Лекция 3

ВЕКТОР И ЕГО КООРДИНАТЫ

§ 1. Направленные отрезки и вектор

Прежде всего напомним определение направленного отрезка.

Определение 1. *Упорядоченная пара точек* (A, B) *называется направленным отрезком с началом в точке* A *и с концом в точке* B.

Обозначение. $\overrightarrow{AB}$.

Замечание. Иногда направленный отрезок называют также связанным вектором. Если точки A и B различные, тогда направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ называется ненулевым, а если точки A и B совпадают, то направленный отрезок называется нулевым.

Определение 2. *Направленный отрезок* $\overrightarrow{AB}$ *называется параллельным прямой* l (*плоскости* π), *если либо* $\overrightarrow{AB}$ — *нулевой, либо прямая* AB *параллельная прямой* l (*плоскости* π), *либо прямая* AB *совпадает с прямой* l (*лежит в плоскости* π).

Обозначение. $\overrightarrow{AB} \parallel l$, $\overrightarrow{AB} \parallel \pi$.

Теперь мы можем дать определение *коллинеарных и компланарных* направленных отрезков.

Определение 3. *Направленные отрезки* $\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}, \cdots, \overrightarrow{A_kB_k}$ *называются коллинеарными* (*компланарными*), *если все они параллельны одной и той же прямой* (*плоскости*).

Определение 4. *Длиной направленного отрезка* $\overrightarrow{AB}$ *называется расстояние между точками* A *и* B.

Обозначение. $|\overrightarrow{AB}|$.

Определение 5. *Два ненулевых направленных отрезка* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{CD}$ *называются одинаково направленными, если*

1. *либо прямые* (AB) *и* (CD) *совпадают и лучи* $[AB)$ *и* $[CD)$ *одинаково направлены;*
2. *либо прямые* (AB) *и* (CD) *параллельны* (*и поэтому лежат в некоторой плоскости* π_{ABCD}) *и точки* B *и* D *лежат по одну сторону от прямой* (AC) *на плоскости* π_{ABCD}.

Определение 6. *Два ненулевых направленных отрезка* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{CD}$ *называются противоположно направленными, если*

1. *либо прямые (AB) и (CD) совпадают и лучи $[AB)$ и $[CD)$ противоположны направлены;*
2. *либо прямые (AB) и (CD) параллельны (и поэтому лежат в некоторой плоскости π_{ABCD}) и точки B и D лежат по разные стороны от прямой (AC) на плоскости π_{ABCD}.*

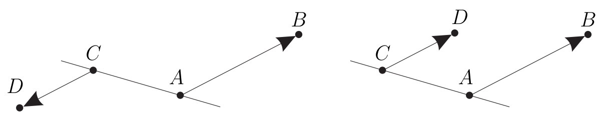

Рис. 1. Противоположно и одинаково направленные направленные отрезки.

Определение 7. *Два направленных отрезка называются равными, если*

1. *либо они оба нулевые;*
2. *либо они ненулевые, коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковую длину.*

Замечание. Нетрудно заметить, что множество всех равных между собой направленных отрезков бесконечно. Как, например, множество всех чётных натуральных чисел. Пусть $\overrightarrow{AB}$ — какой–то направленный отрезок, например, на плоскости π. При помощи параллельного переноса этого направленного отрезка мы получим любой равный ему направленный отрезок $\overrightarrow{CD}$ на плоскости. Точно также и в пространстве. Дадим определение *вектора*.

Определение 8. *Вектором или свободным вектором* $\mathbf{a}$, *порождённым направленным отрезком* $\overrightarrow{AB}$, *называется множество всех направленных отрезков, равных направленному отрезку* $\overrightarrow{AB}$.

Замечание. Не надо бояться того, что вектором мы называли бесконечное множество направленных отрезков! Как мы увидим все операции над вектором $\mathbf{a}$ сводятся к операциям над одним произвольно выбранным направленным отрезком $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{a}$!

Справедливо следующее несложное утверждение:

Теорема 1. *Пусть направленный отрезок* $\overrightarrow{AB}$ *порождает вектор* $\mathbf{a}$, *тогда любой другой направленный отрезок* $\overrightarrow{CD}$, *равный* $\overrightarrow{AB}$, *порождает тот же самый вектор* $\mathbf{a}$.

Операция отложения вектора от точки. В дальнейшем мы будем постоянно использовать следующую операцию «отложить вектор от точки», заключающаяся в том, что от точки A откладывается направленный отрезок $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{a}$.

Ранее мы ввели определения коллинеарных и компланарных направленных отрезков. Теперь мы можем дать определение коллинеарных и компланарных векторов.

Определение 9. *Вектора* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ *называются коллинеарными (компланарными), если эти векторы будучи отложенными от общей точки A дадут такие направленные отрезки* $\overrightarrow{AB_1}, \cdots, \overrightarrow{AB_n}$,

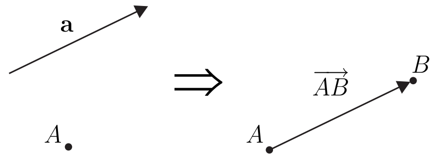

Рис. 2. Отложение вектора от заданной точки.

что прямые $(AB_1), \ldots, (AB_n)$ *совпадают* (*принадлежат одной плоскости*).

Обозначение коллинеарных векторов. $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

Определение 10. *Векторы* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *называются равными, если они совпадают как два множества.*

Справедливо несложное утверждение:

Теорема 2. *Векторы* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *равны, тогда и только тогда, когда найдутся два равных направленных отрезка* $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{a}$ *и* $\overrightarrow{CD} \in \mathbf{b}$.

Доказательство. *Необходимость.* Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равны, то они состоят из одних и тех же равных направленных отрезков. В частности, найдётся $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{a} = \mathbf{b}$, который равен сам себе.

Достаточность. Пусть $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{CD} \in \mathbf{b}$ и $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, тогда направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ порождают один и тот же вектор. Следовательно, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

Теорема доказана.

Определение 11. *Длиной вектора* $\mathbf{a}$ *называется длина какого–либо направленного отрезка, порождающего этот вектор.*

Обозначение. $|\mathbf{a}|$.

Замечание. Определение 11 корректно, поскольку любые два направленных отрезка $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{CD} \in \mathbf{a}$ по определению равных направленных отрезка имеют одинаковую длину.

