \frac{1}{2}t^2, \\
x_1(t) &= -(t-1)(t-3) = -3 + 4t - t^2, \\
x_2(t) &= \frac{1}{2}(t-1)(t-2) = 1 - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}t^2.
\end{aligned}
$$

Пример 4.5. Рассматривается отображение

$$\boldsymbol{\xi} : \mathbb{C}^{2\times 2} \to \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{\xi}(X) = \operatorname{tr}(A^T X),$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix},$$

$A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ — некоторая фиксированная комплексная (2×2)-матрица. Докажите, что $\boldsymbol{\xi}$ — линейный функционал на векторном пространстве $\mathbb{C}^{2\times 2}$. Найдите координаты функционала $\boldsymbol{\xi}$ в стандартном базисе

$$\boldsymbol{e}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

пространства $\mathbb{C}^{2\times 2}$. Найдите ядро функционала $\boldsymbol{\xi}$. Запишите координатное выражение для функционала $\boldsymbol{\xi}(X)$ (т.е. выражение через элементы матрицы X).

Решение. В силу известных свойств следа для любых матриц $X, Y \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ и любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ имеем

$$\boldsymbol{\xi}(\alpha X + \beta Y) = \operatorname{tr}\left(A^T(\alpha X + \beta Y)\right) = \\ = \alpha \operatorname{tr}(A^T X) + \beta \operatorname{tr}(A^T Y) = \alpha\boldsymbol{\xi}(X) + \beta\boldsymbol{\xi}(Y),$$

т.е. отображение $\boldsymbol{\xi}$ линейно. Элементы a, b, c, d и x, y, z, t матриц A и X соответственно являются координатами этих матриц (векторов пространства $\mathbb{C}^{2\times 2}$) в базисе $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Далее,

$$\boldsymbol{\xi}(X) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \\ = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} ax + cz & ay + ct \\ bx + dz & by + dt \end{pmatrix} = ax + by + cz + dt.$$

Эта линейная форма и является координатным выражением функционала в базисе $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Изоморфизм

$$F : \mathbb{C}^{2\times 2} \to \mathbb{C}^4, \quad F\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right) = \left(x,\ y,\ z,\ t\right)^T$$

порождает изоморфизм двойственных пространств

$$F^* : (\mathbb{C}^{2\times 2})^* \to \mathbb{C}^{4*},$$

который каждому ковектору $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbb{C}^{2\times 2})^*$ ставит в соответствие ковектор $F^*(\boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{C}^{4*}$, имеющий в стандартном базисе пространства $\mathbb{C}^{4*}$ координатное выражение $ax + by + cz + dt$. Поэтому для нахождения ядра ковектора $F^*(\boldsymbol{\xi})$ требуется решить следующую однородную систему линейных уравнений, состоящую из одного уравнения:

$$ax + by + cz + dt = 0.$$

Фундаментальная совокупность решений состоит из столбцов

$$\begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix},$$

которым в силу изоморфизма F^* соответствуют ковекторы

$$\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} b & -a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T X\right), \quad \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ -a & 0 \end{pmatrix}^T X\right), \quad \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}^T X\right).$$

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Каждому элементу $\boldsymbol{p} = p(t)$ векторного пространства $\mathbb{R}[t]_{\leqslant n}$ вещественных многочленов степени $\leqslant n$ поставлено в соответствие число

$$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{p}) = \int_0^1 p(t^2)\,dt.$$

Докажите, что заданное таким образом отображение $\boldsymbol{\xi} : \mathbb{R}[t]_{\leqslant n} \to \mathbb{R}$ является линейным функционалом на пространстве $\mathbb{R}[t]_{\leqslant n}$, и найдите его координаты в стандартном базисе пространства.

4.2. Рассмотрим отображения $\boldsymbol{\xi}^0, \boldsymbol{\xi}^1, \boldsymbol{\xi}^2, \boldsymbol{\xi}^3$ пространства $\mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$ вещественных многочленов степени $\leqslant 2$ в множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел, заданные следующим образом: для любого $\boldsymbol{p} \equiv p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$

$$\boldsymbol{\xi}^k(\boldsymbol{p}) = \int_0^{k+1} p(t)dt.$$

(а) Докажите, что указанные отображения являются линейными функционалами (ковекторами) на $\mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$.

(б) Докажите, что ковекторы $\boldsymbol{\xi}^0, \boldsymbol{\xi}^1, \boldsymbol{\xi}^2$ образуют базис в двойственном пространстве $\mathbb{R}[t]^*_{\leqslant 2}$, и разложите ковектор $\boldsymbol{\xi}^3$ по этому базису.

(в) Найдите ядра $\ker \boldsymbol{\xi}_1$, $\ker \boldsymbol{\xi}_2$, $\ker \boldsymbol{\xi}_3$.

(г) Найдите пересечения $P_1 = \ker \boldsymbol{\xi}_2 \cap \ker \boldsymbol{\xi}_3$, $P_2 = \ker \boldsymbol{\xi}_1 \cap \ker \boldsymbol{\xi}_3$, $P_3 = \ker \boldsymbol{\xi}_1 \cap \ker \boldsymbol{\xi}_2$.

(д) Убедитесь, что объединение базисов подпространств P_1, P_2, P_3 является базисом в $\mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$.

(е) Найдите базис $\boldsymbol{x}_0$; $\boldsymbol{x}_1$; $\boldsymbol{x}_2$ пространства $\mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$, двойственный базису $\boldsymbol{\xi}^0$; $\boldsymbol{\xi}^1$; $\boldsymbol{\xi}^2$ двойственного пространства $\mathbb{R}[t]^*_{\leqslant 2}$.

(ж) Сравните результаты, полученные в пп. (г) и (е), и попытайтесь объяснить обнаруженный факт.

4.3. Рассмотрим отображения $\boldsymbol{\theta}^0$, $\boldsymbol{\theta}^1$, $\boldsymbol{\theta}^2$, $\boldsymbol{\theta}^3$ пространства $V = \mathbb{R}[t]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени $\leqslant 3$ в множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел, заданные следующим образом: для любого $\boldsymbol{p} \equiv p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leqslant 3}$

$$\boldsymbol{\theta}^k(\boldsymbol{p}) = \left.\frac{d^k p(t)}{dt^k}\right|_{t=\tau},$$

где τ — некоторое фиксированное число.

(а) Докажите, что отображения $\boldsymbol{\theta}^k$, $k = 0, 1, 2, 3$, являются линейными функционалами (ковекторами) на векторном пространстве V.

(б) Докажите, что ковекторы $\boldsymbol{\theta}^k$, $k = 0, 1, 2, 3$, образуют базис двойственного пространства V^*.

(в) Найдите координаты каждого из ковекторов $\boldsymbol{\theta}^k$, $k = 0, 1, 2, 3$, в стандартном базисе.

(г) Найдите базис пространства V, двойственный базису $\boldsymbol{\theta}^k$, $k = 0, 1, 2, 3$, пространства V^*.

4.4. В примере 4.5 были рассмотрены линейные функционалы на пространстве комплексных (2×2)-матриц, заданные формулами $\boldsymbol{\xi}(X) = \operatorname{tr}(A^T X)$, где $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ — некоторая фиксированная матрица. Для стандартного базиса пространства $\mathbb{C}^{2\times 2}$, состоящего из элементов

$$\boldsymbol{e}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

постройте двойственный базис $\boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\varepsilon}^1, \boldsymbol{\varepsilon}^2, \boldsymbol{\varepsilon}^3$.

4.5. Докажите, что матрицы

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

называемые матрицами Паули, образуют базис в пространстве $\mathbb{C}^{2\times 2}$, найдите в этом базисе координаты произвольного вектора $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и постройте двойственный базис $\boldsymbol{\omega}^0, \boldsymbol{\omega}^1, \boldsymbol{\omega}^2, \boldsymbol{\omega}^3$.

