

ПРИМЕРЫ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ**§ 1. Примеры и контрпримеры**

Мы начнём с рассмотрения примеров, демонстрирующих необходимость осторожного использования интуиции при решении вопросов, связанных с метрическими пространствами. Читателям рекомендуется там, где этого возможно, делать рисунки, но помнить, что рисунок — не часть доказательства, а лишь иллюстрация, помогающая понять ситуацию.

ПРИМЕР 1. Может ли шар радиуса 4 быть подмножеством шара радиуса 3 в некотором метрическом пространстве?

□ Да, может. Рассмотрим, например, метрическое пространство

$$M = \{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3\}$$

с обычным расстоянием. Тогда, очевидно, шары радиусов 3 и 4 с центром в точке $(0, 0)$ совпадают. (Внимание! В дальнейшем мы будем опускать уточнение про обычное расстояние.) ☒

ПРИМЕР 2. А можно ли усилить результат предыдущего примера так, чтобы шар радиуса 4 был собственным подмножеством шара радиуса 3 в некотором метрическом пространстве?

□ Оказывается, можно добиться и этого. Положим

$$M = \{-2\} \cup [0; 4].$$

Тогда, как нетрудно убедиться,

$$[0; 4] = B_4^F(3) \subsetneq B_3^F(1) = \{-2\} \cup [0; 4],$$

где символ $B_r^F(x)$ обозначает замкнутый шар (фр. — boule fermée, отсюда буквы B и F) радиуса r . (Открытый шар будем обозначать без верхнего индекса.) ☒

ПРИМЕР 3. Однако не стоит думать, что «может быть всё, что угодно». Покажем, что, если поменять в предыдущем вопросе число 4 на число 7, ответ будет отрицательный.

Мы докажем более общее утверждение: если некоторый замкнутый шар B_R^F радиуса R целиком содержится в замкнутом шаре B_r^F радиуса r и $R \geq 2r$, то эти шары совпадают.

□ Для этого достаточно доказать, в дополнение к имеющемуся в условии вложению $B_R^F \subset B_r^F$, обратное вложение. Для этого выберем произвольную точку $x \in B_r^F$. (Попутно заметим, что шар с необходимостью непуст: он содержит по крайней мере свой центр.) Обозначив через O_R и O_r центры соответствующих шаров, из определения шара и неравенства треугольника с учётом условия $R \geq 2r$ и того факта, что $O_R \in B_R^F \subset B_r^F$, имеем

$$\rho(O_R, x) \leq \rho(O_R, O_r) + \rho(O_r, x) \leq r + r = 2r \leq R,$$

т. е. $x \in B_R^F$, что и требовалось. \square

ПРИМЕР 4. Построим следующий странный пример — подпространство $M \subset \mathbb{R}^2$ и открытый шар в нём, который является замкнутым множеством, но не замкнутым шаром.

□ Проще всего описать этот пример на комплексной плоскости. Нарисуем интервалы $(-1; 1)$, $(-i; i)$, а также 4 точки $\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i \frac{\sqrt{2}}{2}$.

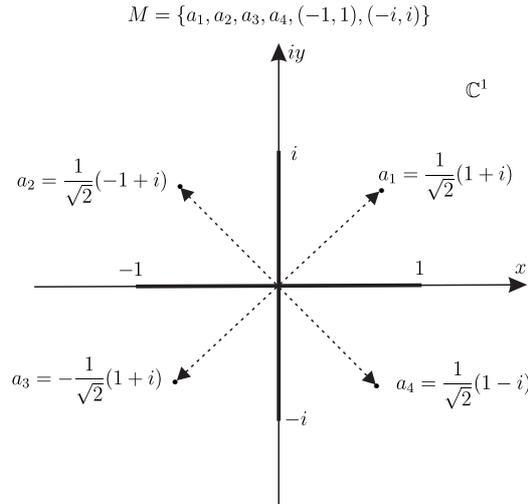


Рис. 1. Метрическое пространство M .