§ 2. Линейные операции над векторами

Обсудим теперь линейные операции над векторами.

Сложение векторов. Суммой векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, порождённый направленным отрезком $\overrightarrow{AC}$, построенный по правилу треугольника: от произвольной точки A откладывается вектор $\mathbf{a}$ и получается направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, а от точки B откладывается вектор $\mathbf{b}$ и получается направленный отрезок $\overrightarrow{BC}$. В результате получаем

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Замечание. Заметим, что операция сложения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не зависит от выбора начальной точки A. Действительно, пусть мы выбрали другую точку A_1. Тогда по правилу треугольника мы получим треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$. Параллельным переносом треуголь-

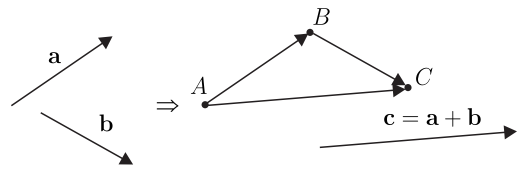

Рис. 3. Правило треугольника сложения векторов.

ника $\triangle A_1B_1C_1$ мы его можем совместить с треугольником $\triangle ABC$, причём

$$A_1 \mapsto A, \quad B_1 \mapsto B, \quad C_1 \mapsto C$$

и, следовательно, направленный отрезок $\overrightarrow{A_1C_1}$ параллельным переносом совмещается с направленным отрезком $\overrightarrow{AC}$ с сохранением направления, т. е. направленные отрезки $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{AC}$ равны и поэтому порождают один и тот же вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Операция сложения векторов обладает определённым набором свойств, которые мы последовательно сформулируем и докажем.

Свойство 1. Коммутативность. Справедливо равенство $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.

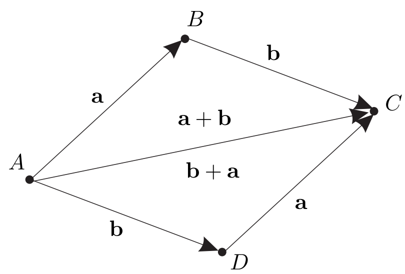

Рис. 4. Коммутативность сложения векторов.

□ Действительно, от произвольной точки A отложим вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и получим два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$, соответственно. Теперь от точки B отложим вектор $\mathbf{b}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{BC}$, а от точки D отложим вектор $\mathbf{a}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{DC_1}$. Очевидно, что $C = C_1$, причём

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}. \quad \boxtimes$$

Свойство 2. Ассоциативность. Справедливо равенство $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.

□ Действительно, отложим от произвольной точки A вектор $\mathbf{a}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, от точки B отложим вектор $\mathbf{b}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{BC}$, а о точки C отложим вектор $\mathbf{c}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{BD}$. Справедливо следующее равен-

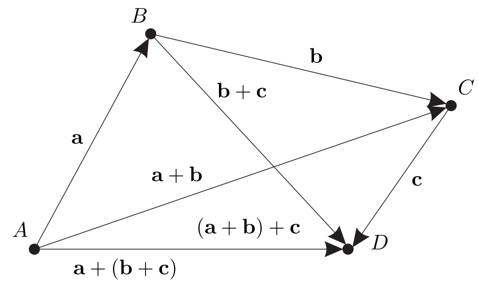

Рис. 5. Ассоциативность сложения векторов.

ство:
$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}). \tag{2.1}$$

Направленный отрезок $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ порождает вектор $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, направленный отрезок $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ порождает вектор $\mathbf{b} + \mathbf{c}$. Следовательно, в силу (2.1) имеет место следующее равенство:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}). \quad \boxtimes$$

Свойство 3. Нулевой вектор. Существует такой вектор $\mathbf{0}$, что для любого вектора $\mathbf{a}$ справедливо равенство $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$.

$\square$ Действительно, пусть $\mathbf{0}$ — это множество всех нулевых направленных отрезков, т. е. $\mathbf{0} := \{\overrightarrow{BB}$, для всех точек $B\}$. Отложим от произвольной точки A вектор $\mathbf{a}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}.$$

Согласно определению суммы векторов отсюда имеем

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}. \quad \boxtimes$$

Свойство 4. Противоположный вектор. Для любого вектора $\mathbf{a}$ найдётся такой вектор $\mathbf{a}'$, что $\mathbf{a} + \mathbf{a}' = \mathbf{0}$.

$\square$ Действительно, отложим от произвольной точки A вектор $\mathbf{a}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$. Заметим, что справедливо равенство

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}.$$

Согласно определению суммы векторов и определения нулевого вектора $\mathbf{0}$ вытекает следующее равенство:

$$\mathbf{a} + \mathbf{a}' = \mathbf{0},$$

где вектор $\mathbf{a}'$ порожден направленным отрезком $\overrightarrow{BA}$, если вектор $\mathbf{a}$ порожден направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$. $\boxtimes$

Лемма 1. *Противоположный вектор единственный.*

Доказательство.

Пусть существуют два противоположных вектора $\mathbf{a}_1'$ и $\mathbf{a}_2'$ к вектору $\mathbf{a}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{a}_1' = \mathbf{a}_1' + \mathbf{0} = \mathbf{a}_1' + (\mathbf{a} + \mathbf{a}_2') = (\mathbf{a}_1' + \mathbf{a}) + \mathbf{a}_2' = \mathbf{0} + \mathbf{a}_2' = \mathbf{a}_2'.$$

Лемма доказана.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. *Если* $|\mathbf{a}| = 0$, *то* $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Доказательство. Проведём доказательство от противного. Пусть $|\mathbf{a}| = 0$, но $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Тогда найдется ненулевой направленный отрезок $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{a}$. В частности,

$$|\mathbf{a}| = |\overrightarrow{AB}| \neq 0.$$

Противоречие.

Теорема доказана.

Дадим определение.

Определение 12. *Два ненулевых вектора* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *называются сонаправленными* $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$, *если будучи отложены от произвольной общей точки* A, *соответствующие направленные отрезки* $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{a}$ *и* $\overrightarrow{AC} \in \mathbf{b}$ *имеют одинаковое направление. Два ненулевых вектора* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *называются противоположно направленными* $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$, *если будучи отложены от произвольной общей точки* A, *соответствующие направленные отрезки* $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{a}$ *и* $\overrightarrow{AC} \in \mathbf{b}$ *имеют противоположные направления.*

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 4. *Два вектора* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *равны тогда и только тогда, когда они сонаправлены* $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$ *и имеют одинаковую длину* $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$.