ТЕМА 5

Линейные операторы

Примеры решения задач

Пример 5.1. Рассматривается линейный оператор $\boldsymbol{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, заданный формулой

$$\boldsymbol{A}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу этого оператора в стандартных базисах пространств

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{f}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите ядро и образ оператора $\boldsymbol{A}$.

Решение. Для нахождения матрицы оператора требуется подействовать оператором на каждый базисный вектор $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ пространства прообразов $\mathbb{R}^2$ и разложить полученный вектор пространства образов по базису $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_4$; полученные координаты образуют столбцы матрицы оператора:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_4, \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3.$$

Итак,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения ядра и образа оператора $\boldsymbol{A}$ приведём его матрицу A к упрощённому виду методом Гаусса—Жордана:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{г.-ж.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, столбцы матрицы A линейно независимы, а соответствующие векторы $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_4$ и $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_2) = -\boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3$ образуют базис в образе $\operatorname{im} \boldsymbol{A}$:

$$\operatorname{im} \boldsymbol{A} = L\big(\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_4;\ -\boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3\big);$$

$\dim \operatorname{im} \boldsymbol{A} = 2$. Поскольку система $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ (в координатной записи $AX = O$) не имеет нетривиальных решений, ядро оператора $\boldsymbol{A}$ тривиально: $\ker \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$; $\dim \ker \boldsymbol{A} = 0$.

Пример 5.2. Линейный оператор $\boldsymbol{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ переводит векторы $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ соответственно в векторы $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$. Найдите матрицу A оператора $\boldsymbol{A}$ в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Соотношения $\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_k)$, $k = 1, 2, 3$, записываются в координатном виде (относительно любого, в том числе и стандартного базиса) в виде $Y_k = AX_k$, где X_k, Y_k — столбцы координат векторов $\boldsymbol{x}_k$, $\boldsymbol{y}_k$, $k = 1, 2, 3$, A — матрица оператора $\boldsymbol{A}$ относительно того же базиса. Введя матрицы

$$X = \|X_1, X_2, X_3\| = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 3 & -8 & -12 \end{pmatrix},$$

$$Y = \|Y_1, Y_2, Y_3\| = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

можем записать эти соотношения в виде $Y = AX$, откуда $A = YX^{-1}$. Проводя вычисления (см. пример 2.2), находим

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 3 & -8 & -12 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 11 & -2 & -2 \\ 16 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 11 & -2 & -2 \\ 16 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{y}_1,$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 11 & -2 & -2 \\ 16 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{y}_2,$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 11 & -2 & -2 \\ 16 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{y}_3.$$

Пример 5.3. В векторном пространстве $\mathbb{R}[t]_{\leqslant n}$ рассматривается линейный оператор дифференцирования $\boldsymbol{D} \equiv \dfrac{d}{dt} : \mathbb{R}[t]_{\leqslant n} \to \mathbb{R}[t]_{\leqslant n}$. Найдите матрицу этого оператора в следующих базисах:

(1) $\boldsymbol{e}_0 = 1$, $\boldsymbol{e}_1 = t$, $\boldsymbol{e}_2 = t^2$, $\ldots$, $\boldsymbol{e}_n = t^n$;
(2) $\boldsymbol{f}_0 = 1$, $\boldsymbol{f}_1 = t - \tau$, $\boldsymbol{f}_2 = (t-\tau)^2$, $\ldots$, $\boldsymbol{f}_n = (t-\tau)^n$, где τ — фиксированное число;
(3) $\boldsymbol{g}_0 = 1$, $\boldsymbol{g}_1 = t/1!$, $\boldsymbol{g}_2 = t^2/2!$, $\ldots$, $\boldsymbol{g}_n = t^n/n!$.

Решение. Имеем:

$$\begin{cases} \boldsymbol{D}\boldsymbol{e}_0 = \dfrac{d}{dt}1 = 0, \\ \boldsymbol{D}\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{d}{dt}t = 1 = \boldsymbol{e}_0, \\ \boldsymbol{D}\boldsymbol{e}_2 = \dfrac{d}{dt}t^2 = 2t = 2\boldsymbol{e}_1, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \boldsymbol{D}\boldsymbol{e}_n = \dfrac{d}{dt}t^n = nt^{n-1} = n\boldsymbol{e}_{n-1} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad D_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix};$$

$$\left\{\begin{aligned} &\boldsymbol{D}\boldsymbol{f}_0 = \frac{d}{dt}1 = 0,\\ &\boldsymbol{D}\boldsymbol{f}_1 = \frac{d}{dt}(t-\tau) = 1 = \boldsymbol{f}_0,\\ &\boldsymbol{D}\boldsymbol{f}_2 = \frac{d}{dt}(t-\tau)^2 = 2(t-\tau) = 2\boldsymbol{f}_1,\\ &\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &\boldsymbol{D}\boldsymbol{f}_n = \frac{d}{dt}(t-\tau)^n = n(t-\tau)^{n-1} = n\boldsymbol{f}_{n-1}, \end{aligned}\right. \Rightarrow \quad D_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix};$$

$$\left\{\begin{aligned} &\boldsymbol{D}\boldsymbol{g}_0 = \frac{d}{dt}1 = 0,\\ &\boldsymbol{D}\boldsymbol{g}_1 = \frac{d}{dt}\frac{t}{1!} = 1 = \boldsymbol{g}_0,\\ &\boldsymbol{D}\boldsymbol{g}_2 = \frac{d}{dt}\frac{t^2}{2!} = \frac{t}{1!} = \boldsymbol{g}_1,\\ &\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &\boldsymbol{D}\boldsymbol{g}_n = \frac{d}{dt}\frac{t^n}{n!} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \boldsymbol{g}_{n-1}, \end{aligned}\right. \Rightarrow \quad D_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 5.4. В векторном пространстве V вещественных многочленов $p(u,v)$ степени $\leqslant 2$ от двух переменных u, v отображение $\boldsymbol{A} : V \to V$ задано формулой $\boldsymbol{A}(p(u,v)) = p(u+a, v+b)$, где a, b — фиксированные числа. Докажите, что $\boldsymbol{A}$ — линейный оператор, и найдите его матрицу в базисе, состоящем из векторов $\boldsymbol{e}_0 = 1$, $\boldsymbol{e}_1 = u$, $\boldsymbol{e}_2 = v$, $\boldsymbol{e}_3 = u^2$, $\boldsymbol{e}_4 = uv$, $\boldsymbol{e}_5 = v^2$.

Решение. Докажем линейность отображения $\boldsymbol{A}$. Для произвольных векторов $\boldsymbol{p} = p(u,v)$ и $\boldsymbol{q} = q(u,v)$ и произвольных чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имеем:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{p} + \beta\boldsymbol{q}) &= (\alpha p + \beta q)(u+a, v+b) = \\ &= \alpha p(u+a, v+b) + \beta q(u+a, v+b) = \alpha\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}) + \beta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}). \end{aligned}$$

Действуя оператором на векторы базиса $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_5$ и раскладывая полученные векторы по этому базису, находим:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_0) = 1 = \boldsymbol{e}_0,\\ &\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_1) = u + a = \boldsymbol{e}_1 + a\boldsymbol{e}_0,\\ &\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_2) = v + b = \boldsymbol{e}_2 + b\boldsymbol{e}_0,\\ &\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_3) = (u+a)^2 = u^2 + 2ua + a^2 = \boldsymbol{e}_3 + 2a\boldsymbol{e}_1 + a^2\boldsymbol{e}_0, \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_4) = (u+a)(v+b) = uv + ub + va + ab = \boldsymbol{e}_4 + a\boldsymbol{e}_2 + b\boldsymbol{e}_1 + ab\boldsymbol{e}_0,$$
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_5) = (v+b)^2 = v^2 + 2vb + b^2 = \boldsymbol{e}_5 + 2b\boldsymbol{e}_2 + b^2\boldsymbol{e}_0,$$

