

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М. В. ЛОМОНОСОВА



Международная конференция
«Асимптотические методы
в математической физике»

*К 100-летию профессора А. Б. Васильевой
и 75-летию профессора Н. Н. Нефёдова*

26 –27 февраля 2026 г.

Сборник тезисов докладов

Физический факультет
МГУ им. М. В. Ломоносова



МОСКВА, РОССИЯ

LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY

**International conference
“Asymptotic Methods in
Mathematical Physics”**

*For 100th anniversary of professor A. B. Vasilyeva
& 75th anniversary of professor N. N. Nefedov*

February 26–27, 2026

Abstracts of the conference

**Physics Faculty
Lomonosov Moscow State University**

MOSCOW, RUSSIA

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ

- В. В. Белокуров** — профессор, и.о. декана физического факультета МГУ;
(председатель)
- А. И. Шафаревич** — член-корр. РАН, декан механико-математического факультета МГУ;
- А. Н. Боголюбов** — профессор физического факультета МГУ;
- С. Ю. Доброхотов** — профессор ИПМех РАН;
- С. А. Кащенко** — профессор, проректор ЯрГУ им. П. Г. Демидова;
- А. В. Тихонравов** — профессор, зав. лаб. НИВЦ МГУ.

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ

- Д. Д. Соколов** — профессор, и.о. зав. каф. математики физического факультета МГУ;
(председатель)
- В. Т. Волков** — доцент физического факультета МГУ;
(зам. председателя)
- Н. Т. Левашова** — доцент физического факультета МГУ;
(зам. председателя)
- А. А. Панин** — доцент физического факультета МГУ;
(ученый секретарь)
- М. А. Терентьев** — ст. науч. сотр. физического факультета МГУ;
- Д. А. Коняев** — ст. науч. сотр. физического факультета МГУ;
- М. Н. Волкова** — вед. электроник физического факультета МГУ;
(секретарь)

Международная конференция, посвящённая памяти профессоров
А.Б. Васильевой и Н.Н. Нефёдова в связи с юбилейными датами:
100-летием со дня рождения А.Б. Васильевой и
75-летием со дня рождения Н.Н. Нефёдова
26-27 февраля 2026 г.

Редакторы-составители сборника тезисов:
В. Т. Волков, Н. Т. Левашова, М. А. Терентьев

Страница конференции в Интернет:
<http://math.phys.msu.ru/asymptotic-methods-2026>

Электронная почта конференции:
asymptotic.methods@conf.msu.ru

В разделах тезисов докладчики
выделены подчёркиванием

СОДЕРЖАНИЕ

Оргкомитет	3
Содержание	5
Памяти Аделаиды Борисовны Васильевой (к 100-летию со дня рождения)	9
Памяти Николая Николаевича Нефёдова (к 75-летию со дня рождения)	12
Памяти Валентина Фёдоровича Бутузова	16
Очная секция	19
А. О. Орлов, В. Т. Волков Развитие асимптотических методов в научной школе Васильевой–Бутузова–Нефёдова	20
А. Аллилуева Коротковолновое асимптотическое решение задачи Коши для одномерного волнового уравнения со сглаженным скачком скорости	22
А. И. Аллилуева, А. И. Шафаревич Коротковолновые асимптотики линеаризованной системы уравнений мелкой воды со скачкообразно меняющимися коэффициентами	24
Е. Е. Букжалёв Об итерационном методе приближённого решения задачи Коши для сингулярно возмущённого линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка	25
А. А. Быков, Гань Цинчжао Эволюция фронта трехмерной контрастной структуры в неоднородной среде со слабой адвекцией	26
А. В. Влахова, Э. И. Макиева Сингулярно возмущенные задачи динамики систем с проскальзыванием и разрушением	33
М. М. Вотякова, Д. С. Миненков Асимптотики распространяющихся вдоль берега длинных волн, порожденных локализованным начальным возмущением	37
Р. К. Гайдуков Асимптотические методы в задачах обтекания неровных поверхностей и двухпалубная структура пограничного слоя	38
Ю. Э. Даник, М. Г. Дмитриев, Д. А. Макаров Асимптотические приближения и алгоритмы построения параметрических семейств синтезирующих законов управления в нелинейных системах	41
М. А. Давыдова, Н. Ф. Еланский, С. А. Захарова, Г. Д. Рублев, А. В. Шилкин Применение численно-асимптотического метода в обратных задачах оценки коэффициентов переноса и термодинамических потоков по данным моделирования	49

А. Р. Данилин, О. О. Коврижных Асимптотика определяющего вектора в задаче оптимального терминального управления с двумя малыми параметрами и гладкими геометрическими ограничениями на управление	53
А. Р. Данилин, А. А. Шабуров Асимптотические разложения решений в задачах “дешевого” управления с ограничениями на управление в виде шара	55
А. И. Денисов, И. В. Денисов Идеи Н.Н. Нефедова при доказательстве равномерной сходимости формальной асимптотики	57
С. Ю. Доброхотов, Д. С. Миненков, В. Е. Назайкинский Нелинейные и линейные задачи теории длинных волн на воде в областях с границей без граничных условий	59
А. Г. Елисеев Регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи Коши для однородного уравнения Шредингера с потенциалом $Q = X^2$, содержащей фокальные точки и сингулярные начальные условия	60
С. П. Зубова, Е. В. Раецкая О регулярном вырождении в сингулярно возмущенной задаче в нерегулярном случае.	70
А. И. Калинин, Л. И. Лавринович Асимптотика решения задачи оптимизации переходного процесса большой длительности в линейной сингулярно возмущенной системе	73
В. И. Качалов О псевдоаналитических решениях нелинейных сингулярно возмущенных уравнений	76
А. А. Кащенко Асимптотика решений системы дифференциальных уравнений с нелинейными запаздывающими обратными связями, имеющими простое поведение на бесконечности	84
И. С. Кащенко Асимптотика установившихся решений нелинейного дифференциального уравнения нейтрального типа	85
С. А. Кащенко, А. О. Толбей Динамика системы двух сингулярно возмущенных уравнений с запаздыванием	87
А. С. Кирсанова Аппроксимации Паде в задачах приближенного построения траекторий уток	88
N. Korpeva Upper and lower solutions in the numerical error analysis	91
Е. П. Кубышкин Метод усреднения в задаче построения автоколебательных решений распределенных кинетических систем	92
А. Н. Куликов, Д. А. Куликов Классическая и модифицированные версии слабодиссипативного уравнения Гинзбурга-Ландау. Локальные бифуркации в периодической краевой задаче	94
А. Ф. Курин Нестационарные режимы осциллятора Дуффинга	96
Г. А. Курина Проекторный подход к построению асимптотики решения сингулярно возмущенных задач в критическом случае	98

Н. Т. Левашова Применение нелинейности модульного типа в математических моделях	101
V. L. Litvinov, K. V. Litvinova On an asymptotic method for solving integro-differential equations of oscillations of mechanical systems with moving boundaries	105
Д. В. Лукьяненко Об особенностях решения коэффициентных обратных задач для нелинейных уравнений типа реакция-диффузия-адвекция с данными различного типа	106
Д. А. Маслов Метод построения аналитического по малому параметру решения для одного класса нелинейных краевых задач и его численная реализация	107
А. В. Нестеров Об асимптотике решения задачи Коши для сингулярно возмущенной системы гиперболических уравнений с малой диссипацией в критическом случае	113
Ни Минкан Исследование сингулярно возмущённых задач с разрывной правой частью	115
E. I. Nikulin, A. V. Karamyshev Existence and stability of two-dimensional stationary solutions with boundary layers in a Tikhonov-type system arising in the drift-diffusion model of sub-Debye-length semiconductors	116
А. П. Петров Малые параметры в математических моделях социальных процессов: на примере модели информационного противоборства	117
Е. В. Раецкая Решение трехточечной задачи управления для сингулярно возмущенной системы в частных производных.	119
A. B. Rasulov, Yu. S. Fedorov Boundary value problems for the singularly perturbed Bitsadze equation with a strong singularity in the lower coefficient	126
О. В. Руденко Сильно нелинейные волны: модели и решения	128
В. Ф. Сафонов, А. А. Бободжанов Сингулярно возмущённые интегро-дифференциальные уравнения с операторами Вольтерра и Фредгольма	129
В. В. Сидоренко, С. М. Рамоданов Динамика твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной вязкой жидкостью	131
Д. Д. Соколов Распространение динамо-волн как вызов для изучения несамосопряженных операторов	133
М. А. Терентьев О геометрической интерпретации регулярно и сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений	134
О. Б. Цехан О связи асимптотических аппроксимаций, получаемых для решений сингулярно возмущённых задач методом пограничных функций и методом невырожденных преобразований	137
D. Chaikovskii, Ye Zhang, S. Pirutin Identification of Advection in a Reduced Atmospheric Model	146

Е. А. Щепакина, В. А. Соболев, Е. С. Долгова Дробно-иррациональные асимптотики	148
Секция стендовых докладов	150
Р. Л. Аргун, Н. Т. Левашова Использование методов асимптотического анализа для решения обратной задачи по определению доли сгоревшей биомассы в ландшафтных лесных пожарах с данными о положении фронта горения в локальной двумерной области наблюдения	151
А. А. Быков, Ли Сягун Многофазные контрастные структуры в неоднородной активной среде с адвекцией	153
Вэй Юйсюань, Чэн Хань Применение асимптотических методов для восстановления граничного условия краевой задачи с периодическими условиями во времени	159
Е. Georgievskaia Mean Square Hyers-Ulam stability for a system of stochastic differential equations with two independent stochastic parameters	161
А. Р. Махмудов, А. О. Орлов, Е. И. Никулин, Р. Л. Аргун Движение теплового фронта в задаче о нагреве кремниевой пластины в ламповом реакторе	163
А. О. Орлов, Сюн Чжусюань, Ли Чжицян, В. Т. Волков Асимметричные пограничные слои в сингулярно возмущённой задаче реакция-диффузия-адвекция	165
А. Б. Расулов К теории систем линейных уравнений Коши-Римана с полярной особенностью в младших коэффициентах	167
Чжао Вэньсинь, Н.Т. Левашова Стационарирование фронта в задаче реакция-диффузия в случае кусочно-линейного разрывного источника модульного типа	173
Е. А. Чунжук, Н. Т. Левашова, Е. И. Никулин Стационарное решение в системе Тихоновского типа в случае разрыва коэффициентов адвекции и нелинейных источников	175

ПАМЯТИ АДЕЛАИДЫ БОРИСОВНЫ ВАСИЛЬЕВОЙ (К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)

Говоря о любом крупном ученом, всегда в первую очередь, вспоминают его научные достижения, его статьи, теоремы, методики и т.п. Среди специалистов по качественной теории дифференциальных уравнений А.Б. Васильева занимает особое место. Она – признанный классик в теории сингулярных возмущений. Однако известно, что талантливый человек талантлив во всем. И это в полной мере относится и к Аделаиде Борисовне. Она была человеком разносторонних интересов, неутомимым путешественником, тонким знатоком и ценителем различных видов искусства. Особо следует отметить ее увлеченность музыкой. Она создала великолепные эквиритмические переводы текстов вокальных произведений Брамса, Леве и других композиторов. Переводы были опубликованы издательством «Музыка» и теперь эти вокальные произведения исполняются профессиональными артистами на русском языке.



А.Б. ВАСИЛЬЕВА

А.Б. Васильева родилась 10 марта 1926 г. Вся ее научная и педагогическая деятельность неразрывно связана с физическим факультетом МГУ, на который она поступила после окончания школы в 1943 году. Это было тяжелое военное время, когда трудно было всем – и воевавшим на фронте, и трудившимся в тылу, и школьникам, и студентам. Как вспоминала сама Аделаида Борисовна, зимой в холодных аудиториях приходилось прятать чернильницу под пальто, чтобы не замерзали чернила.

Уже в студенческие годы А.Б. Васильевна начала заниматься научной работой под руководством А.Н. Тихонова. В конце сороковых – начале пятидесятых годов прошлого века А.Н. Тихонов опубликовал цикл работ по дифференциальным уравнениям с малыми параметрами при старшей производной, которые положили начало новому направлению в области дифференциальных уравнений и математической физики. Заложив основы нового направления, А.Н. Тихонов передал эстафету своей молодой ученице. И это направление оказалось в надежных руках. Оно стало называться теорией сингулярных возмущений, и А.Б. Васильева стояла у истоков этого

направления.

Ее дипломная работа, а затем кандидатская диссертация выполнялись под непосредственным руководством А.Н. Тихонова. Ей предстояло решить трудную задачу: разработать способ построения равномерного на всем промежутке времени (включая зону пограничного слоя) асимптотического приближения решения с произвольной точностью по малому параметру. На решение этой проблемы ушло почти десять лет, но за этот достаточно короткий срок А.Б. Васильева разработала эффективный метод, позволяющий строить равномерные асимптотические приближения для решений сингулярно возмущенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащей быстрые и медленные переменные (тихоновской системы). Суть этого метода состоит в том, что асимптотическое разложение решения начальной задачи для тихоновской системы строится в виде суммы двух рядов по степеням малого параметра – регулярного ряда, дающего приближение для решения вне некоторой окрестности начальной точки, и погранслоного ряда, служащего для описания решения в окрестности начальной точки, где имеет место пограничный слой. Члены погранслоного ряда зависят от растянутого (быстрого) времени и называются пограничными функциями. Поэтому и сам метод получил название метода пограничных функций.

В дальнейшем этот метод был применен А.Б. Васильевой не только для начальных, но и для краевых задач, а также для задач с внутренним переходным слоем. В настоящее время этот метод считается классическим в теории сингулярных возмущений и по праву носит имя его создателя – А.Б. Васильевой. В 1961 г. за работы по методу пограничных функций ей была присуждена ученая степень доктора физико-математических наук. В последующие годы А.Б. Васильевой и ее учениками метод пограничных функций был распространен на интегро-дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения с малым запаздыванием и разностные уравнения с малым шагом, на все основные типы уравнений с частными производными.

А.Б. Васильевой был создан мощный научный коллектив, занимающийся проблемами теории сингулярных возмущений. Непосредственно под ее руководством подготовлено около 30 кандидатских диссертаций, шесть ее учеников стали докторами наук. Имя А.Б. Васильевой широко известно среди ученых математиков не только в нашей стране, но и во всех ведущих странах мира. Неоднократно она докладывала свои результаты на крупных международных математических форумах. Ею опубликовано более 300 научных работ, в том числе четыре монографии. В 2003 году А.Б. Васильева и ее ученики В.Ф. Бутузов и Н.Н. Нефедов были удостоены Ломоносовской премии МГУ первой степени за разработку асимптотической теории контрастных структур.

В последние годы А.Б. Васильевой были получены новые крупные результаты по существованию, построению асимптотик и исследованию устойчивости контрастных структур, описываемых решениями дифференциальных уравнений, испытыва-

ющими резкие изменения типа скачков, всплесков и т.д. Это направление в теории сингулярных возмущений в настоящее время переживает период бурного развития, здесь сосредоточены усилия многих известных специалистов, занимающихся теорией сингулярных возмущений и ее приложениями к задачам теории полупроводниковых приборов, химической физики, биофизики, синергетики и других. Но первые результаты в этом направлении были получены А.Б. Васильевой почти семьдесят лет назад.

А.Б. Васильева была замечательным педагогом, с 1965 года – профессором кафедры математики физического факультета МГУ. Более 50 лет она читала курсы лекций по математическим дисциплинам студентам физического факультета, за эти годы ее глубокие по содержанию и прекрасные по исполнению лекции слушали несколько тысяч студентов разных поколений. Совместно с коллегами по кафедре ею написаны несколько учебников и учебных пособий по дифференциальным уравнениям, интегральным уравнениям и вариационному исчислению.

Аделаида Борисовна являлась не только неиссякаемым источником новых интересных задач, но и замечательным образцом крупного ученого и педагога, настоящего интеллигента, подлинным примером того, каким должен быть профессор Московского университета.

Оргкомитет конференции

ПАМЯТИ НИКОЛАЯ НИКОЛАЕВИЧА НЕФЁДОВА (К 75-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)

Николай Николаевич Нефедов родился 13 февраля 1951 года в г. Винница. В 1968 г. окончил с медалью СШ №32 г. Винницы и поступил на физический факультет МГУ, который окончил в 1974 году. С 1974 по 1977 год учился в аспирантуре кафедры математики. В 1978 году защитил кандидатскую диссертацию на тему «Асимптотические разложения решений одного класса сингулярно возмущенных интегральных уравнений».



Н.Н. НЕФЕДОВ

С 1977 года Н.Н. Нефедов работал на физическом факультете МГУ: с 1977 по 1980 год на кафедре акустики, с 1980 по 1987 год на кафедре физики моря, с 1987 года – на кафедре математики. В 1995 году он защитил докторскую диссертацию. Тема докторской диссертации – «Контрастные структуры в нелинейных сингулярно возмущенных уравнениях». С 1996 г. Н.Н. Нефедов – профессор кафедры математики физического факультета МГУ, а с 2014 г. – заведующий кафедрой.

За годы работы в Московском университете Н.Н. Нефедов читал специальные курсы «Волновые задачи гидроакустики», «Математические модели океана», «Асимптотические методы в сингулярно возмущенных задачах», «Метод дифференциальных неравенств», «Асимптотическая теория контрастных структур» и общие курсы лекций «Методы математической физики», «Дифференциальные уравнения».

Н.Н. Нефедов был заведующим кафедрой математики физического факультета на протяжении 10 лет с 2014 по 2024 г. Он всегда отстаивал интересы кафедры, остро переживал проблемы, гордился успехами кафедры, активно во всем поддерживал молодых сотрудников. Несомненно, его большой заслугой является то, что он сумел сохранить традиции кафедры, а также деловую атмосферу взаимопонимания и поддержки между сотрудниками, заложенные его предшественниками А.Н. Тихоновым, А.Г. Свешниковым и В.Ф. Бутузовым.

Н.Н. Нефедов – всемирно известный ученый в области теории асимптотических методов для нелинейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, основы которой были заложены на кафедре математики физического факультета

А.Н. Тихоновым. Н.Н. Нефедов внес существенный вклад в развитие и укрепление этого научного направления, и в 2003 г. он и его коллеги А.Б. Васильева и В.Ф. Бутузов были удостоены высшей награды Московского университета – Ломоносовской премии 1-й степени за научную работу. Эта научная тематика и сегодня является одной из основных на кафедре математики, а созданная А.Б. Васильевой, В.Ф. Бутузовым и Н.Н. Нефедовым научная школа вышла далеко за пределы кафедры и продолжает активно развиваться их учениками во многих российских и зарубежных университетах и научных центрах.

Научные результаты, полученные Н.Н. Нефедовым, широко известны не только в России, но и во всем мире. Им опубликовано более 350 научных трудов, которые активно цитируются. Н.Н. Нефедов – участник многих международных конференций в качестве приглашенного докладчика, участник и руководитель ряда международных научных проектов. Его неоднократно приглашали ведущие университеты и научные центры в США, Германии, Японии, Австралии, Ирландии, Китае и других странах для чтения лекций и проведения научных исследований. Н.Н. Нефедов – почетный профессор Восточно-Китайского университета (г. Шанхай).

О масштабе и значимости научных трудов Н.Н. Нефедова также говорит тот факт, что его научная деятельность неоднократно поддерживалась грантами РНФ и РФФИ. Н.Н. Нефедов – лауреат конкурса «Грант правительства Москвы» 2005 г., а в 1997-2000 и 2000-2003 г. ему присуждалась «Государственная научная стипендия». В соответствии с Указом Президента Российской Федерации от 28 февраля 2023 года № 133 за «заслуги в научно-педагогической деятельности, подготовке квалифицированных специалистов и многолетнюю добросовестную работу» заведующий кафедрой математики физического факультета профессор Николай Николаевич Нефедов награжден медалью ордена «За заслуги перед Отечеством» II-ой степени.

Н.Н. Нефедов – автор нового подхода к асимптотическому исследованию нелинейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в частных производных – асимптотического метода дифференциальных неравенств, в основе которого лежит идея использования полученных формальных асимптотических приближений для построения верхних и нижних решений. Следует отметить, что эта гениальная идея Николая Николаевича не была сразу понята его коллегами и подвергалась жесткой критике на семинаре по асимптотическим методам. Однако Николай Николаевич не сдавался и постепенно довел свою идею до совершенства. В результате, асимптотический метод дифференциальных неравенств, получивший его имя, позволил значительно расширить область применимости асимптотической теории контрастных структур и решить ряд сложных вопросов теории сингулярно возмущенных задач, развить эффективную методику доказательства существования и устойчивости решений с внутренними переходными слоями (контрастных структур) в нелинейных сингулярно возмущенных системах реакция-диффузия-адвекция, также решить ряд важных прикладных задач.

Н.Н. Нефедов активно развивал междисциплинарные связи и связи между различными научными направлениями на кафедре математики. Под его руководством родились новые направления использования асимптотических методов, такие как асимптотико-численное моделирование и применение асимптотики для построения эффективных разностных схем, использование асимптотических методов для решения обратных задач и задач управления, позволившие значительно повысить эффективность традиционных подходов.

Николай Николаевич заботился о сохранении научной школы по асимптотическим методам и ее дальнейшем развитии, воспитании молодых ученых. Под его руководством защищен ряд кандидатских и докторская диссертация. Николай Николаевич прививал своим ученикам особый стиль научной работы. Он учил, что главное – не просто владеть математическим аппаратом, а глубоко прочувствовать задачу, увидеть новые закономерности, суметь "поймать эффект за хвост". В нашей области – асимптотических методов – это особенно важно: за сложными выкладками и строгими доказательствами легко потерять физическую суть явления. Николай Николаевич постоянно напоминал своим ученикам об этой опасности, требуя не только формального выполнения вычислений, но и ясного понимания их смысла.

Именно такой подход – сочетание математической строгости с физической интуицией – и создавал ту уникальную атмосферу научного поиска, которая царила на научных семинарах по асимптотическим методам. Николай Николаевич умел смело отметить все лишнее и формальное, учил выделять в любой проблеме самое основное, мыслить образами, а не формулами. Этот стиль работы, культура научного мышления, привитая Николаем Николаевичем своим ученикам, позволили им уже самостоятельно добиваться больших успехов в своей научной работе.

Николай Николаевич был внимателен не только к научной деятельности своих учеников, но и к их жизни в целом, всегда предлагал свою помощь и поддержку, мог дать ценный совет, сопереживал во время трудностей, радовался их успехам. Он обладал незаурядным чувством юмора и нередко мог очень метко и остроумно охарактеризовать любую сложную ситуацию.

Вспоминая об ушедшем из жизни человеке науки, прежде всего отмечают его научные идеи, воплотившиеся в статьях, теоремах, алгоритмах и т.п. Говоря о Николае Николаевиче, видишь, что этого совершенно недостаточно для того, чтобы характеризовать его личность и сохранить память о нем. Николай Николаевич был человеком команды. В том, что он делал, для него была важна преемственность: от Андрея Николаевича Тихонова к Аделаиде Борисовне Васильевой, а от нее – к Валентину Федоровичу Бутузову. Было очень важно, чтобы эта нить протянулась и дальше, к его ученикам и сотрудникам. Конечно, мы все помним своих учителей, историю их школ, но со временем обычно эти нити переплетаются и не сохраняются в чистом виде.

На формировании этой командной природы Николая Николаевича, видимо, ска-

залось то, что в годы учебы на физфаке он выступал за сборную МГУ по футболу, в составе которой дважды становился чемпионом Москвы среди высших учебных заведений, участвовал во Всесоюзных и международных соревнованиях. В футбольной команде он познакомился с В.Ф. Бутузовым, и они стали близкими друзьями на всю жизнь, хотя разница в возрасте и окрашивала эту дружбу в тона отношений учитель-ученик. Эта связка определила всю жизнь Николая Николаевича. Он стал ярким представителем созданной А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузовым на кафедре математики научной школы по асимптотическим методам в теории сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений и внес существенный вклад в ее дальнейшее развитие и укрепление. Такая верность научной школе – замечательная черта, которой хочется следовать, но не всегда получается. У Николая Николаевича получалось...

Оргкомитет конференции

ПАМЯТИ ВАЛЕНТИНА ФЁДОРОВИЧА БУТУЗОВА

В.Ф. Бутузов вместе с А.Б. Васильевой и Н.Н. Нефедовым являются создателями всемирно признанной научной школы по теории сингулярных возмущений. Под их руководством многие годы работал семинар по асимптотическим методам на кафедре математики физического факультета МГУ.

В.Ф. Бутузов поступил на физический факультет в 1957 г. после окончания с золотой медалью сельской школы, и с тех пор его жизнь была связана с Московским университетом, где он прошёл все ступени от студента до профессора, заведующего кафедрой. На протяжении 20 лет (с 1993 г. по 2014 г.) В.Ф. Бутузов заведовал кафедрой математики физического факультета, являясь прямым преемником А.Н. Тихонова и А.Г. Свешникова на этом посту.

Научные интересы В.Ф. Бутузова, сформировавшиеся ещё в студенческие годы, были связаны с теорией сингулярных возмущений, основы которой заложены в известных трудах А.Н. Тихонова. В 1963 г. В.Ф. Бутузов защитил дипломную работу, а в 1966 г. – кандидатскую диссертацию под руководством профессора А.Б. Васильевой. В кандидатской диссертации были исследованы обнаруженные им особые асимптотические свойства решений сингулярно возмущённых интегро-дифференциальных уравнений, качественно отличные от свойств решений дифференциальных уравнений.

Затем в семидесятых годах В.Ф. Бутузовым был сделан важный шаг в развитии методов построения асимптотических разложений погранслойных решений. Он разработал метод угловых пограничных функций, позволяющий строить асимптотические разложения решений сингулярно возмущённых краевых задач для основных типов уравнений математической физики в тех случаях, когда граница области содержит угловые точки. Этот метод и его применения составили основное содержание докторской диссертации В.Ф. Бутузова, защищённой им в 1979 г.

В последующие годы В.Ф. Бутузовым были получены новые важные результаты в теории сингулярных возмущений и её приложениях. Совместно с коллегами и учениками было разработано новое направление – асимптотическая теория контрастных



В.Ф. БУТУЗОВ

структур, т.е. решений нелинейных сингулярно возмущённых уравнений с внутренними переходными слоями. За работы по созданию и развитию этого направления В.Ф. Бутузов и его коллеги А.Б. Васильева и Н.Н. Нефёдов в 2003 году были удостоены высшей научной награды Московского университета – Ломоносовской премии 1-й степени.

В последнее десятилетие В.Ф. Бутузовым был получен ряд фундаментальных результатов по исследованию сингулярно возмущённых задач с кратными корнями вырожденного уравнения, а также сингулярно возмущённых задач для частично диссипативных систем уравнений.

В.Ф. Бутузов является автором более 250 научных статей и пяти монографий по асимптотическим методам в сингулярно возмущённых задачах. Две из этих монографий переведены в США и Китае. Последняя монография В.Ф. Бутузова, изданная в 2014 году, содержит результаты последнего десятилетия.

Под руководством В.Ф. Бутузова защищены 15 кандидатских диссертаций, а четверо его учеников стали докторами наук.

Валентин Фёдорович обладал замечательным талантом педагога и лектора, пользовавшегося неизменной любовью студентов и уважением коллег. Неоднократно по результатам опросов студентов он признавался преподавателем года физического факультета, последний раз – в 2019 году, а в 2010 году – преподавателем года МГУ (это очень почётное звание ежегодно присуждается студентами только одному преподавателю из огромного многотысячного коллектива преподавателей университета).

Учебные пособия «Математический анализ в вопросах и задачах» и «Линейная алгебра в вопросах и задачах», написанные В.Ф. Бутузовым вместе с коллегами по кафедре и выдержавшие под редакцией В.Ф. Бутузова несколько изданий, активно используются и на физическом факультете МГУ, и на других факультетах, и в других вузах. На основе 50-летнего опыта чтения лекций по математическому анализу В.Ф. Бутузов подготовил эти лекции к изданию. Первая, вторая и третья части «Лекций по математическому анализу» вышли в 2012 г., 2014 г. и 2015 г.

Начиная с 1979 г., В.Ф. Бутузов принимал активное участие в работе над школьными учебниками геометрии. Созданные при его участии и под руководством академика А.Н. Тихонова учебники были признаны лучшими на всесоюзном конкурсе в 1988 г. В настоящее время они являются основными учебниками геометрии в большинстве школ Российской Федерации. По ним учились и учатся десятки миллионов школьников России и бывших союзных республик. В.Ф. Бутузовым вместе с коллегами С.Б. Кадомцевым и В.В. Прасоловым был создан новый учебно-методический комплект по геометрии для общеобразовательных школ. В комплект входят учебники для 7-9 и 10-11 классов, написанные под редакцией академика В.А. Садовниченко, методические пособия для учителей, рабочие тетради и тематические тесты для школьников. Новые учебники получили положительные отзывы комиссий РАН и РАО, они активно используются в школах различных регионов России. На протя-

жении 12 лет В.Ф. Бутузов читал курс геометрии в СУНЦ МГУ – школе-интернате им. А.Н. Колмогорова.

В.Ф. Бутузов постоянно вел разнообразную научно – общественную работу. Он являлся членом двух диссертационных советов при МГУ, членом научно – методического совета по математике при Министерстве науки и образования РФ, с 1995 г. по 2011 г. был заместителем декана физического факультета МГУ.

Валентин Федорович был человеком разносторонних интересов. В молодые годы он в течение 25 лет выступал в составе сборной МГУ по футболу, был неоднократным чемпионом и призером первенства Москвы среди вузов. Друзьям и коллегам хорошо известен также и его поэтический дар, умение быстро и метко воплощать любую ситуацию в стихотворный экспромт.

Оргкомитет конференции

ОЧНАЯ СЕКЦИЯ

Развитие асимптотических методов в научной школе Васильевой–Бутузова–Нефёдова

А. О. Орлов¹, В. Т. Волков²

^{1,2} МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, Россия.

E-mails: ¹orlov.andrey@physics.msu.ru, ²volkovvt@mail.ru

Доклад посвящен обзору фундаментальных достижений научной школы по теории сингулярных возмущений кафедры математики физического факультета МГУ. Школа неразрывно связана с именами выдающихся профессоров А.Б. Васильевой, В.Ф. Бутузова и Н.Н. Нефедова, чьи идеи определили развитие асимптотических методов на десятилетия вперед.

Аделаида Борисовна Васильева (1926–2018), ученица академика А.Н. Тихонова, стояла у истоков современной теории сингулярных возмущений. Ею был разработан и доведен до алгоритмического совершенства *метод пограничных функций*. Суть метода заключается в построении асимптотического приближения решения в виде суммы двух рядов: регулярного, описывающего поведение решения вдали от особенностей, и погранслоного, описывающего быстрые изменения решения в узких зонах (пограничных слоях). Особое место в научном наследии А.Б. Васильевой занимает теория *контрастных структур* — решений с внутренними переходными слоями (типа всплеска, ступеньки), возникающих в нелинейных системах. Ею были впервые получены условия существования таких решений, которые теперь являются классическими в нелинейной теории волн и математической биофизике.

Огромный вклад в систематизацию и расширение теории внес **Валентин Федорович Бутузов** (1939–2021). Им был разработан метод угловых пограничных функций для уравнений в частных производных в областях с негладкими границами. В последние годы жизни В.Ф. Бутузов активно развивал теорию для случаев кратных корней вырожденных уравнений, открыв новые типы многозонных пограничных и внутренних слоев. Совместные монографии А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузова стали классическими учебниками в этой области.

Важный вклад в развитие подходов школы внес **Николай Николаевич Нефедов** (1951–2024). Он предложил и развил *асимптотический метод дифференциальных неравенств* [1]. Если ранее строгое обоснование формальной асимптотики в нелинейных задачах часто требовало громоздких и специфических для каждой задачи построений, то метод Н.Н. Нефедова предоставил универсальный и эффективный инструмент доказательства. Использование модифицированных асимптотических представлений в качестве верхних и нижних решений позволило:

- Эффективно доказывать существование решений с внутренними слоями (кон-

трастными структурами) в сложных нелинейных задачах реакция–диффузия–адвекция, включая многомерные случаи.

- Исследовать асимптотическую устойчивость по Ляпунову стационарных и периодических решений, сводя сложный спектральный анализ к проверке алгебраических условий на функции сравнения.
- Разработать концепцию *асимптотического решения обратных задач*, где малый параметр позволяет редуцировать сложные коэффициентные обратные задачи к более простым алгебраическим уравнениям, связывающим параметры модели с наблюдаемой динамикой фронта.

В заключительной части доклада кратко представлены современные направления, развиваемые авторами как продолжение традиций школы: исследование задач с разрывными характеристиками, анализ движущихся фронтов, сингулярно возмущенные задачи для систем уравнений реакция-диффузия-адвекция и их приложения.

Работа выполнена в рамках государственного задания МГУ имени М.В. Ломоносова..

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*, Высшая школа, М., 1990.
- [2] Н. Н. Нефедов, “Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакции–диффузии–адвекции: теория и применение” // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **61**:12 (2021), 2074–2094.

Коротковолновое асимптотическое решение задачи Коши для одномерного волнового уравнения со сглаженным скачком скорости

Анна Аллилуева

ИПМех РАН.

E-mails: esina_anna@list.com

В настоящем докладе будет изучаться волновое уравнение, скорость которого имеет локализованное возмущение в некоторой точке x_0 . Начальное условие имеет вид быстроосциллирующего волнового пакета, длина волны которого не сравнима с масштабом неоднородности.

Будет разобрана общая ситуация для одномерного волнового уравнения, когда характерная длина волны начального возмущения описывается малым параметром ε , а вот характерная ширина скачка — параметром ε^α , где α — любое положительное число.

Тем самым, рассматривается задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{x - x_0}{\varepsilon^\alpha}, x \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad u|_{t=0} = \varphi^0(x) e^{\frac{iS_0(x)}{\varepsilon}}, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1)$$

Здесь функция $c(y, x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($y = \frac{x-x_0}{\varepsilon^\alpha}$) гладкая и строго положительная, причем $c(y, x) \rightarrow c^\pm(x)$ при $y \rightarrow \pm\infty$ быстрее любой степени y вместе со всеми производными. Последнее условие отражает локализованный характер неоднородности; мы считаем, что функции $c^\pm(x)$ также гладкие и положительные. Будем считать, что S_0, φ^0 — гладкие функции, причем φ^0 финитна, $\frac{\partial S_0}{\partial x}|_{\text{supp}\varphi^0} \neq 0$, причем начальный волновой пакет находится вне локализованной неоднородности, т.е. $x|_{\text{supp}\varphi^0} < 0$. Основной результат — описание рассеяния пакета при его прохождении через точку x_0 — носитель неоднородности. Отсутствие фокальных точек позволяет написать для асимптотики простые аналитические формулы, а также найти уравнение, описывающее коэффициент прохождения волны через неоднородность. Отраженный волновой пакет в нашем случае отсутствует при $\alpha < 1$ и появляется при $\alpha \geq 1$.

Уравнениям с быстроменяющимися коэффициентами посвящено много работ; введение быстрой переменной $y = (x - x_0)/\varepsilon^\alpha$ превращает правую часть волнового оператора в оператор вида

$$\frac{1}{\varepsilon^2} c^2(y, x) \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial y} \right)^2,$$

старший ε -символ которого (после умножения на ε^2) представляет собой оператор $-c^2(x, y)(p - \frac{i}{\varepsilon^{1-\alpha}} \frac{\partial}{\partial y})^2$. Схема квазиклассических асимптотик для уравнений с операторнозначным символом многократно применялась к уравнениям с быстроменяющимися коэффициентами (см., например, [1], [2], [3]); ключевой пункт этой схемы —

использование собственных значений символа в качестве классических гамильтонианов. В нашем случае символ — оператор с малым параметром, причем его спектр содержит непрерывную компоненту. Общая квазиклассическая теория в такой ситуации отсутствует; для описания асимптотики мы используем соображения, приведенные в [4], а также технику, развитую для построения солитонообразных асимптотик нелинейных уравнений (см., например, [5]). Асимптотика решения выражается через “эталонную задачу рассеяния” для обыкновенного дифференциального уравнения. Отметим, что параметр при производной $\frac{\partial}{\partial y}$ в символе стремится к нулю при $\alpha < 1$, к бесконечности при $\alpha > 1$ и равен единице при $\alpha = 1$. Первая ситуация соответствует квазиклассическому пределу в эталонной задаче; в этом случае рассеяние определяется уравнением переноса по “быстрой” переменной y . Вторая ситуация соответствует малому рассеивающему потенциалу; в этом случае решение эталонной задачи представляется в виде ряда регулярной теории возмущений; однако, поскольку “эффективная энергия” рассеяния также мала, ряд состоит из негладких функций и его слагаемые содержат степени квадратного корня из малого параметра, стоящего перед потенциалом. Наконец, третья ситуация (разобранная ранее в [6]) соответствует эталонной задаче, не содержащей малого параметра; точное решение этой задачи (в частности, коэффициенты отражения и прохождения) определяют рассеяние квазиклассических волновых пакетов. Результат работы — асимптотический ряд для решения задачи Коши (1). Поскольку для $\alpha > 1$ и для $\alpha < 1$ асимптотический ряд выглядит по-разному, то рассмотрим эти два случая отдельно.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] S. Yu. Dobrokhotov, “Application of Maslov’s Theory to Two Problems with Operator-Valued Symbol” *Russ. Math. Surv.*, **39**:4 (1984), 125.
- [2] V. S. Buslaev, “Adiabatic Perturbation of a Periodic Potential” *Theoret. and Math. Phys.*, **58**:(2) (1984), 153–159.
- [3] L. V. Berlyand, S. Yu. Dobrokhotov, “Operator separation of variables in problems of short-wave asymptotic behavior for differential equations with fast oscillating coefficients”, *Sov. Phys., Dokl.*, **32**:9 (1987), 714–716.
- [4] A. I. Shafarevich, “Quasiclassical Scattering of Wave Packets on a Narrow Band in Which the Potential Rapidly Changes”, *Math. Notes*, **45**:1 (1989), 72–77.
- [5] V. P. Maslov, G. A. Omel’yanov, “Asymptotic Soliton-Form Solutions of Equations with Small Dispersion”, *Russian Math. Surveys*, **36**:3 (1981), 73–149.
- [6] A. I. Allilueva, A. I. Shafarevich, “Short-Wave Asymptotic Solutions of the Wave Equation with Localized Perturbations of the Velocity”, *Russ. J. Math. Phys.*, **27**:2 (2020), 145–154.

**Коротковолновые асимптотики линеаризованной системы уравнений
мелкой воды со скачкообразно меняющимися коэффициентами**

А. И. Аллилуева¹, А. И. Шафаревич²

¹*Институт проблем механики РАН, Москва, Россия.*

²*МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.*

E-mails: ¹esina_anna@list.ru, ²shafarev@yahoo.com

Коротковолновые асимптотики линеаризованной системы мелкой воды в случае плавно меняющихся коэффициентов строятся при помощи канонического оператора Маслова. В этой конструкции участвуют лагранжевы поверхности, соответствующие трем модам (собственным значениям старшего символа оператора) - одной вихревой (медленной) и двум волновым (быстрым). Мы рассматриваем ситуацию, в которой коэффициенты системы (профиль дна и внешний поток) испытывают резкий скачок вблизи некоторой кривой, причем характерная ширина скачка сравнима с длиной волны возмущения. В этом случае при переходе через кривую возникают отраженные и прошедшие возмущения, причем вихревая мода может порождать волновые и наоборот. Лагранжевы поверхности перестраиваются в точках, соответствующих кривой скачка; мы описываем эти перестройки и доказываем, что решение задачи Коши разлагается в асимптотический ряд, слагаемые которого выражаются через канонический оператор на перестроенных поверхностях. Амплитуды прошедших и отраженных волн описываются в терминах вспомогательной одномерной задачи рассеяния.

**Об итерационном методе приближённого решения задачи Коши для
сингулярно возмущённого линейного неоднородного дифференциального
уравнения второго порядка**

Е. Е. Букжалёв

МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия.

E-mail: bukzhalev@mail.ru

В работе предложен алгоритм построения последовательности $y_n(x; \varepsilon)$, сходящейся к классическому решению задачи Коши для сингулярно возмущённого линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\varepsilon^2 y'' = \varepsilon a_1(x) y' + a_0(x) y + b(x), \quad x \in (0, X], \quad (1)$$

с начальными условиями $y(0; \varepsilon) = y_0$, $y'(0; \varepsilon) = y_1/\varepsilon$. Предполагается выполнение стандартного условия устойчивости: $a_i(x) < 0$ на $[0, X]$.

На основе теоремы Банаха о неподвижной точке доказано, что при малых $\varepsilon > 0$ отклонение n -го элемента последовательности от решения составляет $O(\varepsilon^{n+1})$ по норме пространства непрерывных функций. Справедлива равномерная по x оценка точности:

$$\|y(x; \varepsilon) - y_n(x; \varepsilon)\| \leq C_0 \varepsilon \left(\gamma_0 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^n. \quad (2)$$

Данный подход позволяет обосновать асимптотику, получаемую методом пограничных функций школы А. Б. Васильевой [1], при минимальных требованиях гладкости коэффициентов. Предложенный метод асимптотических итераций обладает преимуществом сходимости ряда в отличие от классических асимптотических разложений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*, Высшая школа, М., 1990.

Эволюция фронта трехмерной контрастной структуры в неоднородной среде со слабой адвекцией

А. А. Быков¹, Гань Цинчжао²

^{1,2}Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

E-mails: ¹abykovmsu@mail.ru, ²qzhgan@qq.com

Аннотация.

Тема настоящего исследования — трехмерная начально-краевая задача для квазилинейного уравнения реакции-адвекции-диффузии с малым параметром при адвекционном и диффузионном слагаемых. Дано доказательство существования и единственности решения этого уравнения реакции-адвекции-диффузии. Показано, что при главном (нулевом) порядке асимптотического ряда положение ВПС описывается уравнением Гамильтона-Якоби, потенциал гамильтониана вычисляется как интеграл от функции плотности источников. Сокращения: РАД – Реакции – Адвекции – Диффузии (уравнение), КС – Контрастная Структура, ФПИ – Функция Плотности Источников, ВПС – Внутренний Переходный Слой.

1. Уравнение реакции–адвекции–диффузии. В работе исследуется начально-краевая задача для уравнения РАД в ограниченной области D в трёхмерной системе координат. Следуя подходу А.Н. Тихонова [1], в уравнение вводится малый параметр ε , после чего рассматривается параметризованное семейство начально-краевых задач.

$$\varepsilon u'_t + \varepsilon^2 \langle \vec{V}(\vec{r}), \nabla u \rangle = \varepsilon^2 \langle \nabla, \kappa(\vec{r}) \nabla u \rangle - f(u, \vec{r}), \quad (1)$$

$\vec{r} = (x, y, z) \in D$, $t > t_0 = 0$, на границе Σ , ограничивающей область D , задаются граничные условия второго рода: $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \psi_1(\vec{r})$. Начальное условие задаётся в виде $u(\vec{r}, t_0) = u_{\text{start}}(\vec{r})$. Поверхностью равновесия $\mathcal{S} : (u, \vec{r}) : \vec{r} \in D, u = \varphi_{1,3}(\vec{r})$ будем называть гладкое решение уравнения $f(u, \vec{r}) = 0$. Вводится также понятие функции дисбаланса: $J(\vec{r}) = \int_{\varphi_1(\vec{r})}^{\varphi_3(\vec{r})} f(u, \vec{r}) du$. Примем, что для ФПИ $f(u, \vec{r})$ выполняются следующие условия:

У1. ФПИ является гладкой в области определения $(u, \vec{r}) : \vec{r} \in D, u \in (-\infty, +\infty)$.

У2. В области D существуют три поверхности равновесия: $u = \varphi_{1,2,3}$, удовлетворяющие $f(\varphi_{1,2,3}(\vec{r}), \vec{r}) = 0$, обозначаемые $\mathcal{S}_{1,2,3}$, при этом в данной области выполняется $\varphi_1(\vec{r}) < \varphi_2(\vec{r}) < \varphi_3(\vec{r})$.

У3. В окрестности каждой поверхности равновесия \mathcal{S}_j ($j \in 1, 2, 3$) ФПИ может быть записана в виде: $f(u, \vec{r}) = F_j(u - \varphi_j(\vec{r}), \vec{r})$, при этом должны выполняться условия: $F_j(\omega, \vec{r})|_{\omega=0} = 0$, $(F_{1,3}(\omega, \vec{r}))'_{\omega}|_{\omega=0} > 0$, $(F_2(\omega, \vec{r}))'_{\omega}|_{\omega=0} < 0$.