То, что получится, и будем считать метрическим пространством M . Легко видеть, что открытый шар B радиуса 1 с центром в 0 есть пространство без точек $\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i \frac{\sqrt{2}}{2}$. Это множество замкнуто, т. к. его дополнение A — те самые 4 точки — является открытым множеством. В самом деле, $(0, 1)$ -окрестность каждой из этих точек содержит только её саму, а следовательно, не содержит точек, не принадлежащих A . Но множество B не является замкнутым шаром в пространстве M : нетрудно видеть, что какой бы центр $O_1 \in M$ и какой бы радиус мы ни брали, в полученный замкнутый шар или не входят некоторые точки

множества B , или входит по крайней мере одна точка множества A (показать это подробно!). \square

ПРИМЕР 5. Предыдущий пример показывает, что замыкание открытого шара может быть собственным подмножеством соответствующего замкнутого шара. Тем самым, нельзя гарантировать, что $\overline{B_r(x)} = B_r^F(x)$. Однако всегда верно вложение

$$\overline{B_r(x)} \subset B_r^F(x).$$

\square Действительно, замыкание $\overline{B_r(x)}$ открытого шара $B_r(x)$ есть (по определению замыкания) пересечение всех содержащих его замкнутых множеств. Среди них есть и замкнутый шар $B_r^F(x)$ (проверить по определению замкнутого и открытого шаров!). Следовательно, $\overline{B_r(x)} \subset B_r^F(x)$, поскольку пересечение содержится в каждом из пересекаемых множеств. \square

ПРИМЕР 6. Пусть $x \in M$ — произвольная точка, а $A \subset M$ — произвольное множество в метрическом пространстве M . Можно определить расстояние от точки x до множества A , положив

$$\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y).$$

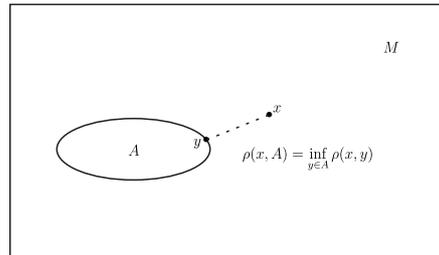


Рис. 2. Расстояние между точкой и множеством.

Нетрудно заметить, что если A — замкнутое множество и $x \notin A$, то $\rho(x, A) > 0$.

\square В самом деле, если A замкнуто, то его дополнение A^c открыто, а тогда поскольку $x \in A^c$, то x — внутренняя точка A^c , т. е. существует такое $\varepsilon > 0$, что в ε -окрестности точки x нет точек из множества A . Значит, $\rho(x, A) \geq \varepsilon$. \square

Пусть теперь

$$\rho(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \rho(x, y)$$

— «расстояние» между множествами A и B . Можно ли утверждать, что $\rho(A, B) > 0$, если множества A и B замкнуты и не пересекаются?

\square Оказывается, нет. Нетрудно привести пример, положив в качестве A и B графики функций $y = 0$ и $y = \frac{1}{x}$ на плоскости. (Докажите аккуратно, что оба множества замкнуты.) \square

ПРИМЕР 7. Пусть A, B — замкнутые непересекающиеся множества в метрическом пространстве M . Можно ли построить их непересекающиеся открытые окрестности, т. е. такие открытые множества $O_A \supset A$ и $O_B \supset B$, что $O_A \cap O_B = \emptyset$?

□ Если «расстояние» d (см. предыдущий пункт) между множествами A, B положительно, положительный ответ на данный вопрос был бы очевиден: достаточно было положить O_A равным объединению $\frac{d}{3}$ -окрестностей всех точек множества A и аналогично поступить для множества B . (Докажите, что в этом случае задача и в самом деле была бы решена.) Но, как мы знаем, положительность величины d не гарантирована даже для непересекающихся замкнутых множеств. Однако ответ всё-таки утвердительный (см. задачу 5). ☒

§ 2. Свойства открытых и замкнутых множеств

Напомним прежде всего следующие понятия:

1) точка x называется предельной точкой множества A , если любая окрестность точки x содержит точки множества A , отличные от x (можно сказать так: любая проколота окрестность точки x имеет непустое пересечение с множеством A);