Доказательство. *Необходимость* условий очевидна. Поэтому докажем *достаточность*. Отложим векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ от общей произвольной точки A и получим два направленных отрезка $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{AC} \in \mathbf{b}$, которые коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковую длину. Следовательно, они равны. В силу результата теоремы 2 векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равны.

Теорема доказана.

Теперь приступим к обсуждению еще одной операции над векторами — *умножение вектора на вещественное число*.

Умножение вектора на число. Произведением вектора $\mathbf{a}$ на число α называется вектор $\mathbf{b}$, удовлетворяющий следующим свойствам:

1. $|\mathbf{b}| = |\alpha||\mathbf{a}|$;
2. если $\alpha \neq 0$, то $\mathbf{b} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$ при $\alpha > 0$ и $\mathbf{b} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$, если $\alpha < 0$.

Обозначение. $\alpha\mathbf{a}$.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 5. *Для противоположного вектора* $\mathbf{a}'$ *к вектору* $\mathbf{a}$ *справедливо следующее явное выражение*: $\mathbf{a}' = (-1)\mathbf{a}$.

Доказательство.

Для противоположного вектора к нулевому вектору $\mathbf{0}$ утверждение очевидно. Пусть ненулевой вектор $\mathbf{a}$ порождён направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$, тогда противоположный вектор $\mathbf{a}'$ порождён направленным отрезком $\overrightarrow{BA}$. Введём новый вектор

$$\mathbf{b} := (-1)\mathbf{a}.$$

Отсюда и из определения умножения числа на вектор справедливы следующие свойства:

1. $|\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|$;
2. $\mathbf{b} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$.

Отложим векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ от общей точки и получим два направленных отрезка $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{AC} \in \mathbf{b}$, которые лежат на одной прямой, имеют одинаковую длину и противоположно направлены. Докажем, что направленные отрезки $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BA}$ равны. Действительно, эти направленные отрезки коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковую длину. Следовательно, в силу результата теоремы 1 равные направленные отрезки порождают один и тот же вектор. Следовательно, векторы $\mathbf{b} \ni \overrightarrow{AC}$ и $\mathbf{a}' \ni \overrightarrow{BA}$ совпадают. Следовательно, $\mathbf{a}' = (-1)\mathbf{a}$.

Теорема доказана.

Операция умножения вектора на вещественное число обладает рядом свойств, которые мы последовательно сформулируем и докажем.

Свойство 5. Особая роль числа 1. Для любого вектора $\mathbf{a}$ справедливо следующее равенство: $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

□ Действительно, пусть $\mathbf{b} := 1\mathbf{a}$. Тогда согласно определению произведения числа на вектор имеем

$$|\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \quad \text{и} \quad \mathbf{b} \uparrow\uparrow \mathbf{a}.$$

Согласно результату теоремы 4 приходим к равенству $\mathbf{b} = \mathbf{a}$. ⊠

Свойство 6. Ассоциативность умножения на числа. Для любых чисел α и β и для любого вектора $\mathbf{a}$ справедливо равенство

$$(\alpha\beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a}).$$

□ Действительно, введем следующие два вектора:

$$\mathbf{b}_1 = \alpha(\beta\mathbf{a}), \quad \mathbf{b}_2 = (\alpha\beta)\mathbf{a}.$$

Согласно определению умножения числа на вектор имеем

1. если $|\mathbf{b}_1| = |\alpha\beta||\mathbf{a}| = |\mathbf{b}_2|$,
2. если $\alpha\beta > 0$, то $\mathbf{b}_1 \uparrow\uparrow \mathbf{a}$ и $\mathbf{b}_2 \uparrow\uparrow \mathbf{a}$,
3. если $\alpha\beta < 0$, то $\mathbf{b}_1 \uparrow\downarrow \mathbf{a}$ и $\mathbf{b}_2 \uparrow\downarrow \mathbf{a}$.

В любом случае, если $\alpha\beta \neq 0$, то $\mathbf{b}_1 \uparrow\uparrow \mathbf{b}_2$. Если же $\alpha\beta = 0$, то $\mathbf{b}_1 = \mathbf{0} = \mathbf{b}_2$. Итак, в силу теоремы 4 векторы $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$. ⊠

Свойство 7. Дистрибутивность относительно сложения чисел. Для любых чисел α, β и любого вектора $\mathbf{a}$ справедливо равенство

$$(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}. \tag{2.2}$$

$\square$ Действительно, нужно рассмотреть шесть случаев.

Случай 1. Либо $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ либо $\alpha = 0$ либо $\beta = 0$. В этих ситуациях равенство (2.2) становится тривиальным.

Рис. 6. Случай 2.

Случай 2. Пусть $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и $\alpha > 0$, $\beta > 0$. В этом случае $\alpha\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$ и $\beta\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$. Отложим от произвольной точки A вектор $\alpha\mathbf{a}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, а от точки B отложим вектор $\beta\mathbf{a}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{BC}$, причем справедливо равенство

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}. \tag{2.3}$$

Докажем, что направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$ порождает вектор $(\alpha + \beta)\mathbf{a}$. Действительно, так как $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, то точка B лежит между точками A и C. Поэтому имеем

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = \alpha|\mathbf{a}| + \beta|\mathbf{a}| = (\alpha + \beta)|\mathbf{a}| = |(\alpha + \beta)\mathbf{a}|. \tag{2.4}$$

В тоже время $(\alpha + \beta)\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$ и поэтому

$$\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow (\alpha + \beta)\mathbf{a}. \tag{2.5}$$

Из свойств (2.4) и (2.5) вытекает, что направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$ порождает вектор $(\alpha + \beta)\mathbf{a}$ и, следовательно, из (2.3) вытекает (2.2).

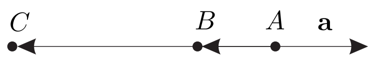

Рис. 7. Случай 3.