У4. Во всей области D выполняется условие строгой положительности дисбаланса: $J(\vec{r}) \geq J_{\min} > 0$.

Перейдём к определению начальных условий. Пусть G_{start} представляет собой связное подмножество с регулярной границей Υ_{start} , такое что $G_{\text{start}} \subset D$, при этом минимальное расстояние между Υ_{start} и Σ строго положительно.

У5. Допустим, что Υ_{start} является замкнутой выпуклой гладкой поверхностью, которая может быть покрыта открытыми гладкими листами. Каждый такой лист задаётся в параметрической форме: $\vec{r}_j(\Theta) = \vec{r}_{j,\text{start}}(\Theta)$, $\Theta \in \Phi_j$, $\vec{r}_{\text{start}}(\Theta) = (x_{\text{start}}(\Theta), y_{\text{start}}(\Theta), z_{\text{start}}(\Theta))$ – дважды непрерывно дифференцируемая, $|\vec{r}'_{\theta_1}, \vec{r}'_{\theta_2}| > 0$. Область $G(t)$, в которой выполняется неравенство $\varphi_2(\vec{r}) < u(\vec{r}, t) < \varphi_3(\vec{r})$ называется пятном КС, $\Upsilon(t) = \{\vec{r} : u(\vec{r}, t) = \varphi_2(\vec{r})\}$.

2. Асимптотический ряд. В соответствии с методом [2] частичная сумма асимптотического ряда для решения задачи РАД строится как композиция трёх компонентов: **(1)** разрывного решения вырожденного уравнения, **(2)** функций внутреннего переходного слоя и **(3)** пограничного слоя: $u(\vec{r}, t, \varepsilon, \mu) = \begin{cases} U^{(+)}(\vec{r}, t, \varepsilon), \vec{r} \in G(t), \\ U^{(-)}(\vec{r}, t, \varepsilon), \vec{r} \notin G(t), \end{cases}$

$$U^{(+)}(\vec{r}, t, \varepsilon) = \varphi_3(\vec{r}) + Q^{(+)}(\vec{r}, t, \varepsilon), \quad \vec{r} \in G(t),$$

$$U^{(-)}(\vec{r}, t, \varepsilon) = \varphi_1(\vec{r}) + Q^{(-)}(\vec{r}, t, \varepsilon) + \Pi(\vec{r}, \varepsilon), \quad \vec{r} \notin G(t),$$

$$\bar{u}(\vec{r}, t, \varepsilon) = \begin{cases} \bar{u}^{(+)}(\vec{r}, \varepsilon) \text{ при } (\vec{r}) \in G(t), & \bar{u}^{(+)}(\vec{r}, \varepsilon) = \varphi_3(\vec{r}), \quad \bar{u}^{(-)}(\vec{r}, \varepsilon) = \varphi_1(\vec{r}). \\ \bar{u}^{(-)}(\vec{r}, \varepsilon) \text{ при } (\vec{r}) \notin G(t), & \end{cases}$$

ложим функции переходного слоя вместе с многообразием ВПС $\Upsilon(t)$ в степенные ряды по малому параметру ε : $Q^{(\pm)} = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i Q_i^{(\pm)}$, $\Pi = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \Pi_i$, $\Upsilon(t) = \Upsilon_0(t) + \sum_{i=1}^N \varepsilon^i \Upsilon_i(t)$, $x = x(t, \Theta)$, $y = y(t, \Theta)$, $z = z(t, \Theta)$, параметр $\Theta = (\theta_1, \theta_2)$ задаёт точку на поверхности $\Upsilon(t)$, причём $\theta_{1,2} \in \Phi$, где Φ представляет собой ограниченное открытое связное и односвязное множество на плоскости (θ_1, θ_2) . Местоположение ВПС определяется условиями сшивания решений на поверхности $\Upsilon(t)$: $U^{(-)}|_{\Upsilon(t)} = U^{(+)}|_{\Upsilon(t)}$, $\frac{\partial U^{(-)}}{\partial \vec{n}}|_{\Upsilon(t)} = \frac{\partial U^{(+)}}{\partial \vec{n}}|_{\Upsilon(t)}$, подразумевающими совпадение одно-сторонних производных в точках соединения, взятых соответственно с внешней и внутренней сторон относительно области $G(t)$.

3. Замена координат. Пусть $\hat{\Upsilon} = \Upsilon(\hat{t})$ представляет собой поверхность в \mathbb{R}^3 , а точка на этой поверхности обозначается как $\vec{\gamma}$. Вводим аффинную систему координат следующим образом: $\vec{r}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^\alpha}$, $x^1 = s - \hat{s}$, $x^2 = \theta_1$, $x^3 = \theta_2$, где $\vec{r} = \vec{\gamma} + (s - \hat{s}) \cdot \vec{n}(\Theta, \hat{t})$. Ковариантная $h_{\alpha\beta}$ и контравариантная $h^{\alpha\beta}$ компоненты метрического тензора определяются следующим образом: $h_{\alpha\beta} = \vec{r}_\alpha \cdot \vec{r}_\beta$, $h^{\alpha\gamma} h_{\gamma\beta} = \delta_\beta^\alpha$. Обозначим через h детерминант матрицы метрического тензора $(h_{\alpha\beta})$, тогда получаем: $h_{11} = 1$, $h_{1,i+1} = h_{i+1,1} = 0$, $i = 1, 2$, $h_{i+1,j+1} = a_{ij} + 2b_{ij}(s - \hat{s}) + c_{ij}(s - \hat{s})^2$, $j = 1, 2$, где $a = \det(a_{ij})$, $b = \det(b_{ij})$, $(a^{ij}) = (a_{ij})^{-1}$, $2\mathcal{H} = a^{ij} b_{ij}$, $\mathcal{K} = b/a$. a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} – три основные величины поверхности $\hat{\Upsilon}$. Представим уравнение (1) в системе координат (s, Θ) в следующей форме: $\varepsilon u'_t + \varepsilon^2 \langle \vec{V}(s, \Theta), \vec{r}^\alpha \rangle \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} = \varepsilon^2 h^{\alpha\beta} \frac{\partial \kappa}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u}{\partial x^\beta} + \varepsilon^2 \kappa(s, \Theta) \left(\frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\partial(\sqrt{h} h^{\alpha\beta})}{\partial x^\beta} \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} + h^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \right) - f(u, s, \Theta)$.

4. Уравнение РАД в сопутствующих координатах. Введём "растянутые"

переменные ξ и τ : $s = \hat{s} + \varepsilon\xi$, $\Theta = \hat{\Theta} + \Lambda$, $t = \hat{t} + \varepsilon\tau$, $\Lambda = (\eta_1, \eta_2)$. В результате получаем новое уравнение, заменяющее исходное:

$$u'_\tau + \varepsilon \frac{1}{\sqrt{h}} \langle \vec{V}, [\vec{r}_2, \vec{r}_3] \rangle u'_\xi = \varepsilon \frac{\partial \kappa}{\partial s} u'_\xi + \kappa u''_{\xi\xi} + \varepsilon \kappa \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\partial \sqrt{h}}{\partial s} u'_\xi - f(u, \hat{s} + \varepsilon\xi, \hat{\Theta} + \Lambda) + O(\varepsilon^2).$$

Подставляем частичную сумму $u^{(n)}(\xi, \Lambda, \tau, \hat{t}, \hat{s}, \hat{\Theta}, \varepsilon) = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots + \varepsilon^n u_n$ в уравнение РАД. После разложения в степенной ряд по малому параметру ε возникает проблема определения функции нулевого порядка $u_0(\xi, \tau)$:
$$\begin{cases} (u_0)'_\tau = \kappa_0(u_0)''_{\xi\xi} - f(u_0), \\ u_0(-\infty, \tau) = \varphi_1, \quad u_0(+\infty, \tau) = \varphi_3, \end{cases}$$
 где $\kappa_0 = \kappa(\hat{s}, \hat{\Theta} + \Lambda)$. Затем мы используем обозначение $u_0(\xi, \tau) = u_0(\hat{s} + \varepsilon\xi, \hat{\Theta} + \Lambda, \hat{t} + \varepsilon\tau)$, при этом переменная Λ явно не фигурирует в дальнейшем, поскольку выступает лишь в роли параметра. Далее мы проанализируем бегущее квазиволновое решение: $u_0(\xi, \tau) = w_0(\chi)$, где $\chi = \xi - W_0\tau$.

Теорема 1. *В любой точке $\vec{r} \in D$ существует бегущее квазиволновое решение. Величина $W_0(\vec{r})$ является независимой от направления вектора нормали к многообразию $\Upsilon(t)$ в данной точке \vec{r} .*

□ Построим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ):

$$\begin{cases} -W_0(w_0)'_\chi = \kappa_0(w_0)''_{\chi\chi} - f(w_0), \\ w_0(-\infty) = \varphi_1 + 0, \quad w_0(+\infty) = \varphi_3 - 0, \end{cases} \quad \text{соответствующую квазиволновому решению}$$

типа бегущей волны. Посредством операции понижения порядка: $(w_0)'_\chi = \lambda(w_0)$, $(w_0)''_{\chi\chi} = \lambda\lambda'_{w_0}$, строится двухточечная краевая задача первого порядка следующего вида: $-W_0\lambda = \kappa_0\lambda\lambda'_{w_0} - f(w_0)$, $\lambda(\varphi_1 + 0) = +0$, $\lambda(\varphi_3 - 0) = +0$. Кроме того, при выполнении условия $\varphi_1 < w_0 < \varphi_3$ функция $\lambda(w_0)$ сохраняет положительность. В работе [3] показано, что существует единственное значение W_0 , обеспечивающее разрешимость. Таким образом, существует гладкая функция $W_0(\hat{s}, \hat{\Theta} + \Lambda)$, такая что однозначно определяется гладкая функция $\lambda(w_0)$. Явное выражение величины W_0 задаётся через известный профиль квазиволны $w_0(\chi)$ в следующей форме: $W_0(x, y, z) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} ((w_0)'_\chi)^2 d\chi \right)^{-1} \cdot J(x, y, z)$ где $x = x(\hat{t}, \hat{\Theta} + \Lambda)$, $y = y(\hat{t}, \hat{\Theta} + \Lambda)$, $z = z(\hat{t}, \hat{\Theta} + \Lambda)$. ■

5. Уравнение эволюции ВПС в нулевом порядке. Пусть векторная функция $\vec{r}_0(t, \Theta) \stackrel{\text{def}}{=} (x_0(t, \Theta), y_0(t, \Theta), z_0(t, \Theta))$ является решением задачи Коши: $\frac{d\vec{r}_0}{dt} = \vec{n}(\vec{r}_0) \cdot W_0(\vec{r}_0)$, $\vec{r}_0(t_0, \Theta) = \vec{r}_{\text{start}}(\Theta)$, где $\vec{n}(\vec{r}) = \left| [\vec{r}'_{\theta_1}, \vec{r}'_{\theta_2}] \right|^{-1} [\vec{r}'_{\theta_1}, \vec{r}'_{\theta_2}]$. Поверхность, образуемая объединением всех листов $\Upsilon_0(t) = \{\vec{r}_0(t, \Theta)\}$, $\Theta \in \Phi$, именуется поверхностью ВПС нулевого порядка.

6. Функции переходного слоя нулевого порядка. Введём растянутую переменную ξ вдоль траектории $\mathcal{C}_0(\Theta)$ в точке (\vec{r}, t) . ВПС нулевого порядка задаётся следующим способом: $Q_0^{(+)}(\vec{r}, t) = w(\xi - W_0\tau, \hat{s}, \hat{\Theta} + \Lambda) - \varphi_3(\vec{r})$ при $\vec{r} \in G_0(t)$, $Q_0^{(-)}(\vec{r}, t) = w(\xi - W_0\tau, \hat{s}, \hat{\Theta} + \Lambda) - \varphi_1(\vec{r}) + \Pi_0$ при $\vec{r} \notin G_0(t)$.

7. Уравнения Гамильтона для контрастной структуры.

Теорема 2. *Предположим, что выполняются условия У1–5. Следовательно, существует временной интервал $t \in [t_0, t_1)$ ($t_1 > t_0$), такой что: (1) семейство за-*

дач Коши Гамильтоона однозначно разрешимо на $[t_0, t_1)$, при этом для каждого Θ кривая $\mathcal{C}_0(\Theta)$ является гладкой; **(2)** для любого $t \in [t_0, t_1)$ многообразию $\Upsilon_0(t)$ остаётся гладким, замкнутым и свободным от особых точек; **(3)** на интервале $[t_0, t_1)$ отображение $(t, \Theta) \longleftrightarrow \vec{r}$ (где $\vec{r} \in \mathcal{C}_0(\Theta)$) представляет собой диффеоморфизм.

□ Зададим функцию Гамильтона в виде: $H(\vec{r}_0, \vec{p}_0) = (\vec{p}_0)^2 - W_0^{-2}(\vec{r}_0)$, и сформулируем уравнение эйконала для неоднородной среды: $|\nabla S_0|^2 = W_0^{-2}(\vec{r}_0) \stackrel{\text{def}}{=} \rho(\vec{r})$. Направление вектора $\vec{p}_{\text{start}}(\Theta)$ выбирается таким образом, чтобы обеспечить сонаправленность данного вектора и вектора нормали $\vec{n}_{\text{start}}(\Theta)$ к поверхности Υ_{start} : $\vec{p}_{\text{start}}(\Theta) = W_0^{-1}(\vec{r}) \cdot \vec{n}_{\text{start}}(\Theta)$. Сформулируем семейство задач Коши для гамильтоновой системы [3]: $\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{r}_0}{d\nu} = 2\vec{p}_0, \frac{d\vec{p}_0}{d\nu} = \nabla W_0^{-2}(\vec{r}_0), \end{array} \right.$ с начальными условиями, параметризованными через параметр Θ : $\vec{r}_0(\nu_0, \Theta) = \vec{r}_{\text{start}}(\Theta)$, $\vec{p}_0(\nu_0) = \vec{p}_{\text{start}}(\Theta)$. Явное выражение для эйконала выводится следующим образом [3]:

$$S_0(\vec{r}) = S_0|_{\Upsilon_{\text{start}}} + \int_{\mathcal{C}(\Theta, \vec{r}_{\text{start}}(\Theta), \vec{r})} \langle \vec{p}_0, d\vec{r} \rangle = S_0|_{\Upsilon_{\text{start}}} + \int_{\mathcal{C}(\Theta, \vec{r}_{\text{start}}(\Theta), \vec{r})} W_0^{-1}(\vec{r}) dl,$$

В работе [3] доказано, что в нашей символике **(1)** семейство поверхностей $\{\Upsilon_0(t)\}$ полностью совпадает с $\{\tilde{\Upsilon}(t)\}$; **(2)** вдоль лучей выполняются уравнения $\frac{d\vec{r}_0}{ds} = W_0(\vec{r}_0) \nabla S_0$, $\frac{d\vec{r}_0}{dt} = W_0^2(\vec{r}_0) \nabla S_0$. ■

Теорема 3. Функция $T(\vec{r})$, полученная из $T_0(t_0, t_1, \Theta) = t_1 - t_0 = \int_{\mathcal{C}_0(t_0, t_1, \Theta)} W_0^{-1}(\vec{r}_0(t, \Theta)) dl$, удовлетворяет уравнению эйконала при учёте диффеоморфизма.

□ Следует из определений гамильтониана и из уравнений Гамильтона. ■

Теорема 4. Поверхность ВПС нулевого порядка идентична многообразию с постоянным значением эйконала.

8. Сумма первого порядка асимптотического ряда. Используем частные суммы $U_1(\xi, \Lambda, t) = u_0(\xi, \Lambda, t) + \varepsilon u_1(\xi, \Lambda, t)$, $W = W_0 + \varepsilon W_1$, найдём:

$$\begin{aligned} \tilde{W}_1(\vec{r}) &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} [(w_0)'_{\chi}]^2 e^{\frac{w_0}{\kappa} \theta} d\theta \right]^{-1} \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (w_0)'_{\chi} e^{\frac{w_0}{\kappa} \theta} (\theta f'_s - \hat{\kappa}(w_0)''_{\chi\chi}) d\theta + \tilde{\kappa}(w_0)'_{\chi}(0) [\varphi_{1,3}] \right], \\ W_1 &= \langle \vec{V}_0, \vec{n} \rangle + 2\tilde{\kappa}\mathcal{H} + \tilde{W}_1 - \hat{\kappa}. \end{aligned}$$

9. Обоснование существования и единственности решения. Используется метод дифференциальных неравенств [5], чье применение для задач РАД изложено в [2].

Определение 1. Функции $\beta(\vec{r}, t, \varepsilon)$ и $\alpha(\vec{r}, t, \varepsilon)$ определяются как верхнее решение и нижнее решение задачи (1) при выполнении следующих условий: 1. $\varepsilon\beta'_t - \varepsilon^2 \langle \nabla, \kappa \nabla \beta \rangle + \varepsilon^2 \langle \vec{V}, \nabla \beta \rangle + f(\beta, \vec{r}) \geq 0 \geq \varepsilon\alpha'_t - \varepsilon^2 \langle \nabla, \kappa \nabla \alpha \rangle + \varepsilon^2 \langle \vec{V}, \nabla \alpha \rangle + f(\alpha, \vec{r})$ в D_T ; 2. $\frac{\partial \beta}{\partial \chi}(-\varepsilon\delta(\tau) + 0, \tau, \Theta) - \frac{\partial \beta}{\partial \chi}(-\varepsilon\delta(\tau) - 0, \tau, \Theta) \leq 0 \leq \frac{\partial \alpha}{\partial \chi}(\varepsilon\delta(\tau) + 0, \tau, \Theta) - \frac{\partial \alpha}{\partial \chi}(\varepsilon\delta(\tau) - 0, \tau, \Theta)$; 3. $\frac{\partial \beta}{\partial \vec{v}} - \psi_1(\vec{r}) \geq 0 \geq \frac{\partial \alpha}{\partial \vec{v}} - \psi_1(\vec{r})$ на S_T ; 4. $\beta(\vec{r}, 0, \varepsilon) - u_{\text{start}}(\vec{r}) \geq 0 \geq \alpha(\vec{r}, 0, \varepsilon) - u_{\text{start}}(\vec{r})$ на D . Верхнее и нижнее решения считаются упорядоченными, если выполняется следующее требование: 5. $\beta(\vec{r}, t, \varepsilon) \geq \alpha(\vec{r}, t, \varepsilon)$.

Имеем следующие теоремы:

Теорема 5. Предположим, что существуют функции $\beta(t, \vec{r}, \varepsilon)$ и $\alpha(t, \vec{r}, \varepsilon)$ образующие упорядоченную пару верхнего и нижнего решений задачи (1). Тогда для этой задачи существует единственное классическое решение $u(t, \vec{r}, \varepsilon)$, удовлетворяющее

следующему соотношению: $\beta(\vec{r}, t, \varepsilon) \geq u(\vec{r}, t, \varepsilon) \geq \alpha(\vec{r}, t, \varepsilon)$ в D_T .

Верхнее и нижнее решения задачи (1) формируются путем адаптации построенного асимптотического разложения в виде: $\beta(\vec{r}, t, \varepsilon) = \bar{u}(s, \Theta) - \bar{u}(\hat{s} + \varepsilon W\tau, \Theta) + w_{0\beta}(\chi_\beta) + \varepsilon w_{1\beta}(\chi_\beta, \tau) + \varepsilon\rho + \Pi_\beta$, $\alpha(\vec{r}, t, \varepsilon) = \bar{u}(s, \Theta) - \bar{u}(\hat{s} + \varepsilon W\tau, \Theta) + w_{0\alpha}(\chi_\alpha) + \varepsilon w_{1\alpha}(\chi_\alpha, \tau) - \varepsilon\rho + \Pi_\alpha$, где $\chi_\beta = \chi + \varepsilon\delta(\tau)$, $\chi_\alpha = \chi - \varepsilon\delta(\tau)$, $w_{0\beta}(\chi_\beta) = w_0(\chi_\beta)$, $w_{0\alpha}(\chi_\alpha) = w_0(\chi_\beta)$. Для β , $\bar{u} = \varphi_3$ при $\chi_\beta \geq 0$, и $\bar{u} = \varphi_1$ при $\chi_\beta < 0$. Для α , $\bar{u} = \varphi_3$ при $\chi_\alpha \geq 0$, и $\bar{u} = \varphi_1$ при $\chi_\alpha < 0$. Неравенство $w_0(\chi - \varepsilon\delta(\tau)) < w_0(\chi) < w_0(\chi + \varepsilon\delta(\tau))$ выполнено при $-\infty < \chi < \infty$. Определим функцию $w_{1\beta}(\chi_\beta, \tau)$ как решение следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} -W_0(w_{1\beta})'_{\chi_\beta} - \tilde{\kappa}(w_{1\beta})''_{\chi_\beta\chi_\beta} + f'_u(w_{0\beta})w_{1\beta} = q_1(\chi_\beta, \tau), \\ w_{1\beta}(\mp\infty, \tau) = \frac{\partial}{\partial s}\varphi_{1;3}(\hat{s}, \Theta)W_0\tau, \end{cases} \quad (2)$$

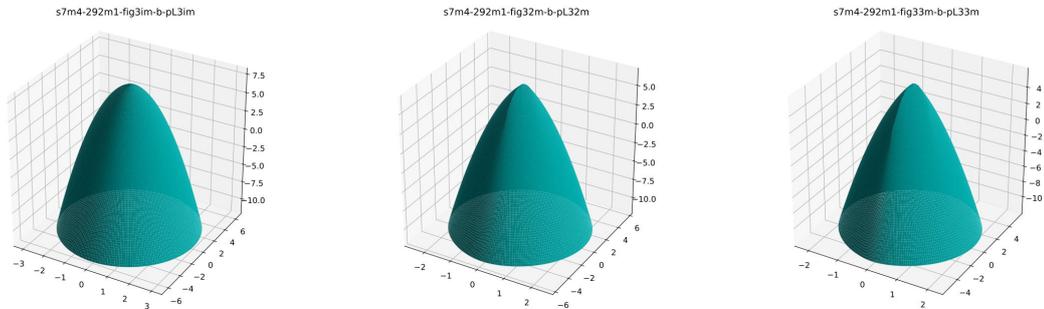
где $q_1(\chi_\beta, \tau) = (\tilde{W}_1 - \delta'(\tau))(w_{0\beta})'_{\chi_\beta} + \hat{\kappa}(w_{0\beta})''_{\chi_\beta\chi_\beta} - f'_s(w_{0\beta})(\chi_\beta + W_0\tau) + \frac{\partial}{\partial s}\bar{u}(\hat{s}, \Theta)(W_0 - f'_u(w_{0\beta})\chi_\beta) - [f'_u(w_{0\beta}) - f'_u(\bar{u}(\hat{s}, \Theta))]\rho$. Аналогично для $w_{1\alpha}$.

Теорема 6. Допустим, параметр является достаточно малым при соблюдении требований **У1–5**. В таком случае для начальной функции: $\beta(\vec{r}, 0, \varepsilon) - u_{\text{start}}(\vec{r}) \geq 0 \geq \alpha(\vec{r}, 0, \varepsilon) - u_{\text{start}}(\vec{r})$ для задачи (1) существует единственное классическое решение $u(\vec{r}, t, \varepsilon)$ с ВПС, т.е. существует область $G(t)$ такая, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(\vec{r}, t, \varepsilon) = \varphi_3(\vec{r})$, \vec{r} внутри $G(t)$, $= \varphi_1(\vec{r})$, \vec{r} вне $G(t)$.

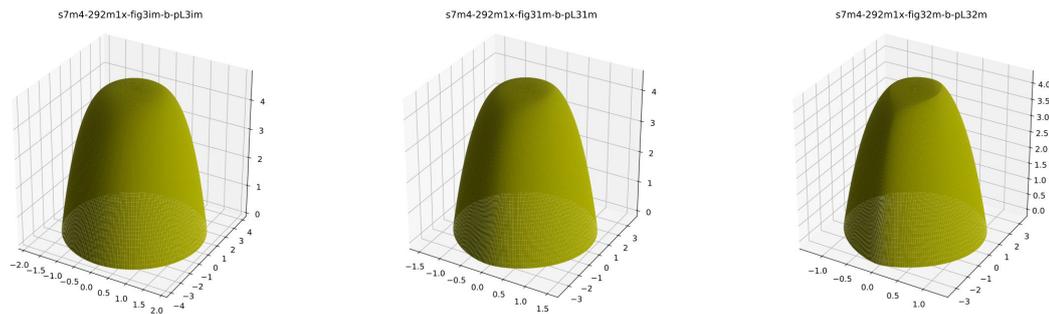
□ Согласно работе [3], используем соответствующую функцию Π_β для обоснования граничного неравенства, что позволяет получить: $L[\beta] = \varepsilon\beta'_t - \varepsilon^2\langle \nabla, \kappa\nabla\beta \rangle + \varepsilon^2\langle \vec{V}, \nabla\beta \rangle + f(\beta, \vec{r}) = \varepsilon f'_u(\bar{u}(\hat{s}, \Theta))\rho + \mathcal{O}(\varepsilon^2) > 0$, при $\rho > 0$, достаточно малых ε . Аналогично показывается, что $L[\alpha] < 0$. Далее $\frac{\partial\beta}{\partial\chi}(-\varepsilon\delta(\tau) + 0, \tau, \Theta) - \frac{\partial\beta}{\partial\chi}(-\varepsilon\delta(\tau) - 0, \tau, \Theta) = -\varepsilon[A\delta'(\tau) - B\rho - C] + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, параметр $\delta(\tau)$ подобран: $A\delta'(\tau) - B\rho - C > 0$, и $\delta(\tau) > 0$. Аналогично для α , тогда $\frac{\partial\beta}{\partial\chi}(-\varepsilon\delta(\tau) + 0, \tau, \Theta) - \frac{\partial\beta}{\partial\chi}(-\varepsilon\delta(\tau) - 0, \tau, \Theta) \leq 0 \leq \frac{\partial\alpha}{\partial\chi}(\varepsilon\delta(\tau) + 0, \tau, \Theta) - \frac{\partial\alpha}{\partial\chi}(\varepsilon\delta(\tau) - 0, \tau, \Theta)$. Т.е. удовлетворены условия теоремы 1, и существует область $G(t)$ такая, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(\vec{r}, t, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi_3(\vec{r}), & \vec{r} \text{ внутри } G(t), \\ \varphi_1(\vec{r}), & \vec{r} \text{ вне } G(t). \end{cases}$ ■

10. Примеры эволюции фронта с заданной начальной поверхностью.

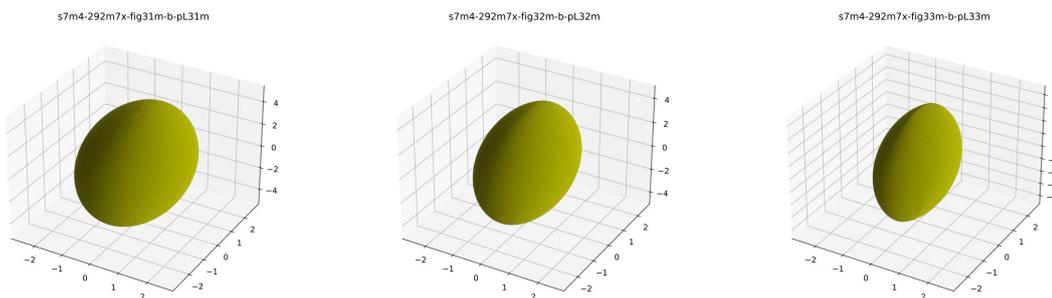
10.1. Рис.1: неосесимметрический параболоид.



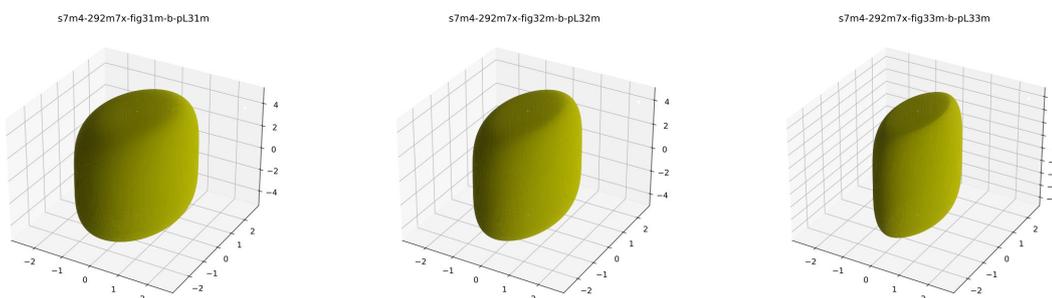
10.2. Рис.2: параболический геоид.



10.3. Рис.3: неосесимметрический эллипсоид.



10.4. Рис.4: эллиптический геоид.



Заключение

Доказаны существование и единственность решения уравнений РАД со слабой адвекцией в трёхмерной неоднородной среде. При эволюции важного с практической точки зрения класса решений уравнений РАД с формой контрастной структуры, в главном (нулевом) приближении асимптотического ряда по степеням малого параметра, их эволюция описывается соответствующим уравнением Гамильтона-Якоби. Построен первый член асимптотического ряда и доказано, что в первом порядке скорость движения поверхности ВПС пропорциональна кривизне.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Тихонов А.Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра. // Матем. сборник. 1948. **22(64)**, №.2. С. 193–204.

- [2] *Нефедов Н.Н.* Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакции–диффузии–адвекции: теория и применение. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. **61**, №.12. С. 2074–2094.
- [3] *Божевольнов Ю.В., Нефедов Н.Н.* Движение фронта в параболической задаче реакция – диффузия. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. **50**, №.2. С. 276–285.
- [4] *Вайнберг Б.Р.* Асимптотические методы в уравнениях математической физики. // М., изд-во МГУ. 1982.
- [5] *Pao C.V.* Nonlinear parabolic and elliptic equations. // New York: Plenum. 1992. <https://doi.org/10.1007/978-1-4615-3034-3>

Сингулярно возмущенные задачи динамики систем с проскальзыванием и разрушением

А. В. Влахова¹, Э. И. Макиева²

^{1,2}МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.

E-mails: ¹vlakhova@mail.ru, ²ell96makieva@gmail.com

Реализация связей – условий, ограничивающих поведение переменных и скоростей составляющих динамической системы – это классическая задача теоретической механики, решение которой необходимо для обоснования применимости формально-аксиоматических моделей к реальным системам. Решением этой задачи служит корректный предельный переход в системе уравнений, описывающей динамику свободной от связей системы, где указанные переменные и скорости изменяются в малой окрестности поверхностей, определяемых уравнениями связей. Таким образом, здесь возникают возмущенные задачи по малому параметру, характеризующему ширину этой окрестности [1]–[6].

В настоящей работе рассматривается динамика механической системы, которая включает тела, контактирующие с малыми относительными смещениями (микроскальзываниями) и хрупким разрушением приповерхностных слоев, что приводит к возникновению между ними промежуточной прослойки из выколотых элементов. Элементы прослойки, например частицы абразива, могут быть также внесены извне. Считается, что размеры области контакта тел малы по сравнению с их характерными размерами, а толщина прослойки существенно меньше размеров области контакта тел. При помощи методов [1]–[6] исследуются границы применимости предположения о непроскальзывании тел при переходе к бесконечной жесткости контактных сил между ними, в результате чего тела становятся абсолютно твердыми. Указанный переход эквивалентен переходу к нулевому значению параметра ε , который определяет малость относительных смещений (увода) контактирующих поверхностей тел, обусловленную их упругой или упругопластической касательной деформируемостью вблизи области контакта.

Движение системы происходит в существенно различных масштабах изменения геометрических, силовых и временных параметров [6]. На первом масштабном уровне самых медленных движений с использованием подходов теоретической механики исследуется динамика системы и ее составляющих: движения центров масс, движения относительно центров масс и проч. под действием заданных сил и моментов. Контакт тел считается точечным, а модель контактной силы и модель влияния разрушения тел на динамику системы получаются после анализа процессов более мелких масштабных уровней: контактного взаимодействия тел их деформирования вблизи области контакта, разрушения и трения (второй масштабный уровень более быст-

рых движений), а также формирования структур расположения элементов прослойки в области контакта, оказывающих непосредственное влияние на условия трения тел (третий масштабный уровень самых быстрых движений). Поскольку скорости и диапазоны изменения переменных перечисленных масштабных уровней сильно разнесены, в работе используются идеи разделения движений (внешних и внутренних разложений), в рамках которых при исследовании медленных движений быстрые процессы считаются завершенными, а при рассмотрении быстрых процессов значения медленных по отношению к ним переменных полагаются неизменными.

Для того чтобы выяснить, как наличие прослойки сказывается на взаимодействии тел, коротко опишем быстрые процессы второго и третьего масштабных уровней [6], [7].

Элементы прослойки, напоминающей роликовый подшипник, которые собираются в возникающих после разрушения трещиноподобных полостях между телами [7], расклинивают деформируемые части тел и упрощают их смещение в касательном направлении за счет возможности перекатывания (будем считать, что эти элементы являются абсолютно твердыми [8], а их перекатывание происходит без проскальзывания). Тем самым, нормальные напряжения в области контакта тел увеличиваются, а касательные – уменьшаются по сравнению с соответствующими усредненными напряжениями для не потерявшей целостность системы. Следовательно, потенциальная энергия системы увеличивается за счет расклинивающего действия элементов прослойки и уменьшается за счет их сдвига (перекатывания) вдоль области контакта.

В стационарном режиме существования элементов прослойки изменение потенциальной энергии определяется тем, как эти элементы распределяются вдоль области контакта тел. В экспериментах наблюдаются три возможных варианта распределения [7]: равномерное с более-менее значительным удалением друг от друга и компактное распределение в виде цепочки или округлых образований, получающихся после смятия и слияния элементов. Реализуется тот вариант расположения элементов прослойки, при котором изменение потенциальной энергии деформирования тел, равное разности составляющих, одна из которых отвечает ее увеличению за счет эффекта расклинивания, другая – ее уменьшению за счет возможности сдвига, минимальна. Если суммарная энергия совокупности раздельно расположенных элементов превосходит их энергию в случае компактного размещения, то элементы прослойки расположатся в области контакта компактно, в противном случае – раздельно. Если компактные образования целиком заполняют трещиноподобные полости, то эффект уменьшения касательных напряжений в области контакта тел практически полностью исчезает, для раздельного расположения или расположения в виде цепочки этот эффект будет иметь место.

Рассматривая трещиноподобные полости, содержащие элементы прослойки, как трещины, можно показать [6], [7], что составляющая, которая отвечает увеличению

потенциальной энергии, постоянна, а составляющая, которая соответствует ее уменьшению, пропорциональна квадрату скорости микропроскальзывания тел, то есть функция Лагранжа системы при учете прослойки получает дополнительную составляющую, по структуре схожую с кинетической энергии «присоединенной массы» в вакономной механике [2]–[4].

В работе построена модель, учитывающая влияние микропроскальзываний тел и наличия прослойки в области их контакта на динамику рассматриваемой механической системы на первом масштабном уровне. Показано, что переход к бесконечному значению жесткости контактных сил ($\varepsilon \rightarrow 0$) может привести уравнения динамики системы к неклассическим моделям: аналогу «промежуточной» модели вакономной механики с условиями непроскальзывания тел [2]–[4] или к (модифицированной) модели с первичными связями Дирака [4]–[11], для которой проскальзывания тел сохраняются. Ситуации, когда реализуется та или иная предельная модель, разделяются после сравнения порядков величин слагаемых в правых и левых частях соотношений между скоростью проскальзывания тел и обобщенными скоростями.

Если при движении системы обобщенные скорости существенно превосходят скорость проскальзывания тел, то возможна реализация условий их непроскальзывания в рамках неклассической модели, схожей с промежуточной моделью вакономной механики [2]–[4], а в частном случае совпадающей с ней. Соответствующий предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$ проводится [6] в регулярно возмущенной по малому параметру ε системе уравнений.

Если порядки малости слагаемых в правых и левых частях указанных соотношений одинаковы за счет того, что часть обобщенных скоростей соизмерима со скоростью проскальзывания тел, а при части других обобщенных скоростей стоят малые множители, то в системе при $\varepsilon \rightarrow 0$ могут быть реализованы модифицированные первичные связи Дирака [4]–[11], возникающие из-за вырождения лагранжиана системы после перехода к нулевым значениям малых обобщенных скоростей. Обоснование этого перехода проводится, как и в [5], где рассматривались аналогичные задачи при отсутствии прослойки, путем построения асимптотических разложений А.Б. Васильевой [12] в сингулярно возмущенной системе уравнений с малым параметром ε при производных малых обобщенных скоростей. Рассогласование решений возмущенной системы и модифицированной модели Дирака при $\varepsilon \rightarrow 0$ определяется начальными условиями, выбираемыми для последней модели.

В качестве примера в работе рассмотрена задача о движении железнодорожной колесной пары в зоне свободного хода [1], [13]. Показано, что наличие промежуточной прослойки между колесами и рельсами влияет на быстрый процесс перехода контактных сил (моментов) к значениям вблизи тех, которые уравнивают внешние возмущения (при упрощении смещения колес и рельсов через элементы прослойки этот процесс проходит менее интенсивно). Учет микропроскальзываний колес относительно рельсов в рамках подхода Дирака позволяет описать поперечные колебания

пары вблизи средней линии пути с нарастающей амплитудой, не учитываемые моделями с условиями непроскальзывания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Новожиллов И.В.* Фракционный анализ. М.: Изд-во МГУ, 1995. 224 с.
- [2] *Козлов В.В.* Динамика систем с неинтегрируемыми связями // I. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1982. № 3. С. 92–100. II. Там же. 1982. № 4. С. 70–76. III. Там же. 1983. № 3. С. 102–111. IV. Там же. 1987. № 5. С. 76–83. V. Там же. 1988. № 6. С. 51–54.
- [3] *Козлов В.В.* Реализация неинтегрируемых связей в классической механике // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 3. С. 550–554.
- [4] *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: УРСС, 2009. 416 с.
- [5] *Влахова А.В.* Математические модели движения колесных аппаратов. М.–Ижевск: АНО ИКИ. 2014. 148 с.
- [6] *Влахова А.В.* О влиянии разрушения на динамику механических систем // ПММ. 2017. Т. 81. Вып. 6. С. 734–758.
- [7] *Алексеев Н.М., Гольдштейн Р.В., Осипенко Н.М.* Некоторые применения механики разрушения к моделированию контактного взаимодействия в трибологии // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 5. С. 134–143.
- [8] *Марченко Е.А.* О природе разрушения поверхности металлов при трении. М.: Наука, 1979. 120 с.
- [9] *Дирак П.* Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979. 480 с.
- [10] *Нестеренко В.В., Червяков А.М.* Сингулярные лагранжианы. Классическая динамика и квантование. Препринт ОИЯИ Р2-86-323. Дубна, 1986. 101 с.
- [11] *Козлов В.В.* К обобщенной гамильтоновой динамике Дирака // УМН. 2024. Т. 79. Вып. 4 (478). С. 95–130.
- [12] *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
- [13] *Влахова А.В.* О «неголономных движениях» гироскопических и колесных систем // Вест. Моск. Ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2013. № 5. С. 66–72.

**Асимптотики распространяющихся вдоль берега длинных волн,
порожденных локализованным начальным возмущением**

М. М. Вотякова¹, Д. С. Миненков²

^{1,2}*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского РАН, Московский
физико-технический институт, г. Москва., Россия*

E-mails: ¹votyakova.mm@phystech.edu, ²minenkov.ds@gmail.com

В докладе будут обсуждаться распространяющиеся береговые волны, порожденные начальным условием, локализованным в окрестности берега. Использован метод адиабатического приближения в форме операторного разделения переменных [1] и получающееся редуцированное уравнение вдоль берега эквивалентно уравнению для глубокого океана: квадрат частоты в дисперсионном соотношении пропорционален волновому вектору в первой степени. Отличие заключается в том, что в уравнении для береговых волн присутствует переменный коэффициент, зависящий от угла наклона дна в главном члене, и кроме того кривизна береговой линии и квадратичные члены в разложении функции дна входят в субглавный символ уравнения и влияют на поправку к фазе решения. В результате работы получены простые явные асимптотические формулы для береговых волн, распространяющихся вдоль берега.

Работа поддержана грантом РФФИ №24-11-00213.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, Т. Я. Тудоровский, “Асимптотические решения нерелятивистских уравнений квантовой механики в искривленных нанотрубках. I. Редукция к пространственно-одномерным уравнениям” // *ТМФ*, **141**:2 (2004), 267-303.

**Асимптотические методы в задачах обтекания неровных поверхностей и
двухпалубная структура пограничного слоя**

Р. К. Гайдуков

НИУ ВШЭ, Москва, Россия.

E-mail: roma1990@gmail.com

Одним из важных достижений конца 1960-х годов теории пограничного слоя в приложении к гидродинамическим задачам стало открытие трехпалубной структуры [1, 2]. Некоторое время спустя была открыта также и двухпалубная структура [3]. Эти многопалубные модели позволили описывать множество различных эффектов, в частности — явление отрыва пограничного слоя при обтекании малых неровностей на поверхности [4], что в рамках классической теории пограничного слоя Прандтля было невозможно.

Остановимся на трехпалубной структуре. В рамках этой модели вводится три разномасштабные области, в каждой из которых решение задачи обтекания (поле скоростей и давление) описывается некоторыми уравнениями, полученными асимптотическим анализом исходной системы уравнений Навье–Стокса и неразрывности. Детальный анализ классической работы [4] показал, что в ней есть некоторые проблемы. Во-первых, вводится замыкающее трехпалубную модель уравнение Бенжамина–Оно $A(\xi)A'(\xi) = -\pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} A''(x)(\xi - x)^{-1} dx$, $A(-\infty) = 0$, которое не содержит в себе членов связанных с геометрией или какими-либо другими параметрами задачи, что выглядит довольно странно. Во-вторых было замечено, что в рамках результатов этой работы невозможно построить глобальное асимптотическое решение, равномерно пригодное во всей исследуемой области (а не только в каком-то конкретном слое). Это прямо за собой влечет сложность и вычислительную затратность численного решения — для моделирования течения около поверхности необходимо решать задачи в каждой области [5]. Эти проблемы присутствуют в той или иной форме и в современных работах [6].

Проблема кроется в используемом методе — для построения решений используется метод сращивания асимптотик М. Ван-Дайка [7]. К сожалению, данный метод строго применим только для линейных задач. Пусть \hat{L} — некоторый (дифференциальный) оператор задачи, $y_o(x)$ — внешнее разложение (определяемое из $\hat{L}y_o = 0$), $y_i(\tau)$ — внутреннее (погранслоное) разложение (определяемое из $\hat{L}y_i = 0$), $\tau = x/\varepsilon^\alpha$, $\alpha > 0$ — погранслоная переменная. Тогда если оператор \hat{L} линейен, то глобальное решение $y(x) = y_o(x) + y_i(x/\varepsilon)$ будет также удовлетворять задаче $\hat{L}y = \hat{L}y_o + \hat{L}y_i = 0$. Но если оператор \hat{L} нелинейный, то последнее равенство не будет верным. Например, если $\hat{L} = y' + y^2$, то $\hat{L}y = 2y_o y_i \neq 0$.

Однако, существует более строгий метод построения асимптотических погранс-

лоинных решений — метод Вишика–Люстерника [8]. Анзац в этом метод ищется сразу в виде суммы внешнего и погранслоного разложения, $y(x) = y_o(x) + y_o(\tau)$, при этом для погранслоных функций $y_i(\tau)$ добавляется строгий критерий их (экспоненциально) быстрого убывания при $\tau \rightarrow \infty$. Данное условие фактически заменяет собой эвристическую процедуру сращивания метода Ван Дайка. Подставляя анзац в уравнение задачи, возникающие произведения $y_o(x)y_i(\tau)$ легко раскладываются по формуле Тейлора ($x = \varepsilon^\alpha \tau$): $y_o(\varepsilon^\alpha \tau)y_i(\tau) = y_o(0)y_i(\tau) + \varepsilon^\alpha \tau y_o'(0)y_i(\tau) + \dots$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Тем самым вклады нелинейных слагаемых будут везде учтены, а не выкинуты из рассмотрения как в методе Ван Дайка. Отметим, что данный метод может быть легко алгоритмизирован в пакете символьных вычислений, например, Wolfram Mathematica.

Построение глобального асимптотического решения с трехпалубной структурой на основе данного строгого подхода показал, что уравнение Бенжамина–Оно вообще не требуется для ее разрешимости [9]. Данный подход позволил построить решения множества задач обтекания с двух- и трехпалубными структурами пограничного слоя, и создать эффективный численный алгоритм для решения редуцированных уравнений. Например, была исследована задача обтекания локализованной неровности на вращающемся диске (трехмерная задача обтекания) с двухпалубной структурой пограничного слоя [10]. А также это открыло возможность (численного) исследования критерия устойчивости течений (условия формирования зоны отрыва пограничного слоя), см. рис. 1, что в рамках прежнего подхода было сложно осуществимо (если вообще возможно за разумное время).