так что

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 2b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 5.5. Найдите матрицу A' линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$, если известна его матрица A в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{e}_{1'} &= \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}_{2'} &= -2\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2 - 8\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}_{3'} &= -3\boldsymbol{e}_1 - 4bf e_3 - 12\boldsymbol{e}_3. \end{aligned}$$

Решение. Формула преобразования матрицы линейного оператора при замене базиса имеет вид $A' = C^{-1}AC$, где — матрица перехода от старого базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ к новому $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$. Выпишем матрицу перехода:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 3 & -8 & -12 \end{pmatrix}.$$

Произведение $C^{-1}A$ было вычислено в примере 2.2:

$$C^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 3 & -8 & -12 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -4 \\ -5 & -14 & -9 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix},$$

так что

$$A' = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -4 \\ -5 & -14 & -9 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 3 & -8 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & 49 & 71 \\ -60 & 124 & 179 \\ 34 & -70 & -101 \end{pmatrix}.$$

Пример 5.6. В векторном пространстве $V = \mathbb{R}^3$ задан линейный оператор $\boldsymbol{P}$, матрица которого в стандартном базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ пространства V имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Проверьте, что $\boldsymbol{P}$ — проектор, найдите его образ и ядро; укажите базисы $\boldsymbol{f}_1, \ldots$ и $\boldsymbol{g}_1, \ldots$ в образе и в ядре. Убедитесь, что $V = \operatorname{im} \boldsymbol{P} \oplus \ker \boldsymbol{P}$. Найдите проекцию произвольного вектора на $\operatorname{im} \boldsymbol{P}$ параллельно $\ker \boldsymbol{P}$. Составьте матрицу линейного оператора $\widehat{\boldsymbol{P}} : V \to \operatorname{im} \boldsymbol{P}$, действующего по правилу $\widehat{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ для любого вектора $x \in V$, в следующей паре базисов: $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ в пространстве V и найденный ранее базис $\boldsymbol{f}_1, \ldots$ в пространстве $\operatorname{im} \boldsymbol{P}$.

Решение. Поскольку

$$P^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix} = P,$$

оператор $\boldsymbol{P}$ является проектором. Для нахождения ядра и образа приведём матрицу оператора к упрощённому виду:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Г.-Ж.}} P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для столбцов P_1, P_2, P_3 матрицы P имеет место соотношение $P_3 = (1/4)P_1 + (1/2)P_2$ и

$$\operatorname{im} \boldsymbol{P} = L(P_1, P_2),$$

т.е. базис в подпространстве $\operatorname{im} \boldsymbol{P}$ образуют первые два столбца матрицы P: $\boldsymbol{f}_1 = P_1$, $\boldsymbol{f}_2 = P_2$.

Для нахождения ядра $\ker \boldsymbol{P}$ необходимо решить однородную систему $\boldsymbol{P}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

т.е. вектор $\boldsymbol{g} = (-1; -2; 4)^T$ образует базис в подпространстве $\ker \boldsymbol{P}$: $\ker \boldsymbol{P} = L\big((-1; -2; 4)^T\big)$.

Найдём базис в сумме подпространств $\operatorname{im}\boldsymbol{P} + \ker\boldsymbol{P}$; для этого приведём к упрощённому виду матрицу, столбцами которой являются базисные векторы $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{g}$ подпространств $\operatorname{im}\boldsymbol{P}$ и $\ker\boldsymbol{P}$:

$$\|\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{g}\| = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{г.-ж.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, рассматриваемые три вектора $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{g}_1$ линейно независимы и потому образуют базис в (трёхмерном) пространстве V; кроме того, $\operatorname{im}\boldsymbol{P} \cap \ker\boldsymbol{P} = \boldsymbol{0}$, так что сумма $\operatorname{im}\boldsymbol{P} + \ker\boldsymbol{P}$ является прямой суммой: $\operatorname{im}\boldsymbol{P} + \ker\boldsymbol{P} = \operatorname{im}\boldsymbol{P} \oplus \ker\boldsymbol{P}$.

Для произвольного вектора $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, x^3)^T$ находим его проекцию на $\operatorname{im}\boldsymbol{P}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x} &= x^1 P_1 + x^2 P_2 + x^3 P_3 = \\ &= x^1 P_1 + x^2 P_2 + x^3 \left(\frac{1}{4} P_1 + \frac{1}{2} P_2\right) = \\ &= \left(x^1 + \frac{1}{4} x^3\right) \boldsymbol{f}_1 + \left(x^2 + \frac{1}{2} x^3\right) \boldsymbol{f}_2. \end{aligned}$$

Для построения матрицы $\widehat{P}$ оператора $\widehat{\boldsymbol{P}} : V \to \operatorname{im}\boldsymbol{P}$ в паре базисов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ пространства V и $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$ пространства $\operatorname{im}\boldsymbol{P}$ подействуем этим оператором на векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ и разложим полученные векторы $\widehat{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_1$, $\widehat{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_2$, $\widehat{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_3$ по базису $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$:

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{e}_1 &= \boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_1 = (2; 2; -4)^T = \boldsymbol{f}_1 \\ \widehat{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{e}_2 &= \boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_2 = (1; 3; -4)^T = \boldsymbol{f}_2, \\ \widehat{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{e}_3 &= \boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_3 = (1; 2; -3)^T = \frac{1}{4}\boldsymbol{f}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{f}_2, \end{aligned}$$

так что

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $V = \operatorname{im}\boldsymbol{P} \oplus \ker\boldsymbol{P}$, для любого $\boldsymbol{x} \in V$ имеем $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x} \in \operatorname{im}\boldsymbol{P}$ и, следовательно, $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \ker\boldsymbol{P}$. Убедимся в этом. Так как $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})x$ (здесь $\boldsymbol{I}$ — единичный оператор), найдём матрицу Q оператора $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}$:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $\operatorname{im}\boldsymbol{Q} = L\big((-1; -2; 4)^T\big) = \ker\boldsymbol{P}$, что и требовалось.

Пример 5.7. Проверьте, что векторы $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ образуют базис в векторном пространстве $\mathbb{R}^3$. Найдите матрицу P в стандартном базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ пространства $\mathbb{R}^3$ оператора проектирования $\boldsymbol{P}$ на подпространство $L(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)$ вдоль подпространства $L(\boldsymbol{p}_3)$:

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Решение. Линейная независимость векторов $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ была фактически установлена в примере 2.1: поскольку составленная из них матрица $\|\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3\|$ обратима, её определитель отличен от нуля и, следовательно, её столбцы линейно независимы. Отметим, что указанная матрица является матрицей перехода от стандартного базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ пространства к базису, состоящему из векторов $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$; обозначим её через $C = \|\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3\|$. В базисе $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ матрица P' оператора проектирования $\boldsymbol{P}$ на подпространство $L(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)$ вдоль подпространства $L(\boldsymbol{p}_3)$ имеет вид

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Считая стандартный базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ старым, а базис $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ новым, можем записать формулу преобразования матрицы линейного оператора при замене базиса: $P' = C^{-1}PC$ или, эквивалентно, $P = CP'C^{-1}$. Используя результат примера 2.1, находим:

$$P = CP'C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 3 & -8 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 12 & -3 & -2 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -20 & 6 & 3 \\ -28 & 9 & 4 \\ -84 & 24 & 13 \end{pmatrix} = \|P_1, P_2, P_3\|.$$

Проверить полученный результат можно несколькими способами:

1) убедиться, что выполнено соотношение $P^2 = P$:

$$\begin{pmatrix} -20 & 6 & 3 \\ -28 & 9 & 4 \\ -84 & 24 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -20 & 6 & 3 \\ -28 & 9 & 4 \\ -84 & 24 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & 6 & 3 \\ -28 & 9 & 4 \\ -84 & 24 & 13 \end{pmatrix};$$

2) убедиться, что $\operatorname{im}\boldsymbol{P} = L(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)$; для этого найдём $\operatorname{im}\boldsymbol{P}$:

$$\|P_1, P_2, P_3\| = \begin{pmatrix} -20 & 6 & 3 \\ -28 & 9 & 4 \\ -84 & 24 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Г.-Ж.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \operatorname{im}\boldsymbol{P} = L\left(\begin{pmatrix} -20 \\ -28 \\ -84 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 24 \end{pmatrix}\right) = L(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2),$$

где $\boldsymbol{q}_1 = (5, 7, 21)^T = (-1/4)P_1$, $\boldsymbol{q}_2 = (2, 3, 8)^T = (1/3)P_2$, а затем проверим, что $L(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = L(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2)$:

$$\|\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2\| = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 7 & 3 \\ 3 & -8 & 21 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Г.-Ж.}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

3) убедиться, что $\ker\boldsymbol{P} = L(\boldsymbol{p}_3)$; для нахождения ядра требуется решить однородную систему $PX = O$; матрица P была приведена к упрощённому виду выше (см. $(*)$), так что ФСР системы имеет вид $X = (3, 4, 12)^T = -\boldsymbol{p}_3$.

Задачи для самостоятельного решения

5.1. Рассматривается линейный оператор $\boldsymbol{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, заданный формулой

$$\boldsymbol{A}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y & z \\ -z & x \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу этого оператора в стандартных базисах пространств

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{f}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите ядро и образ оператора $\boldsymbol{A}$.

5.2. Рассматривается линейный оператор $\boldsymbol{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}^{2\times2}(\mathbb{R})$, заданный формулой

$$\boldsymbol{A}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathbb{C}^{2\times2}(\mathbb{R})$ — векторное пространство комплексных (2×2)-матриц над полем вещественных чисел, стандартный базис в котором имеет вид

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_4 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу оператора в стандартных базисах пространств $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{C}^{2\times2}(\mathbb{R})$. Найдите ядро и образ оператора $\boldsymbol{A}$.

5.3. Проверьте, что функции вида $e^{\lambda t}p(t)$, где λ — фиксированное число, а $p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leqslant n}$ — многочлен степени $\leqslant n$, образуют векторное пространство. Проверьте, что векторы $\boldsymbol{e}_k = e^{\lambda t}\dfrac{t^k}{k!}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, образуют базис в этом пространстве. Докажите, что дифференцирование является линейным оператором $\boldsymbol{D}$ на этом пространстве, и найдите матрицу этого оператора в указанном базисе. Найдите также матрицы операторов $\boldsymbol{D}^2$ и $\boldsymbol{D}^3$.

5.4. Докажите, что множество всех однородных многочленов четвёртой степени от двух переменных u, v вида

$$\boldsymbol{p} = p(u,v) = au^4 + bu^3v + cu^2v^2 + duv^3 + fv^4$$

является векторным пространством, базисом в котором могут служить векторы

$$\boldsymbol{e}_1 = u^4, \quad \boldsymbol{e}_2 = u^3v, \quad \boldsymbol{e}_3 = u^2v^2, \quad \boldsymbol{e}_4 = uv^3, \quad \boldsymbol{e}_5 = v^4.$$

Найдите матрицы следующих линейных операторов в этом базисе:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}) = u\frac{\partial p}{\partial v}, \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{p}) = v\frac{\partial p}{\partial u}, \quad \boldsymbol{C}(\boldsymbol{p}) = u\frac{\partial p}{\partial u} - v\frac{\partial p}{\partial v}.$$

Найдите ядра и образы операторов $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$.

5.5. Линейный оператор $\boldsymbol{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ переводит векторы $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ соответственно в векторы $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$. Найдите матрицу A оператора $\boldsymbol{A}$ в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{y}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[Указание: используйте результат задачи 2.2.]

5.6. Найдите матрицу A' линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$, если известна его матрица A в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{e}_{1'} &= 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}_{2'} &= 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}_{3'} &= \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3. \end{aligned}$$

[Указание: используйте результат задачи 2.2.]

5.7. Найдите матрицу A' линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$, если известна его матрица A в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= 2\boldsymbol{e}_{1'} + \boldsymbol{e}_{2'}, \\ \boldsymbol{e}_2 &= 2\boldsymbol{e}_{1'} + \boldsymbol{e}_{2'} + \boldsymbol{e}_{3'}, \\ \boldsymbol{e}_3 &= \boldsymbol{e}_{1'} + \boldsymbol{e}_{3'}. \end{aligned}$$

Эта задача отличается от задачи 5.6: внимательно посмотрите на индексы.

5.8. Линейный оператор $\boldsymbol{P} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ в векторном пространстве $V = \mathbb{R}^4$ задан своей матрицей относительно стандартного базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ пространства V. Проверьте, что $\boldsymbol{P}$ — проектор, найдите его образ и ядро; укажите базисы $\boldsymbol{f}_1, \ldots$ и $\boldsymbol{g}_1, \ldots$ в образе и в ядре. Убедитесь, что $V = \operatorname{im} \boldsymbol{P} \oplus \ker \boldsymbol{P}$. Найдите проекцию произвольного вектора $\boldsymbol{x} \in V$ на $\operatorname{im} \boldsymbol{P}$ параллельно $\ker \boldsymbol{P}$. Составьте матрицу линейного оператора $\widehat{\boldsymbol{P}} : V \to \operatorname{im} \boldsymbol{P}$, действующего по правилу $\widehat{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ для любого вектора $\boldsymbol{x} \in V$, в следующей паре базисов: $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ в пространстве V и найденный ранее базис $\boldsymbol{f}_1, \ldots$ в пространстве $\operatorname{im} \boldsymbol{P}$.

$$\text{(а)} \quad P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 6 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \text{(б)} \quad P = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & -3 \\ -4 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 7 & 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

5.9. Проверьте, что векторы $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4$ образуют базис в векторном пространстве $\mathbb{R}^4$. Найдите матрицу P в стандартном базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ пространства $\mathbb{R}^4$

(а) проектора $\boldsymbol{P}_1$ на подпространство $L(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)$ вдоль подпространства $L(\boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4)$;

(б) проектора $\boldsymbol{P}_2$ на подпространство $L(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$ вдоль подпространства $L(\boldsymbol{p}_4)$:

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[Указание: используйте результат задачи 2.2.

ТЕМА 6

Собственные значения, собственные векторы и инвариантные подпространства линейных операторов

Примеры решения задач

Пример 6.1. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -10 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Сделайте выводы о возможности диагонализации матрицы A.

Решение. Выпишем характеристический многочлен матрицы:

$$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -10 \\ 3 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6;$$

его корни, равные $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 3$, представляют собой собственные значения матрицы A. Поскольку корни простые (т.е. имеют кратность 1), алгебраическая кратность обоих собственных значений равна 1. Напомним, что геометрическая кратность собственного значения, т.е. размерность соответствующего собственного подпространства (или, эквивалентно, количество линейно независимых собственных векторов), не превышает алгебраической кратности; следовательно, каждому из найденных собственных значений соответствует не более одного собственного вектора (с точностью до пропорциональности).