Случай 3. Пусть $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и $\alpha < 0$ и $\beta < 0$. Тогда

$$\alpha\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{a} \quad \text{и} \quad \beta\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{a}.$$

Отложим от произвольной точки A вектор $\alpha\mathbf{a}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$. Затем, от точки B отложим вектор $\beta\mathbf{a}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{BC}$. Таким образом,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{AC} \uparrow\downarrow \mathbf{a}. \tag{2.6}$$

Докажем, что направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$ порождает вектор $(\alpha + \beta)\mathbf{a}$. Так как направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ сонаправлены, то точка B лежит между точками A и C. Поэтому справедливы равенства

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = |\alpha||\mathbf{a}| + |\beta||\mathbf{a}| = \\ = -(\alpha + \beta)|\mathbf{a}| = |\alpha + \beta||\mathbf{a}| = |(\alpha + \beta)\mathbf{a}|. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Итак, $\overrightarrow{AC} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$ и $(\alpha + \beta) \uparrow\downarrow \mathbf{a}$ и, значит,

$$\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow (\alpha + \beta)\mathbf{a} \quad \text{и} \quad |\overrightarrow{AC}| = |(\alpha + \beta)\mathbf{a}|.$$

Значит, направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$ порождает вектор $(\alpha + \beta)\mathbf{a}$ и поэтому в силу (2.6) приходим к равенству (2.2).

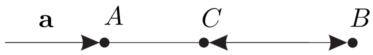

Рис. 8. Случай 4.

Случай 4. Пусть $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и $\alpha > 0$ и $\beta < 0$ и $\alpha > |\beta|$. Отложим от точки A вектор $\alpha\mathbf{a}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$. Затем от точки B отложим вектор $\beta\mathbf{a}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{BC}$. Таким образом,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}. \tag{2.8}$$

Так как $\alpha > |\beta|$, то точка C лежит между точками A и B. Поэтому

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{BC}| = (|\alpha| - |\beta|)|\mathbf{a}| = |\alpha + \beta||\mathbf{a}| = |(\alpha + \beta)\mathbf{a}|. \tag{2.9}$$

Заметим, что $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$ и $(\alpha + \beta)\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$ и поэтому $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow (\alpha + \beta)\mathbf{a}$. Следовательно, направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$ порождает вектор $(\alpha + \beta)\mathbf{a}$.

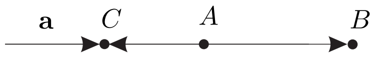

Рис. 9. Случай 5.

Случай 5. Пусть $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и $\alpha > 0$ и $\beta < 0$, причем $\alpha < |\beta|$. Отложим от произвольной точки A вектор $\alpha\mathbf{a}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$. Затем от точки B отложим вектор $\beta\mathbf{a}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{BC}$. Таким образом,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}. \tag{2.10}$$

Отметим, что $\overrightarrow{AC} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$. Справедливы равенства

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| - |\overrightarrow{AB}| = |\beta||\mathbf{a}| - |\alpha||\mathbf{a}| = |\beta + \alpha||\mathbf{a}| = |(\alpha + \beta)\mathbf{a}|. \tag{2.11}$$

Отметим, что $(\alpha + \beta)\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$ и поэтому $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow (\alpha + \beta)\mathbf{a}$. Следовательно, в силу (2.11) направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$ порождает вектор $(\alpha + \beta)\mathbf{a}$.

Случай 6. Пусть $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и $\alpha > 0$ и $\beta < 0$, причём $\alpha + \beta = 0$. Тогда $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Справедливы равенства

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + (-\alpha)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + (-1)(\alpha\mathbf{a}) = \mathbf{0},$$

поскольку в силу результата теоремы 5 вектор $(-1)(\alpha\mathbf{a})$ противоположный к вектору $\alpha\mathbf{a}$. ⊠

Прежде чем доказывать оставшееся свойство операции умножения числа нам вектор докажем следующую важную теорему, имеющую самостоятельное значение:

Теорема 6. *Пусть даны векторы* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$, *причём* $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. *Они коллинеарны тогда и только тогда, когда найдётся единственное число* λ, *для которого* $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — коллинеарные векторы. Если $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, то $\lambda = 0$. Пусть $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Положим

$$\lambda = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}.$$

Докажем, что справедливы следующие равенства:

1. $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$, если $\mathbf{b} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$;
2. $\mathbf{b} = -\lambda\mathbf{a}$, если $\mathbf{b} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$.

$\square$ Действительно, пусть $\mathbf{b} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$. Введём вектор

$$\mathbf{b}_1 := \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}. \tag{2.12}$$

Заметим, что $\mathbf{b_1} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$ и $|\mathbf{b}_1| = |\mathbf{b}|$, а поскольку $\mathbf{b} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$, то $\mathbf{b}_1 \uparrow\uparrow \mathbf{b}$. Следовательно, векторы $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}$ совпадают.

Пусть теперь $\mathbf{b} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$. Введём вектор

$$\mathbf{b}_2 := -\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}. \tag{2.13}$$

Заметим, что $\mathbf{b}_2 \uparrow\downarrow \mathbf{a}$ и $|\mathbf{b}_2| = |\mathbf{b}|$, причем $\mathbf{b} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$. Поэтому $\mathbf{b}_2 \uparrow\uparrow \mathbf{b}$ и $|\mathbf{b}_2| = |\mathbf{b}|$. Следовательно, векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{b}_2$ совпадают. $\boxtimes$

Докажем теперь *единственность*. Пусть существуют два числа λ_1 и λ_2 такие, что

$$\mathbf{b} = \lambda_1\mathbf{a} = \lambda_2\mathbf{a}.$$

Согласно результату теоремы 5 имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned}\lambda_1\mathbf{a} + (-1)\lambda_2\mathbf{a} = \lambda_2\mathbf{a} + (-1)\lambda_2\mathbf{a} = \mathbf{0} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{0} = \lambda_1\mathbf{a} + (-1)\lambda_2\mathbf{a} = (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{a} \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2,\end{aligned} \tag{2.14}$$

поскольку $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Единственность доказана.

Достаточность. Пусть найдётся единственное число λ такое, что $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$. Если $\lambda = 0$, то векторы $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ коллинеарны, поскольку по определению нулевой вектор коллинеарен любому вектору. Если $\lambda \neq 0$, то векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ согласно определению операции умножения числа на вектор либо сонаправлены ($\lambda > 0$) либо противоположны направлены ($\lambda < 0$). Следовательно, если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ от произвольной точки A получим два направленных отрезка $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{AC} \in \mathbf{b}$, которые будут расположены на общей прямой. Следовательно, векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны.

Теорема доказана.

Свойство 8. Дистрибутивность относительно сложения векторов. Для любого числа α и для любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ справедливо равенство

$$\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}. \tag{2.15}$$

□ Действительно, нужно рассмотреть четыре случая.