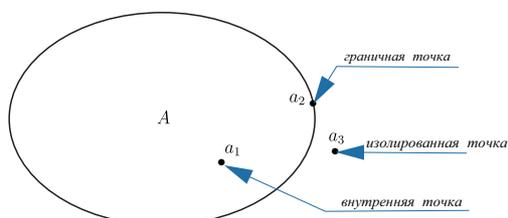
2) точка x называется граничной точкой множества A , если любая окрестность точки x содержит как точки множества A , так и точки его дополнения;

3) точка x называется точкой касания (точкой прикосновения) множества A , если любая окрестность точки x содержит точки множества A (в частности, так будет при $x \in A$ — обратите внимание на отличие от предельной точки!);

4) точка x называется внутренней точкой множества A , если некоторая окрестность точки x целиком содержится в множестве A ;

5) точка x называется изолированной точкой множества A , если $x \in A$, но некоторая проколота окрестность не содержит точек множества A (можно сказать и так: некоторая окрестность точки x не содержит точек из A , кроме самой точки x).

Здесь важно отметить следующую языковую неточность. Во всех пяти определениях фигурируют слова «точка множества A ». Однако только в последних двух речь действительно с необходимостью идёт о принадлежности $x \in A$. Точки первых трёх типов могут как принадлежать, так и не принадлежать A , и слова «точка множества A » в определениях 1)–3) говорят лишь об отношении, в котором точка x находится именно с множеством A , — отношении, не связанном непосредственно с отношением «принадлежать».

Рис. 3. Точки множества A .

После сделанного замечания приведём некоторые примеры.

ПРИМЕР 8. Пусть $M = \mathbb{R}$, $A = [0; 1) \cup \{2\}$. Тогда:

- 1) $[0; 1]$ суть предельные точки A ;
- 2) 0, 1 и 2 суть граничные точки A ;
- 3) $[0; 1]$ и 2 суть точки касания A ;
- 4) $(0; 1)$ суть внутренние точки A ;
- 5) 2 — изолированная точка A .

ПРИМЕР 9. Пусть $M = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} < 1\} \cup \{(x, y) \mid y = 0, 10 \leq x < 11\} \cup \{(100, 100)\}$. Тогда:

- 1) $\{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\} \cup \{(x, y) \mid y = 0, 10 \leq x \leq 11\}$ суть предельные точки A ;
- 2) $\{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} = 1\} \cup \{(x, y) \mid y = 0, 10 \leq x \leq 11\} \cup \{(100, 100)\}$ суть граничные точки A ;
- 3) точки касания A — те же, что и предельные, и $(100, 100)$;
- 4) $\{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} < 1\}$ суть внутренние точки A ;
- 5) $(100, 100)$ — изолированная точка A .

ПРИМЕР 10. Пусть $M = \mathbb{R}$, $A = [0; 1) \cap \mathbb{Q}$. Тогда:

- 1) $[0; 1]$ суть предельные точки A ;
- 2) $[0; 1]$ суть граничные точки A (почему?);
- 3) $[0; 1]$ суть точки касания A ;
- 4) внутренних точек у A нет;
- 5) изолированных точек у A нет.

ПРИМЕР 11. Пусть $M = \mathbb{R}$, $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Тогда:

- 1) 0 — предельная точка A ;
- 2) $0 \cup A$ суть граничные точки A ;
- 3) $0 \cup A$ суть точки касания A ;
- 4) внутренних точек у A нет;
- 5) множество изолированных точек A совпадает с A .

ПРИМЕР 12. Пусть $M = [0; 1) \cup \{2\}$, $A = (0; 1) \cup \{2\}$. Тогда:

- 1) $(0; 1)$ суть предельные точки A ;
- 2) 0 — граничная точка A ;
- 3) $(0; 1) \cup \{2\}$ суть точки касания A ;
- 4) $(0; 1) \cup \{2\}$ суть внутренние точки A ;
- 5) 2 — изолированная точка A .

Обратите внимание, что в некоторых метрических пространствах могут существовать множества, некоторые точки которых являются одновременно изолированными и внутренними.