Для нахождения собственных векторов, соответствующих собственному значению $\lambda_1 = 2$, необходимо решить однородную систему уравнений $(A - \lambda_1 I)X = O$. Приведём основную матрицу системы к упрощённому виду методом Гаусса—Жордана:

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -3 & -10 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{г.-ж.}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

фундаментальная совокупность решений соответствующей системы состоит из одного вектора $(2;-1)^T$, который может быть взят в качестве собственного вектора. Аналогично, для собственного значения $\lambda_2 = 3$ имеем

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -3 & -10 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -10 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{г.-ж.}} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и соответствующий собственный вектор есть $(5;-3)^T$.

Таким образом, собственные значения матрицы A равны $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 3$, а соответствующие им собственные векторы имеют вид $X_1 = (2;-1)^T$ и $X_2 = (5;-3)^T$.

Поскольку из собственных векторов X_1, X_2 матрицы A можно составить базис в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^2$, матрицу A можно привести к диагональному виду преобразованием подобия: матрица $A' = C^{-1}AC$ будет диагональной с диагональными элементами $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 3$, где $C = \|X_1, X_2\|$ — матрица перехода от стандартного базиса $\boldsymbol{e}_1 = (1;0)^T$, $\boldsymbol{e}_2 = (0;1)^T$ арифметического пространства $\mathbb{R}^2$ к базису X_1, X_2, состоящему из собственных векторов матрицы. Сделаем проверку:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A' = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -10 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пример 6.2. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\boldsymbol{A}$, действующего в трёхмерном вещественном пространстве $V(\mathbb{R})$ и заданного в некотором базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ этого пространства своей матрицей. Существует ли базис в пространстве V, в котором матрица оператора $\boldsymbol{A}$ диагональна?

$$A = \begin{pmatrix} -15 & -16 & 2 \\ 13 & 14 & -2 \\ -9 & -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристический многочлен оператора:

$$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda - 15 & -16 & 2 \\ 13 & 14 - \lambda & -2 \\ -9 & -8 & 4 - \lambda \end{vmatrix}.$$

Наиболее трудоёмким этапом решения задач на нахождение собственных значений и собственных векторов операторов, заданных матрицами, является вычисление характеристического многочлена и поиск его корней. При вычислении определителя $\det(A-\lambda I)$ целесообразно преобразовывать определитель таким образом, чтобы в результате получилось факторизованное (т.е. разложенное на множители) выражение для характеристического многочлена; отметим, что сделать это удаётся не всегда. В рассматриваемом примере прибавим вторую строку определителя к первой:

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda-15 & -16 & 2 \\ 13 & 14-\lambda & -2 \\ -9 & -8 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda-2 & -\lambda-2 & 0 \\ 13 & 14-\lambda & -2 \\ -9 & -8 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

и далее вычтем первый столбец из второго:

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda-2 & -\lambda-2 & 0 \\ 13 & 14-\lambda & -2 \\ -9 & -8 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda-2 & 0 & 0 \\ 13 & 1-\lambda & -2 \\ -9 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix}.$$

Теперь можно разложить определитель по первой строке, после чего в полученном определителе вычесть второй столбец из первого:

$$f_A(\lambda) = (-\lambda-2)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda-2)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ \lambda-3 & 4-\lambda \end{vmatrix}.$$

Вынося общий множитель $(3-\lambda)$ из первого столбца и прибавляя вторую строку к первой, находим

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= (-\lambda-2)(3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (-\lambda-2)(3-\lambda)\begin{vmatrix} 0 & 2-\lambda \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda-2)(3-\lambda)(2-\lambda). \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили факторизованный (разложенный на множители) характеристический многочлен, что сразу же даёт характеристические числа (корни характеристического многочлена); расположим их в возрастающем порядке:

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3.$$

Поскольку все характеристические числа принадлежат числовому полю $\mathbb{R}$, которое в данной задаче является основным, все они являются собственными значениями рассматриваемого оператора, причём их алгебраические (а следовательно, и геометрические) кратности равны 1.

Далее для каждого собственного значения λ_j найдём соответствующие собственные векторы (точнее, их координаты относительно базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$) как решения однородных систем $(A - \lambda_j I)X = O$.

Для $\lambda_1 = -2$ имеем

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -15 & -16 & 2 \\ 13 & 14 & -2 \\ -9 & -8 & 4 \end{pmatrix} - (-2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -16 & 2 \\ 13 & 16 & -2 \\ -9 & -8 & 6 \end{pmatrix};$$

приводя полученную матрицу к упрощённому виду методом Гаусса—Жордана, находим ФСР системы $(A - \lambda_1 I)X = O$:

$$\begin{pmatrix} -13 & -16 & 2 \\ 13 & 16 & -2 \\ -9 & -8 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{г.-ж.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Аналогично для остальных двух собственных значений:

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -15 & -16 & 2 \\ 13 & 14 & -2 \\ -9 & -8 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -17 & -16 & 2 \\ 13 & 12 & -2 \\ -9 & -8 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{г.-ж.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$A - \lambda_3 I = \begin{pmatrix} -15 & -16 & 2 \\ 13 & 14 & -2 \\ -9 & -8 & 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -18 & -16 & 2 \\ 13 & 11 & -2 \\ -9 & -8 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{г.-ж.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, оператор имеет три различных простых (т.е. алгебраической кратности 1) собственных значения $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, которым соответствуют собственные векторы $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$, имеющие в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ столбцы координат

$$X_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку эти собственные векторы соответствуют различным собственным значениям, они автоматически линейно независимы и потому образуют базис в пространстве V. В базисе $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$, состоящем из собственных векторов оператора, матрица оператора диагональна, причём её диагональные элементы равны собственным значениям:

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ к диагонализирующему базису $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ имеет вид

$$C = \|\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\| = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 6.3. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\boldsymbol{A}$, действующего в трёхмерном вещественном пространстве $V(\mathbb{R})$ и заданного в некотором базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ этого пространства своей матрицей. Существует ли базис в пространстве V, в котором матрица оператора $\boldsymbol{A}$ диагональна?

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 0 \\ -5 & -5 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Характеристический многочлен оператора равен

$$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 8 & 0 \\ -5 & -\lambda-5 & 1 \\ 3 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3,$$

так что оператор имеет собственное значение $\lambda_1 = 1$ алгебраической кратности 3. Геометрическая кратность этого собственного значения может оказаться равной 1, 2 или 3. Для нахождения собственных векторов решим однородную систему $(A - \lambda_1 I)X = O$:

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 0 \\ -5 & -5 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 \\ -5 & -6 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{г.-ж.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, собственному значению $\lambda_1 = 1$ соответствует одномерное собственное подпространство, базисом в котором может служить вектор с координатами $X = (4; -3; 2)^T$ относительно исходного базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Алгебраическая кратность собственного значения равна 3, геометрическая кратность равна 1. Из собственных векторов нельзя составить базис в пространстве, поэтому матрицу данного оператора невозможно привести к диагональному виду (т.е. не существует базиса, в котором матрица оператора была бы диагональна).

Пример 6.4. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\boldsymbol{A}$, действующего в трёхмерном вещественном пространстве $V(\mathbb{R})$ и заданного в некотором базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ этого пространства своей матрицей. Существует ли базис в пространстве V, в котором матрица оператора A диагональна?

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ -3 & -5 & -3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Характеристический многочлен оператора равен

$$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 8 & 4 \\ -3 & -\lambda - 5 & -3 \\ 2 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3,$$

так что оператор имеет собственное значение $\lambda_1 = 1$ алгебраической кратности 3. Найдём собственные векторы, решив однородную систему $(A - \lambda_1 I)X = O$:

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ -3 & -5 & -3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ -3 & -6 & -3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Г.-Ж.}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Однородная система с этой основной матрицей имеет ФСР, состоящую из двух векторов

$$X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

поэтому оператор обладает двумерным собственным подпространством, соответствующим собственному значению $\lambda_1 = 1$. Алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения равны соответственно 3 и 2. Базис в собственном подпространстве образуют два собственных вектора с координатами $X_1 = (-2; 1; 0)^T$ и $X_1 = (-1; 0; 1)^T$ относительно исходного базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Из собственных векторов нельзя составить базис в пространстве, поэтому матрицу данного оператора невозможно диагонализировать.