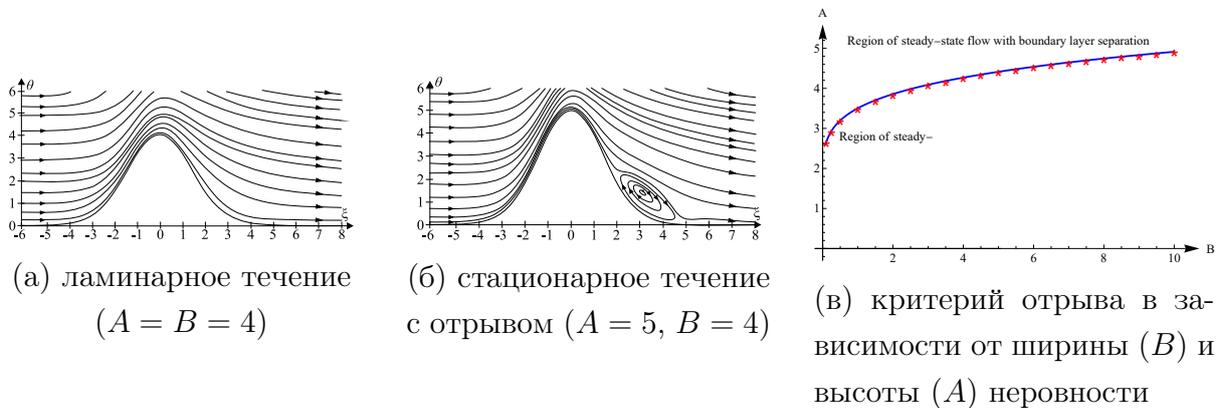


Рис. 1:

Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] V. Ya. Neiland, “Theory of Laminar Boundary-Layer Separation in Supersonic Flow”, *Fluid Dyn.*, 4 (1969), 33–35.

- [2] K. Stewartson and P. G. Williams, “Self-Induced Separation”, *Proc. Royal Soc. London A*, **312** (1969), 181–206.
- [3] V. G. Danilov, M. V. Makarova, “Asymptotic and Numerical Analysis of the Flow Around a Plate with Small Periodic Irregularities”, *Russ. J. Math. Phys.*, **2** (1994), 49–56.
- [4] F. T. Smith, “Laminar Flow Over a Small Hump on Flat Plate”, *J. Fluid Mech.*, **57** (1973), 803–824.
- [5] M. Napolitano, M. J. Werle, R. T. Davis, “Numerical Technique for the Triple-Deck Problem”, *AIAA Journal*, **16**:7 (1979), 699–705.
- [6] C. Chicchiero, A. Segalini, S. Camarri, “Triple-deck analysis of the steady flow over a rotating disk with surface roughness”, *Phys. Rev. Fluids*, **6**:1 (2021), art. no. 014103.
- [7] M. Van Dyke, “Perturbation methods in fluid mechanics”, *Parabolic press*, 1964.
- [8] M. I. Vishik, L. A. Lyusternik, “Regular Degeneration and Boundary Layer for Linear Differential Equations with Small Parameter”, *Uspekhi Mat. Nauk*, **12** (1957), 3–122.
- [9] V. G. Danilov, R. K. Gaydukov, “Asymptotic multiscale solutions to Navier–Stokes equations with fast oscillating perturbations in boundary layers”, *Russian Journal of Mathematical Physics*, **29**:4 (2022), 431–455.
- [10] R. K. Gaydukov, “Double-Deck Structure in a Fluid Flow Induced by a Uniformly Rotating Disk with Small Irregularities: the Nonsymmetric Case”, *Russian Journal of Mathematical Physics*, **31**:2 (2024), 209–217.

Асимптотические приближения и алгоритмы построения параметрических семейств синтезирующих законов управления в нелинейных системах

Ю. Э. Даник¹, М. Г. Дмитриев², Д. А. Макаров³

^{1,2,3} Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, Москва, Российская Федерация.

E-mails: ¹yuliadanik@gmail.com, ²mdmitriev@mail.ru, ³dmakarov@frccsc.ru

Введение

Для построения обратных связей в непрерывных и дискретных задачах управления используется подход на основе приближённого решения матричных дифференциальных и алгебраических уравнений Риккати с зависящими от состояния коэффициентами (SDRE — *State Depended Riccati Equation*) [1] с использованием асимптотических методов. В работе приводятся результаты по применению данного подхода для возмущённых нелинейных задач управления, стабилизации, слежения и др.

Развитие и применение этой техники позволяет получить достаточно общую методологию для построения субоптимальных нелинейных регуляторов для нелинейных систем с коэффициентами, зависящими от состояния (SDC — *State Dependent Coefficients*). Синтезированные регуляторы способны приближённо компенсировать нелинейности управляемой системы с помощью численного решения SDRE.

В работе приводится обзор сводных результатов авторов, полученных с применением асимптотического анализа с 2014 года, для возмущённых нелинейных задач управления как с непрерывным, так и с дискретным временем. Асимптотический анализ может служить для восстановления качественного характера поведения решения и зачастую позволяет увеличить интервал изменения параметра, для которого обеспечивается приближение решения с заданной точностью, а также построение экстраполяционных процедур. Преимуществом предлагаемого подхода является построение нелинейных регуляторов в численно-аналитической форме с использованием асимптотического анализа, а также возможности на основе полученных результатов строить процедуры улучшения на основе минимизирующих последовательностей, деккомпозировать исходные системы большой размерности и получать параметрические семейства регуляторов.

Предлагаемые подходы применимы к широкому классу постановок: рассмотрены задачи для слабо возмущённых, регулярно возмущённых непрерывных и дискретных нелинейных систем с параметрами. Были изучены системы с малыми, конечными и большими параметрами, а также сингулярно возмущённые непрерывные и дискретные задачи управления, в частности, решаемые с применением метода погранфункций Васильевой А.Б. [2]. Также строились разложения по параметру времени, по

нескольким независимым параметрам. Также с помощью асимптотических подходов были получены результаты для задач слежения.

Работа посвящена столетию со дня рождения **Аделаиды Борисовны Васильевой** — яркого представителя русской школы асимптотических методов, ученицы **Андрея Николаевича Тихонова** и автора фундаментальных результатов в области теории возмущений.

Конструирование стабилизирующих регуляторов в нелинейных системах на основе асимптотических разложений

1. Конструирование стабилизирующих регуляторов в слабо возмущённых нелинейных системах. Рассматривается на полуоси слабонелинейная аффинная управляемая система с коэффициентами, зависящими от состояния и малого параметра регулярных возмущений [3] в форме state-dependent coefficients (SDC):

$$\dot{x} = A(x, \varepsilon)x + B(x, \varepsilon)u, \quad (1)$$

где матрицы $A(x, \varepsilon)$ и $B(x, \varepsilon)$ гладкие по x и аналитические по параметру ε в рассматриваемой области. Функционал качества задаётся в квадратичной форме (на бесконечном или на конечном интервале времени)

$$J = \int_0^\infty (x^\top Q(x, \varepsilon, t)x + u^\top R(x, \varepsilon, t)u) dt, \quad (2)$$

где матрицы $Q(x, \varepsilon) \geq 0$ и $R > 0$ строятся специальным образом, $Q(x, \varepsilon) = Q_0 + \varepsilon Q_1(x) + \dots$, $Q_i \geq 0$, $i = 0, 1, 2, \dots$

Решим задачу (1) с помощью подхода SDRE, где в рассматриваемой нелинейной возмущенной задаче формально применяется метод Каллмана-Летова. Для этого рассмотрим матричное алгебраическое уравнение Риккати

$$-P(x, \varepsilon)A(x, \varepsilon) - A^\top(x, \varepsilon)P(x, \varepsilon) + P(x, \varepsilon)S(x, \varepsilon)P(x, \varepsilon) - Q(x, \varepsilon) = 0, \quad (3)$$

где $S(x, \varepsilon) = B(x, \varepsilon)R^{-1}(x, \varepsilon)B^\top(x, \varepsilon)$, $A(x, \varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1(x)$, $B(x, \varepsilon) = B_0 + \varepsilon B_1(x)$. Матрицы R, Q будут подбираться так, чтобы при каждом $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ уравнение (3) имеет решение – положительно определенную матрицу $P(x, \varepsilon)$. Это приводит к построению *параметрических семейств регуляторов*, где коэффициенты усиления являются явными функциями параметров, что существенно снижает вычислительную сложность по сравнению с прямым применением SDRE.

2. Регулярные возмущения и разложения решения. Пусть $A(x, \varepsilon) = A_0(x) + \varepsilon A_1(x)$, $B(x, \varepsilon) = B_0(x) + \varepsilon B_1(x)$, $Q(x, \varepsilon) = Q_0(x) + \varepsilon Q_1(x)$, где A_0, B_0 – некоторые постоянные матрицы, тогда решение задачи будем искать в виде формального ряда $P(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^\infty \varepsilon^k P_k(x)$. Член нулевого порядка P_0 определяется из матричного уравнения Риккати, а член первого порядка – из линейного матричного уравнения Ляпунова

$$\varepsilon^0 : \quad -P_0 A_0 - A_0^\top P_0 + P_0 S_0 P_0 - Q_0 = 0, \quad (4)$$

$$\varepsilon^1 : -P_1(A_0 - S_0P_0) - (A_0 - S_0P_0)^T P_1 - \tilde{Q}_1(x) = 0, \quad (5)$$

где $S_0 = B_0R_0^{-1}B_0^T$, $S_{10}(x) = B_1(x)R_0^{-1}B_0^T$, $Q_1 > 0$, а $\tilde{Q}_1(x)$ имеет вид

$$\tilde{Q}_1(x) = P_0(A_1(x) - S_{10}(x)P_0) + (A_1(x) - S_{10}(x)P_0)^T K_0 + Q_1.$$

Полученный композитный регулятор первого порядка имеет вид

$$u_1(x, \varepsilon) = -R^{-1}B^T(x, \varepsilon) \left(\sum_{k=0}^N \varepsilon^k P_k(x) \right) x. \quad (6)$$

3 Дискретные системы и малый шаг. Эти результаты были перенесены на дискретный случай [4, 5]

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A(x(t), \varepsilon)x(t) + B(x(t), \varepsilon)u(t) = \\ x(0) &= x_0, \quad x(t) \in X \subset \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^r, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \end{aligned} \quad (7)$$

где ε_0 – фиксированное положительное число. Управление $u_1(x, \varepsilon)$ ищется с использованием критерия качества управления $I(u) = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{\infty} (x^T Q(x, \varepsilon)x + u^T R_0 u) \rightarrow \min$, где $Q(x, \varepsilon) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R_0 \in \mathbb{R}^{r \times r} > 0$, $Q(x, \varepsilon) > 0$. Здесь уже ищется приближенное решение разностного уравнения Риккати. Нулевой и первый члены приближения определяется соответствующими уравнениями Риккати и Ляпунова. В дискретном случае малый шаг может также рассматриваться как дополнительный параметр, согласуемый с параметрами динамики. В этом случае система представляется в виде

$$\begin{aligned} x(t + \varepsilon) &= A(x, \varepsilon)x(t) + B(x, \varepsilon)u(t), \\ x(0) &= x^0, \quad x(t) \in X \subset \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^r, \quad t = k\varepsilon, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (8)$$

$$J(u) = \frac{1}{2} x^T(N) F x(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left(x^T(k\varepsilon) Q(x, \varepsilon) x(k\varepsilon) + u^T(k\varepsilon) R u(k\varepsilon) \right) \rightarrow \min_u,$$

где терминальная матрица $F > 0$ являются постоянными.

При достаточно малых значениях параметра ε система (8) является сингулярно возмущённой и слабонелинейной по состоянию и управлению с регулярно возмущёнными коэффициентами, вследствие чего вблизи концов интервала решения могут обладать погранслоиным поведением [5]. Матрица коэффициентов усиления $P(x, t + \varepsilon, \varepsilon)$ в управлении находится в следующей форме

$$P(x, t, \varepsilon) = \bar{P}_2(x, t, \varepsilon) + \Pi P_2(x, \tau, \varepsilon), \quad (9)$$

где $\tau = \frac{t-T}{\varepsilon} = -1, -2, \dots, -N$, $N = \frac{T}{\varepsilon}$, а $\bar{P}_2(x, t, \varepsilon) = \bar{P}_0 + \varepsilon \bar{P}_1(x, t) + \varepsilon^2 \bar{P}_2(x, t)$, $\Pi P_2(x, \tau, \varepsilon) = \Pi P_0(x, \tau) + \varepsilon \Pi P_1(x, \tau) + \varepsilon^2 \Pi P_2(x, \tau)$ являются частичной суммой второго порядка регулярного и пограничного рядов соответственно. Для нулевого члена граничного ряда $\Pi_0 P(\tau)$ мы получаем начальную задачу

$$\begin{aligned} \Pi_0 P(\tau) &= -\bar{P}_0 + A_0^T (\bar{P}_0 + \Pi_0 P(\tau + 1)) A_0 \\ &\quad - A_0^T (\bar{P}_0 + \Pi_0 P(\tau + 1)) B_0 [R + B_0^T (\bar{P}_0 + \Pi_0 P(\tau + 1)) B_0]^{-1} \\ &\quad \times B_0^T (\bar{P}_0 + \Pi_0 P(\tau + 1)) A_0 + Q_0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\Pi_0 P(0) = F - \bar{P}_0.$$

4. Сингулярные возмущения и композитные конструкции. Также предлагаемый подход к построению приближенных регуляторов применим и для случая наличия параметра при производной, сингулярно возмущенной системы [6]

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A_1(x)x + A_2(x)y + B_1(x)u, \quad x(0) = x^0, \\ \varepsilon \frac{dy}{dt} &= A_3(x)x + A_4(x)y + B_2(x)u, \quad y(0) = y^0, \end{aligned} \quad (11)$$

где $x \in X \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in Y \subset \mathbb{R}^{n_2}$, $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $z \in Z \subset \mathbb{R}^n$, $n_1 + n_2 = n$, $u \in \mathbb{R}^r$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, ε_0 — некоторое положительное число.

Если динамика содержит быстрые и медленные движения, то применяется метод пограничного слоя и равномерные асимптотические приближения [7, 8]. Рассматривается функционал качества $J(u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty (z^T Q(x, \varepsilon)z + u^T R u) dt \rightarrow \min_u$, $Q(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} Q_1(x, \varepsilon) & Q_2(x, \varepsilon) \\ Q_2^T(x, \varepsilon) & Q_3(x, \varepsilon) \end{pmatrix} > 0$, $Q_i(x, \varepsilon) = Q_{i0}(x) + \varepsilon Q_{i1}(x) + \varepsilon^2 Q_{i2}(x)$, $i = 1, 2, 3$. Управление ищется в виде $u(z, \varepsilon) = -R^{-1}B^T(x, \varepsilon)P(x, \varepsilon)z$, где матрица коэффициентов усиления $P(x, \varepsilon)$ разделена на блоки

$$P(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} P_1(x, \varepsilon) & \varepsilon P_2(x, \varepsilon) \\ \varepsilon P_2^T(x, \varepsilon) & \varepsilon P_3(x, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad P_i(x, \varepsilon) = P_{i0}(x) + \varepsilon P_{i1}(x), \quad i = 1, 2, 3. \quad (12)$$

с матрицами $A(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} A_1(x) & A_2(x) \\ \frac{A_3(x)}{\varepsilon} & \frac{A_4(x)}{\varepsilon} \end{pmatrix}$, $B(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} B_1(x) \\ \frac{B_2(x)}{\varepsilon} \end{pmatrix}$.

5. Большой параметр и разложения по обратной степени параметра.

Если динамика содержит большой параметр μ , то вводится малый параметр $\varepsilon = 1/\mu$, и строится разложение $\hat{P}_2(x, \mu) = \hat{P}_0(x) + \mu \hat{P}_1(x) + \mu^2 \hat{P}_2(x)$. Получаем задачу $\frac{dx}{dt} = \left(A_0 + \frac{1}{\mu} A_1(x) \right) x + \left(B_0 + \frac{1}{\mu} B_1(x) \right) u$. Здесь показывается возможность построения параметрического семейства регуляторов для нелинейных управляемых систем с параметром $\varepsilon \in (0, \infty)$ на основе матричной Паде аппроксимации (ПА) [9]. При этом могут использоваться два локальных асимптотических приближения к решению матричного уравнения Риккати с зависящими от состояния коэффициентами для одновременного рассмотрения задач как при малых, так и при больших значениях параметра ε . Например, для решения задачи строится двухточечная матричная правая Паде аппроксимация порядка $[2/2]$, а именно $PA_{[2/2]}(x, \varepsilon) = (M_0(x) + \varepsilon M_1(x) + \varepsilon^2 M_2(x)) (I + \varepsilon N_1(x) + \varepsilon^2 N_2(x))^{-1}$, где $(E$ —единичная $n \times n$ матрица). Итак, одновременно приравнивая асимптотики при малых и больших значениях параметра к $PA_{[2/2]}$ получаем систему для опреде-

ления коэффициентов ПА.

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & -\tilde{P}_0 & 0 \\ E & 0 & 0 & -\hat{P}_1(x) & -\hat{P}_2(x) \\ 0 & -E & 0 & \hat{P}_0(x) & \hat{P}_1(x) \\ 0 & 0 & E & 0 & -\hat{P}_0(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0(x) \\ M_1(x) \\ M_2(x) \\ N_1(x) \\ N_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{P}_0 \\ \tilde{P}_1(x) \\ \hat{P}_0(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Паде-мост $PA_{[2/2]}(x, \varepsilon)$ для решения уравнения Риккати является интерполяционной поверхностью, приближенно восстанавливающей поверхность $P(x, \varepsilon)$ по ее приближениям в окрестностях малых и больших значений ε . Асимптотики могут строиться также и в правых и левых окрестностях конкретных точек интервала изменения параметра [10]. Таким образом, получаются наборы из двух и более асимптотик, описывающих решение, которые потом можно объединять в одну конструкцию с помощью многоточечных ПА, обеспечивающих согласование всех локальных асимптотик. Также в работе [11] продемонстрировано построение асимптотического приближения к решению уравнения Риккати на конечном интервале времени с использованием в качестве параметра разложения параметр времени.

6. Многопараметрические системы. В реальных задачах часто присутствуют несколько параметров. В [12] для систем с матрицами системы, зависящими от двух разных малых параметров $A(x, \varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1(x)$, $B(x, \mu) = B_0 + \mu B_1(x)$ асимптотическое разложение для решения уравнения Риккати строится как разложение в окрестности начала координат $(0,0)$

$$\tilde{P}(x, \varepsilon, \mu) = \tilde{P}_0 + \varepsilon \tilde{P}_{10}(x) + \mu \tilde{P}_{01}(x) + \varepsilon^2 \tilde{P}_{20}(x) + \varepsilon \mu \tilde{P}_{11}(x) + \mu^2 \tilde{P}_{02}(x). \quad (14)$$

Эксперименты показывают, что траектории замкнутой системы, рассчитанные для управления, соответствующего асимптотическому приближению с двумя параметрами, ближе к решению D-SDRE для более широкого интервала изменения параметров, чем при выражении одного параметра через другой. Этот подход также применим для терминальной задачи управления [13], где асимптотическое разложение решения матричного уравнения Риккати строится по смешанным степеням двух малых параметров: параметра регулярных возмущений и обратной величины параметра штрафа $1/\mu$, $I(u) = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu} x(t_f)^T F x(t_f) + \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{t_f-1} (x^T Q(x, \varepsilon) x + u^T R u)$, где $F > 0$. Далее представляем $P(x, \varepsilon, \mu, t)$ в виде, учитывающем вклад каждого из параметров и связь между ними $P(x, \varepsilon, \mu, t) = \mu N(x, \varepsilon, \mu, t) + \hat{P}(x, \varepsilon, t)$, где $N(x, \varepsilon, \mu, t) = N_0(\mu, t) + \varepsilon N_1(x, t) + \varepsilon^2 N_2(x, t) + \dots$, $\hat{P}(x, \varepsilon, t) = \hat{P}_0(t) + \varepsilon \hat{P}_1(x, t) + \dots$

7. Итерационное уточнение приближений. На примере построения регулятора на основе подхода SDRE в слабо нелинейной сингулярно возмущенной задаче управления строится численная асимптотика блоков матрицы коэффициентов усиления регулятора с помощью сходящегося итерационного процесса [14] и метода пограничных функций А. Б. Васильевой [7]. Подробности подхода изложены в работе [15].

Затем полученная численная асимптотика используется для построения интерполяционных и экстраполяционных процедур. Матрица P ищется в блочной форме, как в (12). Для определения ее блоков используется следующий итерационный процесс из [15].

Рассмотрим аппроксимацию регулярного разложения, которое аппроксимирует решение уравнения Риккати на отрезке $[0, \bar{t}]$, где $\bar{t} < t_f$. Предположим, имеется сходящаяся последовательность $P_j^{[i]}(t, \varepsilon)$, $i = 0, 1, \dots, m$, $j = 1, 2, 3$, - результат применения итерационного процесса, полученный при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $t \in [0, \bar{t}]$. Представим ее формально в виде асимптотического ряда $\hat{P}_j(t, \varepsilon) = \hat{P}_{j,0}(t) + \varepsilon \hat{P}_{j,1}(t) + \dots + \varepsilon^m \hat{P}_{j,m}(t) + \dots$, то есть предполагаем, что k -й коэффициент этого ряда определяется по формуле

$$\hat{P}_{j,k}(t) = \frac{P_j^{[k]}(t, \varepsilon) - \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon^i \hat{P}_{j,i}(t)}{\varepsilon^k}, \quad \hat{P}_{j,-1}(t) \equiv 0, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad j = 1, 2, 3, \quad (15)$$

В силу предположения о сходимости итерационного процесса, будем считать, что коэффициенты предложенного ряда не зависят от величины ε . Определяя их один раз, можно вычислять асимптотическое приближение к решению для меньшего или большего значения ε в зоне действия асимптотики, получая таким образом интерполяционный или экстраполяционный алгоритм. Проведенные численные эксперименты показывают хорошую точность полученных интерполяционных и экстраполяционных процедур.

8. Применения к задачам слежения. Задача слежения за конкретной траекторией на конечном интервале времени рассмотрена в [16]. Задача слежения сведена к задаче оптимального управления со свободным правым концом, для которой приводятся представления для точного и приближённого решений. Задача может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}(\tilde{x}, \mu) \tilde{x} + \tilde{B}(\tilde{x}, \mu) u, \quad \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}^0, \\ \tilde{I}(u) &= \frac{1}{2} \tilde{x}^T(t_1) \mu \tilde{F} \tilde{x}(t_1) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left(\tilde{x}^T \tilde{Q}(\tilde{x}, \mu) \tilde{x} + u^T R u \right) dt \rightarrow \min_u. \end{aligned} \quad (16)$$

где $\tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$ - расширенный вектор состояния, $\tilde{A}(\tilde{x}, \mu) = \begin{bmatrix} A(x, \mu) & 0 \\ 0 & A_r(x_r, \mu) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$,

$$\tilde{B}(x, \mu) = \begin{bmatrix} B(x, \mu) \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times r}, \quad \tilde{Q}(\tilde{x}, \mu) = \begin{bmatrix} Q(\tilde{x}, \mu) & -Q(\tilde{x}, \mu) \\ -Q(\tilde{x}, \mu) & Q(\tilde{x}, \mu) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \geq 0,$$

$\tilde{F} = \begin{bmatrix} F & -F \\ -F & F \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \geq 0$, нулевые блоки в матрицах $\tilde{A}(\tilde{x}, \mu)$ и $\tilde{B}(x, \mu)$ есть матрицы соответствующих размерностей.

Управление ищется в виде $u(\tilde{x}, t, \mu) = -R^{-1} \tilde{B}^T(x, \mu) (\tilde{P} \tilde{x} + \Pi) = u_0(\tilde{x}) + \mu u_1(\tilde{x}, t, \mu)$, где $u_0(\tilde{x}) = -R^{-1} \tilde{B}_0^T \tilde{P}_0 \tilde{x}$ - линейная часть управления, а

$$\mu u_1(\tilde{x}, t, \mu) = -\mu R^{-1} \left(\tilde{B}_1^T(\tilde{x}) \tilde{P}_0 + (\tilde{B}_0 + \mu \tilde{B}_1(\tilde{x}))^T \tilde{P}_1(\tilde{x}, t) \right) \tilde{x}$$

– нелинейная коррекция, $\Pi(\tilde{x}, t, \mu) = \frac{1}{2} \left[\tilde{x}^T \frac{\partial \tilde{P}(\tilde{x}, t, \mu)}{\partial \tilde{x}_1} \tilde{x} \quad \tilde{x}^T \frac{\partial \tilde{P}(\tilde{x}, t, \mu)}{\partial \tilde{x}_2} \tilde{x} \quad \dots \quad \tilde{x}^T \frac{\partial \tilde{P}(\tilde{x}, t, \mu)}{\partial \tilde{x}_{2n}} \tilde{x} \right]^T \in \mathbb{R}^{2n}$, если $\tilde{P} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ является положительно определенным решением следующей задачей Коши для матричного дифференциального уравнения типа Риккати. Приближенное решение ищется в виде $\tilde{P}(\tilde{x}, t, \mu)$ в виде $\tilde{P}(\tilde{x}, t, \mu) = \tilde{P}_0 + \mu \tilde{P}_1(\tilde{x}, t, \mu)$.

Заключение

В работе приведен обзор результатов авторов по применению техник асимптотических приближений по малому параметру в отдельных классах возмущенных непрерывных и дискретных нелинейных задач стабилизации и управления без ограничений. Используемая техника базируется на выделении в системах одного или нескольких малых параметров (регулярных или сингулярных возмущений) и приближенном решении соответствующих уравнений Риккати с коэффициентами, зависящими от состояния, которое формирует матрицу коэффициентов усиления в законах обратной связи. Предлагаемые подходы применимы для численного решения широкого класса задач управления. Они позволяют проводить анализ и гибкий учет особенностей моделей при разных значениях параметров, получать параметрические семейства стабилизирующих регуляторов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] T. Cimen, “State dependent Riccati Equation (SDRE) control: A survey” // *Proceedings of the 17th World Congress of the International Federation of Automatic Control*, **17** (2008), 3761-3775.
- [2] А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, *Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях*. – М.: Наука, 1978.
- [3] М. Г. Дмитриев, Д. А. Макаров, “Гладкий нелинейный регулятор в слабо нелинейной системе управления с коэффициентами, зависящими от состояния” // *Труды Института системного анализа Российской академии наук*, **64**:4 (2014), 53-58.
- [4] Yu. Danik, “One D-SDRE regulator for weakly nonlinear discrete state dependent coefficients control systems” // *The 7th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CODIT 2020)*, (2020), 616–621.
- [5] Y. Danik, M. Dmitriev, “Symbolic regulator sets for a weakly nonlinear discrete control system with a small step” // *Mathematics*, **10**:3 (2022), 1–14.
- [6] Ю. Э. Даник, М. Г. Дмитриев, Д. А. Макаров, Построение стабилизирующих регуляторов в нелинейных непрерывных системах большой размерности на основе асимптотики решений матричных алгебраических уравнений Риккати // *Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD’2018)*, (2018), 351–353.
- [7] А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений*. М.: Наука, 1973.

- [8] P. V. Kokotovic, H. K. Khalil, *Singular perturbations in systems and control*. IEEE Press, 1986.
- [9] G. Baker, P. R. Graves-Morris, *Pade approximations*. — Addison–Wesley Publishing, (1981).
- [10] Y. Danik, M. Dmitriev, “Symbolic Pade representation of stabilizing regulators for a class of nonlinear control systems with a parameter” // *Procedia Computer Science*, **186** (2021), 154–160.
- [11] Ю. Э. Даник, М. Г. Дмитриев, “Приближенное построение обратной связи в нестационарной линейно-квадратичной задаче оптимального управления с помощью техники Падэ аппроксимации” // *Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения XXXVI (30 апреля – 4 мая 2025 г.)*, Воронеж: Издательский дом ВГУ, (2025), 116–118.
- [12] Y. Danik, M. Dmitriev, “The algorithm for the construction of a symbolic family of regulators for nonlinear discrete control systems with two small parameters” // *International Conference on Mathematical Optimization Theory and Operations Research*. — Cham: Springer Nature Switzerland, (2023), 277–291.
- [13] Y. Danik, M. Dmitriev, D. A. Makarov, “A penalty functions method for feedback control design in terminal weakly nonlinear optimal control problems” // *Proceedings of the 8th International School-Seminar on Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA-2024)*, Irkutsk, Russia, June 24–28, (2024). — Irkutsk: ISDCT SB RAS, (2024), 56–58.
- [14] M. G. Dmitriev, A. M. Klishevich, Iterative solution of optimal control problems with fast and slow motions // *Systems & Control Letters*, **4** (1984), 223–226.
- [15] M. Dmitriev, D. Makarov, An Iterative Method for Regulator Construction in a Weakly Nonlinear Singularly Perturbed Control Problem // *Proceedings of the 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy’s Conference)*, IEEE (2022), 1–4.
- [16] Д. А. Макаров, Подход к построению нелинейного управления в задаче слежения с коэффициентами, зависящими от состояния // *Информационные технологии и вычислительные системы*, **3** (2017), 20–33.

Применение численно-асимптотического метода в обратных задачах оценки коэффициентов переноса и термодинамических потоков по данным моделирования

М. А. Давыдова^{1,2}, Н. Ф. Еланский², С. А. Захарова³, Г. Д. Рублев^{2,4}, А. В. Шилкин⁵

¹Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия.

²Институт физики атмосферы имени А. М. Обухова РАН, Москва, Россия.

³ООО «Новые горизонты», Москва, Россия.

⁴Всероссийский НИИ автоматики имени Н. Л. Духова, Москва, Россия.

⁵Лаборатория № 5 ИЭМ НПО «Тайфун», Обнинск, Россия.

E-mails: m.davydova@physics.msu.ru, n.f.elansky@mail.ru, sa.zakharova@physics.msu.ru,
rublev_gd_97@vk.com, shilkin@typhoon.obninsk.ru

В связи с интенсивным развитием междисциплинарных научных направлений, современных технологий и новой техники все большее значение в научных и инженерных разработках приобретают задачи математического моделирования процессов тепло- и массопереноса, так как анализ этих физических явлений создает теоретическую базу для совершенствования конструкций и технологических режимов работы разнообразных агрегатов, а также для разработки новых измерительных методик и усовершенствования старых. Наличие информации о свойствах изучаемых сред и материалов (напр., о коэффициентах переноса) в диапазоне параметров рассматриваемого явления – необходимое условие, позволяющее говорить о корректности расчетно-теоретического и экспериментального моделирования, описания технологических и производственных процессов.

Несмотря на наличие множества методов определения теплофизических характеристик сред (см., напр., [1, 2]), коэффициентов диффузии (в том числе турбулентной диффузии [3]) и других коэффициентов переноса в широком диапазоне изменяемых параметров, каждый из них имеет ряд ограничений, что в совокупности сдерживает их применение во многих исследованиях. В большинстве случаев коэффициенты переноса измеряются экспериментально [3], часто с использованием эмпирических формул, полученных в результате обработки многочисленных экспериментальных данных. Однако, количество экспериментальных данных, как в отношении изучаемых объектов, так и в отношении диапазонов рассматриваемых параметров, часто бывает недостаточным для решения поставленных задач. Развитие вычислительной техники определило новый этап в задачах идентификации коэффициентов переноса [4], который связан с применением высокопроизводительных вычислительных систем (см., напр., [3, 5]). Однако, операционные и капитальные затраты делают использование суперкомпьютеров зачастую малоприменимым в прикладных задачах, напр., в задачах, связанных с оперативным мониторингом.

Нами разработан и строго обоснован новый численно-асимптотический метод оценки коэффициентов переноса и термодинамических потоков с использованием данных моделирования. Основу метода составляют устойчивые численные алгоритмы решения коэффициентных обратных задач по восстановлению неизвестных параметров сингулярно возмущенных моделей для уравнения тепломассопереноса, использующие асимптотические приближения по малому параметру решений прямых задач [6, 7] в сочетании с экспериментальными данными или данными наблюдений u_δ ($\|u - u_\delta\|_{L_2} \leq \delta$, u - точные данные, δ - ошибка измерений) на базе известных методов [8]. В соответствии с [8] операторное уравнение

$$G[X] = u,$$

определяющее условно-корректную задачу относительно набора неизвестных параметров модели X , где $X \in F$, $u \in U$ (u — распределение температуры или концентрации вещества), F и U — метрические пространства, оператор G обратим, но G^{-1} не является непрерывным, можно заменить близким (в некотором смысле) операторным уравнением, полученным с использованием асимптотической аппроксимации решения прямой задачи:

$$G_\varepsilon[X_{\varepsilon,\delta}] = u_\delta. \quad (1)$$

Сужение класса возможных решений уравнения (1) до компактного множества позволяет перейти к корректной постановке.

Данный метод применен в задачах идентификации нелинейных коэффициентов теплопроводности металлов, сплавов и топливных композиций [9], полупроводников [7], в задачах определения коэффициентов теплообмена [7, 9] и вертикального коэффициента атмосферной турбулентной диффузии [10], а так же оценок потоков тепла и вещества в таких задачах.

С целью апробации численно-асимптотического метода восстановления коэффициентов переноса выполнены численные расчеты для некоторых инновационных и перспективных видов топливных сплавов и смешанного нитридного ядерного топлива. С использованием асимптотических параметризаций распределения температуры вдоль топливных сердечников, полученных на основе асимптотических приближений решений прямых задач, в сочетании с данными измерения температуры в разных точках сердечников путем непрерывного контактного метода с использованием термоэлектрических термометров восстановлены нелинейные коэффициенты теплопроводности и распределения тепловых потоков вдоль прутковых топливных сердечников. При расчетах использовались параметры, соответствующие реальным топливным сердечникам для реакторов на быстрых нейтронах (из сплавов на основе урана и циркония $U - Zr$, а также смешанного нитридного ядерного топлива на основе сплава урана и плутония $U - Pu - N$)[9]. Пример такого расчета в сравнении с результатами расчета по другой методике представлен на Рис. 2(а).

На основе численно-асимптотического метода разработан и реализован алгоритм восстановления параметров атмосферной турбулентности в устойчивом или нейтральном пограничном слое атмосферы (ПСА) и пространственного распределения эмиссионных потоков загрязняющих примесей от наземных источников с территории города (или целого региона). Вычислительный алгоритм использует асимптотические параметризации высотных профилей концентраций малых примесей в ПСА в сочетании с данными наблюдений за примесями. Валидация нового вычислительного метода и анализ достоверности полученных результатов выполнены с использованием уникальных данных многолетних измерений оксида углерода и окислов азота на разных высотных уровнях Московской телевизионной башни в Останкино и на городской сети наземных станций мониторинга состава атмосферы. Пример восстановления пространственно-неоднородного распределения средних с мая по ноябрь 2007-2018 гг. эмиссий оксида углерода в утренние часы с территории Москвы представлен на Рис. 2(б). С использованием полученной информации восстанавливается пространственное распределение среднесуточных эмиссий за данный период.

Интеграция методов машинного обучения (ML) и нейросетевых технологий в разработанный подход позволит повысить автоматизацию и вычислительную эффективность метода при решении задач мониторинга городской атмосферы.

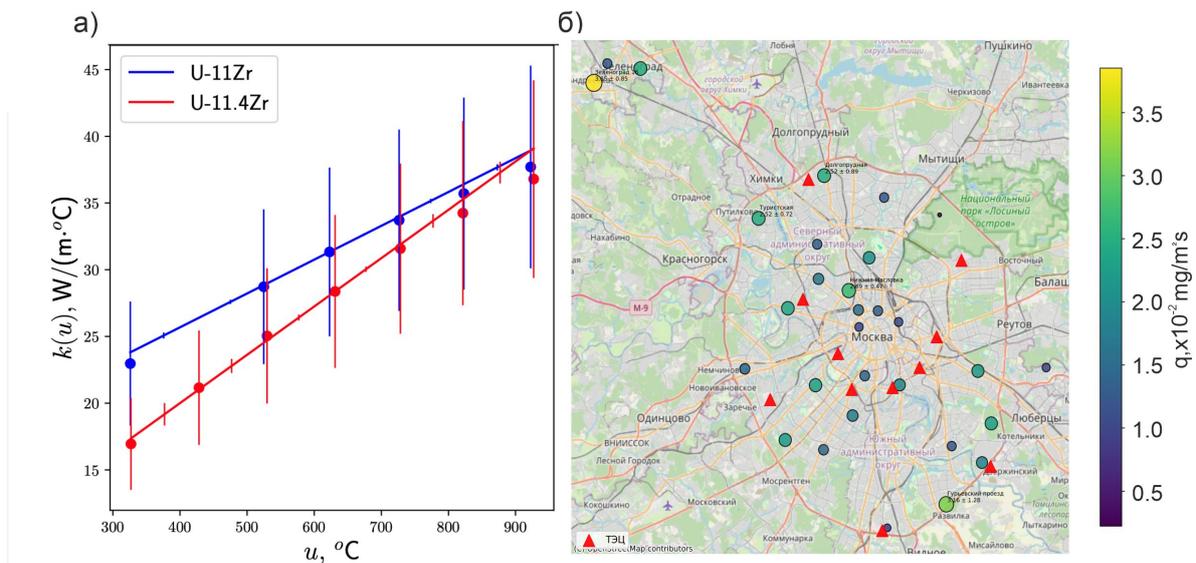


Рис. 2: (а) Температурная зависимость теплопроводности сплавов $U - 11Zr$ и $U - 11.4Zr$: восстановленные профили в сравнении с данными [11] (вертикальными линиями в узлах отмечены погрешности метода [11], вертикальными линиями в других точках отмечены погрешности численно-асимптотического метода); (б) восстановленное пространственное распределение средних за период с мая по ноябрь 2007-2018 гг. эмиссий оксида углерода в утренние часы с территории Москвы.

Исследование выполнено в рамках государственных заданий МГУ имени М.В. Ло-

моносова и Института физики атмосферы имени А.М. Обухова РАН (регистрационный номер темы 1022041800069-7-1.5.9 (РК 125020501413-6)).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Livshits V.G. *Physical properties of metals and alloys*. М.: Mashgiz, 1959.
- [2] Торчик М.В., Котов М.А. Экспериментальные методы определения теплофизических свойств // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*, 2023, Т. 24(3).
- [3] Tkachenko E.V., Debolskiy A.V., Mortikov E.V. Intercomparison of subgrid scale models // *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2021, V. 42(7).
- [4] Самарский А.А., Вабищевич П.Н. *Вычислительная теплопередача*. М.: Едиториал УРСС, 2003.
- [5] Албу А.Ф., Зубов В.И. Идентификация коэффициента теплопроводности // *ЖВ-МиМФ*, 2021, Т. 61(9).
- [6] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*. М.: Высш. шк., 1990.
- [7] Давыдова М.А., Рублев Г.Д. Асимптотически устойчивые решения // *Дифференциальные уравнения*, 2024, Т. 60(4).
- [8] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач*. М.: Наука, 1979.
- [9] Davydova M.A., Rublev G.D., Volkov V.T. Numerical-asymptotic method // *Russian Journal of Mathematical Physics*, 2025, V. 32(4).
- [10] Давыдова М.А., Еланский Н.Ф., Рублев Г.Д., Шилкин А.В. Применение численно-асимптотического метода // *Доклады РАН. Науки о Земле*, 2026, Т. 527(1).
- [11] Hofman G.L., Billone M.C., Koenig J.F. *Metallic fuels handbook*. Argonne National Laboratory, 2019.

Асимптотика определяющего вектора в задаче оптимального терминального управления с двумя малыми параметрами и гладкими геометрическими ограничениями на управление

А. Р. Данилин¹, О. О. Коврижных²

¹ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия.

²ИММ УрО РАН, УрФУ, Екатеринбург, Россия.

E-mails: ¹dar@imm.uran.ru, ²koo@imm.uran.ru

В докладе будет рассмотрена задача оптимального управления [1] на фиксированном отрезке времени $t \in [0, T]$ линейной автономной системой с медленными и быстрыми переменными [2] в классе кусочно–непрерывных управлений с гладкими геометрическими ограничениями в виде шара в соответствующем евклидовом пространстве:

$$\begin{cases} \dot{x}_{\varepsilon, \mu, u} = Ax_{\varepsilon, \mu, u} + By_{\varepsilon, \mu, u}, & t \in [0, T], \\ \varepsilon \dot{y}_{\varepsilon, \mu, u} = -y_{\varepsilon, \mu, u} + u, & \|u\| \leq 1, \\ x_{\varepsilon, \mu, u}(0) = x^0 + \mu \tilde{x}, \quad y_{\varepsilon, \mu, u}(0) = y^0 + \mu \tilde{y}, & 0 < \varepsilon \ll 1, \quad 0 < \mu \ll 1, \end{cases} \quad (1)$$

с терминальным критерием качества вида

$$J_{\varepsilon, \mu}(u) := \frac{1}{2} \|x_{\varepsilon, \mu, u}(T)\|^2, \quad (2)$$

где $x_{\varepsilon, \mu, u} \in \mathbb{R}^k$, $y_{\varepsilon, \mu, u} \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^m$; A, B — постоянные вещественнозначные матрицы соответствующей размерности.

В силу принципа максимума Понтрягина оптимальное управление однозначно определяется вектором, равным значению сопряженной переменной принципа максимума в момент времени окончания процесса управления, так называемым *определяющим* вектором.

В докладе будут представлены предельное соотношение для определяющего вектора при независимом стремлении малых параметров к нулю и исследование двух случаев — регулярного, при котором оптимальное управление в предельной задаче непрерывно, и сингулярного — с особенностью оптимального управления.

Будет показано, что в регулярном случае решение раскладывается в степенной ряд по ε и μ , а в сингулярном случае асимптотика решения представляет собой ряд Эрдейи, в обоих случаях — относительно стандартной калибровочной последовательности $\varepsilon^k + \mu^k$ при $(\varepsilon + \mu) \rightarrow 0$. Подробнее см. в [3].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко *Математическая теория оптимальных процессов*, М.: Физматгиз, 1961, 391 с.
- [2] А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений*, М.: Наука, 1973, 272 с.
- [3] А.Р. Данилин, О.О. Коврижных, “Асимптотика решения задачи терминального управления с двумя малыми параметрами” // *Математический сборник*, **216**:8 (2025), 82-111.

Асимптотические разложения решений в задачах “дешевого” управления с ограничениями на управление в виде шара

А. Р. Данилин¹, А. А. Шабуров²

^{1,2}Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук (ИММ УрО РАН),
E-mails: ¹dar@imm.uran.ru, ²alexandershaburov@mail.ru

Асимптотические методы решения сингулярно возмущенных уравнений [1] активно начинают применяться для класса сингулярно возмущенных задач управления. Публикуются первые обзоры статей, в которых можно найти как общую постановку задач “дешевого” управления, так и подробные методы их решения [2, 3]. Малый параметр в таких задачах присутствует в виде множителя перед интегральным слагаемым в функционале качества. Асимптотика оптимального управления строится без ограничений на управление в линейно-квадратичных задачах (см. например, статью [4]).

Авторами рассмотрена задача оптимального управления для линейной системы с постоянными коэффициентами на конечном временном промежутке

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = A_{11}x_\varepsilon + A_{12}y_\varepsilon + B_1u_\varepsilon, & x_\varepsilon(0) = x^0, & t \in [0; T], \\ \varepsilon \dot{y}_\varepsilon = A_{21}x_\varepsilon + A_{22}y_\varepsilon + B_2u_\varepsilon, & y_\varepsilon(0) = y^0, & \|u\| \leq 1, \end{cases} \quad (1)$$

где $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, $y_\varepsilon \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^r$, A_{ij} , B_i , $i, j \in 1, 2$ — постоянные вещественные матрицы соответствующей размерности, с интегральным выпуклым критерием качества, содержащим малый параметр $\varepsilon > 0$ при интегральном слагаемом

$$J_\varepsilon(u) := \varphi(x_\varepsilon(T), y_\varepsilon(T)) + \frac{\varepsilon^\alpha}{2} \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \rightarrow \min, \quad (2)$$

в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими геометрическими ограничениями. Здесь, $\|\cdot\|$ — евклидова норма в соответствующем конечномерном векторном пространстве, x^0 и y^0 — известные векторы, $x_\varepsilon(\cdot; u)$ — решение системы (1) при заданном управлении $u(\cdot)$, $\alpha \in \mathbb{N}$

Доказано, что при стремлении малого параметра к нулю исходная задача с дешевым управлением сводится к задаче оптимального управления с терминальным критерием качества. Асимптотика оптимального управления находится путем построения асимптотики определяющего вектора.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов, “Асимптотические разложение решений сингулярно возмущенных уравнений” // *М.: Наука* (1973).
- [2] А.Б. Васильева, М.Г. Дмитриев “Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления” // *Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ.*, **20** (1982), 3-77.
- [3] М.Г. Дмитриев, Г.А. Курина “Сингулярные возмущения в задачах управления” // *Автоматика и телемеханика.*, **1** (2006), 3-51.
- [4] Г.А. Курина, Н.Т. Хоай “Асимптотика решения нулевого порядка для одного типа сингулярно возмущенных линейно-квадратичных задач управления в критическом случае” // *Тр. ИММ УрО РАН.*, **29**:1 (2023), 127-142.
- [5] А.Р. Данилин, А.А. Шабуров, “Асимптотика решения линейных сингулярно возмущенных задач оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества и “дешевым” управлением” // *Дифференциальные уравнения.*, **59**:1 (2023), 85-99.