Если вы разобрались с помощью предложенных примеров в типах точек по отношению к заданному множеству в метрическом пространстве, то поняли, в частности, что:

Свойство 1. точки, принадлежащие данному множеству, делятся на внутренние и граничные;

Свойство 2. точки касания делятся на изолированные точки множества (обязательно принадлежащие ему) и предельные точки, которые могут как принадлежать множеству (среди них могут быть внутренние), так и не принадлежать;

Свойство 3. граничные точки делятся на изолированные точки множества (обязательно принадлежащие ему) и предельные точки, которые могут как принадлежать множеству (но не быть внутренними), так и не принадлежать;

Свойство 4. изолированные точки множества могут являться граничными, а могут и не являться (см. примеры 4 и 12);

Свойство 5. открытое множество целиком состоит из своих внутренних точек (среди которых могут быть изолированные — см. пример 12), а его граничные точки ему не принадлежат и т. д.

Обсудим теперь возможные (равносильные!) определения замкнутого множества в метрическом пространстве:

Свойство 6. его дополнение открыто;

Свойство 7. его замыкание совпадает с ним самим (о замыкании см. ниже);

Свойство 8. оно содержит все свои граничные точки;

Свойство 9. оно содержит все свои предельные точки;

Свойство 10. оно содержит все свои точки касания;

Свойство 11. для любой последовательности $x_n \rightarrow x$, где $x_n \in A$ (A — рассматриваемое множество), $x \in M$, верно $x \in A$.

(Из сделанного выше замечания следует, что слово «свои» здесь не означает а priori принадлежность множеству A).

Нетрудно (хотя и несколько кропотливо) доказать их равносильность.

Напомним:

Свойство 12. пустое множество и всё пространство являются одновременно открытыми и замкнутыми множествами;

Свойство 13. произвольное объединение и конечное пересечение открытых множеств — открытое множество;

Свойство 14. дополнение открытого множества замкнуто, замкнутого — открыто;

Свойство 15. произвольное пересечение и конечное объединение замкнутых множеств — замкнутое множество.

Отметим также важнейшие свойства операции замыкания $A \mapsto \bar{A}$. Прежде всего, ей тоже можно дать несколько определений. Ограничимся следующими:

- 1) \bar{A} есть множество A плюс все его предельные точки;
- 2) \bar{A} есть множество всех точек касания множества A ;
- 3) \bar{A} есть множество A плюс все его граничные точки;
- 4) \bar{A} есть пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A .

Отметим следующие свойства операции замыкания:

- 0) \bar{A} — замкнутое множество;
 - 1) $A \subset \bar{A}$, причём равенство имеет место для замкнутых множеств и только для них;
 - 2) $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$, где $\overline{\bar{A}} \equiv \overline{(\bar{A})}$;
 - 3) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow \bar{A}_1 \subset \bar{A}_2$;
 - 4) $\overline{A_1 \cup A_2} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2$.
- Докажем эти свойства.

0) Замыкание замкнуто как пересечение замкнутых множеств.

1) Следует из того, что в пересечение входят лишь те замкнутые множества, которые содержат множество A . Далее, если само A замкнуто, то оно входит в число пересекаемых множеств и поэтому указанное пересечение содержится в A . А поскольку верно и обратное включение, то они совпадают. Обратное, из равенства множества A своему замыканию следует, что множество A замкнуто (силу свойства 0)).

2) В силу 0) \bar{A} замкнуто. Тогда согласно 1) имеет место равенство множества A и его замыкания $\overline{\bar{A}}$.

3) Поскольку $A_1 \subset A_2$ и $A_2 \subset \bar{A}_2$, то среди замкнутых множеств, содержащих A_1 , есть множество \bar{A}_2 , а тогда пересечение таких

множеств содержится в $\overline{A_2}$, поскольку пересечение содержится в каждом из пересекаемых множеств.

4) Для доказательства вложения $\overline{A_1 \cup A_2} \subset \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ достаточно заметить, что $A_i \subset A_1 \cup A_2$ ($i = 1; 2$), и применить п. 3). Тогда мы получим, что $A_i \subset \overline{A_1 \cup A_2}$, а следовательно, то же включение верно и для объединения $\overline{A_1 \cup A_2}$. Заметим, что это рассуждение проходит для объединения любого (конечного или бесконечного семейства множеств).