Случай 1. Если либо $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ либо $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ либо $\alpha = 0$ равенство (2.15) становится тривиальным.

Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — ненулевые и число $\alpha \neq 0$. Тогда нужно рассмотреть еще два случая.

Случай 2. Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны. Тогда согласно результату теоремы 6 найдётся такое число $\lambda \neq 0$, то справедливо равенство $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$. Проверим справедливость равенства (2.15). Справедливы следующие равенства:

$$\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a}+\lambda\mathbf{a}) = \alpha(1+\lambda)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \alpha(\lambda\mathbf{a}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}.$$

Случай 3. Пусть $\alpha > 0$ и векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны. Тогда $\alpha\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$ и $\alpha\mathbf{b} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$. От произвольной точки A отложим векторы $\mathbf{a}$ и $\alpha\mathbf{a}$ и получим направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AB'}$. Теперь от точек B и B' отложим векторы $\mathbf{b}$ и $\alpha\mathbf{b}$ соответственно и получим направленные отрезки $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{B'C'}$ соответственно. Докажем, что треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle AB'C'$ подобны.

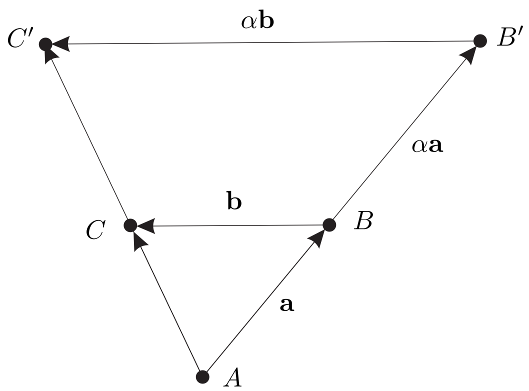

Рис. 10. Подобные треугольники. Случай $\alpha > 0$.

□□ Действительно, поскольку векторы $\mathbf{b}$ и $\alpha\mathbf{b}$ сонаправлены, то равны углы $\angle ABC$ и $\angle AB'C'$. Кроме того,

$$\frac{|AB'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \alpha.$$

Значит, треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle AB'C'$ подобны, так как раны углы и пропорциональны прилежащие стороны треугольников. ⊠⊠

Из подобия треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle AB'C'$ вытекает равенство углов $\angle BAC$ и $\angle B'AC'$, т. е. точки A, C и C' лежат на одной прямой. Кроме того, из подобия треугольников вытекает, что

$$\frac{|AC'|}{|AC|} = \alpha.$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{AC'} = \alpha\overrightarrow{AC}. \tag{2.16}$$

Заметим, что

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \in \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C'} \in \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}. \tag{2.17}$$

Поэтому из (2.16) и (2.17) вытекает равенство

$$\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}.$$

Случай 4. Пусть $\alpha < 0$. Тогда $\alpha\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$ и $\alpha\mathbf{b} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$. Отложим от точки A вектор $\mathbf{a}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$. Теперь отложим от точки A вектор $\alpha\mathbf{a}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{AB'}$. Теперь от точки B отложим вектор $\mathbf{b}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{BC}$, а от точки B' отложим вектор $\alpha\mathbf{b}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{B'C'}$.

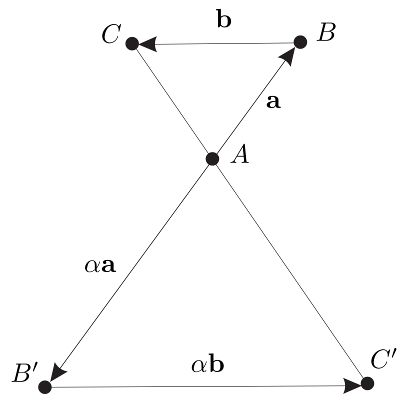

Рис. 11. Подобные треугольники. Случай $\alpha < 0$.

Точно также как и ранее в случае 3 можно доказать подобие треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle AB'C'$. Из подобия вытекает равенство углов

$$\angle BAC = \angle B'AC'.$$

Это вертикальные углы, поскольку векторы $\mathbf{b}$ и $\alpha\mathbf{b}$ противоположно направлены. Поэтому точки C', A и C лежат на одной прямой. Из подобия треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle AB'C'$ вытекает отношение

$$\frac{|AC'|}{|AC|} = \alpha. \tag{2.18}$$

Векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AC'}$ противоположно направлены. Следовательно,

$$\overrightarrow{AC'} = \alpha\overrightarrow{AC}. \tag{2.19}$$

В тоже время справедливы выражения

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C'} \in \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}, \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \in \mathbf{a} + \mathbf{b}. \tag{2.20}$$

Поэтому из (2.19) и (2.20) вытекает искомое равенство

$$\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}.$$

§ 3. Линейно зависимые и независимые векторы

Мы приступаем к изучению основных понятий аналитической геометрии — координаты векторов и точек. Фундаментальное значение этих понятий заключается в том, что задание координат векторов и точек можно свести широкий спектр геометрических задач *планиметрии* и *стереометрии* к задачам *алгебры*.

Условимся называть вектор

$$\mathbf{b} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n$$

называть линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ с коэффффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. В этом случае будем говорить, что вектор $\mathbf{b}$ линейно выражается через векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Отметим, что если числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ не равны одновременно нулю, то соответствующая линейная комбинация называется нетривиальной, в противном случае линейная комбинация называется тривиальной.

Определение 13. *Семейство векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *называется линейно зависимой, если существуют такие числа* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, *среди которых по крайней мере один отличен от нуля, что линейная комбинация*

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}.$$

Если семейство векторов не является линейно зависимой, то она называется линейно независимой.

Замечание. Таким образом, семейство векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно зависима только в том случае, когда равенство

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

возможно только тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Семейства линейно зависимых векторов обладает определённым набором свойств, которые мы последовательно сформулируем и докажем.