**Идеи Н.Н. Нефедова при доказательстве равномерной сходимости
формальной асимптотики**

А. И. Денисов¹, И. В. Денисов²

^{1,2} *Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого,
300026 Тула, пр-т Ленина, 125, Россия.*

E-mail: ²den_tspu@mail.ru

Формирование метода угловых пограничных функций относится к середине 1970-х годов, когда В.Ф. Бутузовым были рассмотрены разностные, а затем параболические и эллиптические уравнения в областях с угловыми точками границы (см. [1]–[2]). Алгоритм построения асимптотики решения таких задач был подробно описан в [3]. Этот алгоритм предполагает выполнение определенной последовательности действий: сначала из регулярной, погранслойных и угловых частей "собирается" формальный асимптотический ряд, затем доказывается его равномерная сходимость к решению задачи. Регулярная часть асимптотики определяется из вырожденного уравнения, которое является функциональным. Погранслойные функции являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений. Угловые пограничные функции были получены для первой краевой задачи в случае линейности исходного уравнения. Для второй краевой задачи главный член угловой части асимптотики оказывается нулевым, а последующие угловые функции определяются из линейных задач.

В 1990-х годах В.Ф. Бутузов предложил одному из авторов рассмотреть для нелинейного эллиптического уравнения в прямоугольнике задачу с краевыми условиями первого рода. Основная трудность заключалась в построении угловой части асимптотики, что предполагало рассмотрение нелинейных уравнений того же типа, что и исходное. Эту задачу удалось решить с помощью метода верхних и нижних решений. Пришлось конструировать барьерные функции, удовлетворяющие необходимым оценкам. В одних случаях барьеры удается построить в виде определенных функций, пригодных во всей рассматриваемой области. В других случаях область приходится разбивать на части и в каждой из них строить свои барьерные функции с учетом непрерывной стыковки. Затем из получаемых кусочно-гладких барьеров необходимо получить гладкие барьеры. Построение таких барьеров гарантирует существование необходимых решений нелинейных задач (см. [4]–[6]).

В настоящее время достаточно подробно исследованы эллиптические и параболические задачи с квадратичными и кубическими нелинейностями (см. [7]–[9]).

Для обоснования построенной формальной асимптотики решения наиболее удобной оказалась схема модификации, предложенная Н.Н. Нефедовым (см. [10]). Для угловых пограничных функций модифицировать пришлось не асимптотику, а ба-

рьерные функции.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бутузов В.Ф., "Асимптотика решения разностного уравнения с малыми шагами в прямоугольной области"// Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Т. 12. - №3. 1972. - С. 582-597.
- [2] Бутузов В.Ф., Нестеров А.В., "Об одном сингулярно возмущенном уравнении параболического типа"// Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 1978. № 2. - С. 49-56.
- [3] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. - М.: Высшая школа, 1990.
- [4] Денисов И.В., "Первая краевая задача для квазилинейного сингулярно возмущенного параболического уравнения в прямоугольнике"// Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Т. 36. - №10. 1996. - С. 56-72.
- [5] Денисов И.В., "Оценка остаточного члена в асимптотике решения краевой задачи"// Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Т. 36. - №12. - 1996. - С. 64-67.
- [6] Денисов И.В., "Угловой погранслоем в нелинейных сингулярно возмущенных эллиптических задачах"// Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Т. 48. - №1. - 2008. - С. 62-79.
- [7] Денисов И.В., "Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с квадратичной нелинейностью"// Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Т.57. - №2. 2017. - С. 255-274.
- [8] Денисов А.И., Денисов И.В., "Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с немонотонными нелинейностями"// Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Т.59. №9. 2019. - С. 1581-1590.
- [9] Денисов А.И., Денисов И.В., "Классификация кубических многочленов в нелинейном методе угловых пограничных функций"// Чебышевский сборник. Т.26. Вып. 4. 2025. - С. -.
- [10] Нефедов Н.Н., "Метод дифференциальных неравенств для некоторых сингулярно возмущенных задач в частных производных"// Дифференц. уравнения. Т.31. №4. 1995. - С. 719-723.

Нелинейные и линейные задачи теории длинных волн на воде в областях с границей без граничных условий

С. Ю. Доброхотов¹, Д. С. Миненков², В. Е. Назайкинский³

^{1,2,3}*Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлунского РАН, Москва, Россия.*

E-mails: ¹s.dobrokhотов@gmail.com, ²minenkov.ds@gmail.com, ³nazaikinskii@gmail.com

Мы обсуждаем метод построения асимптотических решений системы уравнений мелкой воды бассейнах с пологими берегами. Метод состоит из следующих этапов. Сначала строятся необрушающиеся решения линеаризованной системы в области с границей, которая совпадает с береговой линией. Особенность таких задач состоит в том, что граничные условия здесь не ставятся, и их заменяет условие ограниченности решения. Затем с помощью модифицированного преобразования Карриера-Гринспана по построенным решениям линейной задачи приближенно восстанавливается решение нелинейной задачи со свободной границей в виде параметрически заданных функций. Обсуждаются сравнение с экспериментом и приложения к задачам о волнах цунами и о береговых волнах.

Работа поддержана грантом РФФ, проект № 24-11-002132024

ЛИТЕРАТУРА

- [1] S. Yu. Dobrokhотов, D. S. Minenkov, M. M. Votyakova, “ Asymptotics of Long Nonlinear Coastal Waves in Basins with Gentle Shores”, // *Russian Journal of Mathematical Physics*,, **31**:1 (2024), 79–93.
- [2] S. Yu. Dobrokhотов, D. S. Minenkov, V. E. Nazaikinskii “ Asymptotics of Long Nonlinear Coastal Waves in Basins with Gentle Shores”, // *Russian Journal of Mathematical Physics*,, **29**:1 (2024), 28–36.

Регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи Коши для однородного уравнения Шредингера с потенциалом $Q = X^2$, содержащей фокальные точки и сингулярные начальные условия

А. Г. Елисеев

ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Россия.

E-mail: predikat@bk.ru

Аннотация

Опираясь на идеи асимптотического интегрирования задач с нестабильным спектром указано, каким образом следует вводить регуляризирующие функции, подробно описан формализм метода регуляризации для указанного вида особенности, проведено обоснование этого алгоритма и построено асимптотическое решение любого порядка по малому параметру.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача, асимптотическое решение, метод регуляризации, фокальные точки.

1. Введение.

В настоящее время различным методам асимптотического интегрирования сингулярно возмущенных задач посвящено огромное количество работ, их столь много, что полного обзора в статье ограниченного объема привести не представляется возможным. Отсылаем читателя к монографиям [1, 2], где приведены подробные библиографии по существующим подходам в теории сингулярных возмущений и сделан обзор о современном состоянии метода регуляризации С.А. Ломова, основные принципы которого, по признанию самого автора в монографии [1], были заложены в конце пятидесятых, начале шестидесятых годов. Основная проблема, с которой сталкивается исследователь при применении метода регуляризации, связана с поиском и описанием регуляризирующих функций, которые содержат в себе неравномерную сингулярную зависимость решения искомой задачи, выделяя которые, можно оставшуюся часть решения искать в виде степенных рядов по малому параметру. Развитие метода регуляризации привело к пониманию того, что этот поиск тесно связан со спектральными характеристиками предельного оператора. В частности, установлено, каким образом следует описывать сингулярную зависимость асимптотического решения от малого параметра при выполнении условий стабильности спектра (см. [1, 2]). Особый интерес среди таких задач вызывают те, в которых спектральные особенности выражены в виде точечной нестабильности (см., например, [3]–[8]). Типичными физическими примерами сингулярно возмущенных задач являются уравнение Навье-Стокса с малой вязкостью и уравнение Шредингера, если постоянную Планка \hbar считать малой

величиной ¹. Формальный предельный переход $\hbar \rightarrow 0$ в соотношениях квантовой теории осуществляет переход от квантовой к классической механике (см., например, [9], §6), поэтому в тех случаях, когда целесообразно искать приближенные (по малому \hbar) решения уравнения Шредингера, говорят о квазиклассическом приближении (см. [9], Гл. 7). Описанный квазиклассический переход в нестационарном уравнении Шредингера в координатном представлении с гамильтонианом $\hat{H}(p, x) = \hat{p}^2 + \hat{x}^2$ порождает сингулярно возмущенную задачу, асимптотическому интегрированию которой посвящена настоящая работа. Сингулярно возмущенное уравнение Шредингера с потенциалом X^2 интересно тем, что оно содержит два типа особенностей "сильную" точку поворота по переменной x и фокальные точки по времени t . Поясним вышеизложенное на уравнении Шредингера вида

$$i\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = -\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 u + h(x, t)$$

Для наглядного представления о виде спектральной особенности перейдем к матричной форме записи

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - i\varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -h \end{pmatrix}$$

здесь введена замена $\varepsilon \cdot \partial u / \partial x = v$. Тогда матрица предельного оператора имеет вид:

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь легко заметить, что матрица $A(x)$ диагонализуема и имеет гладкий базис из собственных векторов при $x \neq 0$, а в точке пересечения собственных значений (т.е. при $x = 0$) соответствующий ей предельный оператор меняет диагональную структуру на жорданову и базис из собственных векторов теряет гладкость по x . Такая спектральная особенность в методе регуляризации представляет собой "сильную" точку поворота. "Сильная точка" поворота проявляет себя при построении регуляризованной асимптотики решения в неоднородных задачах (см. [5]—[7]). Данная работа посвящена построению регуляризованной асимптотики решения на промежутках времени, при которых возникают фокальные точки.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} i\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = -\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 u, \\ u(x, 0) = e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon}} f(x), \quad t \in [0, T], \quad -\infty < x < +\infty. \end{cases} \quad (1)$$

¹ Строго говоря, постоянная Планка \hbar является размерной величиной и имеет вполне конкретное значение, и утверждение о малости \hbar следует понимать в том смысле, что всегда можно выделить безразмерную комбинацию параметров, содержащую \hbar в какой-то степени, малую по сравнению с другими безразмерными параметрами, не содержащими \hbar .

с условиями:

- 1) $T > \frac{\pi}{8}$ - (условие существования фокальных точек);
- 2) $f(x) \in C^\infty(-\infty, +\infty)$;
- 3) $f(x) \in S$ - пространству Шварца $S(R)$;

Замечание. Множество гладких функций, вообще говоря комплекснозначных на R , принадлежит пространству Шварца, если любая ее производная убывает на бесконечности быстрее любой степени модуля аргумента x . Другими словами верны оценки для всяких целых положительных чисел m, n и $x \in R$

$$\sup_{0 \leq p \leq m} (1 + |x|^n) |f^{(p)}(x)| = C_{nm} < \infty$$

Классическим решением задачи (1) называется функция $u(x, t, \varepsilon)$, непрерывная в $\bar{Q}_T = (-\infty, +\infty) \times [0, T]$, имеющая непрерывные $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в Q_T , удовлетворяющая во всех точках Q_T уравнению (1) и непрерывно примыкающая к начальным условиям $f(x)$. Справедлива следующая теорема

Теорема 1 *Классическое решение задачи (1) при выполненных условиях 1)– 3) существует и единственно.*

Особенность и сложность сингулярно возмущенной задачи Коши в данном случае состоит в том, что сингулярность решения зависит как от сингулярности оператора Шредингера, так и сингулярности начального условия. Взаимодействия их приводит к существенному усложнению построения асимптотики решения. Прежде чем излагать построение регуляризованной асимптотики решения задачи Коши, рассмотрим вкратце существующие подходы. Решение на промежутке $t \in [0, \frac{\pi}{8})$ задачи (1) ищут в виде $u(x, t) = e^{-\frac{i}{\varepsilon}\varphi(x, t)}v(x, t, \varepsilon)$ Подставив в однородное уравнение задачи (1), получим

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 - x^2\right)v(x, t) + i\varepsilon\left(\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}v(x, t) - \right. \\ & \left. - 2\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial v(x, t)}{\partial x}\right) + \varepsilon^2\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = 0. \end{aligned}$$

Выберем функцию $\varphi(x, t)$ как решение задачи Коши для нелинейного уравнения Гамильтона-Якоби

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 - x^2 = 0, \\ \varphi(x, 0) = \frac{x^2}{2}. \end{cases} \quad (2)$$

Выбор начального условия для $\varphi(x, t)$ обусловлен тем, чтобы в дальнейшем начальное условие для $v(x, t, \varepsilon)$ не содержало сингулярную зависимость от ε . Введем обозначения $p = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, q = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$. Тогда уравнение (2) примет вид $p - q^2 = x^2$. Уравнение характеристик для задачи (2) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dt}{1} = \frac{dx}{-2q} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{2x} = \frac{d\varphi}{x^2 - q^2} = d\tau, \\ \text{Н.У. : } t = 0, x = s, \varphi = \frac{s^2}{2}, q = s, p = 2s^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Интегрируя систему (3), получаем искомую поверхность в параметрическом виде:

$$t = \tau, x = s(\cos(2\tau) - \sin(2\tau)), q = s(\sin(2\tau) + \cos(2\tau)), \\ \varphi = \frac{s^2 \cos(4\tau)}{2}$$

В результате получим $\varphi = \frac{x^2 \cos(4t)}{2(\cos(2t) - \sin(2t))^2} = \frac{x^2(\sin(2t) + \cos(2t))}{2(\cos(2t) - \sin(2t))}$. Якобиан $\frac{D(t,x)}{D(\tau,s)} = \cos(2\tau) - \sin(2\tau)$ обращается в нуль в точках $\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$, которые носят названия фокальных. Интересно вычислить значение точного решения в фокальных точках. Запишем решение задачи (1) через фундаментальное решение Меллера.

$$u(x, t, \varepsilon) = \frac{\exp(-\frac{i\pi}{4} \text{sign}(\sin(2t)))}{\sqrt{2\pi\varepsilon|\sin(2t)|}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i\xi^2}{2\varepsilon}} f(\xi) \exp \left[i \left(\text{ctg}(2t) \frac{x^2 + \xi^2}{2\varepsilon} - \frac{x\xi}{\varepsilon \sin(2t)} \right) \right] d\xi$$

При $t = \frac{\pi}{8}$ имеем

$$u(x, \frac{\pi}{8}, \varepsilon) = \frac{\exp(-\frac{i\pi}{4}) e^{\frac{ix^2}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\sqrt{2\pi\varepsilon}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{i\sqrt{2}x\xi}{\varepsilon}} d\xi = \sqrt[4]{2} \exp(-\frac{i\pi}{4}) e^{\frac{ix^2}{2\varepsilon}} \widehat{f}_\varepsilon(\sqrt{2}x) = \\ = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{\varepsilon}} \exp(-\frac{i\pi}{4}) e^{\frac{ix^2}{2\varepsilon}} \widehat{f}\left(\frac{\sqrt{2}x}{\varepsilon}\right) = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt[4]{2}} e^{\frac{ix^2}{2\varepsilon}} \widehat{f}\left(\frac{\varepsilon\xi}{\sqrt{2}}\right)$$

- есть f_ε - ε -преобразование Фурье начального условия.

Главный член асимптотики данной задачи Коши на промежутке $t \in [0, \frac{\pi}{8})$ имеет вид

$$u_0(x, t) = \frac{e^{-i\frac{x^2(\sin(2t) + \cos(2t))}{2\varepsilon(\cos(2t) - \sin(2t))}}}{\sqrt{\cos(2t) - \sin(2t)}} f\left(\frac{x}{\cos(2t) - \sin(2t)}\right)$$

Из структуры решения видно влияние фокальной точки. Решение в этом виде не может быть продолжено за фокальную точку.

2. Регуляризирующая функция.

Для построения регуляризованной асимптотики решения рассмотрим задачу (1) с возмущенным начальным условием

$$\begin{cases} i\varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} = -\varepsilon^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x^2 w, \\ w(x, 0) = e^{-i\frac{x^2 \mu(\varepsilon)}{2\varepsilon}} f(x), \quad t \in [0, T], \quad -\infty < x < +\infty. \end{cases} \quad (4)$$

где $\mu(\varepsilon) = 1 - i\varepsilon^\alpha$, $\alpha \geq 2$. Запишем задачу Коши для нелинейного уравнения Гамильтона-Якоби

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 - x^2 = 0, \\ \varphi(x, 0) = \frac{x^2 \mu(\varepsilon)}{2}. \end{cases} \quad (5)$$

Уравнение характеристик для задачи (5) имеет вид

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{-2q} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{2x} = \frac{d\varphi}{x^2 - q^2} = d\tau, \quad (6)$$

Н.У. : $t = 0, x = s, \varphi = \frac{s^2 \mu(\varepsilon)}{2}, q = s\mu(\varepsilon)$.

Интегрируя систему (6), получаем искомую поверхность в параметрическом виде:

$$t = \tau, x = s(\cos(2\tau) - \mu(\varepsilon) \sin(2\tau)), q = s(\sin(2\tau) + \mu(\varepsilon) \cos(2\tau)), \\ \varphi = \frac{s^2}{4}((1 - \mu^2(\varepsilon)) \sin(4\tau) + 2\mu(\varepsilon) \cos(4\tau))$$

В результате получим $\varphi = \frac{x^2(\sin(2t) + \mu(\varepsilon) \cos(2t))}{2(\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t))}$. Якобиан $\frac{D(t,x)}{D(\tau,s)} = \cos(2\tau) - \mu(\varepsilon) \sin(2\tau) \neq 0$ не обращается в нуль в точках $\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$. Исходя из вышеизложенного, введем регуляризирующую функцию задачи (4) в виде экспоненты

$$\sigma = \\ = \exp\left(-i\left(\frac{1}{2} \arctg\left(\frac{\varepsilon^\alpha \sin(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)}\right) + \frac{\pi}{2}\left(\left[\frac{2}{\pi}\left(t + \frac{3\pi}{8}\right)\right]\right)\right)\right) \exp\left(-\frac{ix^2(\sin(2t) + \mu(\varepsilon) \cos(2t))}{2\varepsilon(\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t))}\right) = \\ = \exp(-i\psi(t, \varepsilon)) \exp\left(-i\frac{\varphi(x,t,\varepsilon)}{\varepsilon}\right)$$

Первая экспонента вспомогательная. Она обеспечивает непрерывность регуляризованного решения при переходе через фокальные точки по времени. Вторая экспонента содержит неравномерную зависимость от параметра ε и является непосредственно возмущенной регуляризирующей функцией. В первой экспоненте выражение $\frac{1}{2} \arctg\left(\frac{\varepsilon^\alpha \sin(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)}\right) = \underline{O}(\varepsilon^\alpha)$. Несложно установить, что при $\alpha = 2, \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{\varepsilon^2 \sin(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)}\right) + \frac{\pi}{2}\left(\left[\frac{2}{\pi}\left(t + \frac{3\pi}{8}\right)\right]\right) = \frac{\pi}{2}\left(\left[\frac{2}{\pi}\left(t + \frac{3\pi}{8}\right)\right]\right) + \underline{O}(\varepsilon^2)$.

Исходя из выше изложенного регуляризирующую функцию при $\varepsilon \leq 0.01$ можно записать в виде

$$\sigma = \exp\left(-i\left(\frac{\pi}{2}\left(\left[\frac{2}{\pi}\left(t + \frac{3\pi}{8}\right)\right]\right)\right)\right) \exp\left(-\frac{ix^2(\sin(2t) + \mu(\varepsilon) \cos(2t))}{2\varepsilon(\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t))}\right) = \\ = \exp(-i\psi(t)) \exp\left(-i\frac{\varphi(x,t,\varepsilon)}{\varepsilon}\right)$$

3. Построение регуляризованного асимптотического ряда.

Согласно построенной в предыдущем разделе регуляризирующей функции $\sigma = \exp(-i\psi(t)) \exp\left(-i\frac{\varphi(x,t,\varepsilon)}{\varepsilon}\right)$ решение ищем в виде $w(x, t, \varepsilon) = \sigma y(x, t, \varepsilon)$. Для упрощения построения итерационных задач введем в регуляризирующую функцию множитель $\frac{1}{\sqrt{|\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)|}}$. Тогда регуляризирующая функция примет вид

$$\sigma = \exp(-i\psi(t)) \exp\left(-i\frac{\varphi(x, t, \varepsilon)}{\varepsilon}\right) \frac{1}{\sqrt{|\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)|}}$$

Используя формулу сложного дифференцирования, получим задачу Коши относительно функции $y(x, t, \varepsilon)$ предварительно вычислив производные

$$i\varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} = \left(i\varepsilon \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} y + i\varepsilon \frac{\sin(2t) + \mu(\varepsilon) \cos(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)} y\right) \sigma \\ \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - x^2 w = \\ = \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - i\varepsilon 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 y - x^2 y\right) \sigma \tag{7}$$

Учитывая (7), получим задачу Коши для функции $y(x, t, \varepsilon)$

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - 2x \frac{\sin(2t) + \mu(\varepsilon) \cos(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)} \frac{\partial y}{\partial x} = i\varepsilon \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ y(x, 0) = f(x) \end{cases} \tag{8}$$

Решение (8) ищем в виде $y(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(x, t)$, где функции $y_k(x, t) \in C^\infty((-\infty, \infty) \times [0, T])$. Подставив ряд в систему, получим серию итерационных задач:

$$\begin{cases} \frac{\partial y_k}{\partial t} - 2x \frac{\sin(2t) + \mu(\varepsilon) \cos(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)} \frac{\partial y_k}{\partial x} = i\varepsilon \frac{\partial^2 y_{k-1}}{\partial x^2} \\ y_k(x, 0) = f(x) \delta_k^0 \end{cases} \quad (9)$$

Рассмотрим систему на нулевом итерационном шаге

$$k = 0 \quad \begin{cases} \frac{\partial y_0}{\partial t} - 2x \frac{\sin(2t) + \mu(\varepsilon) \cos(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)} \frac{\partial y_0}{\partial x} = 0 \\ y_0(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad (10)$$

Для решения уравнения (10) запишем уравнение характеристик

$$dt = \frac{dx}{-2x \frac{\sin(2t) + \mu(\varepsilon) \cos(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)}}, \text{ первый интеграл которой имеет вид } \frac{x}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)} = C.$$

Решение задачи (10) запишется в виде $y_0(x, t) = g(C) = g(\frac{x}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)})$, где g неизвестная функция. Определим ее из начального условия.

$$w_0(x, 0, \varepsilon) = \sigma(x, 0, \varepsilon)g(x) = \exp(-\frac{ix^2\mu(\varepsilon)}{2\varepsilon})g(x) = \exp(-\frac{ix^2\mu(\varepsilon)}{2\varepsilon})f(x)$$

Отсюда $g(x) = f(x)$ и $y_0(x, t) = f(\frac{x}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)})$. В результате получим явный вид главного члена асимптотики, определенного в фокальных точках на отрезке времени $[0, T]$

$$w_0(x, t, \varepsilon) = \frac{\exp(-i(\frac{\pi}{2}([\frac{2}{\pi}(t + \frac{3\pi}{8}])))}{\sqrt{|\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)|}} \exp(-\frac{ix^2(\sin(2t) + \mu(\varepsilon) \cos(2t))}{2\varepsilon(\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t))}) f(\frac{x}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)})$$

Рассмотрим систему на первом итерационном шаге

$$k = 1 \quad \begin{cases} \frac{\partial y_1}{\partial t} - 2x \frac{\sin(2t) + \mu(\varepsilon) \cos(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)} \frac{\partial y_1}{\partial x} = i \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} \\ y_1(x, 0, \varepsilon) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Запишем систему характеристик уравнения (11).

$$dt = \frac{dx}{-2x \frac{\sin(2t) + \mu(\varepsilon) \cos(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)}} = \frac{dy_1}{i(\frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2} / (\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t))^2)}$$

Здесь $\frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2} / (\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t))^2$, здесь $v = \frac{x}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)}$. Заметим, что функции $f(v)$, $\frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2}(v)$ постоянны на первом интеграле $\frac{x}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)} = C_1$. Проинтегрировав уравнение, получим

$$y_1(x, t, \varepsilon) = \frac{i}{2} \frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2} \frac{\sin(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)} + g(C_1)$$

Функция $g(C_1)$ на данный момент произвольная. Подставив первый интеграл $C_1 = \frac{x}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)}$, получим

$$y_1(x, t) = \frac{i}{2} \frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2} \frac{\sin(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)} + g(\frac{x}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)})$$

Подчиним начальному условию $y_1(x, 0) = g(x) = 0$. Отсюда получим

$$y_1(x, t) = \frac{i}{2} \frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2} \frac{\sin(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)}$$

Производя сужение на регуляризирующую функцию, получим

$$w_1(x, t, \varepsilon) = \frac{\exp\left(-i\left(\frac{\pi}{2}\left(\left[\frac{2}{\pi}(t + \frac{3\pi}{8})\right]\right)\right)}{\sqrt{|\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)|}} \exp\left(-\frac{ix^2(\sin(2t) + \mu(\varepsilon) \cos(2t))}{2\varepsilon(\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t))}\right) \frac{i}{2} \frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2} \frac{\sin(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)}$$

Решение $w(x, t, \varepsilon)$ с точностью до $\underline{O}(\varepsilon^2)$ имеет вид

$$w(x, t, \varepsilon) = \frac{\exp\left(-i\left(\frac{\pi}{2}\left(\left[\frac{2}{\pi}(t + \frac{3\pi}{8})\right]\right)\right)}{\sqrt{|\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)|}} \exp\left(-\frac{ix^2(\sin(2t) + \mu(\varepsilon) \cos(2t))}{2\varepsilon(\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t))}\right) \left(f(v) + \varepsilon \frac{i}{2} \frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2} \frac{\sin(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)}\right) + \underline{O}(\varepsilon^2)$$

По индукции можно доказать, что общий вид решения на n шаге имеет вид

$$y_n(x, t, \varepsilon) = \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^{2n} f(v)}{\partial v^{2n}} \left(\frac{\sin(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)}\right)^n$$

Оценим решение $w_k(x, t, \varepsilon)$ с учетом, что $f(x) \in S$ имеет вид

$$\begin{aligned} |w_k(x, t, \varepsilon)| &\leq \frac{1}{2^k k! \sqrt{|\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)|}} \left| \frac{\partial^{2k} f(v)}{\partial v^{2k}} \right| \frac{1}{|\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)|^k} \leq \\ &\leq \frac{1}{2^k k! \sqrt{|\cos^2(2t) + \varepsilon^2 \sin^2(2t)|}^{2k+1}} \frac{C_{n2k}}{1 + |v|^n} = \frac{C_{n2k} |\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)|^{n-(k-\frac{1}{2})}}{2^k k! |x|^n} \leq \\ &\leq \frac{(\sqrt{2} + \varepsilon^\alpha)^n C_{n2k} + C_{n0}}{2^k k! (1 + |x|^n)} \leq \frac{M_{n2k}^k}{2^k k! (1 + |x|^n)} \end{aligned}$$

Решение $w(x, t, \varepsilon)$ в виде асимптотического ряда запишется как

$$w(x, t, \varepsilon) = \frac{\exp\left(-i\left(\frac{\pi}{2}\left(\left[\frac{2}{\pi}(t + \frac{3\pi}{8})\right]\right)\right)}{\sqrt{|\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)|}} \exp\left(-\frac{ix^2(\sin(2t) + \mu(\varepsilon) \cos(2t))}{2\varepsilon(\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t))}\right) \left((f(v) + \varepsilon \frac{i}{2} \frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2} \frac{\sin(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)}) + \dots + \varepsilon^n \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^{2n} f(v)}{\partial v^{2n}} \left(\frac{\sin(2t)}{\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)}\right)^n + \dots\right)$$

Замечание. Если $f(x) \in S$ такова, что оценки роста $M_{n2k} \leq 2^k$, то асимптотический ряд по ε будет сходящимся.

Лемма 1 О сходимости. Решение задачи (4) $w(x, t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к решению $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1).

Из этой леммы следует, что решение задачи Коши при возмущенном начальном условии стремится к решению для исходной задачи Коши при невозмущенном начальном условии тем быстрее, чем выше степень α .

4. Оценка остаточного члена. Пусть решены $(N + 1)$ итерационных задач. Тогда решение задачи Коши можно представить в виде

$$w(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k w_k(x, t) + \varepsilon^{N+1} R_N(x, t, \varepsilon), \quad (12)$$

где

$$w_k(x, t, \varepsilon) = y_k(x, t) \exp\left(-i\left(\frac{\pi}{2}\left(\left[\frac{2}{\pi}\left(t + \frac{3\pi}{8}\right)\right]\right)\right)\right) \exp\left(-\frac{ix^2(\sin(2t) + \mu(\varepsilon) \cos(2t))}{2\varepsilon(\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t))}\right) \frac{1}{\sqrt{|\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)|}}$$

$R_N(x, t, \varepsilon)$ — остаток. Подставив выражение (12) в (4), получим задачу для остатка

$R_N(x, t, \varepsilon)$:

$$\begin{cases} i\varepsilon \frac{\partial R_N}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 R_N}{\partial x^2} + x^2 R_N = \varepsilon H(x, t, \varepsilon), \\ R_N(x, 0, \varepsilon) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

где

$$H(x, t, \varepsilon) = -\left(\frac{\partial^2 y_N(v)}{\partial v^2} \exp(-i\psi(t)) \exp\left(-\frac{ix^2(\sin(2t) + \mu(\varepsilon) \cos(2t))}{2\varepsilon(\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t))}\right) \frac{1}{\sqrt{|\cos(2t) - \mu(\varepsilon) \sin(2t)|^5}}\right)$$

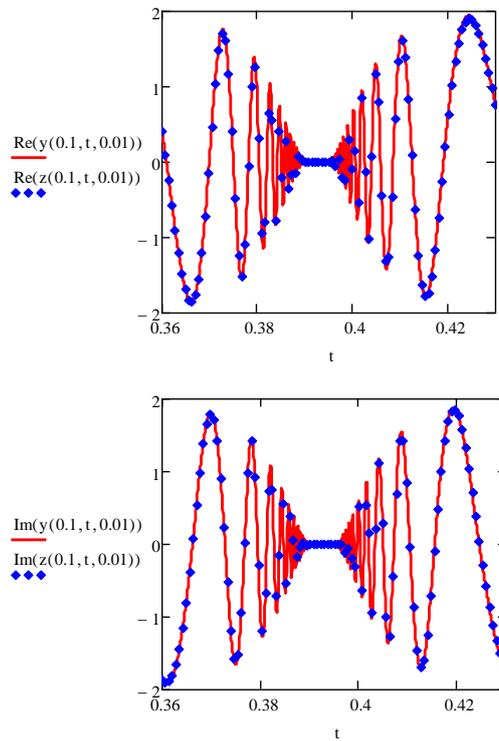
Так как $y_N(v) \in S$, то и $H(x, t, \varepsilon) \in S$.

Теорема 2 (оценка остаточного члена). Пусть итерационные задачи решены до $n + 1$ порядка и выполнены требования:

- 1) условия 1)– 3) для задачи Коши (1);
 - 2) $\forall x \in R \quad H(x, t, \varepsilon) \in S$ с оценками равномерными по $t \in [0, T]$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.
- Тогда $\exists C > 0 \quad |R_N(x, t, \varepsilon)| \leq C \quad \forall (x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, T] \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

В заключении приведем сравнение точного решения задачи Коши для уравнения Шредингера и главного члена регуляризованной асимптотики решения с начальной функцией $e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon}} \frac{1}{1+x^2}$ для точного решения и начальной функцией $e^{-i\frac{x^2(1-i\varepsilon^2)}{2\varepsilon}} \frac{1}{1+x^2}$ для возмущенного решения на отрезке времени $[0.36, 0.43]$ с параметрами $x = 0.1, \varepsilon = 0.01$. Непрерывная линия-точное решение, точки-главный член регуляризованной асимптотики решения.

Результаты А.Г. Елисеева были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2026-0010).



ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981.
- [2] Ломов С. А., Ломов И. С. Основы математической теории пограничного слоя. — М.: Изд-во Московского университета, 2011.
- [3] Yeliseev A., Ratnikova T., Shaposhnikova D. Regularized Asymptotics of the Solution of the Singularly Perturbed First Boundary Value Problem on the Semiaxis for a Parabolic Equation with a Rational «Simple» Turning Point // Mathematics. 2021. № 9, 405. doi.org/10.3390/math9040405.
- [4] Елисеев А. Г., Кириченко П. В. Сингулярно возмущенная задача Коши при наличии "слабой" точки поворота первого порядка у предельного оператора с кратным спектром // Дифференциальные уравнения, 2022, Т. 58, № 6, С. 733–746.
- [5] Елисеев А. Г. Пример решения сингулярно возмущенной задачи Коши для параболического уравнения при наличии «сильной» точки поворота // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2022. № 3. С. 46–59.
- [6] Елисеев А. Г., Кириченко П. В. Регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенной смешанной задачи на полуоси для уравнения типа Шредингера при наличии "сильной" точки поворота у предельного оператора // ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК Том 24. Выпуск 1. с. 50–68., DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-50-68
- [7] Yeliseev A., Ratnikova T., Shaposhnikova D. Regularized Asymptotics of the Solution of a Singularly Perturbed Mixed Problem on the Semiaxis for the Schrodinger Equation with the Potential $Q = X^2$ // Mathematics 2023, 11(20), 4328; DOI: 10.3390/math11204328

- [8] А.Г. Елисеев., П.В. Кириченко. Построение регуляризованной асимптотики решения сингулярно возмущенной смешанной задачи на полуоси для неоднородного уравнения типа Шрёдингера с потенциалом $V(x)=X$. // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2024, 231, 27–43
- [9] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики, Т. 3, Квантовая механика (нерелятивистская теория). — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.

О регулярном вырождении в сингулярно возмущенной задаче в нерегулярном случае.

С. П. Зубова¹, Е. В. Раецкая²

¹ВГУ, Воронеж, РФ.

²ВГЛТУ, Воронеж, РФ.

E-mails: ¹spzubova@mail.ru, ²raetskaya@inbox.ru

Исследуется случай регулярного вырождения решения задачи

$$A \frac{dx}{dt} = (B + \varepsilon C)x(t, \varepsilon), \quad (1)$$

$$x(0, \varepsilon) = x_0(\varepsilon), \quad (2)$$

где $A, B, C : E_1 \rightarrow E_2$; E_1, E_2 – банаховы пространства, A – линейный нетеров оператор (фредгольмов с $\chi \neq 0$); $B, C \in L(E_1, E_2)$, $t \in [0, \infty)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$; $\lim x_0(\varepsilon) = x^0 \in E_1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Уравнение (1) является нерегулярным, так как не существует $(A - \lambda(B + \varepsilon C))^{-1}$, $\forall \lambda \in \dot{U}(0)$ в силу того, что $\chi = \dim \text{Ker} A - \dim \text{Coker} A \neq 0$, то есть пучок $A - \lambda(B + \varepsilon C)$ – нерегулярный.

Наряду с (1), (2) рассматривается предельная задача

$$A \frac{d\bar{x}}{dt} = B\bar{x}(t), \quad (3)$$

$$\bar{x}(0) = x^* \in E_1. \quad (4)$$

В силу нетеровости оператора A имеют место разложения пространств E_1 и E_2 в прямые суммы

$$E_1 = \text{Coim} A \dot{+} \text{Ker} A, \quad E_2 = \text{Im} A \dot{+} \text{Coker} A,$$

с проекторами P – на $\text{Ker} A$ и Q – на $\text{Coker} A$, такие, что сужение \tilde{A} оператора A на $\text{Coim} A$ имеет ограниченный обратный \tilde{A}^{-1} .

Большую роль при решении задач (1), (2) и (3), (4) играет оператор $A_1 = QBP$, с помощью которого

$$\text{Ker} A = \text{Coim} A_1 \dot{+} \text{Ker} A_1, \quad \text{Coker} A = \text{Im} A_1 \dot{+} \text{Coker} A_1, \quad (5)$$

и существует $\tilde{A}_1^{-1} \in L(\text{Im} A_1, \text{Coim} A_1)$, $\tilde{A}_1 = A|_{\text{Coim} A}$.

Рассматривается случай $\text{Ker} A_1 = 0$.

Вводятся обозначения: $A^- = \tilde{A}_1^{-1}(I - Q)$, $A_1^- = \tilde{A}_1^{-1}(I - Q_1)$, $S_0 = QB$, $T_0 = A^{-1}B$, Q_1 – проектор на $\text{Coker} A_1$ в (5), $S_1 = Q_1 S_0 T_0$, I – единичный оператор в соответствующем пространстве.

Теорема 1. Решение $\bar{x}(t)$ задачи (3), (4) существует в том и только том случае, когда $x^0 \in M_0$, где

$$M_0 = \{x \in E_1 \mid S_i x = 0, \quad i = 0, 1\}.$$

Решение единственно,

$$\bar{x}(t) = \exp^{tD_0} x^*,$$

где $D_0(\cdot) = (I - A_1^- S_0)T_0(\cdot)$ и обладают свойством $\bar{x}(t) \in M_0, \quad \forall t \in [0, \infty)$.

Теорема 2. Решение $x(t, \varepsilon)$ задачи (1), (2) существует в том и только том случае, когда $x_0(\varepsilon) \in M_\varepsilon$, где

$$M_0 = \{x \in E_1 \mid Q(B + \varepsilon C)x = 0 \quad \bigvee \quad (Q_1 Q(B + \varepsilon C)A^-(B + \varepsilon C) - \\ - \varepsilon Q_1 QCP(I + \varepsilon A_1^- QCP)^{-1} A_1^- Q(B + \varepsilon C)A^-(B + \varepsilon C))x = 0\}.$$

Решение единственно,

$$x(t, \varepsilon) = \exp^{tD_1(\varepsilon)} x_0(\varepsilon),$$

где $D_1(\varepsilon)(\cdot) = (I - (I - \varepsilon A_1^- QCP)^{-1} A_1^- Q(B + \varepsilon C)A^-(B + \varepsilon C))(\cdot)$ и $x(t, \varepsilon) \in M_\varepsilon$.

Заметим, $x_0(\varepsilon)$ и x^* принадлежат, вообще говоря, разным подпространствам, то есть задача (1), (2) является сингулярно возмущенной [1].

Однако справедлива

Теорема 3. В случае $\text{Ker} A_1 = \{0\}$

$$x(t, \varepsilon) \rightrightarrows \bar{x}(t), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad t \in [0, \infty),$$

где $\bar{x}(t)$ таково, что $\bar{x}(0) = x_0(0)$.

То есть имеет место регулярное вырождение при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения задачи (1), (2) в решение предельной задачи (3), (4)

Если же $\text{Ker} A_1 \neq \{0\}$, то в зависимости от свойств операторов B и C может быть как регулярное вырождение, так и сингулярное. Может

$$x(t, \varepsilon) \rightarrow \infty, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad \bigvee \quad \nexists \lim x(t, \varepsilon) \quad \bigvee \quad x(t, \varepsilon) = \bar{x}(t) + v(t, \varepsilon),$$

где $v(t, \varepsilon)$ – функция погранслоя в окрестности точки $t = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Васильева А.Б. Асимптотические разложения сингулярно возмущенных уравнений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. — М.: Наука, 1973. — 270 стр.
- [2] Зубова С.П., “Решение однородной задачи Коши для уравнения с нетеровым оператором при производной” // Докл. АН, **428**:4 (2009), 444-446.

- [3] Зубова С.П., “О роли возмущений в задаче Коши для уравнения с фредгольмовым оператором при производной” // *Докл. РАН*, **454**:4 (2014), 528-532.
- [4] Зубова С.П., Раецкая Е.В., “Решение полуграничной задачи для вырожденного уравнения в частных производных” // *Дифференциальные уравнения*, **58**:9 (2022), 1193-1204.
- [5] Зубова С.П., Раецкая Е.В., “Исследование решения задачи Коши для дескрипторного уравнения с возмущением в правой части” // *В сб.: Новые направления и новые результаты в теории метода регуляризации сингулярных возмущений Ломова. Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения С.А. Ломова. Москва., 24-25 ноября 2022 г.*— М.: МЭИ, 2022. — С. 149-160.

Асимптотика решения задачи оптимизации переходного процесса большой длительности в линейной сингулярно возмущенной системе

А. И. Калинин¹, Л. И. Лавринович²

^{1,2}Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.

E-mails: ¹kalininai@bsu.by, ²lavrinovich@bsu.by

В классе r -мерных управляющих воздействий $u(t)$, $t \in [0, t^*/\mu]$, с кусочно-непрерывными компонентами рассмотрим следующую задачу оптимизации линейной стационарной системы:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1x + B_1y + D_1u, x(0) = x_0, \\ \mu\dot{y} &= A_2x + B_2y + D_2u, y(0) = y_0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$x(t^*/\mu) = x_*, y(t^*/\mu) = y_*, \quad (2)$$

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{t^*/\mu} u^T P u dt \rightarrow \min, \quad (3)$$

где μ – малый положительный параметр, x – n_1 -вектор медленных переменных, y – n_2 -вектор быстрых переменных. Остальные элементы задачи имеют соответствующие размеры. В критерии качества (3) P – положительно-определенная симметрическая матрица.

Предположение 1. Действительные части всех собственных значений матриц $A_0 = A_1 - B_1B_2^{-1}A_2$, B_2 отрицательны.

Определение. Управление $u(t, \mu)$, $t \in [0, t^*/\mu]$, с кусочно-непрерывными компонентами назовем асимптотически субоптимальным в задаче (1)–(3), если для любого натурального числа N имеет место

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{J(u(\cdot, \mu)) - J(u^0(\cdot, \mu))}{\mu^N} = 0, \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{z(t^*/\mu, \mu) - z_*}{\mu^N} = 0,$$

где $u^0(t, \mu)$, $t \in [0, t^*/\mu]$, – оптимальное управление, а $z(t, \mu) = (x(t, \mu), y(t, \mu))$, $t \in [0, t^*/\mu]$, – траектория системы (1), порожденная управлением $u(t, \mu)$, $t \in [0, t^*/\mu]$, $z_* = (x_*, y_*)$.

Путем перехода к ”медленному времени” $\bar{t} = t\mu$, исходная задача сводится к задаче оптимизации переходного процесса за фиксированное время t^* в сингулярно возмущенной системе с двумя группами разномаштабных быстрых переменных. Для построения асимптотики решения задачи (1)–(3) используется методика, изложенная

в [1], а также метод пограничных функций [2]. Построение асимптотически субоптимального управления сводится к решению двух невозмущенных базовых задач меньшей размерности, чем исходная. Первая из них имеет вид

$$\frac{dx}{ds} = A_0x + D_0u, \quad x(0) = x_*, \quad x(-\infty) = 0,$$

$$J_1(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 u^T P u ds \rightarrow \min,$$

где

$$D_0 = D_1 - B_1 B_2^{-1} D_2.$$

Предположение 2. Динамическая система в первой базовой задаче вполне управляема [3].

При выполнении этого предположения первая базовая задача имеет единственное решение $u^*(s)$, $s \leq 0$, которое является нормальной экстремалью [4].

Вторая базовая задача имеет вид

$$\frac{dy}{d\tau} = B_2 y + D_2 u, \quad y(0) = y_* + B_2^{-1} (A_2 x_* + D_2 u^*(0)),$$

$$y(-\infty) = 0, \quad J_2(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 u^T P u d\tau \rightarrow \min.$$

Предположение 3. Динамическая система во второй базовой задаче вполне управляема.

При выполнении предположения 3 вторая базовая задача имеет единственное решение $u_*(\tau)$, $\tau \leq 0$, которое является нормальной экстремалью [4].

Управление

$$u(t, \mu) = u^*((\mu t - t^*)/\mu) + u_*((\mu t - t^*)/\mu^2), \quad t \in [0, t^*/\mu],$$

является асимптотически субоптимальным управлением в задаче (1)–(3).