Пример 6.5. Линейный оператор $\boldsymbol{A}$, действующий в трёхмерном вещественном векторном пространстве $V(\mathbb{R})$, задан своей матрицей A в некотором базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Убедитесь, что линейная оболочка P векторов $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ является инвариантным подпространством оператора. Является ли это инвариантное подпространство суммой собственных подпространств?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{x}_1 &= 7\boldsymbol{e}_1 - 7\boldsymbol{e}_2 + 4\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{x}_2 &= 12\boldsymbol{e}_1 - 12\boldsymbol{e}_2 + 7\boldsymbol{e}_3. \end{aligned}$$

Решение. Найдём образы $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2$ векторов $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ при действии оператора $\boldsymbol{A}$; для этого вычислим столбцы координат Y_1 и Y_2 этих векторов $\boldsymbol{y}_1$ и $\boldsymbol{y}_2$:

$$\|Y_1, Y_2\| = \|AX_1, AX_2\| = A\|X_1, X_2\| = \\ = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -7 & -12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 26 \\ -15 & -26 \\ 9 & 16 \end{pmatrix}.$$

Выясним, лежат ли векторы $\boldsymbol{y}_1$ и $\boldsymbol{y}_2$ в линейной оболочке $P = L(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$; для этого приведём матрицу $\|X_1, X_2, Y_1, Y_2\|$, составленную из столбцов координат всех интересующих нас векторов, к упрощённому виду методом Гаусса—Жордана:

$$\|X_1, X_2, Y_1, Y_2\| = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 15 & 26 \\ -7 & -12 & -15 & -26 \\ 4 & 7 & 9 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{y}_1 = -3\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2, \quad \boldsymbol{y}_2 = -10\boldsymbol{x}_1 + 8\boldsymbol{x}_2.$$

Итак, линейная оболочка $P = L(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ является инвариантным подпространством оператора $\boldsymbol{A}$, а векторы $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ образуют базис в этом инвариантном подпространстве. Матрица $A|_P$ оператора

$\boldsymbol{A}|_P$, представляющего собой ограничение исходного оператора $\boldsymbol{A}$ на инвариантное подпространство P, имеет в базисе $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ вид

$$A|_P = \begin{pmatrix} -3 & -10 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен этой матрицы

$$\det\big(A|_P - \lambda I\big) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -10 \\ 3 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

имеет корни $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 3$, которым соответствуют собственные векторы $(2; -1)^T$ и $(5; -3)^T$ (точнее, указанные столбцы представляют собой столбцы координат собственных векторов оператора $\boldsymbol{A}|_P$ в базисе $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ подпространства P; вычисления см. в примере 6.1). Итак, инвариантное подпространство P оператора $\boldsymbol{A}$ содержит собственные векторы $\boldsymbol{z}_1$ и $\boldsymbol{z}_2$ с координатами

$$Z_1 = 2X_1 - X_2 = 2\begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$Z_2 = 5X_1 - 3X_2 = 5\begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

соответствующие собственным значениям $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 3$. Выполним проверку:

$$AZ_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2Z_1,$$

$$AZ_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3Z_2.$$

Таким образом, инвариантное пространство P является прямой суммой одномерных собственных подпространств: $P = L(\boldsymbol{z}_1) \oplus L(\boldsymbol{z}_2)$.

Пример 6.6. Линейный оператор $\boldsymbol{A}$, действующий в вещественном трёхмерном векторном пространстве $V(\mathbb{R})$, задан своей матрицей A в некотором базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Убедитесь, что линейная оболочка P векторов $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ является инвариантным подпространством оператора. Является ли это инвариантное подпространство суммой собственных подпространств?

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 14 & 6 \\ -8 & -9 & -4 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{x}_1 &= \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{x}_2 &= -3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2. \end{aligned}$$

Решение. Найдём образы $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2$ векторов $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ при действии оператора $\boldsymbol{A}$ (точнее, столбцы Y_1, Y_2 их координат в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$):

$$\|Y_1, Y_2\| = \|AX_1, AX_2\| = A\|X_1, X_2\| =$$
$$= \begin{pmatrix} 11 & 14 & 6 \\ -8 & -9 & -4 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 2 & 6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Выясним, лежат ли векторы $\boldsymbol{y}_1$ и $\boldsymbol{y}_2$ в линейной оболочке $P = L(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$; для этого приведём матрицу $\|X_1, X_2, Y_1, Y_2\|$ к упрощённому виду методом Гаусса—Жордана:

$$\|X_1, X_2, Y_1, Y_2\| = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & -5 \\ -2 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Г.-Ж.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2, \quad \boldsymbol{y}_2 = -2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2.$$

Следовательно, линейная оболочка $P = L(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ является инвариантным подпространством оператора $\boldsymbol{A}$, а векторы $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ образуют базис в этом инвариантном подпространстве. Матрица $A|_P$ оператора $\boldsymbol{A}|_P$, представляющего собой ограничение исходного оператора $\boldsymbol{A}$ на инвариантное подпространство P, имеет в базисе $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ вид

$$A|_P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен этой матрицы

$$\det\big(A|_P - \lambda I\big) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 5$$

не имеет вещественных корней, поэтому оператор $\boldsymbol{A}|_P$ не имеет собственных значений, т.е. в линейной оболочке $P = L(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ не содержится собственных векторов оператора $\boldsymbol{A}$, а значит, инвариантное подпространство $L(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ не является суммой собственных подпространств.

Пример 6.7. Линейный оператор $\boldsymbol{A}$, действующий в трёхмерном вещественном векторном пространстве $V(\mathbb{R})$, задан своей матрицей A в некотором базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Убедитесь, что линейная оболочка P векторов $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ является инвариантным подпространством оператора. Содержит ли это инвариантное подпространство собственные векторы оператора?

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -4 & 5 & 4 \\ 4 & -7 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{x}_1 &= 8\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + 17\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{x}_2 &= 4\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + 11\boldsymbol{e}_3. \end{aligned}$$

Решение. Найдём образы $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2$ векторов $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ при действии оператора $\boldsymbol{A}$ (точнее, столбцы Y_1, Y_2 их координат в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$):

$$\begin{aligned} \big\|Y_1, Y_2\big\| &= \big\|AX_1, AX_2\big\| = A\big\|X_1, X_2\big\| = \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -4 & 5 & 4 \\ 4 & -7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -2 & -2 \\ 17 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 28 \\ 26 & 18 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Выясним, лежат ли векторы $\boldsymbol{y}_1$ и $\boldsymbol{y}_2$ в линейной оболочке $P = L(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$; для этого приведём матрицу $\big\|X_1, X_2, Y_1, Y_2\big\|$ к упрощённому виду методом Гаусса—Жордана:

$$\big\|X_1, X_2, Y_1, Y_2\big\| = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 40 & 28 \\ -2 & -2 & 26 & 18 \\ 17 & 11 & -5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Г.-Ж.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 23 & 16 \\ 0 & 1 & -36 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{y}_1 = 23\boldsymbol{x}_1 - 36\boldsymbol{x}_2, \quad \boldsymbol{y}_1 = 16\boldsymbol{x}_1 - 25\boldsymbol{x}_2.$$