Свойство 1. *От перестановки местами семейство векторов* $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ *остается линейно зависимым или линейно независимым.*

□ Утверждение очевидно. ⊠

Свойство 2. *Если семейство векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *содержит нулевой вектор, то это семейство является линейно зависимым.*

□ Действительно, перестановками местами векторов в рассматриваемом семействе можно добиться, чтобы первый вектор в семействе был нулевым. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$. Составим следующую нетривиальную линейную комбинацию:

$$1\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + \cdots + 0\mathbf{a}_n.$$

Очевидно, что эта линейная комбинация равна нулевому вектору $\mathbf{0}$. Стало быть, семейство векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно зависимо. ⊠

Свойство 3. *Если в системе векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *содержится линейно зависимое подсемейство, то всё семейство тоже линейно зависимое.*

□ Перестановками местами в рассматриваемом семействе векторов можно добиться, что первые $m \in [1, n]$ векторов являются линейно зависимыми. Поэтому существует такая нетривиальная комбинация

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}, \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq (0, \ldots, 0). \tag{3.1}$$

Составим следующую линейную комбинацию всего семейства векторов

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_m\mathbf{a}_m + 0\mathbf{a}_{m+1} + \cdots + 0\mathbf{a}_n. \tag{3.2}$$

Эта нетривиальная линейная комбинация векторов всего семейства в силу (3.1) равна нулевому вектору и поэтому семейство векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно зависимо. ⊠

Свойство 4. *Семейство векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, *содержащее не менее двух векторов, линейно зависимо тогда и только тогда, когда один из векторов линейно выражается через остальные векторы.*

□ *Необходимость.* Пусть семейство векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно зависимо и $n \geqslant 2$. Тогда найдётся нетривиальная линейная комбинация

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}, \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \cdots, 0).$$

Без ограничения общности будем считать, что $\lambda_1 \neq 0$. Тогда получим равенство

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{a}_2 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\mathbf{a}_n,$$

т. е. один из векторов линейно выражается через остальные.

Достаточность. Пусть один из векторов линейно выражается через остальные векторы. Например,

$$\mathbf{a}_1 = \alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{a}_n.$$

Отсюда получаем равенство

$$1\mathbf{a}_1 + (-\alpha_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (-\alpha_n)\mathbf{a}_n = \mathbf{0}.$$

Стало быть, семейство векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно зависимо. ⊠

Мы ввели алгебраическое свойство линейной зависимости. Но в аналитической геометрии каждое алгебраическое свойство имеет геометрический смысл и наоборот тоже. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 7. *Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линейно зависимы. В силу свойства 4 один из векторов линейно выражается через другой. Например,

$$\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}.$$

Если вектор $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, то векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны. Пусть $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, тогда в силу теоремы 6 векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$ коллинеарны.

Достаточность. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны. Тогда в силу теоремы 6 один из векторов линейно выражается через другой. Например,

$$\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}.$$

В силу свойства 4 векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линейно зависимы.

Теорема доказана.

Следствие. *Система векторов, состоящая из двух неколлинеарных векторов, линейно независима.*

Теперь нам нужно доказать ряд *геометрических* результатов относительно семейств *коллинеарных и компланарных* векторов.

Лемма 2. *Если семейство векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *состоит из коллинеарных векторов, то оно является компланарным.*

Доказательство. Отложим векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_2$ от произвольной точки A и получим направленные отрезки $\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2}, \ldots, \overrightarrow{AB_n}$, которые в силу коллинеарности векторов будут расположены на одной прямой, которая, очевидно, принадлежит некоторому семейству плоскостей.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Система, состоящая из двух векторов, является компланарной.*

Доказательство. Отложим векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ от произвольной точки A. В результате получим два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, соответственно. Прямые (AB) и (AC) принадлежат некоторой плоскости π, не единственной, в случае если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны.

Лемма доказана.

Наконец, справедливо следующее утверждение, которое связывает алгебраическое понятие *линейной зависимости* семейства векторов и геометрического понятия *компланарности*.

Теорема 8. *Для того чтобы три вектора* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *были линейно зависимыми, необходимо и достаточно, чтобы они были компланарны.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ линейно зависимы. Тогда согласно свойству 4 один из векторов будет выражаться через оставшиеся. Без ограничения общности будем считать, что

$$\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}. \tag{3.3}$$

Отложим все векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ от одной точки O, тогда равенство (3.3) примет следующий вид:

$$\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}, \tag{3.4}$$

т.е. согласно определению операций сложения направленных отрезков и умножения на направленных отрезков на число направленный отрезок $\overrightarrow{OC}$ лежит в той же плоскости, что и направленные отрезки $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

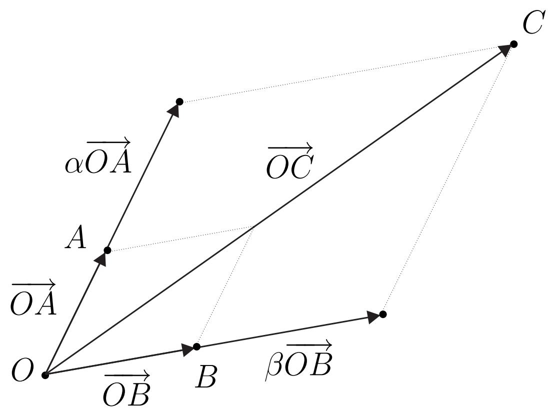

Рис. 12. К доказательству необходимости.

Достаточность. Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны. Если какие–либо два вектора из этой тройки коллинеарны, то по теореме 7 векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ линейно зависимы. Поэтому предположим, что никакие два вектора из трёх не являются коллинеарными. Теперь отложим векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ от произвольной точки O и получим три соответствующих направленных отрезков

$$\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OC}.$$

Через точку C направленного отрезка $\overrightarrow{OC}$ проведём прямую параллельную направленному отрезку $\overrightarrow{OB}$. Точку пересечения с линией действия направленного отрезка $\overrightarrow{OA}$ обозначим через A_1. Теперь проведём прямую через точку C параллельно направленному отрезку $\overrightarrow{OA}$. Точку пересечения с линией действия направленного отрезка $\overrightarrow{OB}$ обозначим через B_1.

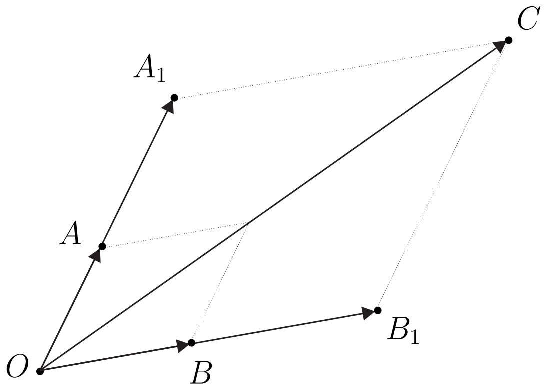

Рис. 13. К доказательству достаточности.