Заметим, что в случае перехода в начало координат нулевое управление будет асимптотически субоптимальным управлением в исходной задаче.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Калинин А. И., Лавринович Л. И. "Асимптотический метод решения задачи оптимизации переходного процесса в трехтемповой сингулярно возмущенной системе" // *Доклады Национальной академии наук Беларуси*, **68**:3 (2024), 183-187.
- [2] Васильева А.Б. "Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных" // *Журн. вычисл. математики и матем. физики.*, (1963), 611-642.
- [3] Красовский Н. Н. "Теория управления движением". М.: Наука, 1968.

- [4] Мордухович Б.Ш. "Существование оптимальных управлений" // *Совр. пробл. матем. (Итоги науки и техники)* М.: ВИНТИ, **6** (1976), 207–271.

О псевдоаналитических решениях нелинейных сингулярно возмущенных уравнений

В. И. Качалов

Национальный исследовательский университет “МЭИ”, г. Москва, Россия.

E-mail: vikachalov@rambler.ru

1. Введение. Одним из основных методов решения нелинейных сингулярно возмущенных уравнений является метод погранфункций Васильевой–Бутузова–Нефёдова [1, 2, 3, 4]. С помощью этого метода решены многие важные прикладные задачи математической физики [2, 6, 7]. Значительное развитие он получил, благодаря развитию на случай нелинейных уравнений в частных производных методу верхних и нижних решений Н.Н.Нефёдова [8, 9]. Наряду с другими методами решения сингулярно возмущенных задач, такими как метод регуляризации С.А.Ломова [10], метод канонического оператора В.П.Маслова [11], метод усреднения Крылова–Боголюбова–Митропольского [12] и др., метод погранфункций строит решения указанных задач в виде асимптотически сходящихся рядов. Собственно говоря, так и задумывалось в методе малого параметра А.Пуанкаре, хотя подразумевалась и обычная сходимости при некоторых условиях на данные задачи. Впервые такие условия были сформулированы в рамках метода регуляризации, что, в общем-то, неудивительно, поскольку суть метода заключается в сведении сингулярно возмущенной задачи к регулярно возмущенной [13, 14, 15, 16, 17]. Аналитическая же теория регулярных возмущений к тому времени уже была построена, благодаря работам А.Пуанкаре [18], Т.Като [2], Реллиха [20] и др. С.А.Ломовым было введено понятие псевдоаналитического решения [13, 21], которое, в конечном итоге, привело к развитию метода регуляризации с помощью голоморфной регуляризации сингулярных возмущений [22, 23, 24]. В представленной работе изучено дифференциальное уравнение типа Бюргерса (см. также [25, 26]), заданное в банаховой алгебре.

2. Постановка задачи. Рассмотрим в коммутативной банаховой алгебре \mathcal{A} с единицей эволюционную задачу

$$\begin{aligned} \varepsilon \partial_t u &= Au + \varepsilon^2 u \cdot Hu, \quad t \in (0, T], \\ u|_{t=0} &= u^0, \end{aligned} \tag{1}$$

описывающую нелинейные физические процессы с учетом диссипации.

Здесь оператор A является неограниченным замкнутым, с областью определения D_A , оператор H может быть как ограниченным, так и неограниченным.

Задача (1), очевидно, является сингулярно возмущенной и ее формальное регуляризованное решение [13], следует искать в виде ряда

$$u^f(t, \varepsilon^{-1}; \varepsilon) = u_0(t, \varepsilon^{-1}) + \varepsilon u_1(t, \varepsilon^{-1}) + \dots + \varepsilon^n u_n(t, \varepsilon^{-1}) + \dots, \tag{2}$$

в котором коэффициенты сингулярным образом зависят от ε .

Определение 1. Функция $u^{pr}(t, \varepsilon^{-1}; \varepsilon)$ называется псевдорегулярным решением задачи (1), если ряд (2) сходится к ней при всех $t \in (0, T]$ в некоторой окрестности $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Определение 2. Решение $u(t, \varepsilon^{-1}; \varepsilon)$ задачи Коши (1) называется псевдоаналитическим в точке $\varepsilon = 0$, если $u(t, \varepsilon^{-1}; \varepsilon) = u^{pr}(t, \varepsilon^{-1}; \varepsilon)$.

Ясно, что это произойдет, если $u^{pr}(t, \varepsilon^{-1}; \varepsilon) \in D_A$ и ряд (2) допускает почленное дифференцирование по t .

Если подставить ряд (2) в уравнение (1) и воспользоваться правилом Коши произведения рядов, то получится следующая серия задач при $t \in (0, T]$:

$$\begin{aligned} \varepsilon \partial_t u_0 &= Au_0, & u_0|_{t=0} &= u^0; \\ \varepsilon \partial_t u_1 &= Au_1 + \varepsilon u_0 \cdot Hu_0, & u_1|_{t=0} &= 0; \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon \partial_t u_n &= Au_n + \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} u_k \cdot Hu_{n-k-1}, & u_n|_{t=0} &= 0; \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{aligned} \tag{3}$$

Условие (α). Оператор A является инфинитезимальным генератором сильно непрерывной сжимающей полугруппы $\mathcal{U}(t)$ [27, 28] и все задачи серии (3) разрешимы.

Считая условие (α) выполненным, найдем решения задач этой серии:

$$\begin{aligned} u_0(t, \varepsilon^{-1}) &= \mathcal{U}(\varepsilon^{-1}t)u^0, \\ u_1(t, \varepsilon^{-1}) &= \int_0^t \mathcal{U}(\varepsilon^{-1}(t-\tau)) [u_0(\tau, \varepsilon^{-1}) \cdot Hu_0(\tau, \varepsilon^{-1})] d\tau, \\ \dots & \dots \\ u_n(t, \varepsilon^{-1}) &= \int_0^t \mathcal{U}(\varepsilon^{-1}(t-\tau)) \left[\sum_{k=0}^{n-1} (u_k(\tau, \varepsilon^{-1}) \cdot Hu_{n-k-1}(\tau, \varepsilon^{-1})) \right] d\tau, \\ \dots & \dots \end{aligned} \tag{4}$$

Имеет место следующая

Лемма 1. Зададим последовательность $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ рекуррентно: $p_0 = 1, p_1 = 1, \dots, p_n = p_0 p_{n-1} + p_1 p_{n-2} + \dots + p_{n-2} p_1 + p_{n-1} p_0$. Тогда ее производящая функция $S(z) = (2z)^{-1} (1 - \sqrt{1-4z})$.

Доказательство. Легко видеть, что $S(z)$ удовлетворяет уравнению

$$zS^2(z) - S(z) + 1 = 0,$$

решая которое мы и получим выражение для $S(z)$. При этом,

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} z^n.$$

Замечание 1. Нетрудно видеть, что $S(z)$ аналитична в окрестности $0 < |z| < 1/4$ и $S(z) = 1 + z + 2z^2 + 5z^3 + 14z^4 + 42z^5 + 132z^6 + 429z^7 + \dots$

3. Построение псевдоаналитического решения эволюционной задачи.

Обозначим через $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ алгебру непрерывных в \mathcal{A} операторов, через $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ — пространство замкнутых операторов в \mathcal{A} . Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Если выполнено условие (α) , $A, H \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$, $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$, $D_H \supset D_A$, то задача Коши (1) имеет псевдоаналитическое в точке $\varepsilon = 0$ решение.*

Замечание 2. Если $D_H = \mathcal{A}$, то по теореме Банаха о замкнутом графике [27] $H \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$.

Мы докажем теорему, считая, что H — неограниченный оператор.

Доказательство. Введем в рассмотрение оператор $G = HA^{-1}$, определенный на всем пространстве \mathcal{A} . По теореме Банаха о замкнутом графике, $G \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$, поскольку $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$, H — замкнутый и $D_H \supset D_A$. Обозначим через $v_n(t) = A[u_n(t)]$, тогда из равенств (4) следуют формулы для $v_n(t)$:

$$\begin{aligned} v_0(t, \varepsilon^{-1}) &= A\mathcal{U}(\varepsilon^{-1}t)u^0, \\ v_1(t, \varepsilon^{-1}) &= A \int_0^t \mathcal{U}(\varepsilon^{-1}(t - \tau))(A^{-1}[v_0(\tau)] \cdot G[v_0(\tau)])d\tau, \\ &\dots\dots\dots \\ v_n(t, \varepsilon^{-1}) &= A \int_0^t \mathcal{U}(\varepsilon^{-1}(t - \tau)) \sum_{k=0}^{n-1} (A^{-1}[v_k(\tau)] \cdot G[v_{n-k-1}(\tau)])d\tau, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{5}$$

В серии (5) присутствует оператор $F(t)$, задаваемый формулой

$$F(t)u = A \int_0^t \mathcal{U}(s)uds.$$

При доказательстве теоремы Хилле-Йосиды [28] использовались следующие утверждения:

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathcal{U}(s)uds &\in D_A \quad \forall u \in \mathcal{A} \quad \forall t > 0, \\ A \int_0^t \mathcal{U}(s)uds &= \mathcal{U}(t)u - u \quad \forall u \in \mathcal{A} \quad \forall t > 0, \end{aligned}$$

т.е. $F(t) = \mathcal{U}(t) - I$, где I — тождественный оператор. Отсюда вытекает, что $f(t) = \|F(t)\| \leq 1 + \|\mathcal{U}(t)\| < 2 \quad \forall t \in (0, T]$. Следует при этом отметить, что $F(t)u \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0 \quad \forall u \in \mathcal{A}$, но если A — неограниченный оператор (как в нашем случае), $f(t)$ не стремится к нулю при $t \rightarrow 0$.

Перепишем равенства (5) с использованием оператора $F(t)$:

$$\begin{aligned} v_0(t, \varepsilon^{-1}) &= A\mathcal{U}(\varepsilon^{-1}t)u^0, \\ v_1(t, \varepsilon^{-1}) &= F(\varepsilon^{-1}t)(A^{-1}[v_0] \cdot G[v_0]), \\ &\dots\dots\dots \\ v_n(t, \varepsilon^{-1}) &= F(\varepsilon^{-1}t) \sum_{k=0}^{n-1} (A^{-1}[v_k] \cdot G[v_{n-k-1}]), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{6}$$

Пусть $\|A^{-1}\| = l$, $\|G\| = g$. Воспользуемся тем, что в банаховой алгебре $\|uv\| \leq \|u\| \cdot \|v\| \forall u, v \in \mathcal{A}$, и методом математической индукции докажем, что из равенств (6) вытекают следующие оценки:

$$\|v_n(t)\| \leq 2^n p_n g^n l^n \|v_0(t)\|^{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

При $n = 1$ неравенство (7), очевидно, выполняется. Предположим его справедливость при $n = m$ и докажем его выполнение при $n = m + 1$. Имеем,

$$\begin{aligned} \|v_{m+1}(t)\| &\leq 2gl \sum_{k=0}^m 2^k p_k g^k l^k \|v_0(t, \varepsilon^{-1})\|^{k+1} \cdot 2^{m-k} p_{m-k} g^{m-k} l^{m-k} \|v_0(t, \varepsilon^{-1})\|^{m-k+1} = \\ &= 2^{m+1} g^{m+1} l^{m+1} \|v_0(t, \varepsilon^{-1})\|^{m+2} \left(\sum_{k=0}^m p_k p_{m-k} \right) = 2^{m+1} p_{m+1} g^{m+1} l^{m+1} \|v_0(t, \varepsilon^{-1})\|^{m+2}. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (7) верно и при $n = m + 1$, что означает его справедливость при всех натуральных n .

Далее, из оценок (7) следует, что в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ сходится равномерно по $t \in [0, T]$ ряд

$$v(t, \varepsilon^{-1}; \varepsilon) = v_0(t, \varepsilon^{-1}) + \varepsilon v_1(t, \varepsilon^{-1}) + \dots + \varepsilon^n v_n(t, \varepsilon^{-1}) + \dots \quad (8)$$

Поскольку $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$, то сходится и ряд (2):

$$u_0(t, \varepsilon^{-1}) + \varepsilon u_1(t, \varepsilon^{-1}) + \dots + \varepsilon^n u_n(t, \varepsilon^{-1}) + \dots = u(t, \varepsilon^{-1}; \varepsilon). \quad (9)$$

Ввиду замкнутости оператора A

$$A[u(t, \varepsilon^{-1}; \varepsilon)] = v(t, \varepsilon^{-1}; \varepsilon),$$

что означает принадлежность $u(t, \varepsilon^{-1}; \varepsilon)$ области определения оператора A .

Почленная дифференцируемость по t ряда (2), с учетом равенств (3), следует из равномерной сходимости на отрезке $[0, T]$ ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \left(v_n + \sum_{k=0}^{n-1} A^{-1} v_k \cdot G v_{n-k-1} \right),$$

которая вытекает из сходимости ряда (8) и неравенств, аналогичных неравенствам (7).

Итак, $u(t, \varepsilon^{-1}; \varepsilon) \in D_A$, дифференцируема по t на промежутке $(0, T]$ и ряд (9), будучи подставленным в уравнение (1), обращает его в тождество, т.е. $u(t, \varepsilon^{-1}; \varepsilon)$ — голоморфное в точке $\varepsilon = 0$ решение эволюционной задачи (1). Теорема доказана.

Пример 1. Пусть $\mathcal{A}^{\mathbb{R}}$ — банахова алгебра функции непрерывных и ограниченных на всей числовой оси \mathbb{R} . Рассмотрим задачу Коши

$$\varepsilon \partial_t u + \partial_x u = \varepsilon^2 u^2, \quad u|_{t=0} = \varphi(x) \in D_{\partial_x}, \quad (10)$$

решение которой можно построить в явном виде:

$$u(t, x, \varepsilon^{-1}, \varepsilon) = \frac{\varphi\left(x - \frac{t}{\varepsilon}\right)}{1 - \varepsilon t \varphi\left(x - \frac{t}{\varepsilon}\right)}.$$

Очевидно, что при фиксированном ε в сингулярности, функция $u(t, x, (\varepsilon^*)^{-1}, \varepsilon)$ является аналитической в точке $\varepsilon = 0$.

Задача (1) допускает обобщение, когда вместо произведения рассматривается квадратичный оператор $B(u, Hu)$, где $B(u, v) : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ — ограниченный билинейный оператор.

Пример 2. В этом примере $B(u, v)$ — интегральный оператор, $H = I$ — тождественному оператору; \mathcal{A}^Π — алгебра функций непрерывных и ограниченных в замкнутой полосе

$$\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\infty < x < +\infty, -1 \leq y \leq 1\},$$

с нормой равномерной сходимости; $A = -y\partial_x$, $D_A = \{u \in \mathcal{A}^\Pi, \partial_x u \in \mathcal{A}^\Pi\}$, $\mathcal{U}[\varphi(x, y)] = \varphi(x - ty, y)$ — непрерывная сжимающая полугруппа.

Рассмотрим начальную задачу

$$\begin{aligned} \varepsilon \partial_t u + y \partial_x u &= \varepsilon^2 \iint_{\Pi} e^{-\xi^2} (u^2(t, \xi, y) - u^2(t, x, \eta)) d\xi d\eta, \\ u|_{t=0} &= e^{-x^2}. \end{aligned} \tag{11}$$

Имеем, в соответствии с формулами (4),

$$\begin{aligned} u(t, x, y, \varepsilon^{-1}, \varepsilon) &= e^{-(x - \frac{ty}{\varepsilon})^2} + \\ &+ \varepsilon^2 \left[\frac{\sqrt{2\pi}}{y} \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{ty}{\varepsilon} \right) + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^t \frac{\operatorname{erf} \left(x - \frac{t-\tau}{\varepsilon} + \frac{\tau}{\varepsilon} \right) - \operatorname{erf} \left(x - \frac{t-\tau}{\varepsilon} - \frac{\tau}{\varepsilon} \right)}{\tau} d\tau \right] + \dots \end{aligned}$$

— псевдоаналитическое решение уравнения (11).

Здесь

$$\operatorname{erf}(\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\theta e^{-\xi^2} d\xi$$

— интеграл ошибок.

Пример 3. Пусть $\mathcal{A} = C[0, \pi]$. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} \varepsilon \partial_t u + \varepsilon^2 u \partial_x u &= \partial_x^2 u, \quad t \in (0, T], \quad \varepsilon > 0, \\ u|_{t=0} &= \sin x, \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь оператор $A = \partial_x^2$ имеет область определения $D_A = \{w(x) \in C^2[0, \pi], w(0) = w(\pi) = 0\}$, $H = -\partial_x$, $D_H = \{w(x) \in C^1[0, \pi], w(0) = 0\}$, $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ и

$$A^{-1}[f(x)] = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} f(x_2) dx_2 - \frac{x}{\pi} \int_0^\pi dx_1 \int_0^{x_1} f(x_2) dx_2.$$

Полугруппа $\mathcal{U}(t)$ определяется по формуле

$$\mathcal{U}(t)[\varphi(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2/4t} \tilde{\varphi}(y) dy, \quad (13)$$

где $\tilde{\varphi}(y)$ является продолжением $\varphi(y)$ на всё \mathbb{R} , нечетное по y и $y-\pi$, которое является элементом пространства $C(-\infty, +\infty)$ — непрерывных и ограниченных на всей числовой прямой функции [29]. Выполнение условия (α) вытекает из возможности дифференцирования по x интегралов вида (4) и того факта, что произведения в правых частях равенств (4) удовлетворяют краевым условиям. При этом, на каждом шаге осуществляется нечетное продолжение функций на всю числовую ось [30]. Пользуясь формулами (4) и (13), построим псевдоаналитическое решение задачи (12):

$$u(x, t, \varepsilon^{-1}; \varepsilon) = e^{-t/\varepsilon} \sin x - \frac{\varepsilon}{4} (e^{-2t/\varepsilon} - e^{-4t/\varepsilon}) \sin 2x + \\ + \frac{\varepsilon^2}{32} [(2e^{-3t/\varepsilon} - 3e^{-5t/\varepsilon} + e^{-9t/\varepsilon}) \sin 3x - (e^{-5t/\varepsilon} - 2e^{-3t/\varepsilon} + e^{-t/\varepsilon}) \sin x] - \dots$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов, *Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных задач*. М.: Наука, 1973.
- [2] В.Ф. Бутузов, Н.Н. Нефёдов, “Пространственно-периодические контрастные структуры в сингулярно возмущенных эллиптических задачах” // *Доклады РАН*, **351**:6 (1996), 731-734.
- [3] В.Ф. Бутузов, Н.Н. Нефёдов, “Сингулярно возмущенная краевая задача для уравнения второго порядка в случае смены устойчивости” // *Матем. заметки*, **63**:3 (1998), 354-362.
- [4] А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов, Н.Н. Нефёдов, “Сингулярно возмущенные задачи с граничными и внутренними слоями” // *Труды МИАН*, **268** (2010), 268-283.
- [5] Н.Н. Нефёдов, Е.И. Никулин, А.О. Орлов, “О периодическом внутреннем слое в задаче реакция-диффузия с источником модульно-кубического типа” // *Журнал вычислит. математики и матем. физики*, **60**:9 (2020), 1513-1532.
- [6] В.Т. Волков, Н.Н. Нефёдов, “Асимптотическое решение задачи граничного управления для уравнения типа Бюргера с модульной адвекцией и линейным усилением” // *Журнал вычислит. математики и матем. физики*, **62**:11 (2022), 1851-1860.
- [7] Н.Н. Нефёдов, “Существование и асимптотика решений краевых задач для систем реакция-диффузия тихоновского типа в случае смены устойчивости” // *Матем. заметки*, **116**:6 (2024), 947-955.
- [8] В.Т. Волков, Н.Н. Нефёдов, “Развитие асимптотического метода дифференциальных неравенств для исследования периодических контрастных структур в уравнениях реакция-диффузия” // *Журнал вычислит. математики и матем. физики*, **46**:4 (2006), 615-623.

- [9] Н.Н. Нефёдов, А.О. Орлов “О неустойчивых контрастных структурах в одномерных задачах реакция-диффузия-адвекция с разрывными источниками” // *ТМФ*, **215**:2 (2023), 297-310.
- [10] С.А. Ломов, *Введение в общую теорию сингулярных возмущений*. М.: Наука, 1981.
- [11] В.П. Маслов, *Асимптотические методы и теория возмущений*. М.: Наука, 1988.
- [12] Ю.А. Митропольский, *Метод усреднения в нелинейной механике*. Киев: Наукова думка, 1971.
- [13] С.А. Ломов, И.С. Ломов, *Основы математической теории пограничного слоя*. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2011.
- [14] И.С. Ломов, “Необходимые и достаточные условия существования целых аналитических решений сингулярно возмущенных уравнений” // *Доклады АН СССР*, **299**:4 (1988), 811-815.
- [15] В.И. Качалов, С.А. Ломов, “Гладкость решений дифференциальных уравнений по сингулярно входящему параметру” // *Доклады АН СССР*, **299**:4 (1988), 805-807.
- [16] В.Ф. Сафонов, “Нормальные формы и регуляризация нелинейных сингулярно возмущенных эволюционных уравнений” // *Дифференциальные уравнения*, **25**:4 (1989), 627-635.
- [17] В.Ф. Сафонов, “Нелинейная регуляризация сингулярно возмущенных резонансных задач и аналитичность их решений по параметру” // *Сибирский математический журнал*, **33**:6 (1992), 178-187.
- [18] А. Пуанкаре, *Собрание сочинений. Том 1*. М.: Наука, 1971.
- [19] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*. М.: Мир, 1972.
- [20] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов*. М.: Мир, 1982.
- [21] В.И. Качалов, С.А. Ломов, “Псевдоаналитические решения сингулярно возмущенных задач” // *Доклады РАН*, **334**:8 (1994), 694-695.
- [22] В.И. Качалов, “О голоморфной регуляризации сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений” // *Журнал вычислит. математики и матем. физики*, **57**:4 (2017), 654-661.
- [23] В.И. Качалов, “О методе голоморфной регуляризации сингулярно возмущенных задач” // *Изв. вузов. Математика*, **6** (2017), 52-59.
- [24] В.И. Качалов, “О голоморфной регуляризации сильно нелинейных сингулярно возмущенных задач” // *Уфимский матем. журнал*, **10**:3 (2018), 35-43.

- [25] В.Т. Волков, Н.Н. Нефёдов, “Асимптотическое решение коэффициентных обратных задач для уравнения типа Бюргерса” // *Журнал вычислит. математика и матем. физика*, **60**:6 (2020), 975-984.
- [26] В.И. Качалов, Д.А. Маслов, “Метод малого параметра в теории уравнений типа Бюргерса” // *Журнал вычислит. математика и матем. физика*, **64**:12 (2024), 2371-2377.
- [27] В.А. Треногин, *Функциональный анализ*. М.: Наука, 1980.
- [28] Н.Д. Копачевский, *Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*. Симферополь: ФЛН “Бондаренко О. А.”, 2012.
- [29] К. Иосида, *Функциональный анализ*. М.: Мир, 1967.
- [30] Р. Рихтмайер, *Принципы современной математической физики. Т. 1*. М.: Мир, 1982.

Асимптотика решений системы дифференциальных уравнений с нелинейными запаздывающими обратными связями, имеющими простое поведение на бесконечности

А. А. Кащенко

ЯрГУ им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия.

E-mail: a.kashchenko@uniyar.ac.ru

В докладе изучается поведение решений системы из N связанных уравнений

$$\dot{u}_i + u_i = \lambda F_i(u_i(t-T)) + \gamma(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}), \quad u_0 \equiv u_N, u_{N+1} \equiv u_1, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где u_i — действительные функции, $T > 0$ — время запаздывания, λ — большой параметр ($\lambda \gg 1$), F_i — нелинейные функции обратной связи, $\gamma > -1/4$ — параметр связи между осцилляторами. Фазовое пространство этой системы — $C_{[-T,0]}(\mathbb{R}^N)$. Через $\|*\|$ будем обозначать некоторую фиксированную норму в \mathbb{R}^N .

Ключевым предположением является то, что функции обратной связи имеют простое поведение на бесконечности. Обозначим через u вектор (u_1, \dots, u_N) . Тогда функции F_i имеют вид

$$F_i(u_i) = \begin{cases} f_i(u_i), & \text{если } \|u\| \leq p, \\ g_i, & \text{если } \|u\| > p. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь f_i — ограниченные кусочно-непрерывные функции, g_i — константы, $i = 1, \dots, N$.

В докладе строится асимптотика решений модели (1) с функциями F_i , удовлетворяющими условиям (2), по большому параметру λ . Показывается, что динамика изучаемой системы принципиальным образом зависит от свойств вектора $g = (g_1, \dots, g_N)$ и знака параметра γ . Находятся периодические решения и решения, стремящиеся к константе. Изучается устойчивость решений.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-00891, <https://rscf.ru/project/25-21-00891/>.

Асимптотика установившихся решений нелинейного дифференциального уравнения нейтрального типа

И. С. Кащенко

ЯрГУ им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия.

E-mail: iliyask@uniyar.ac.ru

Рассмотрим уравнение нейтрального типа

$$\dot{x} + x = a\dot{x}(t-1) + f(x, \dot{x}(t-1)), \quad (1)$$

где f – некоторая достаточно гладкая нелинейная функция, имеющая в нуле порядок малости выше первого.

Уравнение (1) имеет тривиальное решение $x = 0$. Поставим задачу изучить локальную динамику в окрестности этого решения, возникающие бифуркации и асимптотику установившихся режимов. В качестве фазового пространства будем рассматривать $C_{[-1,0]}^1$ – пространство непрерывно-дифференцируемых на отрезке $[-1, 0]$ функций

Поведение решений (1) в окрестности $x = 0$ определяется расположением корней характеристического уравнения

$$\lambda + 1 = a\lambda \exp(-\lambda). \quad (2)$$

Показано, что если $|a| < 1$, то все корни (2) имеют отрицательные вещественные части, нулевое решение (1) асимптотически устойчиво. Если $|a| > 1$, то существуют корни (2) с положительной вещественной частью, а решение $x = 0$ уравнения (1) неустойчиво.

При $a = 1$ имеем цепочку корней уравнения (2), сколь угодно близких к мнимой оси, с асимптотикой вида

$$\lambda_n = 2\pi n(1 + o(1))i - \frac{1}{8\pi^2 n^2}(1 + o(1)).$$

Положим $a = 1 + \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Тогда сразу бесконечное число корней характеристического уравнения переходит в правую комплексную полуплоскость. Это приводит к тому, что в линейной задаче (в случае $f \equiv 0$) при любом $\varepsilon > 0$ существует бесконечномерное подпространство $C_u \subset C_{[-1,0]}^1$, что решения (2) с начальными условиями из C_u стремятся в бесконечность. При этом подпространство $C_s \subset C_{[-1,0]}^1$, решения с начальными условиями из которого ограничены, имеет только конечную размерность.

Рассмотрим () при $\varepsilon > 0$. Показано, что в зависимости от функции f , может существовать бесконечное количество устойчивых периодических решений $x(t)$ с периодом близким к единице, для каждого из которых выполнено

$$\int_0^1 (\dot{x}(t+s))^2 ds = c\varepsilon(1 + o(1)),$$

где константа c определяется только функцией f .

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-00859, <https://rscf.ru/project/25-21-00859/>

Динамика системы двух сингулярно возмущенных уравнений с запаздыванием

С. А. Кащенко¹, А. О. Толбей²

^{1,2}*Региональный научно-образовательный математический центр
«Центр интегрируемых систем» при Ярославском государственном университете
им. П. Г. Демидова, Ярославль.*

E-mails: ¹kasch@uniyar.ac.ru, ²a.tolbey@uniyar.ac.ru

Рассматривается локальная динамика систем двух уравнений с запаздыванием. Основное предположение заключается в том, что параметр запаздывания является достаточно большим. После нормировки времени получена система сингулярно возмущенных уравнений. Выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия и показано, что они имеют бесконечную размерность. Используются и получили дальнейшее развитие методы бесконечномерной нормализации. В качестве основных результатов построены специальные нелинейные краевые задачи, которые играют роль нормальных форм. Их нелокальная динамика определяет поведение всех решений исходной системы в окрестности состояния равновесия.

Работа выполнена в рамках программы развития Регионального научно-образовательного математического центра Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение о предоставлении субсидии из федерального бюджета № 075-02-2025-1636).

Аппроксимации Паде в задачах приближенного построения траекторий уток

А. С. Кирсанова

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П.

Королева, г. Самара, Россия.

E-mail: askirsanova@gmail.com

Работа посвящена применению асимптотических методов для исследования двух динамических моделей с сингулярными возмущениями. Основы теории сингулярных возмущений были заложены академиком А.Н. Тихоновым и стали фундаментом для разработки асимптотических методов, среди которых следует выделить метод А. Б. Васильевой. Дальнейшее развитие теория асимптотических методов получила в цикле работ А.Б. Васильевой, ее учеников и коллег, наиболее выдающимися из которых являются достижения В.Ф. Бутузова и Н.Н. Нефедова.

Целью данной работы является сравнительный анализ двух методов аппроксимации: метода малого параметра и дробно-рациональных аппроксимаций Паде, при построении асимптотических приближений для точных значений управляющего параметра [1, 2, 3, 4].

Анализ проводится для двух систем дифференциальных уравнений. В качестве первой рассматривается система Ван дер Поля следующего вида [5, 6]:

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= y - \frac{x^3}{3} + x, \\ \dot{y} &= \alpha - x.\end{aligned}\tag{1}$$

В ходе исследования найдено точное значение параметра $\alpha^* = 0.998740451(2/3)$, при $\varepsilon = 0.01$, где $(2/3)$ означает, что значение α^* с 2 на конце соответствует утке с головой, а значение с 3 – соответствует утке без головы [7]. Отсюда следует, что любое число из промежутка, концами которого являются два этих числа, является точным значением для уравнения Ван дер Поля, в полном соответствии с известной теоремой "Жизнь уток коротка"[3].

Уточное значения можно найти в виде асимптотического разложения [1, 4]

$$\begin{aligned}y = \varphi(x, \varepsilon) &= \varphi_0(x) + \varepsilon\varphi_1(x) + \varepsilon^2\varphi_2(x) + \dots, \\ \alpha = \alpha(\varepsilon) &= \alpha_0 + \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + \dots\end{aligned}\tag{2}$$

Ограничимся случаем разложения в ряд Маклорена до 4-го порядка. Тогда можно получить аппроксимации Паде вида $[1/1]$, $[1/2]$, $[2/1]$, $[2/2]$.

Получаем следующие значения отрезков ряда Маклорена ($\varepsilon = 0.01$):

$$\begin{aligned}M_2(0.01) &= 0.998740625; \\ M_3(0.01) &= 0.9987404560546875; \\ M_4(0.01) &= 0.998740451420288.\end{aligned}\tag{3}$$

Аппроксимации Паде будут следующими:

$$\begin{aligned}
 [1/1](0.01) &= 0.998740554156; \\
 [1/2](0.01) &= 0.998740453107; \\
 [2/1](0.01) &= 0.998740452954; \\
 [2/2](0.01) &= 0.998740451278.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Из изложенного выше видно, что для уравнения Ван дер Поля аппроксимация Паде $[2/2]$ дает точное значение, которое в определенном смысле можно рассматривать как точное, так как оно принадлежит описанному выше интервалу уточных значений.

Далее сравнительный анализ проводится для математической модели ветрогенератора Дарье представимой в виде дифференциальной системы уравнений вида [4, 8, 9, 10, 11]:

$$\begin{aligned}
 J\dot{\Omega} &= -kI + M(\Omega), \\
 L\dot{I} &= k\Omega - (R + r)I, \\
 \dot{R} &= \varepsilon F(\Omega, I, R),
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

где I — сила тока в обмотке якоря, Ω — коэффициент быстроходности, R — внешнее сопротивление, точка означает производную по времени t . Параметр k — коэффициент электромеханического взаимодействия, r — малое внутреннее сопротивление якоря, J — момент инерции турбины, L — индуктивность якоря, α — управляющий параметр. Функция $M(\Omega)$ задается аналитически на основе экспериментальных данных.

При $\varepsilon = 0.01$ точное значение параметра следующее: $\alpha^* = 3.6471869331990(7/8)$, где значение 7 соответствует утке с головой, значение 8 — утке без головы. В данном случае рассматривается разложения в ряд Маклорена до 3-го порядка. Соответственно, можно получить аппроксимации Паде вида $[1/1]$, $[1/2]$, $[2/1]$.

Получаем следующие значения отрезков аппроксимации Маклорена, при $\varepsilon = 0.01$:

$$\begin{aligned}
 M_2(0.01) &= 3.64719747194067; \\
 M_3(0.01) &= 3.64717629963495.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Паде аппроксимации будут следующими:

$$\begin{aligned}
 [1/1](0.01) &= 3.64718834043835; \\
 [1/2](0.01) &= 3.64717821370801; \\
 [2/1](0.01) &= 3.64717819763380.
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Таким образом, показано, что аппроксимация Паде $[2/1]$ дает наиболее точное приближение для уточного значения для системы (4).

В результате продемонстрировано заметное преимущество дробно-рациональных приближений Паде над обычно используемыми приближениями с разложениями по степеням малого параметра.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания, шифр проекта FSSS-2026-0009.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розов, "Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания". Наука, М.: 1975.
- [2] G.A. Baker, P. Graves-Morris, "Padé Approximants". Cambridge Univ. Press, Cambridge: 1996.
- [3] В.А. Соболев, Е.А. Щепакينا, "Редукция моделей и критические явления в макрокинетике". ФИЗМАЛИТ, М.: 2010.
- [4] A. Kirsanova, V. Sobolev, "Pade approximants of canards and critical regimes of Darrieus wind turbine model"// *Mathematics in Engineering*, **7:3** (2025), 194-207.
- [5] А.Л. Звонкин, М.А. Шубин, "Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений"// *Успехи математических наук*, **39:2** (1984), 77-127.
- [6] A. Kirsanova, "Comparative Analysis of Approximations in Canards Theory"// *2025 18th International Conference on Management of Large-Scale System Development (MLSD) IEEE*, (2025), 1-4.
- [7] А.В. Боровских, "Циклы-утки в уравнении типа Ван-дер-Поля с кусочно-линейной характеристикой"// *Современные методы теории краевых задач: материалы международной конференции: Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения – XXVIII» (3-9 мая 2017 г.)*, (2017), 203-204.
- [8] М.З. Досаев, Ч.Х. Линь, В.Л. Лю, В.А. Самсонов, Ю.Д. Селюцкий, "Качественные анализ стационарных режимах малых ветровых электростанции"// *Прикладная математика и механика*, **73:3** (2009), 368-374.
- [9] M.Z. Dosaev, V.A. Samsonov, Y.D. Selyutskii, W.-L. Lu, C.-H. Lin, "Bifurcation of operation modes of small wind power stations and optimization of their characteristics"// *Mechanics of Solids*, **44**, (2009), 214-221.
- [10] A. Kirsanova, "Critical Phenomena in the Darrieus Wind Turbine Mode"// *2023 16th International Conference Management of large-scale system development (MLSD) IEEE*,(2023), 1-4.
- [11] А.С. Кирсанова, "Релаксационные колебания в модели ветроэнергетической установки Дарье"// *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, **30:1**, (2024), 31-39.

Upper and lower solutions in the numerical error analysis

Natalia Kopteva

E-mail: n.v.kopteva@gmail.com

The method of upper and lower solutions is a very elegant technique frequently used in the analysis of semilinear parabolic and elliptic equations, as well as their numerical discretizations. This method was also at the core of a number of my papers, both in the context of asymptotic analysis [2] and the numerical analysis [3] for singularly perturbed differential equations. It is worth noting that in this line of research, I was greatly influenced by the work of N.N. Nefedov, in particular, by his 1995 paper [1] on two-dimensional semilinear singularly perturbed reaction-diffusion equations with boundary and interior layers. In this talk I will briefly discuss the interplay of ideas from [1] to [2, 3] and beyond. It will also be demonstrated that discrete upper and lower solutions provide a general and simple methodology for the error analysis of numerical discretizations of semilinear and quasilinear fractional-parabolic equations [4].

REFERENCES

- [1] N.N. Nefedov, “The method of differential inequalities for some classes of nonlinear singularly perturbed problems with internal layers”, // *Differ. Uravn.*, **31** (1995), 1142-114 (Russian).
- [2] R.B. Kellogg, N. Kopteva, “A singularly perturbed semilinear reaction-diffusion problem in a polygonal domain”, // *J. Differential Equations*, **248** (2010), 184–208
- [3] N. КОПТЕВА, “Maximum norm error analysis of a 2d singularly perturbed semilinear reaction-diffusion problem”, // *Math. Comp.*, **76** (2007), 631–646.
- [4] N. Kopteva, “Error analysis for time-fractional semilinear parabolic equations using upper and lower solutions”, // *SIAM J. Numer. Anal.*, **58** (2020), 2212–2234.

Метод усреднения в задаче построения автоколебательных решений распределенных кинетических систем

Е. П. Кубышкин

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.

E-mail: kubysh.e@yandex.ru

Рассматривается начально-краевая задача

$$u_t = \varepsilon D u_{xx} + A(\varepsilon)u + F(u; \varepsilon), \quad (1)$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (2)$$

где $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t))$, $0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ - малый параметр, $D = \text{diag}\{d_1, d_2\}$, матрица второго порядка $A(\varepsilon)$ гладко зависят от ε при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ и имеет собственные значения вида

$$\lambda(\varepsilon) = \gamma(\varepsilon) \pm i\sigma(\varepsilon), \quad i = \sqrt{-1}, \quad \gamma(0) = 0, \quad \gamma'(0) = \gamma_1 > 0, \quad \sigma(0) = \sigma_0 > 0, \quad (3)$$

нелинейная вектор-функция $F(u; \varepsilon)$, $\|F(u; \varepsilon)\| = o(\|u\|)$ гладко зависит от u и ε при $\|u\| < R_0$, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ (принадлежит классу C^k , $k \geq 5$). Здесь $\|\cdot\|$ норма в \mathbb{R}^2 .

Изучаются условия бифуркации из нулевого состояния равновесия начально-краевой задачи (1), (2) при изменении ее параметров пространственно-неоднородных периодических решений и инвариантных торов, принадлежащих окрестности нулевого решения, исследуется их устойчивость. Построены преобразования, позволяющие свести изучение рассматриваемой задачи к исследованию счетной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой можно выделить одну «быструю» и счетное число «медленных» переменных. Доказаны теоремы о соответствии стационарных и периодических решений, а также инвариантных торов усредненных уравнений «медленных» переменных соответственно пространственно неоднородным периодическим решениям и инвариантным тороам исходных уравнений аналогичного характера устойчивости. Предложены алгоритмы построения периодических решений (циклов), инвариантных торов и уравнений траекторий на них начально-краевой задачи (1), (2) в виде разложения по степеням малого параметра, обеспечивающих построение асимптотических формул указанных автоколебательных объектов. Сформулированы условия сходимости соответствующих разложений. Предложенный метод позволяет исследовать автоколебательные решения, бифурцирующие при изменении параметров из однородных состояний равновесия распределенных кинетических систем с малой диффузией любой размерности, а также содержащих адвективные слагаемые. Результаты изложены в работе [1].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Е. П. Кубышкин, “Метод усреднения в задаче построения автоколебательных решений распределенных кинетических систем” // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **64**:12 (2024), 2355–2370.

Классическая и модифицированные версии слабодиссипативного уравнения Гинзбурга-Ландау. Локальные бифуркации в периодической краевой задаче

А. Н. Куликов¹, Д. А. Куликов²

^{1,2} *Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия.*

E-mails: ¹anat_kulikov@mail.ru, ²kulikov_d_a@mail.ru

Первоначальный вариант периодической краевой задачи для слабодиссипативного уравнения Гинзбурга-Ландау имеет следующий вид [1-2]

$$u_t = u - (1 + ic)u|u|^2 - idu_{xx}, \quad (1)$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \quad (2)$$

Период 2π получен после нормировки пространственной переменной x . Краевая задача (1),(2) имеет счетный набор периодических по t решений

$$u = u_n(t, x) = \exp(i\sigma_n t + inx + i\varphi_n),$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \sigma_n = dn^2 - c, \varphi_n \in \mathbb{R}$.

Решение $u_n(t, x)$ устойчиво, если

$$d > 2c$$

и при

$$d < 2c$$

неустойчиво.

При $d = 2c$ возникает критический случай в задаче об устойчивости периодического решения $u_n(t, x)$ краевой задачи (1),(2).

Если положить

$$d = 2c - \varepsilon, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

то при таких d происходит потеря устойчивости цикла $u_n(t, x)$ и появляются двумерные торы, которые являются локальными аттракторами для решений краевой задачи (1),(2), т.е. реализуется послекритический вариант бифуркаций.

Аналогичная задача может быть изучена для следующих трех краевых задач (см. [1,3,4]). Первая из них имеет следующий вид

$$u_t = u - (1 + ic)u|u|^2 - id\Delta u, \quad (3)$$

$$u(t, x_1, \dots, x_j + 2\pi, \dots, x_n) = u(t, x_1, \dots, x_j, \dots, x_n), \quad (4)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \Delta u = \sum_{j=1}^n u_{x_j x_j}, j = 1, \dots, x_n$.

Также данные вопросы были изучены для двух следующих краевых задач

$$u_t = u - (1 + ic)u|u|^2 + icdu_{xxxx} - ibu_{xx}, \quad b, c, d \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

$$u_t = u - \alpha_1(1 + ic_1)u|u|^2 - \alpha_2(1 + ic_2)u|u|^4 - idu_{xx}, \quad (7)$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \quad (8)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, c_1, c_2, d \in \mathbb{R}$.

Для этих трех краевых задач, как и для краевой задачи (1),(2), был изучен вопрос об устойчивости и локальных бифуркациях одномодовых бегущих волн.

Для каждой из краевых задач, т.е. краевых задач (3),(4); (5),(6); (7),(8) показано, что при соответствующем выборе коэффициентов, для каждой из них могут быть реализованы:

- а) докритические бифуркации бегущих волн;
- б) послекритические бифуркации бегущих волн.

Отметим особо, что докритические бифуркации у краевой задачи (3),(4) могут быть реализованы, если $n \geq 3$. Тем самым дан частичный ответ на вопросы из статьи [1]. Добавим, что у краевой задачи (5),(6) могут быть реализованы докритические бифуркации, если $db \neq 0$. У краевой задачи (7),(8) необходимым условием докритических бифуркаций является условие $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$.

Напомним, что при реализации докритических бифуркаций в ряде разделов физики принято говорить о возможности жесткого возбуждения колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] M. Bartuccelli, P. Constantin, Ch. R. Doering, J. D. Gibbon, M. Gisselält “On the possibility of soft and hard turbulence in the complex Ginzburg-Landau equation” // *Physica D.*, **44** (1990), 421-444.
- [2] Г. Г. Малинецкий, А. Б. Потапов, А. В. Подлазов “Нелинейная динамика: подходы, результаты, надежды” // *Москва : Комкнига*, 2006.
- [3] А. Н. Куликов, Д. А. Куликов “Локальные бифуркации плоских бегущих волн обобщенного кубического уравнения Шредингера” // *Дифференц.уравн.*, **46:9** (2010), 1290-1290.
- [4] А. Н. Куликов, Д. А. Куликов “Послекритические и докритические бифуркации бегущих волн модифицированного уравнения Гинзбурга–Ландау” // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **4** (2009), 71-78.

Нестационарные режимы осциллятора Дуффинга

А. Ф. Курин

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия.

E-mail: afkurin@mail.ru

Здесь представлен анализ колебаний неоднородного осциллятора Дуффинга в режимах медленно меняющейся амплитуды в зависимости от выбора параметров уравнения.

Неоднородное уравнение Дуффинга без затухания

$$\ddot{z} + \Omega^2 z = \varepsilon \nu z^3 + \varepsilon a \cos(\Omega_1 t) \quad (1)$$

с малым параметром $\varepsilon > 0$ решаем методом усреднения[1]. В первом приближении метода с учетом близости частот Ω и Ω_1 приходим к системе уравнений для медленных переменных: амплитуды b и фазы $\Theta = (\Omega - \Omega_1)t$

$$\dot{b} = -\frac{p}{2} \sin \Theta, \quad \dot{\Theta} = s - \frac{3q}{8} b^2 - \frac{p}{2b} \cos \Theta,$$

где $p = \varepsilon a / \Omega$, $q = \varepsilon \nu / \Omega$, $s = \varepsilon h = \Omega - \Omega_1$.