Для доказательства обратного вложения заметим, что $\overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ замкнуто как объединение конечного семейства (!) замкнутых множеств и содержит A_1 и A_2 , а следовательно, их объединение: $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \supset \supset \overline{A_1 \cup A_2}$. Тогда, применив п. 3) вместе с п. 1), получаем: $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} = \overline{A_1 \cup A_2} \supset \overline{A_1 \cup A_2}$. Это рассуждение может быть обобщено на любое конечное семейство множеств $\{A_k\}_{k=1}^n$, но не на бесконечное. Легко привести контрпример: если $A_k = \{q_k\}$, где последовательность $\{q_k\}_{k=1}^\infty$ «пересчитывает» все рациональные точки отрезка $[0; 1]$, то замыкание объединения представляет собой весь отрезок, а объединение замыканий содержит только эти точки. (Где в рассуждении существенна конечность семейства множеств $\{A_k\}$?)

Итак, обобщение свойства 4) на бесконечные объединения неверно. Неверно и обобщение этого свойства на пересечение. Пример к последнему привести совсем просто: $\overline{\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})} = \overline{\emptyset} = \emptyset$, но $\overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$. Однако можно утверждать, что $\overline{A_1 \cap A_2} \subset \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$. Действительно, имеем

$$A_1 \cap A_2 \subset A_i \subset \overline{A_i}, \quad i = 1, 2, \quad \xrightarrow{3)} \quad \overline{A_1 \cap A_2} \subset \overline{A_1} \cap \overline{A_2}.$$

А поскольку $\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ — замкнутое множество (как пересечение замкнутых), в силу п. 1) и 3) имеем

$$\overline{A_1 \cap A_2} \subset \overline{\overline{A_1} \cap \overline{A_2}} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2},$$

что и требовалось. (Верно ли это рассуждение для бесконечного семейства множеств?) ☒

§ 3. Пример метрического пространства последовательностей

На лекции 4 были рассмотрены пространства числовых последовательностей l^p и m . Было отмечено, что последнее является несепарабельным. Мы приведём пример его сепарабельного подпространства.

Итак, пусть s — пространство сходящихся последовательностей.

1. Очевидно вложение $s \subset m$ как множеств. Тогда можно ввести на s метрику так же, как она была введена на m . Тогда s становится подпространством метрического пространства m и корректность

введения метрики (аксиомы метрического пространства) имеет место автоматически: как нетрудно заметить, всякое подмножество A метрического пространства M становится метрическим пространством, если определить $\rho_A(x, y) = \rho_M(x, y)$.

2. Докажем сначала *полноту пространства c* .

□ Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность элементов пространства c . Таким образом, x_k при каждом $k \in \mathbb{N}$ представляет собой числовую последовательность.

Будем обозначать номер числа в последовательности верхним индексом: $x_k^{(n)}$ — n -й элемент числовой последовательности x_k . Пусть последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N} \quad \forall k > K \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \rho(x_k, x_{k+p}) < \varepsilon. \quad (3.1)$$

Перепишем (3.1) с учётом определения расстояния в пространстве c :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N} \quad \forall k > K \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_k^{(n)} - x_{k+p}^{(n)}| < \varepsilon. \quad (3.2)$$

Из (3.2) следует:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N} \quad \forall k > K \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |x_k^{(n)} - x_{k+p}^{(n)}| < \varepsilon. \quad (3.3)$$

Следовательно, при каждом фиксированном n последовательности $\{x_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальны.

Обозначим пределы этих последовательностей через $x^{(n)}$ и образуем тем самым последовательность $x \equiv \{x^{(n)}\}$. Перейдя в (3.3) к пределу при $p \rightarrow \infty$, получим:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N} \quad \forall k > K \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |x_k^{(n)} - x^{(n)}| \leq \varepsilon. \quad (3.4)$$

Из (3.4) следует, что элементы x_k сходятся к элементу x в пространстве m .

Осталось лишь доказать, что $x \in c$. Тогда получим $x_k \rightarrow x$ в c (поскольку расстояния в пространствах m и c введены одинаково), и тем самым будет доказана полнота пространства m .

Итак, достаточно доказать, что c — сходящаяся последовательность. Это будет следовать из того, что она фундаментальна. А для доказательства её фундаментальности мы воспользуемся так называемым $\frac{\varepsilon}{3}$ -приёмом, который знаком вам из доказательства непрерывности равномерного предела непрерывных функций и который будет ещё не раз встречаться в дальнейшем.