Следовательно, линейная оболочка $P = L(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ является инвариантным подпространством оператора $\boldsymbol{A}$, а векторы $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ образуют базис в этом инвариантном подпространстве. Матрица $A|_P$ оператора $\boldsymbol{A}|_P$, представляющего собой ограничение исходного оператора $\boldsymbol{A}$ на инвариантное подпространство P, имеет в базисе $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ этого инвариантного подпространства вид

$$A|_P = \begin{pmatrix} 23 & 16 \\ -36 & -25 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен этой матрицы

$$\det(A|_P - \lambda I) = \begin{vmatrix} 23-\lambda & 16 \\ -36 & -25-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

имеет двукратный корень $\lambda_1 = -1$; это число является собственным значением оператора $\boldsymbol{A}|_P$, а вместе с ним и оператора $\boldsymbol{A}$, алгебраической кратности 2. Столбцы координат Z соответствующих собственных векторов в базисе $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ инвариантного подпространства $P = L(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ вычисляются как решения однородной системы, основная матрица которой равна $A|_P - \lambda_1 I$:

$$A|_P - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 24 & 16 \\ -36 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{г.-ж.}} \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Z = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, собственному значению $\lambda_1 = -1$ алгебраической кратности 2 соответствует один собственный вектор $\boldsymbol{w}$, т.е. геометрическая кратность этого собственного значения равна 1. Найдём координаты W этого собственного вектора в исходном базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$:

$$\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{x}_1 - 3\boldsymbol{x}_2 \quad \Rightarrow \quad W = 2\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 17 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, двумерное инвариантное подпространство $P = L(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ оператора $\boldsymbol{A}$ содержит одномерное собственное подпространство $L(\boldsymbol{w})$, базис в котором образует собственный вектор с координатами $W = (4; 2; 1)^T$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = -1$. Выполним проверку:

$$AW = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -4 & 5 & 4 \\ 4 & -7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda_1 W.$$

Пример 6.8. Найдите собственные значения и собственные векторы оператора $\boldsymbol{A}$, действующего в трёхмерном комплексном векторном пространстве $V(\mathbb{C})$ и заданного своей матрицей A в некотором базисе этого пространства $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 8 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение. Характеристический многочлен оператора $\boldsymbol{A}$ имеет вид

$$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda - 1 & 0 & 2 \\ -2 & -\lambda - 3 & 8 \\ 0 & -4 & 7 - \lambda \end{vmatrix}.$$

Для упрощения вычислений вычтем из первой строки определителя вторую и прибавим третью, а затем прибавим второй столбец к первому и третьему:

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda-1 & 0 & 2 \\ -2 & -\lambda-3 & 8 \\ 0 & -4 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda-1 & 1-\lambda \\ -2 & -\lambda-3 & 8 \\ 0 & -4 & 7-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \lambda-1 & 0 \\ -\lambda-5 & -\lambda-3 & 5-\lambda \\ -4 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix}.$$

Разлагая определитель по первой строке, находим

$$f_A(\lambda) = -(\lambda-1) \begin{vmatrix} -\lambda-5 & 5-\lambda \\ -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)\left(\lambda^2-2\lambda+5\right).$$

Квадратный трёхчлен имеет комплексно сопряжённые корни $1 \pm 2i$; таким образом, собственными значениями оператора $\boldsymbol{A}$ являются числа $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$; алгебраическая кратность каждого собственного значения равна единице.

Для нахождения собственных векторов, соответствующих собственному значению $\lambda_1 = 1$, решим однородную систему $(A - \lambda_1 I)X = O$:

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 8 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & 8 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Г.-Ж.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения собственных векторов, соответствующих собственному значению $\lambda_2 = 1 + 2i$, требуется решить однородную систему $(A - \lambda_2 I)X = O$:

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 8 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix} - (1+2i) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2-2i & 0 & 2 \\ -2 & -4-2i & 8 \\ 0 & -4 & 6-2i \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Г.-Ж.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & (-1+i)/2 \\ 0 & 1 & (-3+i)/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда находим

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 3-i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку элементы матрицы A вещественны, а числа λ_2 и λ_3 комплексно сопряжены, $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$, решения системы $(A - \lambda_3 I)X = O$ сопряжены решениям системы $(A - \lambda_2 I)X = O$. Таким образом, оператор $\boldsymbol{A}$ имеет собственные значения

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1 + 2i, \quad \lambda_3 = \overline{\lambda_2} = 1 - 2i,$$

которым соответствуют собственные векторы

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 3-i \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \overline{X_2} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 3+i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 6.9. Найдите собственные значения и инвариантные подпространства оператора $\boldsymbol{A}$, действующего в трёхмерном вещественном векторном пространстве $V(\mathbb{R})$ и заданного своей матрицей A в некотором базисе этого пространства $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 8 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix},$$

Решение. Характеристический многочлен матрицы A был найден в примере 6.8; поскольку оператор $\boldsymbol{A}$ действует в вещественном векторном пространстве, комплексные корни $1 \pm 2i$ характеристического многочлена не являются собственными значениями. Таким образом, оператор $\boldsymbol{A}$ имеет единственное собственное значение $\lambda_1 = 1$, которому соответствует собственный вектор $(2; 3; 2)^T$ (здесь и далее указываются координаты векторов относительно базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$).

Паре $1 \pm 2i$ комплексно сопряжённых характеристических чисел соответствует двумерное инвариантное подпространство оператора $\boldsymbol{A}$; базисом в этом инвариантном подпространстве образуют два вектора с вещественными координатами, которые можно получить как линейные комбинации (с комплексными коэффициентами) собственных векторов X_2 и X_3, найденных в примере 6.8, например,

$$Y_2 = \frac{1}{2}(X_2 + X_3) = \frac{1}{2}(X_2 + \overline{X_2}) = \operatorname{Re} X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$Y_3 = \frac{i}{2}(X_2 - X_3) = \frac{i}{2}(X_2 - \overline{X_2}) = -\operatorname{Im} X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, оператор $\boldsymbol{A}$ обладает двумерным инвариантным подпространством, не содержащим собственных векторов. Убедиться в этом можно как в примере 6.6, проверив, что образы AY_2 и AY_3 лежат в линейной оболочке векторов Y_2 и Y_3:

$$AY_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 8 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$AY_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 8 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$\left\| Y_2, Y_3, AY_2, AY_3 \right\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & -5 \\ 2 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Г.-Ж.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

6.1. В трёхмерном вещественном векторном пространстве $V(\mathbb{R})$ линейный оператор $\boldsymbol{A}$ задан своей матрицей относительно некоторого базиса. Найдите собственные значения и собственные векторы оператора, для каждого собственные значения укажите алгебраическую и геометрическую кратности, обсудите возможность диагонализации оператора.

$$\text{(а)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \text{(б)} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{(в)} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}; \qquad \text{(г)} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

6.2. Линейный оператор в трёхмерном вещественном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^3$ задан своей матрицей в стандартном базисе пространства:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Являются ли инвариантными подпространствами этого оператора следующие линейные оболочки:

$$\text{(а) } L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right); \quad \text{(б) } L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right); \quad \text{(в) } L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

В случае положительного ответа выясните, является ли соответствующее инвариантное подпространство прямой суммой собственных подпространств, и если является, то каких именно.

6.3. Линейный оператор в трёхмерном вещественном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^3$ задан своей матрицей в стандартном базисе пространства:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -8 & -9 & -10 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Выясните, является ли каждая из следующих линейных оболочек инвариантным подпространством оператора:

$$\text{(а) } L\left(\begin{pmatrix} 7 \\ -14 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad \text{(б) } L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

В случае положительного ответа выясните, является ли соответствующее инвариантное подпространство прямой суммой собственных подпространств.

6.4. Линейный оператор в трёхмерном комплексном арифметическом пространстве $\mathbb{C}^3$ задан своей матрицей в стандартном базисе пространства:

$$\text{(а) } \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -2 & -8 & -4 \\ 4 & 16 & 8 \end{pmatrix}; \qquad \text{(б) } \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 5 \\ -5 & -11 & -6 \end{pmatrix}.$$

Найдите собственные значения и собственные векторы оператора.