Система (2) имеет постоянное решение $b = b_0, \Theta = \Theta_0 = 0, \pi$. Амплитудой b_0 стационарных колебаний являются положительные вещественные корни кубического уравнения

$$b^3 - \frac{8s}{3q} b + \frac{4p}{3q} \cos \Theta_0 = 0, \quad (2)$$

которые вычисляются с использованием известных формул Кардано [2]. В отличие от [3] резонансная кривая строится не на плоскости (s, b_0^2) , а на плоскости (s, b_0) .

Из системы (2) следует первый интеграл

$$\cos \Theta = \frac{s}{p} b - \frac{3q}{16p} b^3 + \frac{C_1}{b}, \quad (3)$$

где

$$C_1 = b(0) \cos \Theta(0) - \frac{s}{p} b(0)^2 + \frac{3q}{16p} b(0)^4$$

- параметр начальных значений (при $t = 0$), а также закон сохранения энергии осциллятора

$$\frac{1}{2} \dot{b}^2 + \frac{p^2}{8} \cos^2 \Theta = \frac{p^2}{8}.$$

Здесь потенциальная энергия определяется выражением

$$V = \frac{p^2}{8} \cos^2 \Theta. \quad (4)$$

Из системы (2) с использованием интеграла (3) получаем также уравнение движения осциллятора

$$\ddot{b} = -\frac{p}{2} \cos \Theta \dot{\Theta} = -\frac{q^2}{4} \left(\alpha b - \frac{3}{16} b^3 + \frac{\beta}{b} \right) \left(\alpha - \frac{9}{16} b^2 - \frac{\beta}{b^2} \right) = F(b),$$

где введены параметры $\alpha = s/q$, $\beta = pC_1/q$.

Отсюда, решая биквадратные уравнения, находим положения равновесия осциллятора, то есть те значения $b > 0$, при которых сила $F(b) = -dV/db = 0$. Перечислим квадраты корней

$$b_{1,2}^2 = \frac{8\alpha}{3} \pm \sqrt{\frac{64\alpha^2}{9} + \frac{16\beta}{3}}, \quad b_{3,4}^2 = \frac{8\alpha}{9} \pm \sqrt{\frac{64\alpha^2}{81} - \frac{16\beta}{9}}.$$

Анализ функции $V(b)$ (4) на экстремум показывает, что на плоскости параметров α, β существуют четыре области с различным поведением $V(b)$.

1) Области (A) принадлежат точки с координатами $\beta > 0$, если $\alpha < 0$ и с $\beta > 4\alpha^2/9$, если $\alpha > 0$. В области (A) потенциальная энергия имеет минимум: $V(b_1) = 0$.

2) Область (B) состоит из точек с $\alpha > 0$ и $0 < \beta < 4\alpha^2/9$. Здесь у $V(b)$ два минимума $V(b_1) = 0, V(b_4) \neq 0$ и один максимум $V(b_3) > V(b_4)$.

3) Для точек области (C) координаты $\alpha > 0$ и $0 > \beta > -4\alpha^2/3$. Потенциальная энергия имеет два минимума $V(b_1) = V(b_2) = 0$ и один максимум $V(b_3)$.

4) Области (D) принадлежат точки с координатами $\beta < 0$, если $\alpha < 0$ и с $\beta < -4\alpha^2/3$, если $\alpha > 0$. В области (D) потенциальная энергия имеет минимум: $V(b_3) \neq 0$.

Отметим, что значения $b_{3,4}$ как функции частотной расстройки s определяют отдельные участки указанной выше резонансной кривой при стационарных колебаниях.

Теория медленных колебаний амплитуды b в нестационарных режимах основана на методе Линдштедта-Пуанкаре [1], учитывающем неизохронность колебаний. При выбранных значениях параметров уравнения (1) и начальных условиях системы (2) определяем соответствующую им область из указанных областей на плоскости (α, β) . При этом полагаем $\Theta(0) = 0$, что соответствует при взятом $b(0)$ максимуму потенциальной энергии и нулевой кинетической энергии. В качестве параметра s , по степеням которого проводят разложения функций [1], берем разность начального значения амплитуды $b(0)$ и соответствующего равновесного значения из $b_j, j = 1, \dots, 4$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Н.Н. Моисеев. Асимптотические методы нелинейной механики. М.:Наука (1981).
- [2] Н.Н. Смирнов. Курс высшей математики, Т.1. М.:Наука (1965).
- [3] В.Д. Горяченко. Элементы теории колебаний. Из-во Красноярского университета (1995).

Проекторный подход к построению асимптотики решения сингулярно возмущенных задач в критическом случае

Г. А. Курина¹, Н. Т. Хоай²

¹*Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия.*

²*ВНУ, Университет науки, Ханой, Вьетнам.*

E-mails: ¹kurina@math.vsu.ru, ²nguyenthihoai@hus.edu.vn

Впервые асимптотическое поведение решений начальных задач при стремлении малого параметра к нулю для дифференциального уравнения с малым параметром при производной и разностного уравнения с малым шагом в критическом случае исследовалось в [1]. Подобная задача, когда коэффициент при производной и шаг в разностном уравнении равны квадрату малого параметра, изучалась в [2]. Эти задачи обсуждались также в [3] (глава 1).

В [1, 2, 3] рассматривались слабо нелинейные уравнения, при этом собственные числа матрицы $A_0(t)$, стоящей перед состоянием $x(t)$ в дифференциальном уравнении, были равны нулю или имели отрицательные действительные части, причём нулевым собственным значениям соответствовали линейно-независимые собственные векторы. Для разностных уравнений такие условия накладывались на матрицу $A_0(t) = I - B_0(t)$, где I — единичная матрица, а $B_0(t)$ — матрица при состоянии $x(t)$ в исходном разностном уравнении.

Другие типы критических случаев в сингулярно возмущенных задачах рассматривались, например, в [4, 5]. Прикладные задачи, описываемые сингулярно возмущенными уравнениями в критическом случае, представлены в [6].

Здесь приводится обзор работ, в которых при построении асимптотического решения сингулярно возмущенных задач в критическом случае при условиях для $A_0(t)$ из [1, 2] применялся проекторный подход, основанный на разложении пространства состояний X в ортогональную сумму подпространств, а именно

$$X = \ker A_0(t) \oplus \operatorname{im} A_0(t)' = \ker A_0(t)' \oplus \operatorname{im} A_0(t), \quad (1)$$

где штрих означает транспонирование. При помощи ортогональных проекторов на подпространства в (1) выписываются в явном виде соотношения для нахождения компонент асимптотического решения пограничного типа, лежащих в подпространствах из (1), и алгоритм построения асимптотики сводится к последовательному определению этих компонент решения, что делает алгоритм очень понятным.

Используя такой проекторный подход для задач из [1] и [2], построена асимптотика любого порядка для двух типов сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в [7] и [8], а для соответствующих разностных уравнений с малым шагом

в [9] и [10]. Заметим, что в [1, 2] были выписаны задачи для определения только первых членов асимптотики.

Для слабоуправляемых линейно-квадратичных задач с дешевым управлением в критическом случае для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений состояния разных типов с помощью проекторного подхода построена асимптотика решения нулевого порядка в [11, 12, 13], а для дискретных задач оптимального управления с малым шагом – асимптотика решения любого порядка в [14]. При этом в [14] асимптотика строилась на основе асимптотики решения двухточечной краевой задачи, вытекающей из условия оптимальности управления, а в [11, 12, 13] использовалась так называемая прямая схема построения асимптотики решения, заключающаяся в непосредственной подстановке в условие задачи постулируемого асимптотического разложения решения погранслояного типа и получения серии задач для нахождения членов разложения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. Ф. Бутузов, А. Б. Васильева, “Дифференциальные и разностные системы уравнений с малым параметром в случае, когда невозмущенная (вырожденная) система находится на спектре” // *Дифференциальные уравнения*, **6**:4 (1970), 650-664.
- [2] В. Ф. Бутузов, Н. Н. Нефедов, “Об одной задаче теории сингулярных возмущений” // *Дифференциальные уравнения*, **12**:10 (1976), 1736-1747.
- [3] А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, *Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях*. М., Изд-во Моск. ун-та, 1978.
- [4] V. Sobolev, "One critical case in singularly perturbed control problems" // *Journal of Physics: Conference Series*, **811**:1 (2017), article id. 012017.
- [5] А. Р. Данилин, О. О. Коврижных, "Асимптотика решения одной задачи быстрогодействия с неограниченным целевым множеством для линейной системы в критическом случае" // *Труды института математики и механики УрО РАН.*, **28**:1 (2022), 58–73.
- [6] Z. M. Gu, N. N. Nefedov, R. E. O'Malley, Jr., "On singular singularly perturbed initial value problems" // *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **49**:1 (1989), 1–25.
- [7] G. Kurina, "Projector approach to constructing asymptotic solution of initial value problems for singularly perturbed systems in critical case" // *Axioms*, **8**:2 (2019), article 56 in vol. **8**, 10 pages.
- [8] Г. А. Курина, Н. Т. Хоай, “Проекторный подход к алгоритму Бутузова–Нефедова асимптотического решения одного класса сингулярно возмущенных задач в критическом случае” // *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **60**:12 (2020), 2073–2084.

- [9] Г. А. Курина, Н. Т. Хоай, “Проекторный подход к построению асимптотики решения начальных задач для слабо нелинейных дискретных систем с малым шагом в критическом случае” // *Дифференциальные уравнения*, **59**:1 (2023), 73–84.
- [10] Г. А. Курина, Н. Т. Хоай, “Проекторный подход к алгоритму Бутузова–Нефедова асимптотического решения одного класса дискретных задач с малым шагом” // *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **64**:1 (2024), 28–40.
- [11] G. A. Kurina, N. T. Hoai, “Projector approach for constructing the zero order asymptotic solution for the singularly perturbed linear-quadratic control problem in a critical case” // *AIP Conference Proceedings*, **1997** (2018), 020073-1–020073-7.
- [12] G. Kurina, N. T. Hoai, “Zero-order asymptotic solution of a class of singularly perturbed linear-quadratic problems with weak controls in a critical case” // *Optimal Control, Applications and Methods*, **40**:5 (2019), 859–879.
- [13] Г. А. Курина, Н. Т. Хоай, “Асимптотика решения нулевого порядка для одного типа сингулярно возмущенных линейно-квадратичных задач управления в критическом случае” // *Труды института математики и механики УрО РАН*, **29**:1 (2023), 127–142.
- [14] Г. А. Курина, Н. Т. Хоай, “Асимптотика решения дискретных линейно-квадратичных задач оптимального управления с малым шагом и слабым управлением в критическом случае” // *Дифференциальные уравнения*, **61** : 12 (2025), 1665–1685.

Применение нелинейности модульного типа в математических моделях

Н. Т. Левашова

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия.

E-mail: levashovant@my.msu.ru

Рассматриваются математические модели

- деструкции породы при закачке CO_2 ,
- распространения опухолевых тканей.

Основой каждой модели являются системы уравнений реакция-диффузия с модульной нелинейностью.

Нелинейностью модульного типа называются функции, имеющие вид

$$f(u, \mathbf{x}) = \begin{cases} f^{(-)}(u, \mathbf{x}), & u < u_{thr}; \\ f^{(+)}(u, \mathbf{x}), & u \geq u_{thr}, \end{cases}$$

где $\mathbf{x} \in D$ – пространственные переменные, $u \in [a, b]$, $a < u_{thr} < b$. В работах [1], [2] сформулированы условия, при которых скалярное уравнение диффузии с модульной нелинейностью может иметь решение вида движущегося фронта. Это свойство было использовано при разработке указанных моделей.

Модель деструкции породы при закачке CO_2 [3] описывает следующие процессы, происходящие при хранении CO_2 , закаченного в породу, состоящую из кальцита $CaCO_3$:

- Растворение CO_2 : $CO_2 + H_2O \leftrightarrow HCO_3^- + H^+$ (до насыщения десятки секунд)
- Поверхностные реакции: растворения кальцита $CaCO_3 + H^+ \leftrightarrow Ca^{2+} + HCO_3^-$ (предположение модели: из-за прихода в поры воды извне условия для осаждения не реализуются)
- Диффузия продуктов реакции внутри пор. Самый быстрый процесс в масштабе пор: $D_{H^+} = 6000 \frac{\mu m^2}{c}$, $D_{Ca^{2+}} = 790 \frac{\mu m^2}{c}$, $D_{HCO_3^-} = 1180 \frac{\mu m^2}{c}$ (практически мгновенно)
- Отток продуктов реакции за пределы области закачки и поступление воды (самый медленный процесс) (годы)

Модель представляет собой систему уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{\partial[H^+]}{\partial t} - D_{H^+} \Delta[H^+] = \\ & = \begin{cases} -[H^+], & \text{в породе и } CO_2, \\ -S_F(\mathbf{x})k_1[H^+] + S_{CO_2}(\mathbf{x})Q_{H^+} - Q_{W,H^+}(\mathbf{x}), & \text{в воде,} \\ -[H^+] + H_{limit} - Q_{W,H^+}(\mathbf{x}), & \text{насыщение } H^+, \\ 0, & \text{если достигнута предельная концентрация } HCO_3^-; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial[Ca^{2+}]}{\partial t} - D_{Ca^{2+}} \Delta[Ca^{2+}] = \\ & = \begin{cases} -[Ca^{2+}], & \text{в породе и } CO_2, \\ S_F(\mathbf{x})k_1[H^+] - Q_{W,Ca^{2+}}(\mathbf{x}), & \text{в воде,} \\ -[Ca^{2+}] + Ca_{limit} - Q_{W,Ca^{2+}}(\mathbf{x}), & \text{насыщение } Ca^{2+}, \\ 0, & \text{если достигнута предельная концентрация } HCO_3^-; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial[HCO_3^-]}{\partial t} - D_{HCO_3^-} \Delta[HCO_3^-] = \\ & = \begin{cases} -[HCO_3^-], & \text{в породе и } CO_2, \\ S_{CO_2}(\mathbf{x})[H^+] + S_{CO_2}(\mathbf{x})Q_{H^+} - Q_{W,HCO_3^-}(\mathbf{x}), & \text{в воде,} \\ -[HCO_3^-] + HCO_3^-_{limit} - Q_{W,Ca^{2+}}(\mathbf{x}), & \text{насыщение } HCO_3^-. \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь

- $S_F(\mathbf{x}) = 1$ на поверхности породы, 0 – в остальной области;
- $S_{CO_2}(\mathbf{x}) = 1$ на поверхности линз CO_2 в порах, 0 – в остальной области;
- $Q_{H^+} = 0,0023$ моль/(л·с) приток H^+ за счёт растворения CO_2
- $H_{limit} = 0.001$ моль/л – предельная концентрация H^+ ;
- предельная концентрация HCO_3^- : 0.027 моль/л;
- константа поверхностных реакций: $k_1 = S_p \exp(0.198 - 444/T(K^\circ))$, S_p – площадь поверхности пор;
- $Q_{W,H^+}(\mathbf{x})$ – сток ионов H^+ за пределы области закачки;
- малые коэффициенты диффузии $\sim 10^{-10}$ мм²/с.

Модель позволяет получить оценку промежутка времени, за который происходит существенное разрушение породы, а также определить скорость движения границы закаченного кластера CO_2 в ходе его растворения в воде, содержащейся в порах породы.

Модель роста опухолевой ткани [4] состоит из системы трех уравнений диффузии для:

- плотности опухолевых клеток, нормированная на 1 (u),
- концентрации катионов ($[H^+]$), отвечающих за уровень pH,
- концентрация кислорода ($[O_2]$).

Система имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D_u \Delta u = - \begin{cases} T^{-1}u, & [H^+] \geq [H^+]_{thr}, \\ \begin{cases} T^{-1}(u - u_{max}), & u \geq u_{thr}, \\ -k_1 \cdot u \cdot [O_2] & u < u_{thr}, \end{cases} & [H^+] < [H^+]_{thr}; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial [H^+]}{\partial t} - D_{[H^+]} \Delta [H^+] = \\ & = - \begin{cases} T^{-1}([H^+] - [H^+]_{max}), & [H^+] \geq [H^+]_{thr}, \\ \begin{cases} -k_2 \cdot u(t - \tau), & [O_2] < [O_2]_{hyp}, \\ T^{-1}[H^+] & [O_2] \geq [O_2]_{hyp}, \end{cases} & [H^+] < [H^+]_{thr}; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial [O_2]}{\partial t} - D_{O_2} \Delta [O_2] = \\ & = - \begin{cases} T^{-1}([O_2] - [O_2]_{min}), & [O_2] \leq [O_2]_{thr}, \\ T^{-1}([O_2] - [O_2]_{max}) + k_3 \cdot u \cdot [O_2], & [O_2] > [O_2]_{thr}. \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь T – характерный масштаб времени.

Модель описывает следующие процессы:

- пролиферацию (деление) клеток опухоли при достаточном количестве кислорода, $[O_2] > [O_2]_{thr}$,
- гипоксию, которую испытывают клетки опухоли при недостатке кислорода, $[O_2] < [O_2]_{thr}$ что приводит к смещению pH в кислотную сторону в ходе гликолиза (окисление глюкозы, содержащейся в клетке). При превышении концентрации катионов порогового уровня $[H^+]_{thr}$ происходит некроз клеток опухоли.

Модель позволяет исследовать скорость роста и размер опухоли в зависимости от входящих в систему параметров

- k_1 , пропорционального скорости деления клеток,
- k_2 , пропорционального скорости гликолиза,
- k_3 , отображающего кислородный гомеостаз клетки,

что в дальнейшем может быть использовано для моделирования действия лекарственных препаратов.

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ им. М.В. Ломоносова

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. I. Volpert , V. A. Volpert, "Traveling-wave solutions of parabolic systems with discontinuous nonlinear terms", *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, **49**:1 (2002), 113-139.
- [2] Н. Н. Нефедов, Е. И. Никулин, А. О. Орлов, "Движение фронта в задаче со слабой адвекцией в случае непрерывного источника и источника модульного типа", *Дифференциальные уравнения*, **58**:6 (2022), 763–776.
- [3] N. Levashova, P. Levashov, D. Erofeev, A. Sidorova, "The problem of formation destruction in carbon dioxide storage: A microscopic model" *Algorithms*, **18**:8 (2025), 18–00503.
- [4] Н. Т. Левашова, Е. А. Генералов, А. Э. Сидорова, А. Н. Гольцов, "Нелинейность модульного типа в моделировании роста опухолевого сфероида" *Теоретическая и математическая физика*, **224**:1, (2025), 118–128.

**On an asymptotic method for solving integro-differential equations of oscillations
of mechanical systems with moving boundaries**

V. L. Litvinov¹, K. V. Litvinova²

¹*Samara State Technical University, Samara, Russia.*

²*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.*

E-mails: ¹vladlitvinov@rambler.ru, ²kristinalitvinova900@rambler.ru

In engineering applications, problems involving the vibrations of elastic systems with time-varying geometric dimensions (objects with moving boundaries) are particularly relevant. Such problems arise in various fields: the dynamics of mine hoisting ropes, transmissions with flexible couplings, combustion of solid fuel rods, drill strings, and other systems with moving loads or variable lengths. Mathematically, these problems reduce to solving hyperbolic partial differential equations or integro-differential equations in domains with changing boundaries, which goes beyond the scope of classical mathematical physics. Although in some cases the ratio of the rate of change of length to the elastic wave velocity is small, allowing for the use of generalizations of classical concepts of natural frequencies and functions, a general approach to formulating and solving such problems is lacking. Researchers are forced to adapt existing methods – asymptotic methods (Krylov-Bogolyubov, Mitropolsky), the Kantorovich-Galerkin method, and others – to each specific case. This paper develops the solution construction method proposed in [1]. Using asymptotic methods, solutions were constructed for homogeneous integro-differential equations describing the vibrations of objects with moving boundaries, and for systems of ordinary differential equations with variable parameters. Expressions for the amplitudes and phases of vibrations were obtained. The method also enables solutions to boundary value problems taking into account damping, bending stiffness, and foundation rigidity.

REFERENCES

- [1] Litvinov V.L., Litvinova K.V. Approximate method for solving boundary value problems with moving boundaries by reducing to integro-differential equations // *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2022. Vol. 62. No. 6. Pp. 977–986.

**Об особенностях решения коэффициентных обратных задач для
нелинейных уравнений типа реакция-диффузия-адвекция с данными
различного типа**

Д. В. Лукьяненко

*Кафедра математики, отделение прикладной математики, физический факультет,
МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mails: lukyanenko@physics.msu.ru*

В докладе будут обсуждаться различные постановки обратных задач для нелинейных уравнений типа реакция-диффузия-адвекция с данными различного типа (см. работу [1]), особенности подходов к их решению и открытые нерешённые проблемы, которые существуют на данный момент в рассматриваемой тематике.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] D.V. Lukyanenko, R.L. Argun, A.A. Borzunov, A.V. Gorbachev, V.D. Shinkarev, M.A. Shishlenin, A.G. Yagola, “On the features of numerical solution of coefficient inverse problems for nonlinear equations of the reaction–diffusion–advection type with data of various types” // *Differential Equations*, **59**:12 (2023), 1734–1757.

Метод построения аналитического по малому параметру решения для одного класса нелинейных краевых задач и его численная реализация

Маслов Дмитрий Александрович

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Россия.

E-mail: MaslovDmA@mpei.ru

Ряд нелинейных стационарных задач теории упругости может быть представлен в виде дифференциального уравнения в банаховом пространстве [1], обозначим его E , в котором возмущение линейного оператора задаётся полилинейным оператором следующим образом

$$Au = \varepsilon B(H_1 u, \dots, H_m u) + f, \quad (1)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр; A – линейный неограниченный оператор; $B : E \times \dots \times E \rightarrow E$ – полилинейный ограниченный оператор (m -линейный оператор); линейные операторы H_1, \dots, H_m могут быть как ограниченными, так и неограниченными; функция $f \in E$.

Будем искать решение уравнения (1) в виде ряда по степеням малого параметра

$$u = u_0 + u_1 \varepsilon + \dots + u_n \varepsilon^n + \dots \quad (2)$$

Используя правило Коши перемножения рядов и метод неопределённых коэффициентов, получаем серию линейных задач для определения коэффициентов ряда (2):

$$\begin{aligned} Au_0 &= f, \\ Au_1 &= B(H_1 u_0, \dots, H_m u_0), \\ Au_2 &= \sum_{i=1}^m B(H_1 u_0, \dots, H_{i-1} u_0, H_i u_1, H_{i+1} u_0, \dots, H_m u_0), \\ &\dots \dots \dots \\ Au_n &= \sum_{i_1 + \dots + i_m = n-1} B(H_1 u_{i_1}, \dots, H_m u_{i_m}), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (3)$$

где в выражении для Au_n суммирование ведётся по всевозможным значениям индексов $i_1 = 0 \dots n-1, \dots, i_m = 0 \dots n-1$, таким, что $i_1 + \dots + i_m = n-1$.

Ставится задача определить достаточные условия, при которых ряд (2) является сходящимся к решению задачи (1), и, таким образом, представляет аналитическое по малому параметру решение задачи (1).

Аналитичность решений при возмущении операторов играет важную роль как в теории дифференциальных уравнений с малым параметром, так и в задачах математической физики, и в линейном случае подробно описана в [2, 3]. В данной работе рассматривается нелинейная задача.

Доказаны теоремы об аналитической зависимости от малого параметра ε решения уравнения (1), представимого рядом (2).

Пусть выполнено условие (α) :

Оператор A является замкнутым неограниченным оператором с областью определения D_A и имеет непрерывный обратный оператор A^{-1} .

Теорема 1. Если выполнено условие (α) и операторы H_j , $j = 1, \dots, m$, являются ограниченными, то уравнение (1) имеет единственное аналитическое при $\varepsilon < \frac{(m-1)^{m-1}}{m^m r}$, $r = \|B\| \|A^{-1}\| \left(\prod_{j=1}^m \|H_j\| \right) \|A^{-1} f\|^{m-1}$, решение.

Теорема 2. Если выполнено условие (α) и операторы H_j , $j = 1, \dots, m$, являются замкнутыми неограниченными с областями определения D_j , такими, что $D_A \subset D_j$, $j = 1, \dots, m$, то уравнение (1) имеет единственное аналитическое при $\varepsilon < \frac{(m-1)^{m-1}}{m^m r}$, $r = \|B\| \left(\prod_{j=1}^m \|H_j A^{-1}\| \right) \|f\|^{m-1}$, решение.

В доказательствах теорем использовалась последовательность m -чисел Фусса-Каталана [5] $\{a_n^{(m)}\}_{n=0}^\infty$, которая задаётся рекуррентно следующим образом

$$a_0^{(m)} = 1, \quad a_n^{(m)} = \sum_{i_1 + \dots + i_m = n-1} a_{i_1}^{(m)} \cdot \dots \cdot a_{i_m}^{(m)}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

а также задаётся формулой:

$$a_0^{(m)} = 1, \quad a_n^{(m)} = \frac{(mn)!}{n!((m-1)n+1)!}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Радиус сходимости соответствующих последовательностям $\{a_n^{(m)}\}_{n=0}^\infty$ производящих функций $F^{(m)}(z)$: $R^{(m)} = \frac{(m-1)^{m-1}}{m^m}$.

При $m = 2$ числа Фусса-Каталана совпадают с обычными числами Каталана [5], производящая функция последовательности

$$F^{(2)}(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z} \tag{4}$$

голоморфна при $0 < |z| < 1/4$.

При $m = 3$ числа Фусса-Каталана образуют последовательность [6], производящая функция которой

$$F^{(3)}(z) = \frac{2}{\sqrt{3z}} \sin \left(\frac{1}{3} \arcsin \left(\sqrt{\frac{27z}{4}} \right) \right) \tag{5}$$

голоморфна при $0 < |z| < 4/27$.

При доказательстве теоремы 2 вводились операторы $T_j = H_j A^{-1}$, $j = 1, \dots, m$ [7]. Они являются замкнутыми, как произведение замкнутых операторов на ограниченный и определены на всем пространстве E . По теореме Банаха о замкнутом графике операторы $T_j : E \rightarrow E$, $j = 1, \dots, m$, являются ограниченными.

При математическом моделировании, для решения практических задач, необходима оценка погрешности приближённого решения, которое строится в виде N -й частичной суммы ряда (2). Используя значение суммы мажорирующего ряда, заданное

известной производящей функцией $F^{(m)}(z)$, получается оценка погрешности:

$$\left\| u - \sum_{n=0}^N u_n \varepsilon^n \right\| = \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n \varepsilon^n \right\| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|u_n\| \varepsilon^n \leq \|u_0\| \left(F^{(m)}(r\varepsilon) - \sum_{n=0}^N a_n^{(m)} (r\varepsilon)^n \right).$$

Таким образом, доказательство аналитичности по малому параметру решения исходной задачи (1) даёт способ оценки погрешности приближённого решения.

Поскольку получить значение априорной оценки величины r , указанной в теоремах 1, 2, достаточно трудоёмко, а полученное значение будет приводить к завышению оценки погрешности, предложена следующая практическая оценка погрешности. Пусть рассчитаны u_0, u_1 , тогда $r \approx \|u_1\|/\|u_0\|$ и для приближённого решения $u^{(N)} = \sum_{n=0}^N u_n \varepsilon^n$ относительная погрешность

$$\delta u_p^{(N)} \approx F^{(m)}(r\varepsilon) - \sum_{n=0}^N a_n^{(m)} (r\varepsilon)^n. \quad (6)$$

Численное решение линейных задач (3) с целью определения коэффициентов ряда (2) не представляет каких-либо сложностей и гарантирует высокую точность вычислений. Таким образом, численная реализация асимптотического метода представляет хорошую альтернативу как точным вычислениям коэффициентов ряда по степеням малого параметра, так и непосредственно численному решению нелинейной краевой задачи.

Проведена численная реализация предложенного метода для краевой задачи с уравнением четвёртого порядка, описывающей прогиб нагруженной балки. Для решения линейных задач (3) использовался метод конечных разностей, разностная схема решалась методом сопряжённых градиентов. Программа написана на языке программирования C++.

Пример 1. Рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения статической балки, расположенной на нелинейно-упругом основании [4] с краевыми условиями шарнирного опирания:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 u}{dx^4} + \alpha u - \varepsilon u^3 &= f, & x \in (0, L), \\ u(0) = \frac{d^2 u(0)}{dx^2} &= u(L) = \frac{d^2 u(L)}{dx^2} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где функция $u(x)$ описывает нормализованный прогиб балки, $f(x)$ – функция распределённой нагрузки, $\alpha > 0$ – коэффициент, характеризующий линейную жёсткость основания, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, характеризующий нелинейную жёсткость основания.

Запишем задачу (7) в банаховом пространстве непрерывных функций $C([0, L])$ в операторном виде, соответствующем (1), тогда

$$A = \frac{d^4}{dx^4} + \alpha I, D_A = \left\{ v(x) \in C^4([0, L]), v(0) = \frac{d^2 v(0)}{dx^2} = v(L) = \frac{d^2 v(L)}{dx^2} = 0 \right\}.$$

Оператор A является непрерывно обратимым при $\alpha > 0$. Операторы $H_1 = H_2 = H_3 =$

I , являются ограниченными, так как I – тождественный оператор. Полилинейный оператор $B(u, v, w) = uvw$ является ограниченным, так как для $\forall u, v, w \in C([0, L])$ справедливо неравенство

$$\|B(u, v, w)\| = \|uvw\| = \max_{[0, L]} |uvw| \leq \max_{[0, L]} |u| \cdot \max_{[0, L]} |v| \cdot \max_{[0, L]} |w| = \|u\| \|v\| \|w\|.$$

Таким образом, условия теоремы 1 выполнены.

Построим тестовый пример. Пусть $\alpha = 2.4$, $L = \pi$, $\varepsilon = 0.01$. Задаём искомую функцию $u(x) = \sin(x)$. Тогда $f(x) = 3.4 \sin(x) - 0.01 \sin^3(x)$. Вводим на $[0, L]$ сетку $\bar{\Omega} = \{x_i\}_{i=0}^n$ с достаточно малым шагом $h = L/n$, где n – число разбиений рассматриваемого отрезка длины L . Численно решая первую задачу серии (3), получим сеточную функцию $U^{(0)} = \{U_i^{(0)}\}_{i=0}^n$. Относительная погрешность, рассчитанная с использованием известного точного решения: $\delta_{\bar{\Omega}} U^{(0)} = 2.236 \cdot 10^{-3}$.

Численно решая вторую задачу серии (3) с правой частью $\{(U_i^{(0)})^3\}_{i=0}^n$, получим сеточную функцию $U^{(1)} = \{U_i^{(1)}\}_{i=0}^n$. Относительная погрешность, рассчитанная с использованием известного точного решения: $\delta_{\bar{\Omega}}(U^{(0)} + \varepsilon U^{(1)}) = 1.476 \cdot 10^{-5}$.

Имея $U^{(0)}$, $U^{(1)}$, мы можем воспользоваться формулой практического расчёта относительной погрешности (6). Получив $r = \|U^{(1)}\|_{\bar{\Omega}} / \|U^{(0)}\|_{\bar{\Omega}} \approx 0.2226$, проверяем условие аналитичности решения по малому параметру $\varepsilon < 4/(27r)$, которое выполняется и гарантирует сходимость ряда и применимость формулы (6),

$$\begin{aligned} \delta_p U^{(0)} &= F(r\varepsilon) - 1 = 2.241 \cdot 10^{-3}, \\ \delta_p (U^{(0)} + \varepsilon U^{(1)}) &= F(r\varepsilon) - 1 - \varepsilon r = 1.5 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Численно решая третью задачу серии (3) с правой частью $\{3U_i^{(1)}(U_i^{(0)})^2\}_{i=0}^n$, получим сеточную функцию $U^{(2)} = \{U_i^{(2)}\}_{i=0}^n$. Относительная погрешность, рассчитанная с использованием известного точного решения $\delta_{\bar{\Omega}}(U^{(0)} + \varepsilon U^{(1)} + \varepsilon^2 U^{(2)}) = 5.3 \cdot 10^{-8}$. По формуле практического расчёта относительной погрешности (6) получим

$$\delta_p (U^{(0)} + \varepsilon U^{(1)} + \varepsilon^2 U^{(2)}) = F(r\varepsilon) - 1 - \varepsilon r - 3(\varepsilon r)^2 = 1.34 \cdot 10^{-7}.$$

Таким образом, из сравнения полученных значений со значениями относительной погрешности, рассчитанными непосредственно с использованием точного решения, следует, что формула практического расчёта относительной погрешности (6), использующая полученный результат по аналитичности решения по малому параметру, показала достаточно точное приближение для относительной погрешности приближённого решения.

Пример 2. Рассмотрим краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения статической балки [4]:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 u}{dx^4} &= \varepsilon \frac{d^2 u}{dx^2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + f, & x \in (0, 1), \\ u(0) &= \frac{d^2 u(0)}{dx^2} = u(1) = \frac{d^2 u(1)}{dx^2} = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, характеризующий нелинейные свойства материала балки [4]. Запишем задачу (8) в банаховом пространстве непрерывных функций $C([0, 1])$ в операторном виде, соответствующем (1), при неограниченных операторах G, H :

$$Au = \varepsilon B(Gu, Hu, Hu) + f,$$

$$A = \frac{d^4}{dx^4}, D_A = \left\{ v(x) \in C^4([0, L]), v(0) = \frac{d^2v(0)}{dx^2} = v(L) = \frac{d^2v(L)}{dx^2} = 0 \right\},$$

$$G = \frac{d^2}{dx^2}, D_G = \{v(x) \in C^2([0, 1]), v(0) = v(1) = 0\},$$

$$H = \frac{d}{dx}, D_H = \{v(x) \in C^1([0, 1]), v(0) = v(1)\}.$$

Оператор A является непрерывно обратимым. Операторы G и H являются замкнутыми неограниченными, области определения $D_A \subset D_G \subset D_H$. Таким образом, выполнены условия теоремы 2. Построим решение в виде ряда (2) с помощью функции Грина $G(x, \xi)$ задачи (8), записанной при $\varepsilon = 0$:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{6}x(\xi - 1)(x^2 + \xi^2 - 2\xi), & 0 \leq x < \xi, \\ \frac{1}{6}\xi(x - 1)(x^2 + \xi^2 - 2x), & \xi < x \leq 1. \end{cases}$$

В случае $f(x) = f = \text{const}$ начальное приближение u_0 определяется по формуле

$$u_0(x) = \int_0^1 G(x, \xi) f d\xi = \frac{f}{24} (x^4 - 2x^3 + x),$$

а коэффициент u_1 ряда (2) по формуле

$$u_1(x) = \int_0^1 G(x, \xi) \frac{d^2u_0}{dx^2} \left(\frac{du_0}{dx} \right)^2 d\xi = \frac{f^3}{24^3} \left(\frac{8}{495}x^{12} - \frac{16}{165}x^{11} + \frac{1}{5}x^{10} - \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{7}x^8 + \frac{6}{35}x^7 + \frac{1}{30}x^6 - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{18}x^3 - \frac{59}{2310}x \right).$$

Пусть безразмерные величины $\varepsilon = 0.1$, $f(x) \equiv 83$. Воспользуемся предложенным способом оценки погрешности (6). Получив $r = \|u_1\|/\|u_0\| \approx 0.2952$, проверяем условие аналитичности решения по малому параметру $\varepsilon < 4/(27r)$, которое выполняется и гарантирует сходимость ряда и применимость формулы (6). Тогда

$$\begin{aligned} \delta_p u_0 &= F(r\varepsilon) - 1 = 3.25 \cdot 10^{-2}, \\ \delta_p (u_0 + \varepsilon u_1) &= F(r\varepsilon) - 1 - \varepsilon r = 3 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Таким образом, построено приближение $u_0 + \varepsilon u_1$ к решению задачи (8), имеющее относительную погрешность $3 \cdot 10^{-3}$.

Работа поддержана грантом РНФ, проект № 25-21-00661.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] С.Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*. – М.: Наука, 1967.
- [2] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*. Пер. с англ. – М.: Мир, 1972.
- [3] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*. Т. 4. Анализ операторов. Пер. с англ. – М.: Мир, 1982.
- [4] В.И. Ерофеев, В.В. Кажаяев, Н.П. Семерикова, *Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность*. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
- [5] Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник, *Конкретная математика. Основание информатики*. Пер. с англ. – М.: Мир, 1998.
- [6] J.A. Sloane, A001764 // *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, <https://oeis.org/A001764>
- [7] В.И. Качалов, Д.А. Маслов, “Об аналитических решениях задач нелинейной теории возмущений” // *Сиб. электрон. матем. изв.*, **22**:1 (2025), 457–464.

Об асимптотике решения задачи Коши для сингулярно возмущенной системы гиперболических уравнений с малой диссипацией в критическом случае

А. В. Нестеров

PLEKHANOV Russian University of Economics, Moscow, Russia

E-mail: andrenerov@yandex.ru

Строятся первые члены асимптотического разложения (АР) по малому параметру сингулярно возмущенной системы гиперболических уравнений с малой диссипацией в критическом случае [1]

$$\varepsilon^6(U_{tt} - KU_{xx}) = AU + \varepsilon^3 qAU_t, |x| < \infty, t > 0. \quad (1)$$

Здесь $U(x, t, \varepsilon) \in R^m$, $m \geq 2$ натуральное число, $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр, матрица $K = \text{diag} \{k_i^2, i = 1, \dots, m\}$ диагональная, матрицы K, A – *const* постоянные, коэффициент q – *const*, $q > 0$ положительный, постоянный. Матрица A имеет однократное нулевое собственное значение $\lambda = 0$, которому отвечает собственный вектор h , остальные собственные значения имеют отрицательные вещественные части. Для системы (1) ставятся начальные условия вида «узкая шапочка»

$$U(x, 0, \varepsilon) = U^0(x/\varepsilon), U_t(x, 0, \varepsilon) = \Phi(x/\varepsilon). \quad (2)$$

Здесь функции $U^0(x), \Phi(x)$ достаточно гладкие и принадлежат классу Шварца быстро убывающих функций: $U^0(x), \Phi(x) \in \tilde{S}(R^1)$ (знак „тильда“ добавлен, чтобы отличить схожие обозначения класса функций и членов АР).

Настоящая работа есть продолжение работ [2]-[5]. Построенное АР решения задачи (1)-(2) имеет вид

$$U(x, 0, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{i=3} (S_i^I(\zeta_1, t) + S_i^{II}(\zeta_2, t) + \Pi_i(\xi, \tau)) + R, \quad (3)$$

где $\zeta_{1,2} = (x \mp kt)/\varepsilon^2$, $\xi = x/\varepsilon^2, \tau = t/\varepsilon^3$, k выражается через K, h и h^* – собственный вектор матрицы A^T , отвечающий $\lambda = 0$. Получены уравнения и начальные условия для определения членов АР (3) решения задачи (1)-(2). Погранфункции Π определяются из системы обыкновенных ДУ, функции «всплеска» S определяются из уравнений в частных производных третьего порядка (линейной части уравнения Кортевега-де Фриза) (исследованных, в частности, в работах [6]-[10]). Оценка остаточных членов Ru, Rv в (3) сделана по невязке.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. “Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях” // *М.: Изд-во Моск. ун-та*, (1978), с.106.
- [2] Нестеров А.В. “О структуре решения одного класса гиперболических систем с несколькими пространственными переменными в дальней зоне” // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **56**:4 (2016), 639 -649.
- [3] Nesterov A. “Asymptotics of the solution of the Cauchy problem for a singularly perturbed system of hyperbolic equations ” // *arXiv:2211.17242 [math.AP]*
- [4] Нестеров А.В. “Об асимптотика решения задачи Коши для одной сингулярно возмущенной системы гиперболических уравнений” // *Современные методы теории функций и смежные проблемы Материалы международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа (30 января-4 февраля 2025 г.) Воронеж: Издательский дом ВГУ*, (2025), 253.
- [5] Нестеров А.В. “Об асимптотика решения задачи Коши для сингулярно возмущенной системы гиперболических уравнений с малой диссипацией в критическом случае” // *Десятая Международная конференция по дифференциальными функционально-дифференциальным уравнениям, посвященная памяти академика С.П. Новикова. Москва, Россия, 17–24 августа 2025 г. :тезисы докладов. – Москва: РУДН (2025)*, 168
- [6] Fernandes R.S., V.A., Galaktionov V.A. “Very singular similarity solutions and hermitian spectral theory for semilinear odd-order PDES” // *arXiv:0910.4916v1 [math.AP] 26 Oct 2009*
- [7] Сергеев С. А. “Асимптотические решения одномерного линеаризованного уравнения Кортевега–де Фриза с локализованными начальными данными” // *Матем. заметки* **102**:3(2017) 445–461
- [8] ROETMAN E. L. “Some Observations About an Odd Order Parabolic Equation” // *JOURNAL OF DIFFERENTIAL EQUATIONS* **9** (1971) 9, 335-345
- [9] Mihaela Ifrim, Herbert Koch, Daniel Ttaru “Dispersive Decay Of Small Data Solutions For the KDV Equation ” // *arXiv:1901.05934v1 [math.AP] 17 Jan 2019*
- [10] Lamberto Cattabriga “Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili a caratteristiche multiple” // *Rendiconti del Seminario Matematico della Universit di Padova* **31** (1961) 1-45

Исследование сингулярно возмущённых задач с разрывной правой частью

Ни Минкан

*Школа математических наук, Восточно-Китайский педагогический университет,
г. Шанхай, КНР.*

E-mail: xiaovikdo@163.com

В данной работе проводится систематическое исследование сингулярно возмущённых задач с разрывной правой частью. Рассматриваются ключевые классы задач, включая обыкновенные дифференциальные уравнения с внутренними слоями, уравнения типа «реакция-диффузия» с внутренними слоями переходного типа, дифференциально-разностные уравнения (вырожденные уравнения с кратными корнями), а также слабо нелинейные задачи, содержащие члены с опережением и запаздыванием. На основе теории Тихонова и Васильевой, с помощью метода пограничных функций и мультимасштабного анализа построены формальные асимптотические решения. Введены функции внутреннего и пограничного слоев, удовлетворяющие условиям гладкой сшивки, что позволило представить приближенные решения в виде степенных рядов по малому параметру μ . Для различных типов задач сформулированы соответствующие условия регулярности, проведен анализ существования и локальной асимптотической устойчивости решений. Определены области притяжения решений и получены оценки затухания для всех типов слоевых функций. Эффективность предложенных методов подтверждена на численных примерах; показано, что полученные асимптотические решения обладают высокой точностью в диапазоне малых значений параметра. Работа предоставляет единую строгую теоретическую основу и численные методы для решения сингулярно возмущённых задач с разрывной правой частью.

Existence and stability of two-dimensional stationary solutions with boundary layers in a Tikhonov-type system arising in the drift-diffusion model of sub-Debye-length semiconductors

Nikulin Egor Igorevich¹, Karamyshev Aleksey Vladimirovich²

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.

E-mails: ¹nikulin@physics.msu.ru, ²karamyshev.av21@physics.msu.ru

The present work studies stationary solutions with boundary layers for a singularly perturbed Tikhonov-type system of reaction-diffusion-advection equations arising in the two-dimensional drift-diffusion model of semiconductors with sub-Debye-length dimensions.

The system under consideration is

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta u - \varepsilon^2 (\mathbf{A}(u, x), \nabla u) - g(u, v, x, \varepsilon) &= 0, \\ \Delta v - (\mathbf{B}(v, x), \nabla v) - f(u, v, x, \varepsilon) &= 0, \quad x \in D, \end{aligned} \tag{1}$$

with Dirichlet boundary conditions on both the inner boundary Γ and the outer boundary Γ^* of a doubly connected domain D . Here $\varepsilon > 0$ is a small parameter.

A formal boundary layer asymptotic expansion of the solution is constructed. Using the asymptotic method of differential inequalities the existence and asymptotic Lyapunov stability of stationary solutions are proved.

As a physical application, a drift-diffusion model for a semiconductor is analyzed under the condition that the device size is smaller than the Debye length. The small parameter is the ratio of the hole and electron mobility coefficients. The model is reduced to the form (1) and is shown to satisfy all required assumptions. Explicit zero-order asymptotic formulas for the charge carrier concentrations are derived for the radially symmetric case.

The work is supported by the Russian Science Foundation, project No. 25-71-10024, <https://rscf.ru/project/25-71-10024/>.

REFERENCES

- [1] A. B. Vasil'eva, V. F. Butuzov, *Asymptotic Expansions of Solutions of Singularly Perturbed Equations*, Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).
- [2] N. N. Nefedov, A. O. Orlov, “Existence and stability of stationary solutions with boundary layers in a system of fast and slow reaction-diffusion-advection equations with KPZ nonlinearities”, *Theoret. and Math. Phys.*, **220**:1 (2024), 137–153.
- [3] Karamyshev A. V., Nikulin E. I. Existence and stability of stationary solutions with boundary layers in a tikhonov-type system arising in the drift-diffusion model of semiconductors of sub-debye-length, *Russian Journal of Mathematical Physics.*, **32**:12 (2025), 713 –727.