Итак, пусть дано $\varepsilon > 0$ и надо указать такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\forall n > N \quad \forall q \in \mathbb{N} \quad |x^{(n)} - x^{(n+q)}| < \varepsilon. \quad (3.5)$$

Для этого вначале найдём такое $K \in \mathbb{N}$ в (3.4), что при всех $k > K$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_k^{(n)} - x^{(n)}| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.6)$$

Далее, взяв последовательность $x_k \equiv \{x_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ с номером $k = K + 1$ (напомним, что она сходится, а следовательно, фундаментальна), выберем такое $N_1 \in \mathbb{N}$, что

$$\forall n > N_1 \quad \forall q \in \mathbb{N} \quad |x_k^{(n)} - x_k^{(n+q)}| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.7)$$

Тогда, используя (3.6) и (3.7), получим для всех $n > N_1$, $q \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |x^{(n)} - x^{(n+q)}| &= \\ &= \left| \left(x^{(n)} - x_k^{(n)} \right) + \left(x_k^{(n)} - x_k^{(n+q)} \right) + \left(x_k^{(n+q)} - x^{(n+q)} \right) \right| \leq \\ &\leq \left| x^{(n)} - x_k^{(n)} \right| + \left| x_k^{(n)} - x_k^{(n+q)} \right| + \left| x_k^{(n+q)} - x^{(n+q)} \right| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad (3.8) \end{aligned}$$

что и требовалось. Итак, утверждение доказано. \square

3. Покажем теперь, что *пространство c сепарабельно*. Ключевой идеей здесь будет переход от бесконечных последовательностей к «конечным» в том смысле, что они будут постоянными начиная с некоторого номера.

\square Сначала мы построим счётное подмножество в c . Затем покажем, что оно всюду плотно.

Для каждого рационального числа q и каждого натурального числа l рассмотрим всевозможные последовательности, у которых на местах до $(l-1)$ -го включительно стоят произвольные рациональные числа, а начиная с l -го места — число q .

Из результатов семинара-лекции 1 следует, что 1) при фиксированных l и q множество таких последовательностей счётно, 2) объединение всех таких множеств сначала по $l \in \mathbb{N}$, а потом по $q \in \mathbb{Q}$ тоже счётно. Осталось понять, почему построенное подмножество c_0 всюду плотно в c .

Пусть нам дана произвольная последовательность $y = \{y^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \in c$. Пусть $y^{(n)} \rightarrow b$ (напоминаем, что пространство c состоит из сходящихся последовательностей). Пусть дано $\varepsilon > 0$ и требуется найти последовательность $z \in c_0$ такую, что $\rho(y, z) < \varepsilon$. Для этого прежде всего находим рациональное число r такое, что $|b - r| < \frac{\varepsilon}{2}$. Далее находим такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N$ верно неравенство

$$|y^{(n)} - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем теперь последовательность из c_0 следующим образом:

- 1) положим $q = r$, $l = N + 1$;
- 2) элементы $\{y^{(n)}\}_{n=1}^N$ приблизим рациональными числами с точностью ε , положив $z^{(n)} : |z^{(n)} - y^{(n)}| < \varepsilon$, $z^{(n)} \in \mathbb{Q}$ при $n = 1, \dots, N$, и возьмём $z^{(n)} = r$ при $n > N$.

Легко проверить, что $z \in c_0$ и $\sup_{n \in \mathbb{N}} |y^{(n)} - z^{(n)}| < \varepsilon$. \square

4. Можно задаться вопросом, *плотно ли подпространство s в пространстве t* . Легко сообразить, что нет: иначе бы t было сепарабельным вследствие сепарабельности s .

В порядке дальнейшего обсуждения свойств пространства s приведём пример последовательности его элементов, сходящейся к элементу $(0, 0, 0, \dots)$ в s , но не сходящейся в l^1 . Положим

$$x_k = \left(\underbrace{\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}}_k, 0, \dots \right). \quad (3.9)$$

Легко видеть, что $x_k \rightarrow (0, 0, 0, \dots)$ в s , но в пространстве l^1 последовательность $\{x_k\}$ не является даже фундаментальной, — см. задачу 21. (Очевидно, отсутствие фундаментальности — достаточное условие отсутствия сходимости, нередко удобно проверяемое на практике.)