6.5. Линейный оператор в трёхмерном вещественном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^3$ задан своей матрицей в стандартном базисе пространства; матрицы те же, что и в задаче 6.4. Найдите инвариантные подпространства оператора.

6.6. Линейный оператор $\boldsymbol{A}$, действующий в трёхмерном вещественном векторном пространстве $V(\mathbb{R})$, задан своей матрицей A в некотором базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Убедитесь, что линейная оболочка векторов $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ является инвариантным подпространством оператора. Содержит ли это инвариантное подпространство собственные векторы оператора?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{x}_1 &= \boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 - 3\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{x}_2 &= \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3. \end{aligned}$$

Указания и ответы

4.1. $\big(1;\ 1/3;\ 1/5;\ \ldots;\ 1/(2n+1)\big)$.

4.2. Координатные строки ковекторов $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\xi}_3$, $\boldsymbol{\xi}_4$ в стандартном базисе $(1; 1/2; 1/3)$, $(2; 2; 8/3)$, $(3; 9/2; 9)$, $(4; 8; 64/3)$; $\boldsymbol{\xi}_4 = 4\boldsymbol{\xi}_1 - 6\boldsymbol{\xi}_2 + 4\boldsymbol{\xi}_3$; $\ker \boldsymbol{\xi}_1 = L\big(-1+2t;\ -1+3t^2\big)$; $\ker \boldsymbol{\xi}_2 = L\big(-1+t;\ -4+3t^2\big)$; $\ker \boldsymbol{\xi}_3 = L\big(-3+2t;\ -3+t^2\big)$; $P_1 = \ker \boldsymbol{\xi}_2 \cap \ker \boldsymbol{\xi}_3 = L\big(6-10t+3t^2\big)$; $P_2 = \ker \boldsymbol{\xi}_1 \cap \ker \boldsymbol{\xi}_3 = L\big(3-8t+3t^2\big)$; $P_3 = \ker \boldsymbol{\xi}_1 \cap \ker \boldsymbol{\xi}_2 = L\big(2-6t+3t^2\big)$; $\boldsymbol{x}_0 = 3-5t+\dfrac{3}{2}t^2$; $\boldsymbol{x}_1 = -\dfrac{3}{2}+4t-\dfrac{3}{2}t^2$; $\boldsymbol{x}_2 = \dfrac{1}{3}-t+\dfrac{1}{2}t^2$.

4.3. (в) $\Theta^0 = (1; \tau; \tau^2; \tau^3)$; $\Theta^1 = (0; 1; 2\tau; 3\tau^2)$; $\Theta^2 = (0; 0; 2; 6\tau)$; $\Theta^3 = (0; 0; 0; 6)$. (г) 1; $(t-\tau)$; $(t-\tau)^2/2!$; $(t-\tau)^3/3!$.

4.4. $\boldsymbol{\varepsilon}^k(X) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{e}_k^T X)$, $k = 0, 1, 2, 3$.

4.5. $\Big(\frac{1}{2}(a+d);\ \frac{1}{2}(b+c);\ \frac{i}{2}(b-c);\ \frac{1}{2}(a-d)\Big)^T$; $\boldsymbol{\omega}^k = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\sigma_k^T X)$, $k = 0, 1, 2, 3$.

5.1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\operatorname{im} \boldsymbol{A} = L\big(\boldsymbol{f}_1; \boldsymbol{f}_4; \boldsymbol{f}_2 - \boldsymbol{f}_3\big)$; $\ker \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$.

5.2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\operatorname{im} \boldsymbol{A} = L\big(\boldsymbol{f}_3 + \boldsymbol{f}_5;\ -\boldsymbol{f}_4 + \boldsymbol{f}_6;\ \boldsymbol{f}_1 - \boldsymbol{f}_7\big)$; $\ker \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$.

5.3. $$D = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}; \; D^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 2\lambda & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix};$$

$$D^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}.$$

5.4. $\ker \boldsymbol{A} = L(\boldsymbol{e}_1)$, $\operatorname{im} \boldsymbol{A} = L(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4)$; $\ker \boldsymbol{B} = L(\boldsymbol{e}_5)$, $\operatorname{im} \boldsymbol{B} = L(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_5)$; $\ker \boldsymbol{C} = L(\boldsymbol{e}_3)$, $\operatorname{im} \boldsymbol{B} = L(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_5)$.
Матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

5.5. $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.6. $$A' = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 6 & 8 & 3 \\ -5 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

5.7. $$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5.8. (a) $$\widehat{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} \operatorname{im} \boldsymbol{P} = L(P_1, P_2, P_3); \\ \ker \boldsymbol{P} = L\big((1; -1; 1; 2)^T\big). \end{matrix}$$

(б) $\widehat{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 & -3/4 \\ 0 & 1 & -5/4 & 3/4 \end{pmatrix}$; $\ker \boldsymbol{P} = L\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$.
$\operatorname{im} \boldsymbol{P} = L(P_1, P_2)$;

5.9.

$$(\text{а}) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad (\text{б}) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

6.1. (а) $\lambda_1 = -1$, $X_1 = (1; -1; 1)^T$, АК $= 1$; $\lambda_2 = 1$, $X_2 = (1; 1; 0)^T$, $X_3 = (1; 0; 1)^T$, АК $=$ ГК $= 2$; в базисе X_1, X_2, X_3 матрица оператора $\operatorname{diag}(-1; 1; 1)$;

(б) $\lambda_1 = -1$, $X_1 = (1; -1; 1)^T$, АК $= 1$; $\lambda_2 = 1$, $X_2 = (-1; -2; 1)^T$, АК $= 2$, ГК $= 1$;

(в) $\lambda_1 = -1$, $X_1 = (2; 1; 0)^T$, $X_2 = (3; 0; 1)^T$, АК $= 3$, ГК $= 1$;

(г) $\lambda_1 = -1$, $X_1 = (1; -1; 1)^T$, АК $= 3$, ГК $= 1$.

6.2. (а) Является прямой суммой собственных подпространств $L((1; 2; 1)^T)$ и $L((1; 1; 1)^T)$, соответствующих собственным значениям $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 0$.

(б) Не является.

(в) Является прямой суммой собственных подпространств $L((1; 2; 1)^T)$ и $L((1; 1; 0)^T)$, соответствующих собственным значениям $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_3 = 0$.

6.3. (а) Является двумерным инвариантным подпространством, не содержащим собственных векторов; (б) не является.

6.4. (а) $\lambda_1 = 0$, $X_1 = (2; -1; 1)^T$; $\lambda_{2,3} = 1 \pm i$, $X_{2,3} = (1 + i; -2; 4)^T$;

(б) $\lambda_1 = 0$, $X_1 = (1; -1; 1)^T$; $\lambda_{2,3} = 2 \pm 3i$, $X_{2,3} = (-1 + i; -1 - i; 2)^T$.

6.5. (а) Собственное подпространство $L(2; -1; 1)^T$, соответствующее собственному значению $\lambda_1 = 0$; двумерное инвариантное подпространство $L\big((1; -2; 4)^T; (1; 0; 0)^T\big)$, соответствующее паре комплексно сопряжённых характеристических чисел $1 \pm i$.

(б) Собственное подпространство $L(1; -1; 1)^T$, соответствующее собственному значению $\lambda_1 = 0$; двумерное инвариантное подпространство $L\big((-1; -1; 2)^T; (1; -1; 0)^T\big)$, соответствующее паре комплексно сопряжённых характеристических чисел $2 \pm 3i$.

6.6. Инвариантное подпространство содержит собственный вектор $(1; -1; 1)^T$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 1$ алгебраической кратности 2.