Малые параметры в математических моделях социальных процессов: на примере модели информационного противоборства

А. П. Петров

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН.

E-mail: petrov.alexander.p@yandex.ru

Математические модели социальных процессов выводятся на основе закономерностей, сформулированных специалистами соответствующих наук, и дополняющих их гипотезах – например, гипотезах о поведении человека [1]. Положения модели формализуются в виде уравнений. Эти уравнения содержат параметры, которые могут быть универсальными либо специфическими для каждой ситуации, могут оцениваться на основе статистических данных либо иных соображений, и т.д.

В некоторых случаях параметры могут быть малыми либо большими; в таких случаях возможно применение асимптотических методов для исследования модели. В настоящем докладе применение методов малого параметра иллюстрируется на примере модели информационного противоборства [2]. Эта модель содержит, в частности, параметры, характеризующие распространение информации. Так, распространение информации каждой из двух сторон противоборства происходит двумя путями: через широковещание и через распространение в виде слуха, т.е. от индивида к индивиду. В различных ситуациях тот или иной из параметров модели может быть большим или малым.

Например, возможна ситуация, при которой одна из сторон представляет власть; она имеет большие возможности широковещания, но ее новости не вызывают интерес у граждан и слабо пересказываются от индивида к индивиду. Вторая сторона – наоборот, имеет слабые возможности широковещания, но ее послания вызывают интерес у публики и активно пересказываются. В такой ситуации модель имеет два малых параметра: у первой стороны – параметр, ответственный за распространение в виде слуха, у второй стороны – параметр, ответственный за широковещание.

Кроме того, модели информационного противоборства имеют два параметра, описывающие скорость, с которой индивиды теряют интерес к информации той и другой стороны. Эти параметры также могут быть большими или малыми. От них, в частности, зависит оптимальная стратегия широковещания. При условии, что его возможности ограничены, ставится задача максимизации сторонников данной стороны противоборства на определенный момент времени, который можно понимать как момент выборов. Показано, что если публика быстро теряет интерес к информации этой стороны (т.е. соответствующий параметр достаточно велик), то ее оптимальная стратегия состоит в том, чтобы максимизировать широковещание в конце кампании, т.е. с течением времени его интенсивность должна нарастать. Если же интерес публики

теряется медленно (т.е. соответствующий параметр достаточно мал), то оптимальная стратегия состоит в том, чтобы максимизировать широковещание в начале кампании, чтобы индивиды, получившие информацию, успели рассказать ее «из уст в уста» другим индивидам; т.е. интенсивность широковещания должна убывать.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Михайлов А.П., Петров А.П., Математические модели системы «человек-общество». М.: Физматлит, 2022, 456 с.
- [2] Михайлов А.П., Петров А.П., Прончева О.Г., Маревцева Н.А., “Модель информационного противоборства в социуме при периодическом дестабилизирующем воздействии” // *Матем. моделирование*, Т.29, №2, (2017), С. 23–32.

Решение трехточечной задачи управления для сингулярно возмущенной системы в частных производных.

Е. В. Раецкая

*ВГЛТУ, Воронеж, РФ.
E-mail: raetskaya@inbox.ru*

Постановка задачи. Рассматривается система

$$\varepsilon \frac{\partial x_0(t, s, \varepsilon)}{\partial t} = B_0 \frac{\partial x_0(t, s, \varepsilon)}{\partial s} + D_0 u_0(t, s, \varepsilon) \quad (1)$$

с условиями

$$x_0(0, s, \varepsilon) = \alpha_0(s), \quad (2)$$

$$x_0(T_1, s, \varepsilon) = \gamma_0(s), \quad (3)$$

$$x_0(T, s, \varepsilon) = \beta_0(s), \quad (4)$$

где $t \in [0, T]$, $T_1 \in (0, T)$, $s \in [0, S]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$; $x_0(t, s, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n$ — функция состояния (состояние); $u(t, s, \varepsilon) \in \mathbb{R}^m$ — функция управления (управление); B_0, D_0 — матрицы соответствующих размеров.

Одной из целей исследования является исследование управляемости пары (B_0, D_0) , то есть установление возможности перевода системы (1) из произвольного начального состояния (2) в произвольное конечное состояние (4) за время $[0, T]$, $\forall T > 0$, под воздействием какого-либо управления $u_0(t, x, \varepsilon)$; при этом должно выполняться условие (3).

Помимо выявления свойства управляемости системы (1) задачей данного исследования является построение в явном виде функции управления $u_0(t, s, \varepsilon)$ и функции состояния $x_0(t, s, \varepsilon)$, удовлетворяющей заданным условиям (2)–(4). Пара функций $(u_0(t, s, \varepsilon), x_0(t, s, \varepsilon))$ — решение задачи управления для возмущенной системы.

Наряду с возмущенным уравнением (1) рассматривается предельное уравнение ($\varepsilon = 0$):

$$0 = B_0 \frac{\partial \bar{x}_0(t, s)}{\partial s} + D_0 \bar{u}_0(t, s). \quad (5)$$

Решение уравнения (5) при любом $\bar{u}_0(t, s)$, в общем случае не может удовлетворять всем условиям (2)–(4), но может удовлетворить некоторой части этих условий:

$$\bar{x}_0(0, s) = \bar{\alpha}_0(s), \quad \bar{x}_0(T_1, s) = \bar{\gamma}_0(s), \quad \bar{x}_0(T, s) = \bar{\beta}_0(s), \quad (6)$$

то есть уравнение (1) является сингулярно возмущенным [1].

Пара функций $(\bar{u}_0(t, s), \bar{x}_0(t, s))$ — решение задачи для предельной системы (5), если решение $\bar{x}_0(t, s)$ уравнения (5) с функцией $\bar{u}_0(t, s)$ удовлетворяет условиям (6).

Возможно следующее поведение функции $x_0(t, s, \varepsilon)$:

а) $x_0(t, s, \varepsilon)$ равномерно на множестве $[0, T] \times [0, S]$ стремится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к некоторой функции состояния предельной системы $\bar{x}_0(t, s)$;

б) $x_0(t, s, \varepsilon) \rightrightarrows \bar{x}_0(t, s)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ на множествах $[t_1, t_2] \times [0, S]$ и $[t_3, t_4] \times [0, S]$, где $0 < t_1 < t_2 < T_1$, $T_1 < t_3 < t_4 < T$,

но $x_0(t, s, \varepsilon) \not\rightrightarrows \bar{x}_0(t, s)$ на множестве $[0, T] \times [0, S]$;

в) другие случаи, в том числе $\bar{D} \lim x_0(t, s, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, или $\|x_0(t, s, \varepsilon)\| \rightarrow \infty$.

В случае б) уравнение () является сингулярно возмущенным и в задаче наблюдения явление погранслоя вблизи границ $t = 0$, $t = T_1$ и $t = T$. Функция состояния может быть представлена в виде

$$x_0(t, s, \varepsilon) = \bar{x}_0(t, s) + v_0(t, s, \varepsilon), \quad (7)$$

где $v_0(t, s, \varepsilon)$ — функция погранслоя вблизи границ $t = 0$, $t = T_1$ и $t = T$. Эта функция является ограниченной и при $\varepsilon \rightarrow 0$ обладает свойствами:

- $v(t, s, \varepsilon) \rightrightarrows 0 \forall (t \in [t_1, t_2] \cup [t_3, t_4], 0 < t_1 < t_2 < T_1, T_1 < t_3 < t_4 < T, s \in [0, S])$;
- $v(t, s, \varepsilon) \not\rightrightarrows 0$ на множестве $[0, T] \times [0, S]$.

Исследование проводится методом каскадной декомпозиции, хорошо зарекомендовавшим себя при решении задач управления и наблюдения для различных динамических систем, а также при исследовании ряда их свойств, например, [2]–[8].

В работе [9] этим методом решена задача управления для сингулярно возмущенной системы с частными производными второго порядка с двумя условиями вида (2) и (4).

Метод каскадной декомпозиции базируется на свойствах нетеровости прямоугольного матричного коэффициента $D_0 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, которому соответствуют разложения пространств в прямые суммы

$$\mathbb{R}^m = \text{Coim } D_0 \dot{+} \text{Ker } D_0, \quad \mathbb{R}^n = \text{Im } D_0 \dot{+} \text{Coker } D_0,$$

где $\text{Ker } D_0$ — ядро D_0 ; $\text{Im } D_0$ — образ D_0 ; $\text{Coker } D_0$ — дефектное подпространство; $\text{Coim } D_0$ — прямое дополнение к $\text{Ker } D_0$ в \mathbb{R}^n . Сужение \tilde{D}_0 оператора D_0 на $\text{Coim } D_0$ имеет обратный \tilde{D}_0^{-1} . Проекторы на подпространства $\text{Ker } D_0$ и $\text{Coker } D_0$ обозначаются через P_0 и Q_0 , соответственно. Оператор $\tilde{D}_0^{-1}(I - Q_0)$ называется полуобратным к D_0 и обозначается D_0^- (через I здесь и далее обозначен тождественный оператор в соответствующем пространстве). Операторы и соответствующие им матрицы обозначаются здесь одинаково.

Известна [10]

Лемма. *Соотношение*

$$D_0 u = w, \quad u \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^n, \quad (8)$$

эквивалентно системе

$$u = D_0^- w + z_0, \quad (9)$$

$$Q_0 w = 0. \quad (10)$$

Выражение (9) — есть решение уравнения (8), найденное с точностью до произвольного элемента $z_0 \in \text{Ker} D_0$, $z_0 = P_0 u$. Выражение (10) — условие корректности системы (8).

Алгоритм каскадной декомпозиции включает три основных этапа: прямой ход, центральный этап и обратный ход.

Прямой ход заключается в поэтапной редукции исходной системы. В соответствии со свойствами пары (B_0, D_0) производится редукция функции состояния, то есть расщепление функции $x_0(t, s, \varepsilon)$ на компоненты в подпространствах.

В общем случае процесс декомпозиции полностью завершается за число шагов p , не превышающее размерности исходного пространства ($0 \leq p \leq n$).

Условия (2)–(4) в процессе декомпозиции переводятся в эквивалентные условия на компоненту функции состояния из подпространства минимальной размерности — функцию $x_p(t, s, \varepsilon)$, которую называем определяющей функцией. Часть этих условий будет содержать параметр ε и решение предельного уравнения может удовлетворить только той части условий, которые не содержат малый параметр. Поэтому и возникает необходимость введения функции погранслоя.

В случае установления управляемости пары (B_0, D_0) , осуществляется переход к центральному этапу декомпозиции, заключающемуся в построении определяющей функции. В [11]–[13] разработаны методы и алгоритмы построения определяющих функций в различных формах.

Именно форма этой функции из подпространства минимальной размерности определяет вид решения задачи управления — пары $(u_0(t, s, \varepsilon), x_0(t, s, \varepsilon))$.

Построением определяющей функции, удовлетворяющей редуцированным условиям, завершается центральный этап декомпозиции.

Затем реализуется обратный ход декомпозиции, подразумевающий сначала пошаговое восстановление функции состояния $x_0(t, s, \varepsilon)$, удовлетворяющей заданным условиям (2)–(4), затем построение соответствующей функции управления $u_0(t, s, \varepsilon)$.

Метод каскадной декомпозиции — это метод решения задачи программного управления, то есть, сначала на базе определяющей функции строится функция состояния $x_0(t, s, \varepsilon)$, удовлетворяющая заданным условиям (2)–(4); затем рассчитывается функция $u_0(t, s, \varepsilon)$.

Аналогичным образом метод каскадной декомпозиции реализуется для построения решения предельной задачи (5)–(6). На последнем шаге декомпозиции строится функция $\bar{x}_p(t, s)$ — определяющая функция предельной задачи. Далее реализуется обратный ход декомпозиции, подразумевающий сначала пошаговое восстановление функции состояния $\bar{x}_0(t, s)$, удовлетворяющей условиям (6), затем построение соответствующей функции управления $\bar{u}_0(t, s)$.

Поскольку здесь ставится задача построения управления, генерирующего явление погранслоя в сингулярно возмущенной задаче, то есть построение функции состоя-

ния возмущенной задачи $x_0(t, s, \varepsilon)$ в виде (7), то желаемый результат предполагается обеспечить выбором определяющей функции возмущенной задачи в виде суммы $\bar{x}_p(t, s)$ – определяющей функции предельной задачи и функции $v_p(t, s, \varepsilon)$ – функции погранслоя вблизи границ $t = 0$, $t = T_1$ и $t = T$.

Решение предельной задачи (5)–(6). Здесь рассматривается случай сюръективной матрицы $D_1 = Q_0 D_0 (I - Q_0)$, поэтому процесс декомпозиции полностью реализуется за один шаг, то есть $p = 1$.

В силу леммы 1 реализуется переход от системы (5) к эквивалентной системе

$$\bar{u}_0(t, s) = -D_0^- B_0 \frac{\partial \bar{x}_0(t, s)}{\partial s} + \bar{z}_0(t, s), \quad (11)$$

$$Q_0 B_0 \frac{\partial \bar{x}_0(t, s)}{\partial s} = 0, \quad (12)$$

с произвольной функцией $\bar{z}_0(t, s) \in \text{Ker} D_0$; $\bar{z}_0(t, s) = P_0 \bar{u}_0(t, s)$.

Функция $\bar{x}_0(t, s)$ должна удовлетворять условию (12), следовательно

$$Q_0 B_0 \frac{\partial \bar{\alpha}_0(s)}{\partial s} = 0, \quad Q_0 B_0 \frac{\partial \bar{\gamma}_0(s)}{\partial s} = 0, \quad Q_0 B_0 \frac{\partial \bar{\beta}_0(s)}{\partial s} = 0, \quad (13)$$

отсюда вытекает, что если $\alpha_0(s)$, $\gamma_0(s)$, $\beta_0(s)$ не удовлетворяют условиям (13), то система () является сингулярно возмущенной.

Прямой ход завершается за один шаг построением определяющей функции $\bar{x}_1(t, s)$, удовлетворяющей сформированным в процессе декомпозиции условиям

$$\bar{x}_1(0, s) = \bar{\alpha}_{10}(s) \quad \bar{x}_1(T_1, s) = \bar{\gamma}_{10}(s), \quad \bar{x}_1(T, s) = \bar{\beta}_{10}(s). \quad (14)$$

Определяющая функция строится в виде скалярной функции

$$\bar{x}_1(t, s) = \sum_{j=1}^3 \varphi_{1j}(s) \cdot \psi_{1j}(t), \quad (15)$$

с векторными коэффициентами $\varphi_{11}(s)$, $\varphi_{12}(s)$, $\varphi_{13}(s)$.

В процессе реализации обратного хода декомпозиции восстанавливается функция $\bar{x}_0(t, s)$, удовлетворяющая условиям (6), затем по формуле (11) находится функция $\bar{u}_0(t, s)$. Построением пары $(\bar{u}_0(t, s), \bar{x}_0(t, s))$ завершается решение предельной задачи (5)–(6).

Решение возмущенной задачи ()–(4). Прямой ход декомпозиции системы () завершается построением определяющей функции $x_1(t, s, \varepsilon)$, которая должна удовлетворять сформированным в процессе декомпозиции условиям

$$x_1(0, s, \varepsilon) = \alpha_{10}(s), \quad x_1(T_1, s, \varepsilon) = \gamma_{10}(s), \quad x_1(T, s, \varepsilon) = \beta_{10}(s), \quad (16)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{\varepsilon} \alpha_{11}(s), \quad \frac{\partial x_1}{\partial t} \Big|_{t=T_1} = \frac{1}{\varepsilon} \gamma_{11}(s), \quad \frac{\partial x_1}{\partial t} \Big|_{t=T} = \frac{1}{\varepsilon} \beta_{11}(s). \quad (17)$$

Определяющая функция $x_1(t, s, \varepsilon)$ строится в виде

$$x_1(t, s, \varepsilon) = \bar{x}_1(t, s) + v_1(t, s, \varepsilon), \quad (18)$$

где $\bar{x}_1(t, s)$ — это определяющая функция предельной системы, имеющая вид (15); $v_1(t, s, \varepsilon)$ — функция погранслоя вблизи границ $t = 0$, $t = T_1$ и $t = T$.

Необходимо подчеркнуть, что функция $\bar{x}_1(t, s)$ удовлетворяет лишь условиям (14), а условия (17) содержат параметр ε . Именно поэтому возникает необходимость введения функции погранслоя.

Построение функции погранслоя. Вытекающее из (18), выражение

$$v_1(t, s, \varepsilon) = x_1(t, s, \varepsilon) - \bar{x}_1(t, s), \quad (19)$$

с учетом условий (14), (16) и (17), приводит к условиям для функции погранслоя

$$v_1(0, s, \varepsilon) = q_{11}(s), \quad v_1(T_1, s, \varepsilon) = q_{12}(s), \quad v_1(T, s, \varepsilon) = q_{13}(s), \quad (20)$$

$$\frac{\partial v_1(t, s, \varepsilon)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{\varepsilon^j} q_{14}(s) + \eta_1(s), \quad (21)$$

$$\frac{\partial v_1(t, s, \varepsilon)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{\varepsilon^j} q_{15}(s) + \eta_2(s), \quad (22)$$

$$\frac{\partial v_1(t, s, \varepsilon)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{\varepsilon^j} q_{16}(s) + \eta_3(s), \quad (23)$$

где $q_{1i}(s)$, $\eta_j(s)$ — ограниченные функции ($i = \overline{1, 6}$, $j = \overline{1, 3}$).

Функция погранслоя $v_1(t, s, \varepsilon)$ вблизи границ $t = 0$, $t = T_1$, $t = T$, удовлетворяющая условиям (20)–(23), строится в виде

$$\begin{aligned} v_1 = & c_{11}(s, \varepsilon) \cdot e^{-\frac{t^2}{\varepsilon^2}} + c_{12}(s, \varepsilon) \cdot \frac{t}{\varepsilon} \cdot e^{-\frac{t^2}{\varepsilon^2}} + \\ & + c_{13}(s, \varepsilon) \cdot e^{-\frac{(t-T_1)^2}{\varepsilon^2}} + c_{14}(s, \varepsilon) \cdot \frac{(t-T_1)}{\varepsilon} \cdot e^{-\frac{(t-T_1)^2}{\varepsilon^2}} + \\ & + c_{15}(s, \varepsilon) \cdot e^{-\frac{(t-T)^2}{\varepsilon^2}} + c_{16}(s, \varepsilon) \cdot \frac{(t-T)}{\varepsilon} \cdot e^{-\frac{(t-T)^2}{\varepsilon^2}}, \end{aligned}$$

где $c_{1i}(s, \varepsilon)$ — ограниченные функции ($i = \overline{1, 6}$).

Далее реализуется **обратный ход декомпозиции**:

— сначала пошаговое восстановление функции состояния $x_0(t, s, \varepsilon)$, удовлетворяющей заданным условиям (2)–(4),

— затем построение соответствующей функции управления $u_0(t, s, \varepsilon)$.

Справедлива

Теорема 1. В случае D_1 — сюръективная матрица, при выполнении условий

$$\alpha_0(s), \quad \gamma_0(s), \quad \beta_0(s) \in C_{[0, S]}^1,$$

пара (B_0, D_0) возмущенной системы () с условиями (2)–(4) является управляемой.

Доказана

Теорема 2. В случае D_1 — сюръективная матрица, при выполнении условий

$$\alpha_0(s), \quad \gamma_0(s), \quad \beta_0(s) \in C_{[0,s]}^1,$$

для решения предельной задачи (5), (6) – пары $\bar{u}_0(t, s), \bar{x}_0(t, s)$ существует решение возмущенной задачи управления (4) – пара $u_0(t, s, \varepsilon), x_0(t, s, \varepsilon)$ вида

$$u_0(t, s, \varepsilon) = \bar{u}_0(t, s) + w_0(t, s, \varepsilon),$$

$$x_0(t, s, \varepsilon) = \bar{x}_0(t, s) + v_0(t, s, \varepsilon),$$

где пара $\bar{u}_0(t, s), \bar{x}_0(t, s)$ – решение предельной задачи (5), (6),

а $v_0(t, s, \varepsilon)$ и $w_0(t, s, \varepsilon)$ – функции погранслоя вблизи границы $t = 0, t = \frac{T}{2}, t = T$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Васильева А.Б. Асимптотические разложения сингулярно возмущенных уравнений /А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. — М.: Наука, 1973. — 270 стр.
- [2] Zubova S.P., Raetskaya E.V., “Solution of the multi-point control problem for a dynamic system in partial derivatives” // *Mathematical Methods in the Applied Sciences, AIMS Press, New York.*, **44**:15 (2021), 11998-12009.
- [3] Zubova S.P., Raetskaya E.V., “Construction of Controls Providing the Desired Output of the Linear Dynamic System derivatives” // *Automation and Remote Control.*, **79**:5 (2018), 774-791.
- [4] Zubova S.P., Raetskaya E.V., “Algorithm to solve linear multipoint problems of control by the method of cascade decomposition” // *Automation and Remote Control.*, **78**:7 (2017), 1189-1202.
- [5] Zubova S.P., Raetskaya E.V., Trung L.H., “On polynomial solutions of the linear stationary control system” // *Automation and Remote Control.*, **69**:11 (2008), 1852-1858.
- [6] Zubova S.P., Raetskaya E.V., “Invariance of a nonstationary observability system under certain perturbations” // *Journal of Mathematical Sciences.*, **188**:3 (2013), 218-226.
- [7] Zubova S.P., Raetskaya E.V., “A Study of the Rigidity Descriptor Dynamical Systems in a Banach Space” // *Journal of Mathematical Sciences.*, **208**:1 (2015), 131-138.
- [8] Zubova S.P., Raetskaya E.V., Trung L.H., “Control problem for dynamical systems with partial derivatives” // *Journal of Mathematical Sciences.*, **249**:6 (2021), 941-953.
- [9] Раецкая Е.В., “Решение задачи управления для сингулярно возмущенной динамической системы с частными производными” // *Дифференциальные уравнения*, **61**:12 (2025), 1699-1718.
- [10] Zubova S.P., “Solution of inverse problems for linear dynamical systems by the cascade method ” // *Doklady Mathematics.*, **86**:3 (2012), 846-849.

- [11] Раецкая Е.В., “Алгоритм построения управления динамической системой в частных производными” // *Моделирование систем и процессов*, **15:4** (2022), 116-127.
- [12] Раецкая Е.В., “Структурный анализ функции управления динамической системой в частных производных разного порядка” // *Моделирование систем и процессов*, **16:1** (2023), 93-104.
- [13] Раецкая Е.В., “Алгоритм построения полиномиального решения задачи программного управления для динамической системы в частных производных” // *Моделирование систем и процессов*, **16:3** (2023), 94-104.

Boundary value problems for the singularly perturbed Bitsadze equation with a strong singularity in the lower coefficient

A. B. Rasulov¹, Yu. S. Fedorov²

^{1,2}*Department of Higher Mathematics, National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, Russia.*

E-mails: ¹rasulzoda55@gmail.com, ²FedorovYS@mpei.ru

The importance of using complex analysis methods in the theory of singularly perturbed problems has been emphasized in many works, see for example [1] and [2].

In this paper, the algorithm of the S.A. Lomov regularization method is applied to the singularly perturbed Bitsadze equation with a lower coefficient that allows for power singularities at an isolated point in the domain, and the resulting solution is used to study the boundary value problem.

Let $D = \{z : |z| \leq R\}$ be a domain with boundary $\Gamma = \{z : |z| = R\}$ oriented counterclockwise and in what follows $D_0 = D \setminus \{0\}$.

For brevity, let $\rho(z) = \bar{z}|z|^{n-1}$, $n > 1$.

In the standard notation, $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$, where $u = u_1 + iu_2$, consider the equation whose main operator is the Bitsadze operator:

$$\varepsilon\rho(z)(u_{\bar{z}\bar{z}} - bu_{\bar{z}}) - a(u_{\bar{z}} - bu) = 0, \tag{1}$$

where $\varepsilon \ll 1$ — a small parameter, $a \in \mathbb{R}^+$ and the function $b(z) \in C(\bar{D})$ is analytic in the domain D .

Boundary value problem: find a solution $u(z, \varepsilon) \in C(\bar{D}) \cap C^\infty(D_0)$ of equation (1), satisfying on the contour Γ the boundary condition

$$\begin{cases} \operatorname{Re}u(t) = g_0(t), \quad t \in \Gamma, \\ \operatorname{Re}[G(\partial_{\bar{z}} - b)u](t) = e^{-\frac{c^2}{\varepsilon^2}}g(t), \quad t \in \Gamma, \\ u(z_j) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, -2\aleph + 1, \quad z_j \in D, \quad \aleph \leq 0, \end{cases} \tag{2}$$

where $g_0(t)$, $g(t) \in C(\Gamma)$ are given functions, c is a positive constant, z_j ($j = \overline{1, -2\aleph + 1}$, $\aleph \leq 0$) are arbitrary fixed points of the domain D , and $\aleph = \operatorname{Ind}G$ is the index of the function G :

$$\aleph = \frac{1}{\pi} \arg G|_{\Gamma}.$$

In this paper, solutions to the problem (2) are found in the form of series converging in the usual sense..

REFERENCES

[1] Lomov S.A., Lomov I.S. Fundamentals of the Mathematical Theory of the Boundary Layer. Moscow: Moscow University Press, 2011.

- [2] Vasilyeva A.B., Butuzov V.F. *Asymptotic Methods in the Theory of Singular Perturbations*.
M., Vysshaya Shkola, 1990, 207 p.

Сильно нелинейные волны: модели и решения

О. В. Руденко

Физический ф-т МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Российская федерация.

E-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru

Сильно нелинейные волны (СНВ) и экстремальные состояния вещества являются ключевыми физическими понятиями. СНВ – это волна, амплитуда которой порядка предела прочности материала. Например, при возникновении ударного фронта на расстоянии 10^2 – 10^3 длин волн в воде нелинейность слабая, но выражена сильно. Давление в волне составляет 10^5 – 10^6 Па, что значительно меньше внутреннего давления $2,2 \cdot 10^9$ Па. Однако примеси снижают прочность, и при меньших давлениях среда «рвется» - возникают пузырьки. Взрывная волна также является СНВ, разрушая твёрдые тела. Для обычных слабо нелинейных волн определяющее «уравнение состояния» можно разложить в степенной или функциональный ряд. Однако эти ряды неприменимы в трёх случаях. (1) Если уравнение содержит сингулярности, например, при «хлопках» и герцевской нелинейности структурно неоднородных сред. (2) Если ряд расходящийся. (3) Когда линейный член отсутствует и доминируют высшие нелинейности. Такие СНВ реализуются в механике и квантовой теории поля. Даны примеры моделей для СНВ этих 3 типов. Найдены решения, описаны физические явления.

Сингулярно возмущённые интегро-дифференциальные уравнения с операторами Вольтерра и Фредгольма

В. Ф. Сафонов¹, А. А. Бободжанов²

^{1,2} *Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», Москва, Российская Федерация*

E-mails: ¹Singsaf@yandex.ru, ²bobojfnova@yandex.ru

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение содержащие сумму двух интегральных операторов

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dy}{dt} = a(t)y + \int_0^t K_0(t, s) y(s, \varepsilon) ds + \\ + \int_0^1 e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^1 \mu(\theta) d\theta} K_1(t, s) y(s, \varepsilon) ds + h(t), \quad y(0, \varepsilon) = y^0, \quad t \in [0, 1] : \end{aligned} \quad (1)$$

оператор типа Вольтерра и оператор типа Фредгольма. Авторам не известны публикации по сингулярно возмущенным задачам такого типа. Однако рассмотрение их с точки зрения построения асимптотических решений представляет несомненный интерес. Для разработки соответствующего алгоритма привлекается метод регуляризации Ломова, развитый ранее отдельно для уравнений типа Вольтерра и отдельно для уравнений типа Фредгольма. Ясно, что многие идеи этого метода находят применение и в рассматриваемой задаче с двумя операторами различного типа. Однако совсем не очевиден эффект совместного влияния этих операторов на формирование структуры регуляризованной асимптотики, поэтому в работе уделяется этой проблеме основное внимание. Ради простоты исследуется скалярный вариант указанной задачи. Предполагается, что многомерный ее случай будет рассмотрен в наших последующих работах. Задача (1) исследуется при следующих условиях:

- 1) функции $a(t)$, $h(t)$, $\mu(t) \in C^\infty [0, 1]$, ядра $K_0(t, s)$, $K_1(t, s) \in C^\infty ([0, 1] \times [0, 1])$;
- 2) $a(t) \neq \mu(t)$, $\operatorname{Re} a(t) \leq 0$, $a(t) \neq 0$, $\mu(t) < 0 \forall t \in [0, 1]$.

При указанных условиях разрабатывается алгоритм построения регуляризованных (по Ломову; см., например [1, 2]) асимптотических решений задачи (1). Основная проблема заключается в обосновании асимптотической сходимости формальных решений к точному. Для этого привлекается информация о регуляризованной асимптотике фундаментального решения однородного уравнения Вольтерра, впервые построенной авторами в более ранних работах (см., например [3]), и метод последовательных приближений для оценки той части формального решения, которая индуцируется оператором Фредгольма.

Ключевые слова: сингулярно возмущенный, интегральные операторы типа Вольтерра и Фредгольма, разрешимость итерационных задач.

Работа выполнена при поддержке проекта РНФ. No. 25-21-00661.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений.- М.: Наука, 1981.
- [2] Ломов С.А., Ломов И.С. Основы математической теории пограничного слоя.– М.: Изд-во Московского университета, 2011.
- [3] Kalimbetov B.T, Safonov V.F., Zhaidakbayeva D. Asymptotic Solution of a Singularly Perturbed Integro-Differential Equation with Exponential Inhomogeneity. Axioms. 2023, 12, 241. <https://doi.org/10.3390/axioms12030241>.

Динамика твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной вязкой жидкостью

В. В. Сидоренко¹, С. М. Рамоданов²

¹*ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия.*

²*МФТИ, Москва, Россия.*

E-mails: ¹vvsidorenko@list.ru, ²ramodanov@mail.ru

Рассматривается динамика твердого тела с эллиптической полостью, целиком заполненной несжимаемой жидкостью с большой вязкостью (предположение о большой вязкости означает, что большую величину имеет безразмерный параметр, именуемый в теории вращающейся жидкости числом Экмана). После некоторого переходного процесса в полости устанавливается квазистационарное “стоксово” течение. Ф.Л.Черноусько показал, что влияние жидкого наполнения на вращательное движение в данной ситуации эквивалентно воздействию момента специального вида, действующего на тело с “затвердевшей” жидкостью в дополнение к реально прикладываемым моментам [1]. В [2, 3] была дана интерпретация такого подхода к построению конечномерной модели системы “тело+жидкость” в рамках теории интегральных многообразий: фазовые траектории достаточно быстро притягиваются многообразием малой размерности, инвариантным относительно фазового потока; поведение фазовых траекторий на интегральном многообразии описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Для случая эллиптической полости в [1] выписаны явные выражения для поля скоростей жидкости и вспомогательного оператора, используемого для вычисления момента, моделирующего влияние жидкого наполнения. Эти выражения допускают “координатно-инвариантную” форму [3], которая в каких-то случаях может оказаться более удобной. “Выход” системы на интегральное многообразие занимает малое, но отличное от нуля время. Учесть переходные процессы можно с помощью специальных поправок в начальных условиях для уравнений конечномерной модели [3, 4] — как в случае свободного движения твердого тела, так и при наличии связей.

В качестве примера рассматривается движение маятника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, на вращающейся платформе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ф.Л. Черноусько, “Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса” // *ЖВМиМФ*, **5:6** (1965), 1049-1070.
- [2] С.В. Богатырев, “Медленные движения в задачах динамики твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью” // *ПММ*, **58:5** (1994), 91 - 96.

- [3] S.M. Ramodanov, V.V. Sidorenko, “Dynamics of a rigid body with an ellipsoidal cavity filled with viscous fluid” // *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **95** (2017), 42 - 46.
- [4] A.J. Roberts, “Appropriate initial conditions for asymptotic descriptions of the long term evolution of dynamical systems” // *The ANZIM Journal*, **31**:1 (1989), 48 - 75.

Распространение динамо-волн как вызов для изучения несамосопряженных операторов

Д. Д. Соколов

*Кафедра математики, физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва,
119991*

E-mail: sokoloff.dd@gmail.com

Распространение волн магнитного поля (т.н. динамо-волн) в конвективной зоне Солнца представляет собой важный элемент цикла солнечной активности, важный как для понимания природы цикла, так и в практическом отношении, поскольку он во многом определяет космическую погоду. В отличие от многих видов волн, это явление описывается уравнениями не второго, а четвертого порядка, причем соответствующий оператор является несамосопряженным. При изучении динамо волн полезным оказывается метод ВКБ, который, однако, во многом отличается от того вида, в котором он используется в квантовой механике.

В докладе рассказывается об этих отличиях и возникающих в этом контексте новых вопросах, еще далеких от прояснения.

О геометрической интерпретации регулярно и сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений

М. А. Терентьев

Физический ф-т МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.

E-mail: m.terentyev@physics.msu.ru

Известно [1, 2], что всякое дифференциальное уравнение можно геометрически представить *распределением* $P(M)$ на некотором многообразии M , т.е. в виде поля подпространств касательных пространств к M — это обобщение понятия поля направлений ОДУ 1-го порядка на случай дифференциальных уравнений любого порядка, любой размерности и любого числа независимых переменных. При этом решению дифференциального уравнения отвечает максимальное подмногообразие $S \subset M$, касающееся в своих точках распределения $P(M)$, то есть соответствующих подпространств, и называемое *интегральным многообразием* $P(M)$ — это график решения со всеми его производными до порядка, равного порядку уравнения.

Построение распределения по дифференциальному уравнению $F = 0$ порядка k выполняется следующим образом [2]. На тотальном многообразии $J^k(N)$ расслоения k -джетов гладких функций на многообразии N (независимых переменных) выделяется подмногообразие M нулевого уровня функции F . На $J^k(N)$ имеется естественная структура контактного распределения, которая индуцирует распределение $P(M)$ на M . Решению дифференциального уравнения отвечает функция u на N , а интегральному многообразию S — график сечения $j^k u$ расслоения k -джетов, отвечающего u .

Мы рассматриваем дифференциальные уравнения без особенностей, которым отвечают *неособые* гладкие распределения (постоянной размерности подпространств).

С целью выделения частных решений к дифференциальному уравнению присоединяются дополнительные условия. В геометрической формулировке задачи Коши начальному условию отвечает некоторое подмногообразие *данных Коши* $S_0 \subset S$, являющееся полным прообразом проекции искомого интегрального многообразия S на ось времени в начальный момент. Краевым условиям дифференциального типа отвечает подмногообразие *краевых данных* $B \subset M$, целиком проектируемое на границу ∂G некоторой области $G \subset N$ и включающее полный прообраз проекции S на ∂G .

Дифференциальному уравнению с параметром $\varepsilon \in \mathbb{R}^k$ отвечает распределение (семейство распределений) $P_\varepsilon(M)$. Назовём $P_\varepsilon(M)$ *регулярно возмущённым* в некоторой области $D \subset M$, если существует неособое гладкое распределение $P_0(D)$, такое, что $P_\varepsilon(M) \rightarrow P_0(D)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в D , причём этот предельный переход равномерен. Иначе $P_\varepsilon(M)$ будем называть *сингулярно возмущённым* в D — такое распределение характеризуется отсутствием равномерного предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Распределение $P_\varepsilon(M)$ может быть регулярно возмущённым в одних областях многообразия M , но сингулярно возмущённым в других, т.е. определение характера возмущения применительно к распределениям по своей природе локальное.

Дифференциальным уравнениям с быстро осциллирующими коэффициентами отвечают сингулярно возмущённые распределения, не имеющие поточечного предела, а уравнениям с малыми параметрами при старших производных — распределения, имеющие разрывный поточечный предел. В стороне остаются задачи для дифференциальных уравнений в сингулярно возмущённых областях (асимптотически большие промежутки времени, области с асимптотически тонкими перешейками и т.п.) ввиду нелокального характера возмущения.

Для примера рассмотрим дифференциальное уравнение $\varepsilon y' = f(x, y)$ с параметром $\varepsilon > 0$ и гладкой функцией f . Оно разрешимо относительно y' , поэтому ему можно сопоставить поле направлений (прямых) $P_\varepsilon(M)$ на расширенном фазовом пространстве $M = \{(x, y) \in D(f)\}$, порождённое неособым векторным полем $\mathbf{v}_\varepsilon = \{\varepsilon; f(x, y)\}$.

Вырожденное векторное поле $\mathbf{v}_0 = \{0; f(x, y)\}$ имеет особые точки на множестве $M_0 = \{(x, y) : f(x, y) = 0\} \subset M$, состоящем из решений вырожденного уравнения.

Предельное поведение распределения $P_\varepsilon(M)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ удобно исследовать, задав последнее векторным полем единичных направляющих векторов $\boldsymbol{\tau}_\varepsilon = \frac{\mathbf{v}_\varepsilon}{|\mathbf{v}_\varepsilon|}$.

Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место поточечный предельный переход

$$\boldsymbol{\tau}_\varepsilon \rightarrow \boldsymbol{\tau}_0 = \begin{cases} \{1; 0\}, & (x, y) \in M_0, \\ \{0; \operatorname{sgn} f(x, y)\}, & (x, y) \notin M_0, \end{cases}$$

где вырожденное векторное поле $\boldsymbol{\tau}_0$ порождает распределение $P_0(M)$, разрывное на множестве M_0 . Отсюда немедленно следует, что распределение $P_\varepsilon(M)$ является регулярно возмущённым в замыкании любой области в M , не содержащем точек из M_0 , и сингулярно возмущённым в любой другой области (считая само M),

Отметим, что векторное поле $\boldsymbol{\tau}_0$ (которое можно использовать для задания ориентации у вырожденного распределения) кодирует информацию об устойчивости решений вырожденного уравнения. Имея начальное условие $y(x_0) = y_0$, получаем данные Коши в виде точки $S_0(x_0, y_0)$, через которую проходит искомая интегральная кривая S — для вырожденного распределения $P_0(M)$ её легко построить эвристически.

По аналогии с указанным примером можно рассмотреть любое дифференциальное уравнение с малыми параметрами. Предстоит понять, согласуется ли определение характера возмущения в основных классах УрЧП с таковым в отношении распределений и какую информацию можно извлечь из геометрической постановки.

Отметим, что близкий к предложенному геометрический подход к сингулярно возмущённым уравнениям был развит Н. Феничелем [3] для автономных систем ОДУ.

Определения того, что такое регулярно или сингулярно возмущённое уравнение, как такового не существует ввиду необъятного разнообразия уравнений и задач, которые для них ставятся. Неформально это выясняется на основании того, является

ли предельный переход решения возмущённой задачи к решению вырожденной задачи равномерным (иногда вместе с производными решения), что требует исследования существования решения. Подход на основе распределений не требует ничего, кроме самого уравнения, и может дать такое определение в большом классе задач.

Кроме того, интерес к геометрической постановке задач для дифференциальных уравнений связан с привлекательной возможностью использовать инструменты дифференциальной геометрии и алгебраической топологии для их исследования.

Работа выполнена в рамках государственного задания МГУ им. М.В. Ломоносова.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, Основы дифференциальной геометрии, М.: Наука (1981).
- [2] А. М. Виноградов, И. С. Красильщик (ред.), Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики, М.: Факториал Пресс (2005).
- [3] Neil Fenichel, “Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations” // *J. Differential Equations*, **31**:1 (1979), 53-98.

**О связи асимптотических аппроксимаций, получаемых для решений
сингулярно возмущённых задач методом пограничных функций и методом
невырожденных преобразований**

О. Б. Цехан

УО Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь.

E-mail: tsekhan@grsu.by

Сингулярно возмущённые дифференциальные уравнения применяются при моделировании многотемповых процессов. Их ключевая особенность — наличие пограничных слоёв с резким изменением решения, что требует разработки специализированных методов анализа и вычислений. Для однородных линейных стационарных двухтемповых систем связь различных алгоритмов анализа, основанных либо на матричных итерационных рекуррентных алгоритмах, либо на построении аппроксимирующих асимптотических степенных рядов, исследуется в работе [1], где показано, что различные алгоритмы декомпозиции по временным масштабам либо эквивалентны, либо дают аппроксимацию решения одного и того же порядка точности.

В работе рассмотрены два подхода к получению равномерных на заданном интервале асимптотических аппроксимаций решений сингулярно возмущённых систем на основе декомпозиции исходной задачи на регулярную (медленную) и сингулярную (быструю) составляющие. Метод пограничных функций [2], развитый в работах А.Б. Васильевой, В.Ф. Бутузова и их последователей, основан на представлении решения в виде суммы регулярного ряда по степеням малого параметра и пограничных функций, которые описывают поведение решений вблизи границы и быстро убывают вне пограничного слоя. Метод невырожденных преобразований [3] использует алгебраические и аналитические преобразования исходной системы, позволяющие явно разделить быстрые и медленные переменные. Это достигается введением специальной замены переменных, которая приводит систему к блочно-диагональному виду.

Цель работы — установить связь между асимптотическими аппроксимациями решений, полученными обоими подходами.

Исследование представлено на примере начальной задачи для линейной нестационарной сингулярно возмущённой системы с неоднородностью вида:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_1(t)x(t) + A_2(t)y(t) + B_1(t)u(t), & x \in \mathbb{R}^n, & \quad x(t_0) = x_0, \\ \mu \dot{y}(t) &= A_3(t)x(t) + A_4(t)y(t) + B_2(t)u(t), & y \in \mathbb{R}^m, & \quad y(t_0) = y_0, \quad T = [t_0, t_1], \end{aligned} \quad (1)$$

где $0 < \mu \ll 1$. Далее везде предполагается, что корни $\lambda(A_4(t))$ характеристического уравнения матрицы $A_4(t)$ удовлетворяют $\operatorname{Re} \lambda(A_4(t)) < -\gamma < 0 \forall t \in T$, $\gamma = \operatorname{const} > 0$.

Аппроксимации решения методом пограничных функций. Согласно ме-

тому пограничных функций [2] решение начальной задачи (1) ищется в виде:

$$x(t, \mu) = x_s(t, \mu) + x_f(\tau, \mu), \quad y(t, \mu) = y_s(t, \mu) + y_f(\tau, \mu),$$

где $\tau = \frac{t-t_0}{\mu}$, регулярная (медленная) часть $x_s(t, \mu)$, $y_s(t, \mu)$ и пограничные функции (быстрая часть) $x_f(\tau, \mu)$, $y_f(\tau, \mu)$ ищутся в виде степенных рядов по μ :

$$\begin{aligned} x_s(t, \mu) &= x_{s0}(t) + \mu x_{s1}(t) + \dots, & y_s(t, \mu) &= y_{s0}(t) + \mu y_{s1}(t) + \dots, \\ x_f(\tau, \mu) &= x_{f0}(\tau) + \mu x_{f1}(\tau) + \dots, & y_f(\tau, \mu) &= y_{f0}(\tau) + \mu y_{f1}(\tau) + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Подставляя разложения (2) в (1), учитывая $\frac{d}{d\tau} = \mu \frac{d}{dt}$ и приравнявая в полученных выражениях коэффициенты при одинаковых степенях μ отдельно по t и τ , будем получать уравнения [4] для коэффициентов рядов (2). Так, для коэффициентов медленной части имеем подсистему 0-го порядка:

$$\dot{x}_{s0}(t) = A^0(t)x_{s0}(t) + B^0(t)u_s(t), \quad x_s(t_0) = x_0, \quad (3)$$

$$A^0(t) = A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t), \quad B^0(t) = B_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)B_2(t),$$

$$y_{s0}(t) = -A_4^{-1}(t)A_3(t)x_{s0}(t) - A_4^{-1}(t)B_2(t)u_s(t). \quad (4)$$

Так как в отличие от [4] здесь решается задача анализа, то полагаем $u_s(t) = u(t)$. Для коэффициентов погранслошной части имеем:

$$\begin{aligned} x_{f0}(\tau) &= 0, \\ \frac{dy_{f0}(\tau)}{d\tau} &= A_4(t_0)y_{f0}(\tau), \quad y_{f0}(t_0) = y_0 - y_{s0}(t_0). \end{aligned} \quad (5)$$

Асимптотическая аппроксимация 0-го порядка решения методом пограничных функций:

$$\begin{aligned} x_{\text{МПФ}}^{(0)}(t, \mu) &= x_{s0}(t), \\ y_{\text{МПФ}}^{(0)}(t, \mu) &= y_{s0}(t) + y_{f0}\left(\frac{t-t_0}{\mu}\right), \quad t \in T. \end{aligned} \quad (6)$$

Для произвольного k , $k = 0, 1, 2, \dots$ представления систем для коэффициентов k -го порядка асимптотических разложений (2) выводятся аналогично [4] с использованием доказанных там утверждений. Справедливы следующие представления.