Приходим к следующему равенству согласно правилу параллелограмма сложения:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}. \tag{3.5}$$

Направленные отрезки $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OB_1}$ лежат на одних прямых соответственно. Поэтому найдутся такие числа α и β, что

$$\overrightarrow{OA_1} = \alpha\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OB_1} = \beta\overrightarrow{OB}. \tag{3.6}$$

Следовательно, из равенств (3.5) и (3.6) вытекает равенство

$$\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}, \tag{3.7}$$

которое в силу произвольности точки O можно переписать для соответствующих свободных векторов

$$\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} \Leftrightarrow \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + (-1)\mathbf{c} = \mathbf{0}, \tag{3.8}$$

т. е. векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ линейно зависимы.

Теорема доказана.

§ 4. Базис и координаты векторов

Определение 14. *Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ называются упорядоченными, если указано какой вектор из этой системы является первым, какой второй и .т.д., какой является n–ым.*

Определение 15. *Базисом в пространстве векторов называется такое упорядоченное линейно независимое семейство векторов, что любой вектор этого пространства линейно выражается через эту семейство векторов.*

ПРИМЕР 1. Например, векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ образуют базис на плоскости, если

1. векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ не коллинеарны;

2. любой вектор плоскости $\mathbf{a}$ по ним раскладывается, т. е. найдутся такие числа λ_1 и λ_2, что

$$\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2.$$

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 9. *В пространстве векторов на прямой $\mathbb{V}_1$ базис состоит из произвольного ненулевого вектора.*

Доказательство.

Шаг 1. Докажем, что любой ненулевой вектор является линейно независимым. Действительно, пусть $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Рассмотрим следующее равенство:

$$\lambda \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Поскольку $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ это равенство выполнено тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$. Итак, вектор $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ образует линейно независимое семейство.

Шаг 2. Пусть $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ — это произвольный вектор на прямой. Поскольку любой другой вектор на прямой коллинеарен вектору $\mathbf{a}$, то согласно результату теоремы 6, найдётся единственное число λ такое, что $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$.

Теорема доказана.

Теорема 10. *В пространстве векторов на плоскости $\mathbb{V}_2$ базис состоит из двух не коллинеарных векторов.*

Доказательство.

Шаг 1. В силу результата теоремы 7 необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов — это их линейная зависимость. Поэтому если два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны, то они линейно независимы.

Шаг 2. Докажем, что любой вектор $\mathbf{c}$, лежащий в одной плоскости с неколлинеарными векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ по ним раскладывается, т. е. найдутся такие числа α и β, что

$$\mathbf{c} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}.$$

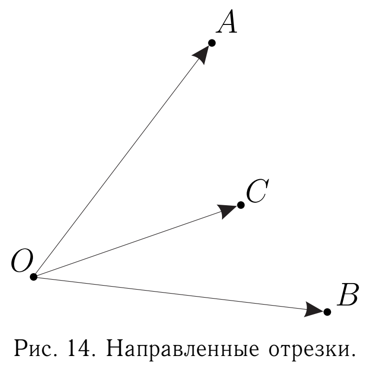

Рис. 14. Направленные отрезки.

□ Действительно, отложим все три вектора от одной произвольной фиксированной точки O плоскости, где лежат векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Получим три направленных отрезка $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$. Сделаем следующие два построения. Проведём через точку C прямую параллельную прямой (OB). Пусть A_1 — это точка пересечения этой прямой и прямой (OA). Также проведём через точку C прямую параллельную прямой (OA). Пусть B_1 — это точка пересечения этой прямой и прямой (OB): По

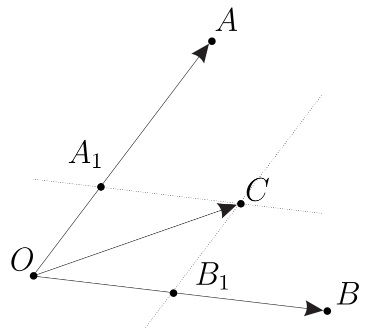

Рис. 15. Точки A_1 и B_1.

построению четырёхугольник OB_1CA_1 является параллелограммом. По правилу параллелограмма сложения направленных отрезков имеет место следующее равенство:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OB}_1. \tag{4.1}$$

Заметим, что направленные отрезки $\overrightarrow{OA}_1$ и $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}_1$ и $\overrightarrow{OB}$ лежат на одних и тех же соответствующих прямых. Поэтому найдутся такие числа α и β, что

$$\overrightarrow{OA}_1 = \alpha\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OB}_1 = \beta\overrightarrow{OB}. \tag{4.2}$$

Из равенств (4.1) и (4.2) вытекает следующее равенство:

$$\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}. \tag{4.3}$$

Поскольку $\overrightarrow{OC} \in \mathbf{c}$, $\overrightarrow{OA} \in \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{OB} \in \mathbf{b}$, то справедливо следующее равенство:

$$\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}.$$

Теорема доказана.

Теорема 11. *Любые три некомпланарных вектора в пространстве образуют базис в $\mathbb{V}_3$.*

Доказательство.

Шаг 1. Прежде всего в силу теоремы 8 вытекает, что три некомпланарных вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ в пространстве являются линейно независимыми.

Шаг 2. Докажем, что любой вектор $\mathbf{d}$ в пространстве представим через произвольную тройку некомпланарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}. \tag{4.4}$$

Отложим все четыре вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ от поизвольной точки O и получим следующие четыре направленных отрезка: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$. Определим четыре плоскости, в которых лежат указанные в фигурных скобках направленные отрезки:

$$\pi_1 = \{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\}, \quad \pi_2 = \{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}, \quad \pi_3 = \{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}\}.$$

Проделаем следующие геометрические построения:

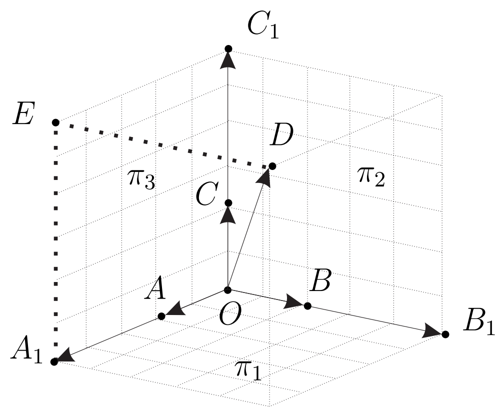

Рис. 16. Геометрические построения.