§ 4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 0. Ответить на вопросы по ходу текста.

Задача 1. Убедиться в том, что следующие множества с указанной функцией $\rho(x, y)$ являются метрическими пространствами:

- 1) \mathbb{R}^n , $\rho(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} (|x_i - y_i|)$;
- 2) \mathbb{R}^n , $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$;
- 3) любое множество M с $\rho(x, y) = 1$ при $x \neq y$, $\rho(x, y) = 0$ при $x = y$.

Задача 2. Доказать неравенство четырёхугольника: $|\rho(x, z) - \rho(y, w)| \leq \rho(x, y) + \rho(z, w)$.

Задача 3. Убедиться в том, что открытый шар открыт, а замкнутый шар замкнут (приняв любое определение замкнутости).

Задача 4. Построить пример метрического пространства M — подмножества \mathbb{R}^2 , — в котором существует замкнутый шар, являющийся открытым множеством, но не открытым шаром.

Задача 5. Пусть A, B — замкнутые непересекающиеся множества в метрическом пространстве M . Построить их непересекающиеся открытые окрестности, т. е. такие открытые множества $O_A \supset A$ и $O_B \supset B$, что $O_A \cap O_B = \emptyset$.

Задача 6. (Продолжение.) Пусть $M = [1; 2] \cup [4; 5]$, $A = [1; 2]$, $B = [4; 5]$. Остаётся ли верным утверждение предыдущей задачи? Указать в явном виде множества O_A и O_B .

Задача 7. Объяснить подробно некоторые (* — все) примеры § 2.

Задача 8. Верны ли следующие утверждения для произвольного фиксированного множества:

- 1) каждая его предельная точка есть его точка касания;
- 2) каждая его внутренняя точка есть предельная точка;
- 3) каждая его точка касания — либо внутренняя точка, либо изолированная точка;
- 4) множество всех его граничных точек вместе с множеством всех его

внутренних точек есть само множество A ;

5) множество всех его внутренних точек вместе с множеством всех его изолированных точек есть само множество A ?

Задача 9. Верны ли следующие утверждения:

- 1) замкнутое множество не имеет внутренних точек;
- 2) замкнутое множество не может состоять из одних только внутренних точек;
- 3) все точки открытого множества суть его точки касания?

Задача 10. Доказать равносильность хотя бы некоторых (* — всех) определений замкнутого множества.

Задача 11. Доказать равносильность хотя бы некоторых (* — всех) определений замыкания.

Задача 12. Доказать хотя бы некоторые (* — все) свойства замыкания.

Задача 13. Решить задачу 10* из семинара-лекции 2.

Задача 14. Привести пример счётного пересечения открытых множеств, дающего замкнутое множество; привести пример счётного объединения замкнутых множеств, дающего открытое множество.

Задача 15. Привести пример метрического пространства, имеющего более двух открыто-замкнутых подмножеств.

Задача 16. Привести пример, показывающий, что свойство 4) операции замыкания не выполняется для счётных объединений. (Указание. Подходящий пример есть в тексте.)

Задача 17. Доказать сепарабельность пространств l^p , $p \in [1; +\infty)$. (Указание. Начните с $p = 1$.)

Задача 18*. Показать, что в пространстве $L^1(X)$, где $X \subset \mathbb{R}^n$, плотно множество непрерывных функций.

Задача 19. Являются ли замкнутыми подмножествами в $C[a; b]$:

- 1*) подмножество всех многочленов степени не выше n ;
- 2) подмножество всех многочленов;
- 3) подмножество $C^1[a; b]$ всех непрерывно дифференцируемых функций?

Задача 20. Почему в примере 6 слово «расстояние» взято в кавычки?

Задача 21. Доказать, что последовательность (3.9) не является фундаментальной в l^1 .

Задача 22. Верно ли:

- 1) всякая изолированная точка есть точка касания?
- 2) для любого множества A верно $A \subset \text{int } A \cup \partial A$, где $\text{int } A$ — множество внутренних точек множества A ?