1. Проведём через точку D плоскость, параллельную π_2. Пусть A_1 — это точка пересечения этой плоскости и линии действия направленного отрезка $\overrightarrow{OA}$;

2. Проведём через точку D плоскость, параллельную π_3. Пусть B_1 — это точка пересечения этой плоскости и линии действия направленного отрезка $\overrightarrow{OB}$;

3. Проведём через точку D плоскость, параллельную π_1. Пусть C_1 — это точка пересечения этой плоскости и линии действия направленного отрезка $\overrightarrow{OC}$.

Заметим, что имеет место следующее равенство:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{A_1E} + \overrightarrow{ED}. \tag{4.5}$$

С другой стороны, имеют место следующие равенства:

$$\overrightarrow{A_1E} = \overrightarrow{OC}_1, \quad \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{OB}_1. \tag{4.6}$$

Поэтому из (4.5) и (4.6) вытекает следующее равенство:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}. \tag{4.7}$$

Направленные отрезки $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OC_1}$ лежат на соответствующих трёх прямых. Поэтому найдутся такие три числа α, β и γ, что

$$\overrightarrow{OA_1} = \alpha\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OB_1} = \beta\overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OC_1} = \gamma\overrightarrow{OC}. \tag{4.8}$$

Из (4.7) и (4.8) вытекает следующее равенство:

$$\overrightarrow{OD} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}. \tag{4.9}$$

В силу произвольности точки O приходим к равенству (4.4).

Теорема доказана.

Следствием теорем 9–11 является следующее утверждение:

Следствие. *Любые два вектора из $\mathbb{V}_1$, любые три вектора из $\mathbb{V}_2$ и любые четыре вектора из $\mathbb{V}_3$ линейно зависимы.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — это два вектора на одной и той же прямой (пространство $\mathbb{V}_1$). Если $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, то по свойству 2 семейства вектров и всё семейство $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ линейно зависимо. Пусть $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, тогда по теореме 9 найдётся такое число α, что

$$\mathbf{b} = \alpha \cdot \mathbf{a} \Leftrightarrow \alpha \cdot \mathbf{a} + (-1) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Это нетривиальная комбинация векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, равная нулю. Поэтому семейство $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ линейно зависимо.

Шаг 2. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ — это три вектора на плоскости (пространство $\mathbb{V}_2$). Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, то они линейно зависимы, а тогда и всё семейство $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ линейно зависимо по свойству 3 семейства векторов. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны. Тогда по теореме 10 найдутся такие числа α и β, что

$$\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} \Leftrightarrow \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + (-1) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

Это нетривиальная линейная комбинация семейства векторов $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, равная нулевому вектору. Следовательно, это семейство линейно зависимо.

Шаг 3. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ — это четыре вектора в пространстве (пространство $\mathbb{V}_3$). Предположим, что векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ компланарны, тогда они линейно зависимы и тогда согласно свойству 3 семейства векторов и всё семейство $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ линейно зависимо. Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ не компланарны, тогда по теореме 11 найдутся такие числа α, β, γ, что

$$\mathbf{d} = \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b} + \gamma \cdot \mathbf{c} \Leftrightarrow \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b} + \gamma \cdot \mathbf{c} + (-1) \cdot \mathbf{d} = \mathbf{0}.$$

Это нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору. Значит, семейство векторов $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ линейно зависимо.

Следствие доказано.

Дадим определение координат вектора разложения по базису.

Определение 16. *Упорядоченный набор коэффициентов в разложении вектора по базису называется координатами вектора.*

Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ — это базис в пространстве $\mathbb{V}_3$ и вектор $\mathbf{d}$ определяется его разложением по базису:

$$\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}.$$

Тогда α, β, γ — это координаты вектора $\mathbf{d}$ по базису $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

Базис удобно записывать в виде строчки

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}),$$

а координаты вектора $\mathbf{d}$ по этому базису удобно записывать в виде столбца

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Тогда можно записать формулу разложения вектора $\mathbf{d}$ по базису $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ в следующей компактной форме:

$$\mathbf{d} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Справедлива следующая важная теорема:

Теорема 12. *Координаты вектора* $\mathbf{a}$ *в его разложении по базису* $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ *определены единственным образом.*

Доказательство.

Пусть имеются два разложения вектора $\mathbf{a}$ по базису $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$:

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n = \beta_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \beta_n\mathbf{e}_n.$$

Но тогда справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} &(\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{e}_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)\mathbf{e}_n = \mathbf{0} \Rightarrow \\ &\qquad \Rightarrow \alpha_1 - \beta_1 = \cdots = \alpha_n - \beta_n = 0 \Rightarrow \\ &\qquad\qquad \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1, \cdots, \alpha_n = \beta_n, \end{aligned} \tag{4.10}$$

поскольку по определению базиса векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ линейно независимы.

Теорема доказана.

Справедлива теорема:

Теорема 13. *При сложении векторов их координаты относительно фиксированного базиса складываются, а при умножении вектора на вещественное число его координаты умножаются на это число.*

Доказательство. Рассмотрим случай пространства векторов $\mathbb{V}_3$. Пусть $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ — это базис в $\mathbb{V}_3$. Тогда

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \gamma\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}_1 = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \beta_1\mathbf{e}_2 + \gamma_1\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{a}_2 = \alpha_2\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \gamma_2\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = (\alpha_1\mathbf{e}_1 + \beta_1\mathbf{e}_2 + \gamma_1\mathbf{e}_3) + (\alpha_2\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \gamma_2\mathbf{e}_3) = \\ = (\alpha_1 + \alpha_2)\mathbf{e}_1 + (\beta_1 + \beta_2)\mathbf{e}_2 + (\gamma_1 + \gamma_2)\mathbf{e}_3,$$

$$\lambda\mathbf{a} = \lambda(\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \gamma\mathbf{e}_3) = \lambda(\alpha\mathbf{e}_1) + \lambda(\beta\mathbf{e}_2) + \lambda(\gamma\mathbf{e}_3) = \\ = (\lambda\alpha)\mathbf{e}_1 + (\lambda\beta)\mathbf{e}_2 + (\lambda\gamma)\mathbf{e}_3.$$

Теорема доказана.