Пусть для произвольного k , $k = 1, 2, \dots$ матрицы $A_1(t), A_2(t), B_1(t)$ $k-1$ раз, $A_3(t), A_4(t), B_2(t)$ k раз, а функция $u(t)$ $k-1$ раз непрерывно дифференцируемы на T . Тогда выражение для $y_{sk}(t)$, $k = 1, 2, \dots$, имеет вид:

$$y_{sk}(t) = \sum_{i=0}^k V_{ki}(t)x_{si}(t) + \sum_{i=0}^k W_{ki}(t)u^{(i)}(t),$$

начальная задача для $x_{sk}(t)$, $k = 1, 2, \dots$ имеет вид

$$\dot{x}_{sk}(t) = A^0(t)x_{sk}(t) + \sum_{i=0}^{k-1} A_2(t)V_{ki}(t)x_{is}(t) + \sum_{i=0}^k A_2(t)W_{ki}(t)u^{(i)}(t),$$

$$x_{sk}(t_0) = \int_0^\infty \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\tau}{i!} \left[A_1^{(i)}(t_0)x_{k-i-1,f}(\tau) + A_2^{(i)}(t_0)y_{k-i-1,f}(\tau) \right] d\tau.$$

а уравнения для $x_{fk}(\tau)$, $y_{fk}(\tau)$, $k = 1, 2, \dots$ имеют вид

$$x_{fk}(\tau) = \sum_{i=0}^{k-1} \int_\tau^\infty N_{k-i}(\tau, \tau_1)y_{if}(\tau_1)d\tau_1,$$

$$\frac{dy_{fk}(\tau)}{d\tau} = \sum_{j=0}^{k-1} \int_\tau^\infty R_{k-j}(\tau, \tau_1)y_{jf}(\tau_1)d\tau_1 + \sum_{j=0}^k \frac{\tau^j}{j!} A_4^{(i)}(t_0)y_{k-j,f}(\tau).$$

Здесь матричные функции $V_{ki}(t)$, $W_{ki}(t)$, $N_k(\tau, \tau_1)$, $R_k(\tau, \tau_1)$, $k = 1, 2, \dots$, $i = 0, 1, \dots, k$, вычисляются по рекуррентным формулам через параметры системы (1).

Начальные условия для определения $y_{fk}(\tau)$, $k = 1, 2, \dots$:

$$y_{fk}(0) = - \sum_{i=0}^k V_{ki}(t_0)x_{si}(t_0) - \sum_{i=0}^k W_{ki}(t_0)u^{(i)}(t_0), \quad k = 1, 2, \dots$$

Асимптотическая аппроксимация k -го порядка ($k = 0, 1, 2, \dots$) решения методом пограничных функций строится по формулам:

$$x_{\text{МПФ}}^{(k)}(t, \mu) = \sum_{m=0}^k \mu^m (x_{sm}(t) + x_{fm}(\tau)), \quad (7)$$

$$y_{\text{МПФ}}^{(k)}(t, \mu) = \sum_{m=0}^k \mu^m (y_{sm}(t) + y_{fm}(\tau)), \quad t \in T. \quad (8)$$

Аппроксимации методом невырожденных преобразований. Метод невырожденных преобразований для построения асимптотических аппроксимаций решений сингулярно возмущенных систем основан на расщепляющем преобразовании системы (1) [3]. В [5] построено невырожденное преобразование, применение которого к (1) выполняет полную декомпозицию исходной двухтемповой системы (1) на две подсистемы в отдельных шкалах времени. Преобразование имеет следующий вид:

$$T(t, \mu) = \begin{bmatrix} E_n & \mu H(t, \mu) \\ -L(t, \mu) & E_m - \mu L(t, \mu)H(t, \mu) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где E_n , E_m – единичные матрицы соответствующих размеров, матричные функции $L(t, \mu)$ и $H(t, \mu)$ являются решениями матричных уравнений 3.2 и 3.3 [3, стр. 209-210] и могут быть представлены в виде асимптотических разложений:

$$L(t, \mu) = \sum_{m=0}^k \mu^m L_m(t) + O(\mu^{k+1}), \quad H(t, \mu) = \sum_{m=0}^k \mu^m H_m(t) + O(\mu^{k+1}), \quad (10)$$

где

$$L_0(t) = A_4^{-1}(t)A_3(t), \quad H_0 = A_2(t)A_4^{-1}(t), \quad (11)$$

а функции $L_m(t), H_m(t)$, $m = 1, 2, \dots$ выражаются по рекуррентным формулам через матричные параметры системы (1).

Определим матричные функции

$$A(t, \mu) = \begin{bmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ \mu^{-1}A_3(t) & \mu^{-1}A_4(t) \end{bmatrix}, \quad B(t, \mu) = \begin{bmatrix} B_1(t) \\ \mu^{-1}B_2(t) \end{bmatrix}, \quad z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

Тогда систему (1) можно представить в эквивалентном виде

$$\dot{z}(t) = A(t, \mu)z(t) + B(t, \mu)u(t), \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T, \quad z(t_0) = z_0,$$

Выполняя замену переменных

$$z(t) = T(t, \mu)\zeta(t), \quad \zeta(t) = \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}, \quad \xi(t) \in \mathbb{R}^n, \quad \eta(t) \in \mathbb{R}^m,$$

получим задачу (1) в новых переменных [6, стр. 247]:

$$\dot{\zeta}(t) = A_\zeta(t, \mu)\zeta(t) + B_\zeta(t, \mu)u(t), \quad \zeta(t_0) = T^{-1}(t_0, \mu)z(t_0), \quad (12)$$

где $A_\zeta(t, \mu) = T^{-1}(t, \mu)A(t, \mu)T(t, \mu) - T^{-1}(t, \mu)\dot{T}(t, \mu)$, $B_\zeta(t, \mu) = T^{-1}(t, \mu)B(t, \mu)$.

Матрица $A_\zeta(t, \mu)$ преобразованной системы (12) имеет блочно-диагональный вид и уравнения для ξ , η отделены друг от друга. После отбрасывания в коэффициентах расщепленной системы и начальных условиях (12) всех членов, имеющих порядок малости $O(\mu)$ и выше, получим аппроксимацию 0-го порядка расщеплённой системы:

$$\dot{\xi}^0(t) = A^0(t)\xi^0(t) + B^0(t)u(t), \quad \xi^0(t_0) = x_0, \quad (13)$$

$$\mu\dot{\eta}^0(t) = A_4(t)\eta^0(t) + B_2(t)u(t), \quad \eta^0(0) = L_0(t_0)x_0 + y_0. \quad (14)$$

Используем быстрое время $\tau = \frac{t-t_0}{\mu}$, разложим зависящие от $t = t_0 + \mu\tau$ коэффициенты в (14) в ряд Тейлора, отбросим члены порядка малости $O(\mu)$ и выше. Тогда из уравнения (14) для быстрой переменной получаем:

$$\frac{d\eta^0(\tau)}{d\tau} = A_4(t_0)\eta^0(\tau) + B_2(t_0)\tilde{u}(\tau), \quad \tilde{u}(\tau) = u(t_0 + \mu\tau). \quad (15)$$

Асимптотическая аппроксимация 0-го порядка решения исходной системы (1) методом невырожденных преобразований определяется согласно равенствам [3, стр. 228]:

$$\begin{aligned} x_{\text{МНП}}^{(0)}(t) &= \xi^0(t), \\ y_{\text{МНП}}^{(0)}(t) &= -L_0(t)\xi^0(t) + \eta^0\left(\frac{t-t_0}{\mu}\right), \quad t \in T. \end{aligned} \quad (16)$$

Можно доказать, что для произвольного k , $k = 0, 1, \dots$ асимптотическую аппроксимацию k -го порядка решения исходной системы (1) можно построить по формулам

$$\begin{aligned} x_{\text{МНП}}^{(k)}(t, \mu) &= \xi^k(t) + \mu \sum_{m=0}^{k-1} \mu^m H_m(t) \eta^k \left(\frac{t-t_0}{\mu} \right), \\ y_{\text{МНП}}^{(k)}(t, \mu) &= \eta^k \left(\frac{t-t_0}{\mu} \right) - \sum_{m=0}^k \mu^m L_m(t) \xi^k(t) - \\ &\quad - \mu \sum_{m=0}^{k-1} \mu^m L_m(t) \sum_{n=0}^{k-m-1} \mu^n H_n(t) \eta^k \left(\frac{t-t_0}{\mu} \right), \quad t \in T, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\xi^k(t)$, $\eta^k(\tau)$ — решение аппроксимации k -го порядка расщеплённой системы (12), которая аналогично (13), (15) получается из (12) после отбрасывания в коэффициентах и начальных условиях всех членов, имеющих порядок малости выше $O(\mu^k)$.

Связь между аппроксимациями.

Теорема 1. Аппроксимации 0-го порядка решения системы (1), полученные методом пограничных функций (6) и методом невырожденных преобразований (16) связаны соотношениями

$$x_{\text{МПФ}}^{(0)}(t) = x_{\text{МНП}}^{(0)}(t), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} y_{\text{МПФ}}^{(0)}(t) &= y_{\text{МНП}}^{(0)}(t) - \\ &\quad - A_4^{-1}(t) B_2(t) u(t) + e^{A_4(t_0) \frac{t-t_0}{\mu}} A_4^{-1}(t_0) B_2(t_0) u(t_0) - \\ &\quad - \int_0^{\frac{t-t_0}{\mu}} e^{A_4(t_0) (\frac{t-t_0}{\mu} - s)} B_2(t_0) u(t_0 + \mu s) ds = \\ &= y_{\text{МНП}}^{(0)}(t) + O(\mu), \quad t \in T. \end{aligned} \quad (19)$$

Доказательство. Из совпадения начальных задач (3) для $x_{s_0}(t)$ и (13) для $\xi_0(t)$ сразу следует $x_{s_0}(t) \equiv \xi_0(t)$, $t \in T$, с учетом чего из (6) и (16) вытекает (18).

Докажем (19), (20). Из (6) с учетом решения задачи (5):

$$y_{f_0}(\tau) = e^{A_4(t_0)\tau} [y_0 - y_{s_0}(t_0)], \quad \tau \in \left[0, \frac{t_1 - t_0}{\mu} \right],$$

и (4) получаем:

$$\begin{aligned} y_{\text{МПФ}}^{(0)}(t, \mu) &= -A_4^{-1}(t) A_3(t) x_{s_0}(t) - A_4^{-1}(t) B_2(t) u(t) + \\ &\quad + e^{A_4(t_0) \frac{t-t_0}{\mu}} (y_0 + A_4^{-1}(t_0) A_3(t_0) x_0 + A_4^{-1}(t_0) B_2(t_0) u(t_0)), \quad t \in T. \end{aligned} \quad (21)$$

Решение быстрой подсистемы (15) :

$$\eta^0(\tau) = e^{A_4(t_0)\tau} [L_0(t_0)x_0 + y_0] + \int_0^\tau e^{A_4(t_0)(\tau-s)} B_2(t_0) u(t_0 + \mu s) ds, \quad \tau \in \left[0, \frac{t_1 - t_0}{\mu} \right].$$

Тогда из (16) получаем:

$$\begin{aligned} y_{\text{МНП}}^{(0)}(t) &= -L_0(t) \xi^0(t) + e^{A_4(t_0)\tau} [L_0(t_0)x_0 + y_0] + \\ &\quad + \int_0^{\frac{t-t_0}{\mu}} e^{A_4(t_0) (\frac{t-t_0}{\mu} - s)} B_2(t_0) u(t_0 + \mu s) ds. \end{aligned} \quad (22)$$

Вычисляя разность между (21) и (22) с учетом (11) и (18), получаем

$$\begin{aligned} y_{\text{МПФ}}^{(0)}(t, \mu) - y_{\text{МНП}}^{(0)}(t) &= \\ &= -A_4^{-1}(t)B_2(t)u(t) + A_4^{-1}(t_0)e^{A_4(t_0)\frac{t-t_0}{\mu}}B_2(t_0)u(t_0) - \\ &\quad - \int_0^{\frac{t-t_0}{\mu}} e^{A_4(t_0)(\frac{t-t_0}{\mu}-s)}B_2(t_0)u(t_0 + \mu s) ds, \end{aligned} \quad (23)$$

что доказывает (19).

Оценим правую часть (23). Для этого выполним преобразования с учетом замены $\tau = \frac{t-t_0}{\mu}$, $t = t_0 + \mu\tau$ и оценки $f(t_0 + \mu\tau) = f(t_0) + O(\mu)$, справедливой для произвольной непрерывной на T функции $f(t)$:

$$\begin{aligned} &- A_4^{-1}(t)B_2(t)u(t) + A_4^{-1}(t_0)e^{A_4(t_0)\frac{t-t_0}{\mu}}B_2(t_0)u(t_0) - \\ &- \int_0^{\frac{t-t_0}{\mu}} e^{A_4(t_0)(\frac{t-t_0}{\mu}-r)}B_2(t_0)u(t_0 + \mu s) ds = \\ &= -A_4^{-1}(t_0 + \mu\tau)B_2(t_0 + \mu\tau)u(t_0 + \mu\tau) + \int_0^\infty e^{A_4(t_0)(\tau-s)} ds B_2(t_0)u(t_0) - \\ &- \int_0^\tau e^{A_4(t_0)(\tau-r)}B_2(t_0)u(t_0 + \mu s) ds = \\ &= [-A_4^{-1}(t_0)B_2(t_0)u(t_0) + O(\mu)] + \int_\tau^\infty e^{A_4(t_0)(\tau-s)} ds B_2(t_0)u(t_0) + \\ &+ \int_0^\tau e^{A_4(t_0)(\tau-r)}B_2(t_0)[u(t_0) - u(t_0 + \mu s)] ds. \end{aligned}$$

Так как вещественные части собственных значений $A_4(t_0)$ отрицательны, то существует $c > 0$ такое что $e^{A_4(t_0)} = O(e^{-c/\mu})$. Для интеграла $\int_0^\tau e^{A_4(t_0)(\tau-s)} B_0 \cdot O(t_0 + \mu s) ds$ справедлива оценка $O(\mu)$. Поскольку $O(e^{-c/\mu})$ убывает быстрее любой степени μ , то окончательно получаем $y_{\text{МПФ}}^{(0)}(t, \mu) - y_{\text{МНП}}^{(0)}(t) = O(\mu)$, откуда следует соотношение (20) и справедливость Теоремы 1.

Соотношения (18), (20) доказывают асимптотическую эквивалентность аппроксимаций 0-го порядка решения системы (1), полученных методом пограничных функций (6) и методом невырожденных преобразований (16). Как следует из (19), в отличие от однородных систем, для неоднородной системы (1) в общем случае эти аппроксимации не равны между собой.

Теорема 2. Для любого k , $k = 0, 1, 2, \dots$ при условии достаточной гладкости матриц системы (1) и функции $u(t)$, $t \in T$, для асимптотических аппроксимаций k -го порядка

$$z_{\text{МНП}}^{(k)}(t) = \begin{bmatrix} x_{\text{МНП}}^{(k)}(t) \\ y_{\text{МНП}}^{(k)}(t) \end{bmatrix}, \quad z_{\text{МПФ}}^{(k)}(t) = \begin{bmatrix} x^{(k)}(t) \\ y^{(k)}(t) \end{bmatrix}$$

решений системы (1) справедливо соотношение

$$z_{\text{МПФ}}^{(k)}(t) = z_{\text{МНП}}^{(k)}(t) + O(\mu^{k+1}). \quad (24)$$

Доказательство. Определим $L^{(k)}(t, \mu) = \sum_{m=0}^k \mu^m L_m(t)$, $H^{(k)}(t, \mu) = \sum_{m=0}^k \mu^m H_m(t)$ и введем в рассмотрение $O(\mu^{k+1})$ -асимптотические аппроксимации преобразования (9) вида:

$$T^{(k)}(t, \mu) = \begin{bmatrix} E_n & \mu H^{(k)}(t, \mu) \\ -L^{(k)}(t, \mu) & E_m - \mu L^{(k)}(t, \mu) H^{(k)}(t, \mu) \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Для любого k ($k = 0, 1, 2, \dots$) преобразования (25) обратимы, в чём можно убедиться непосредственными вычислениями. Кроме того, справедливо представление

$$(T^{(k)})^{-1}(t, \mu) \triangleq \bar{T}^{(k)}(t, \mu) = \begin{bmatrix} E_n - \mu H^{(k)}(t, \mu) L^{(k)}(t, \mu) & \mu - H^{(k)}(t, \mu) \\ L^{(k)}(t, \mu) & E_m \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Заметим, что в общем случае элементы матричных функций (25) и (26) могут содержать слагаемые более высокого порядка малости, чем $O(\mu^k)$. Пусть $T_k^{(k)}(t, \mu)$ и $\bar{T}_k^{(k)}(t, \mu)$ получены из (25) и (26) отбрасыванием всех слагаемых порядка выше $O(\mu^k)$. Значит, верно $T^{(k)}(t, \mu) = T_k^{(k)}(t, \mu) + O(\mu^{k+1})$.

Введем векторы

$$\zeta(t) = \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}, \quad \zeta^k = \begin{bmatrix} \xi^k(t) \\ \eta^k(t) \end{bmatrix},$$

где $\xi(t), \xi^k(t) \in \mathbb{R}^n$, $\eta(t), \eta^k(t) \in \mathbb{R}^m$, $\zeta(t)$ связано с $z(t)$ равенством

$$z(t) = T^{(k)}(t, \mu)\zeta(t), \quad t \in T. \quad (27)$$

При достаточной гладкости матриц системы вектор $\zeta(t)$ удовлетворяет системе

$$\dot{\zeta}(t) = A_\zeta(t, \mu)\zeta(t) + B_\zeta(t, \mu)u(t), \quad \zeta(t_0) = \bar{T}^{(k)}(t_0, \mu)z(t_0), \quad (28)$$

где $A_\zeta(t, \mu) = \bar{T}^{(k)}(t, \mu)A(t, \mu)T^{(k)}(t, \mu) - \bar{T}^{(k)}(t, \mu)\dot{T}^{(k)}(t, \mu)$, $B_\zeta(t, \mu) = \bar{T}^{(k)}(t, \mu)B(t, \mu)$.

Рассмотрим начальную задачу

$$\dot{\zeta}^k(t) = A^k(t, \mu)\zeta^k(t) + B^k(t, \mu)u(t), \quad \zeta^k(t_0) = \bar{T}^{(k)}(t_0, \mu)z(t_0), \quad (29)$$

где $A^k(t, \mu), B^k(t, \mu)$ получены из $A_\zeta(t, \mu), B_\zeta(t, \mu)$ путем отбрасывания в них всех членов, имеющих порядок малости выше $O(\mu^k)$. Аналогично [7] можно показать, что матрица $A^k(t, \mu)$ имеет блочно-диагональный вид, а система (29) декомпозирована по темпам изменения переменных ξ^k, η^k .

В силу непрерывной зависимости решений начальной задачи (28) от параметров и начальных данных, справедливо $\zeta(t) = \zeta^k(t) + O(\mu^{k+1})$.

Записывая второе уравнение из (29) в быстром времени $\tau = \frac{t-t_0}{\mu}$, раскладывая в ряд Тейлора коэффициенты системы и отбрасывая члены порядка малости выше $O(\mu^k)$, получим систему

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^k(t) &= A^k(t, \mu)\xi^k(t) + B^k(t, \mu)u(t), & \xi^k(t_0) &= x^0 - \mu H^k(t_0, \mu)(L^k(t_0, \mu)x^0 + y^0), \\ \frac{d\eta^k(\tau)}{d\tau} &= A_\eta^k(\tau)\eta^k(\tau, \mu) + B_\eta^k(\tau, \mu)u(\mu\tau), & \eta^k(0) &= L^k(t_0, \mu)x^0. \end{aligned}$$

Можно показать, что для $z_{\text{МНП}}^{(k)}(t)$ из (17) верно $z_{\text{МНП}}^{(k)}(t) = T_k^{(k)}(t, \mu)\zeta^k(t)$, $t \in T$. Таким образом, с одной стороны, из (27) имеем

$$z(t) = \left(T_k^{(k)}(t, \mu) + O(\mu^{k+1})\right) \left(\zeta^k(t) + O(\mu^{k+1})\right) = z_{\text{МНП}}^{(k)}(t) + O(\mu^{k+1}).$$

С другой стороны, в условиях теоремы для решения системы (1) справедливо

$$z(t) = z_{\text{МПФ}}^{(k)}(t) + O(\mu^{k+1}).$$

Объединяя два последних соотношения, убеждаемся в справедливости (24). Теорема 2 доказана.

Заключение. В работе доказано, что для линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с неоднородностью и начальными условиями асимптотики решения, полученные методом пограничных функций [2] и методом невырожденных преобразований [3], совпадают с точностью до заданного порядка по μ . На примере аппроксимаций 0-го порядка показано, что в общем случае асимптотические аппроксимации не равны. Получены уравнения связи (18), (19) между асимптотическими аппроксимациями 0-го порядка решений, построенными обоими методами.

Используя подходы и результаты из [8, 9, 10, 11] доказанные в работе утверждения можно обобщить на линейные нестационарные сингулярно возмущенные системы управления с постоянным запаздыванием по состоянию.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] R.G. Phillips. “The equivalence of time-scale decomposition techniques used in the analysis and design of linear systems” // *International Journal of Control*, **37**:6 (1983), 1239-1257.
- [2] А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
- [3] P.V. Kokotovic, H.K. Khalil, J. O’Reilly. *Singular perturbations methods in control: analysis and design*. NY. Academic Press, 1999.
- [4] Т.Б. Копейкина, О.Б. Манцевич. К вопросу о виде решений линейных нестационарных сингулярно возмущенных систем управления / Препринт АН БССР. Ин-т математики №43(393) Минск, 1989. – 24с.
- [5] K. Chang “Singular perturbations of a general boundary value problem ” // *SIAM J. Math. Anal.*, **3**:3 (1972), 520-526.
- [6] И.В. Гайшун. Введение в теорию линейных нестационарных систем. Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 1999.
- [7] О.Б. Цехан. “Расщепляющее преобразование линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с постоянным запаздыванием в уравнении медленной переменной” // *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и её прил. Темат. обз.*, **236** (2024), 49–71.

- [8] V.V. Strygin, D.V. Sharuda. “Asymptotic expansion of a solution of stiff systems of delay differential equations” // *IFAC Proceedings Volumes*, **33**:23 (2000), 287-289.
- [9] V.V. Strygin. “Boundary function method for nonlinear singularly perturbed time delay systems” // *Вестник Воронежского государственного университета. Серия физика, математика*, **1**, (2000), 154-163.
- [10] О.Б. Цехан. “Асимптотическая аппроксимация решения одной линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с постоянным запаздыванием” // *Вестник ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2.*, **14**:1 (2024), 37–47.
- [11] О.Б. Цехан. “Асимптотические аппроксимации решений одного класса линейных нестационарных сингулярно возмущенных систем управления с постоянным запаздыванием” // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **35**:4 (2025), 578–600.

Identification of Advection in a Reduced Atmospheric Model

Dmitrii Chaikovskii¹, Ye Zhang², Sergey Pirutin³

¹*MSU-BIT-SMBU Joint Research Center of Applied Mathematics, Shenzhen MSU-BIT University, Shenzhen, China.*

²*School of Mathematics and Statistics, Beijing Institute of Technology, Beijing, China.*

³*Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Shenzhen MSU-BIT University, Shenzhen, China; Faculty of Biology, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.*

E-mails: ¹dmitriich@smbu.edu.cn, ²ye.zhang@bit.edu.cn, ³pirutin@smbu.edu.cn

We analyze a vertically integrated one-dimensional reaction–advection–diffusion model in a singularly perturbed regime where diffusion is small relative to advection and reaction, producing a moving internal layer and stiffness in standard discretizations [1].

Forward problem. We construct a composite asymptotic approximation consisting of outer solutions (governed by transport–reaction balance) plus an internal-layer correction in a stretched variable. Under standard smoothness and stability assumptions on the reaction roots, we obtain uniform forward error bounds and derivative accuracy away from the layer via comparison arguments as in [2].

Inverse problem. From noisy measurements of $u(\cdot, t_0)$ at a fixed time t_0 , we reconstruct the spatially varying advection coefficient $b(x)$ away from the internal layer. In the outer region, the leading-order balance implies

$$b(x) u_x(x, t_0) = f(u(x, t_0), x, t_0), \quad (1)$$

so b can be recovered pointwise from the ratio f/u_x . To reduce sensitivity to noise in u_x , we apply spline smoothing to the snapshot and define the estimator using the smoothed profile and its derivative. We obtain stability bounds with an error decomposition into an asymptotic (modeling) term and a data-noise term, in the standard regularization framework [3, 4].

Numerical tests with linear, switching, and nonlinear reactions confirm the predicted forward accuracy and demonstrate robust advection recovery from a single noisy snapshot.

REFERENCES

- [1] A. B. Vasil’eva, V. F. Butuzov, *Asymptotic Methods in the Theory of Singular Perturbations*. SIAM, 1990.
- [2] D. Chaikovskii, Y. Zhang, “Convergence analysis for forward and inverse problems in singularly perturbed time-dependent reaction–advection–diffusion equations” // *Journal of Computational Physics*, **470** (2022), 111609.

- [3] V. Isakov, *Inverse Source Problems*. American Mathematical Society, 1990.
- [4] D. V. Lukyanenko, M. A. Shishlenin, V. T. Volkov, “Solving of the coefficient inverse problems for a nonlinear singularly perturbed reaction-diffusion-advection equation with the final time data” // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **54** (2018), 233–247.

Дробно-иррациональные асимптотики

Е. А. Щепакина¹, В. А. Соболев², Е. С. Долгова³

^{1,2,3}Самарский университет, Самара, Россия.

E-mails: ¹shchepakina@ssau.ru, ²v.sobolev@ssau.ru, ³dolgova.es@ssau.ru

Работа посвящена развитию теории асимптотических методов. Основы теории асимптотических методов сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений были заложены в работах А. Н. Тихонова и А. Б. Васильевой, их коллег и учеников. Эти результаты изложены в ряде монографий и вошли в учебники [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. Особо можно отметить работы В. Ф. Бутузова и Н. Н. Нефедова, посвященные развитию асимптотической теории для уравнений с частными производными, а также работы Н. Н. Нефедова и А. Г. Никитина по асимптотике решений интегро-дифференциальных уравнений с частными производными, см., например, [8, 9, 10, 11, 12] и библиографию в них.

Одной из центральных задач асимптотической теории является повышение точности асимптотических приближений, что особенно важно в различных критических случаях. Решение данной задачи за счет увеличения порядка асимптотического приближения (нахождения большего количества членов асимптотического ряда) сопряжено с возрастанием сложности аналитических вычислений. В данной работе для повышения точности асимптотических приближений без дополнительных трудоемких аналитических вычислений предложены дробно-иррациональные асимптотики, которые могут рассматриваться как обобщение дробно-рациональных аппроксимаций Паде [13].

Следует отметить, что основной проблемой построения дробно-иррациональных аппроксимаций является иерархия асимптотических функций, поскольку умножение асимптотических рядов может не приводить к асимптотическому ряду, а следовательно, не каждая асимптотическая последовательность подходит для построения дробно-иррациональных аппроксимаций. В работе представлены примеры асимптотических последовательностей, для которых данная проблема решена [14].

Особое внимание в работе уделено критическим (вырожденным) случаям. Эффективность предложенных дробно-иррациональных аппроксимаций демонстрируется на примере прикладной задачи.

Исследование выполнено за счет средств государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, шифр проекта № FSSS-2026-0009.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А.Н. Тихонов, “Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных” // *Матем. сб.*, **31**:3, (1952), 575–586.
- [2] А.Б. Васильева, “Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной” // *Успехи матем. наук*, **18**:3, (1963), 15–86.
- [3] А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов, Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973. — 272 с.
- [4] А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов, Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. — М.: Изд-во МГУ, 1978. — 106 с.
- [5] А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников, Дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1980. — 232 с.
- [6] А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов, Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высш. шк., 1990. — 208 с.
- [7] В.Ф. Бутузов, А.Б. Васильева, Н.Н. Нефедов, “Асимптотическая теория контрастных структур (обзор)” // *Автомат. и телемех.*, **7** (1997), 4–32.
- [8] В.Ф. Бутузов, Н.Н. Нефедов, Е.В. Полежаева, “Асимптотические решения линеаризованных задач о собственных и вынужденных резонансных колебаниях среды с малой вязкостью” // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **29**:7 (1989), 1023–1035.
- [9] В.Ф. Бутузов, Н.Н. Нефедов, “Сингулярно возмущенная краевая задача для уравнения второго порядка в случае смены устойчивости” // *Матем. заметки*, **63**:3 (1998), 354–362.
- [10] Н.Н. Нефедов, А.Г. Никитин, “Пограничные и внутренние слои в задаче реакция-диффузия с нелокальным ингибитором” // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **51**:6 (2011), 1081–1090.
- [11] Н.Н. Нефедов, “Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакции-диффузии-адвекции: теория и применение” // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **61**:12 (2021), 2074–2094.
- [12] Н.Н. Нефедов, “Существование и асимптотика решений краевых задач для систем реакция-диффузия тихоновского типа в случае смены устойчивости” // *Матем. заметки*, **116**:6 (2024), 947–955.
- [13] Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис, Аппроксимации Паде. — М.: Мир, 1986. — 502 с.
- [14] V. Sobolev, E. Dolgova, E. Shchepakina, “Irrational–fractional approximations in the degenerate cases” // Proceedings of 2025 18th International Conference on Management of Large-Scale System Development, MLSD 2025. DOI:10.1109/MLSD65526.2025.11220717.

СЕКЦИЯ СТЕНДОВЫХ ДОКЛАДОВ

Полные тексты докладов доступны на странице
<http://math.phys.msu.ru/asymptotic-methods-2026>

Использование методов асимптотического анализа для решения обратной задачи по определению доли сгоревшей биомассы в ландшафтных лесных пожарах с данными о положении фронта горения в локальной двумерной области наблюдения

Р. Л. Аргун¹, Н. Т. Левашова²

^{1,2}*МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия.*

E-mails: ¹argun.rl14@physics.msu.ru, ²levashovant@physics.msu.ru

В работе рассматривается модель ландшафтного лесного пожара, состоящая из двух уравнений: уравнения, описывающего движение фронта температуры и фронта сгоревшей биомассы в двумерном случае. В одномерном случае такая модель на основе сингулярно возмущенных уравнений была подробно рассмотрена в работе [1].

На основе исходной модели была поставлена обратная задача по определению доли сгоревшей биомассы в ландшафтных лесных пожарах по данным наблюдений динамики распространения фронта пожара в двумерной локальной области наблюдения. Это означает, что рассматриваемая область имеет такие размеры, при которых наблюдаемый фронт горения леса представляет собой незамкнутую кривую (типичные размеры области достигают величин порядка нескольких десятков километров).

Известно, что в результате лесного пожара сгорает не вся лесная биомасса, а только ее определенная доля. Определение доли сгоревшей биомассы является важной прикладной задачей, оперативное решение которой позволяет делать выводы об опасности таких пожаров и, в некоторых случаях, о целесообразности их тушения. Трудность практического решения задач такого типа связана с тем, что рассматриваемые задачи относятся к классу обратных задач для сингулярно возмущенных уравнений в частных производных. Классические методы решения обратных задач такого класса основываются на градиентных методах минимизации целевого функционала, что приводит к необходимости многократного решения прямой и сопряжённой задач. Методы асимптотического анализа позволяют свести исходную постановку обратной задачи к более простой (редуцированной) задаче, вычислительная сложность которой существенно меньше. В результате задача может быть решена с существенно меньшими вычислительными затратами. При этом использованный подход обладает ограниченными условиями применимости, ряд которых также будет подробно исследован в работе на модельных примерах.

Работа выполнена в рамках государственного задания МГУ имени М.В. Ломоносова.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Р.Л. Аргун, Н.Т. Левашова, Е.В. Полежаева “Асимптотика решения системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в модели распространения лесного пожара” // *Теоретическая и математическая физика*, **224**:2 (2025), 243-256.

Многофазные контрастные структуры в неоднородной активной среде с адвекцией

А. А. Быков¹, Ли Сятун²

^{1,2}МГУ им М.В.Ломоносова. Физический факультет, кафедра математики. Москва. .
E-mails: ¹abykovmsu@mail.ru, ²be2312701251@gmail.com

Keywords: нелинейные дифференциальные уравнения, асимптотические методы, контрастная структура, дифференциальные неравенства.

1. Аннотация. Исследована эволюция многофазных контрастных структур в неоднородной среде с адвекцией. Разработана комбинированная 1D–2D сингулярно возмущенная модель реакции–адвекции–диффузии, где 1D компонента описывает зоны интенсивных источников (лидеры), а 2D компонента — окружающую среду. Методами асимптотического анализа получены ключевые результаты: (1) Установлен закон движения фронта: нормальная скорость есть сумма трех компонент — дрейфа дисбаланса реакции, нормальной составляющей адвекции и дрейфа, вызванного кривизной фронта. (2) Выявлена роль кривизны: дрейф кривизны действует как эффективное поверхностное натяжение, устраняя изломы фронта и обеспечивая его гладкость. (3) Смоделированы характерные формы фронта: предсказаны и численно подтверждены V-образные структуры, стационарные периодические волны, а также параболически-линейные паттерны для сред с периодическими лидерами конечной ширины.

Сокращения: **ФПИ** функция плотности источников, **КС** контрастная структура, **РАД** реакции–адвекции–диффузии (модель, уравнение), **ВПС** внутренний переходный слой.

2. Уравнение РАД. В соответствии с методикой А.Н.Тихонова [1], мы рассматриваем двумерную по пространственным координатам сингулярно возмущенную краевую задачу в области \mathcal{D} для уравнения РАД с малым параметром при старших производных:

$$\varepsilon u'_{2t} + \varepsilon V_{2x} u'_{2x} + \varepsilon V_{2y} u'_{2y} = \varepsilon^2 (\kappa_2 u'_{2x})'_x + (\kappa_2 u'_{2y})'_y - f_2(u_2, x, y), \quad (1)$$

$(x, y) \in \mathcal{D}$, $t > t_0 = 0$, с граничными условия второго рода на границе $\partial\mathcal{D}$ области \mathcal{D} : $\frac{\partial u_2}{\partial \bar{n}} = \psi_{21}(x, y)$, с начальным условием $u_2(x, y, t_0) = \psi_{20}(x, y)$.

Мы предполагаем, что выполнены обычные условия на ФПИ [2]. Частичную сумму асимптотического ряда для решения задачи РАД будем искать в виде [2] суммы разрывного решения вырожденного уравнения $\bar{u}_2(x, y, t, \varepsilon)$, функций внутреннего переходного слоя $Q_2^{(\pm)}(x, y, t, \varepsilon)$ и функций пограничного слоя $\Pi_2(x, y, \varepsilon)$.

3. Локальные координаты. Направим координату θ вдоль линии фронта и s вдоль нормали. Уравнение (1) запишем в в системе координат (s, θ) в виде $\varepsilon u'_{2t} +$

$\varepsilon(A_1V_{2s}u'_{2s} + A_2V_{2\theta}u'_{2\theta}) = \kappa_2\varepsilon^2(A_{11}u''_{2ss} + 2A_{12}u''_{2s\theta} + A_{22}u''_{2\theta\theta} + B_1u'_{2s} + B_2u'_{2\theta}) - f_2(u_2, s, \theta)$, $(s, \theta) \in \Omega(\Upsilon)$. Здесь $A_{11} = (s'_x)^2 + (s'_y)^2$, $A_{12} = s'_x\theta'_x + s'_y\theta'_y$, $A_{22} = (\theta'_x)^2 + (\theta'_y)^2$, $B_1 = s''_{xx} + s''_{yy}$, $B_2 = \theta''_{xx} + \theta''_{yy}$, $V_\theta(s, \theta) = V \sin \alpha$, $V_s(s, \theta) = V \cos \alpha$, где $v = V_2(x(s, \theta), y(s, \theta))$, α есть угол между осями Ox и Os в точке (s, θ) .

4. Разделение медленной и быстрой координат. Пусть $(\tilde{s}, \tilde{\theta})$ есть некоторая точка на $\hat{\Upsilon}$. Выполним замену $s = \tilde{s} + \varepsilon\xi$, $\theta = \tilde{\theta} + \eta$, $t = \varepsilon\tau$, $\varepsilon u'_{2t} = u'_{2\tau}$, $\varepsilon u'_{2s} = u'_{2\xi}$, получим уравнение $u'_{2\tau} + V_{2s}u'_{2\xi} + \varepsilon V_{2\theta}u'_{2\eta} = \kappa_2(A_{11}u''_{2\xi\xi} + 2\varepsilon A_{12}u''_{2\xi\eta} + \varepsilon^2 A_{22}u''_{2\eta\eta}) + \varepsilon\kappa_2 B_1 u'_{2\xi} + \varepsilon^2 \kappa_2 B_2 u'_{2\eta} - f_2(u_2, \tilde{s} + \varepsilon\xi, \tilde{\theta} + \eta)$. Оставим члены порядка $O(1)$, получим краевую задачу нулевого приближения:

$$\begin{cases} u'_{2\tau} + V_{2s}(\tilde{s}, \tilde{\theta} + \eta)A_1 u'_{2\xi} = \kappa_2 A_{11} u''_{2\xi\xi} - f_2(u_2, \tilde{s}, \tilde{\theta} + \eta), \\ u_2(-\infty, \eta) = \varphi_1^{(2)}(\tilde{s}, \tilde{\theta}), \quad u_2(+\infty, \eta) = \varphi_3^{(2)}(\tilde{s}, \tilde{\theta}). \end{cases}$$

Вместе рассмотрим "сопутствующую" задачу в точке $M_0 = (\tilde{s}, \tilde{\theta}) \in \tilde{\Upsilon}_0$. Обозначим $v_2(\xi, \tau) = u_2(\tilde{s} + \varepsilon\xi, \tilde{\theta} + \eta, \varepsilon\tau)$, запишем семейство сопутствующих задач нулевого приближения с параметром η :

$$\begin{cases} v'_{2\tau} + V_{2s}(\tilde{s}, \tilde{\theta} + \eta)A_1 v'_{2\xi} = \kappa A_{11} v''_{2\xi\xi} - f_2(v, \tilde{s}, \tilde{\theta} + \eta), \\ v_2(-\infty) = \varphi_1^{(2)}(\tilde{s}, \tilde{\theta} + \eta), \quad v_2(+\infty) = \varphi_3^{(2)}(\tilde{s}, \tilde{\theta} + \eta). \end{cases}$$

5. Решение в виде бегущей квазиволны. Решение будем искать в виде бегущей квазиволны: $v_2(\xi, \tau) = w_2(\chi)$, где $\chi = \xi - W_2\tau$. Скорость квазиволны W_2 найдем далее из условия существования решения:

$$\begin{cases} -\hat{U}_2 w'_{2\chi} = \kappa_2 A_{11} w''_{2\chi\chi} - f_2(w_2), \\ w_2(-\infty) = \varphi_1^{(2)} + 0, \quad w_2(+\infty) = \varphi_3^{(2)} - 0, \end{cases}$$

где $\hat{U}_2 = W_2 - A_1 V_{2s}$, здесь и далее в этом параграфе $\varphi_{1,3}^{(2)} = \varphi_{1,3}^{(2)}(\tilde{s}, \tilde{\theta} + \eta)$. Теперь, $-\hat{U}_2 \int_{-\infty}^{+\infty} (w'_{2\chi})^2 d\chi = \kappa_2 \int_{-\infty}^{+\infty} A_{11} w'_{2\chi} w''_{2\chi\chi} d\chi - \int_{-\infty}^{+\infty} w'_{2\chi} f_2(w_2) d\chi$. Применяя интегрирование по частям, значение \hat{U}_2 найдем в явной форме, если известен профиль квазиволны: $\hat{U}_2 = [\int_{-\infty}^{+\infty} (w'_{2\chi})^2 d\chi]^{-1} \int_{\varphi_1^{(2)}}^{\varphi_3^{(2)}} f_2(w_2) dw_2$. Операция понижения порядка $w'_{2\chi} = p(w_2)$, $w''_{2\chi\chi} = pp'_{w_2}$, приводит к уравнению $-\hat{U}_2 p = \kappa_2 A_{11} pp'_{w_2} - f_2(w_2)$, с условиями для $p_2(w)$, обеспечивающими решение типа КС с одним ВПС, соединяющим уровни $\varphi_1^{(2)}$ и $\varphi_3^{(2)}$: $p_2(\varphi_1^{(2)} + 0) = +0$, $p_2(\varphi_3^{(2)} - 0) = +0$. К тому же $p_2(w) > 0$ при $w \in (\varphi_1^{(2)}, \varphi_3^{(2)})$. Мы нашли скорость перемещения ВПС вдоль направления нормали: $W_2(\tilde{s}, \tilde{\theta}, \vec{n}) = \hat{U}_2(\tilde{s}, \tilde{\theta}) + A_1 V_{2s}$.

6. Задача Коши для семейства траекторий. Пусть векторная функция $\vec{r}(\theta, t) = (x(\theta, t), y(\theta, t))$ есть решение задачи Коши

$$\left\{ \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = -\vec{n}(x, y) [\hat{U}(x, y) + (\vec{V}, \vec{n}(x, y))], \quad \vec{r}|_{t=t_{\text{start}}} = \vec{r}_{\text{start}}(\theta), \quad \text{где} \right.$$

$\vec{n}(x, y) = (-\frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial x}{\partial \theta}) [(\frac{\partial x}{\partial \theta})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \theta})^2]^{-1/2} = \mathcal{N}[\vec{r}(s, \theta)]$. Это равносильно системе дифференциальных уравнений первого порядка: $\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial \theta} \cdot E$, $\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\partial x}{\partial \theta} \cdot E$, $E = [(\frac{\partial x}{\partial \theta})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \theta})^2]^{-1/2} (\hat{U}(x, y) + (-V_x \frac{\partial y}{\partial \theta} + V_y \frac{\partial x}{\partial \theta}) [(\frac{\partial x}{\partial \theta})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \theta})^2]^{-1/2})$.

7. Уравнение эйконала и траектории фронта. Введём гамильтониан $H(x, y, p_1, p_2) = p_1^2 + p_2^2 - W(x, y)^{-2}$. Пусть S есть эйконал, т.е. решение уравнения $(\nabla S)^2 = W^{-2}(x, y)$ с начальным условием $S|_{\Upsilon_{\text{start}}} = S_{\text{start}} = \text{const}$ на линии

фронта ВПС в начальный момент времени. Пусть параметризованное параметром θ семейство функций $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{p}_1(t), \tilde{p}_2(t))$ есть результат решения задачи Коши для уравнений Гамильтона

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{dt} = 2p_1, & \frac{d\tilde{y}}{dt} = 2p_2, & \frac{d\tilde{p}_1}{dt} = \frac{\partial W^{-2}}{\partial \tilde{x}}, & \frac{d\tilde{p}_2}{dt} = \frac{\partial W^{-2}}{\partial \tilde{y}}, \\ (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2)|_{t_{\text{start}}} = (x_{\text{start}}(\theta), y_{\text{start}}(\theta), \tilde{p}_{1\text{start}}(\theta), \tilde{p}_{2\text{start}}(\theta)), \end{cases}$$

$(\tilde{p}_{1\text{start}}(\theta), \tilde{p}_{2\text{start}}(\theta))$ найдены из условия равенства нулю Гамильтониана на Υ_{start} [3]. Пусть $\mathcal{C}_{*\text{ham}}(\theta) = (\tilde{x}(\theta, t), \tilde{y}(\theta, t))$, $t \in [t_{\text{start}}, t_1]$ есть лучи [3] (проекции кривых $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{p}_1(t), \tilde{p}_2(t))$ на плоскость \tilde{x}, \tilde{y}). Тогда $S(\tilde{x}, \tilde{y}) = S_{\text{start}} + \int_{\mathcal{C}_{*\text{ham}}(\tilde{x}, \tilde{y})} \langle p, dx \rangle = S_{\text{start}} + \int_{\mathcal{C}_{*\text{ham}}(\tilde{x}, \tilde{y})} W^{-1}(x, y) dl$. Пусть l есть геометрическая длина пути вдоль траектории квазилуча. Тогда на $\mathcal{C}_{*\text{ham}}$ верно $\frac{d}{dl} = \frac{d}{dt} \frac{dt}{dl} = \frac{1}{W} \frac{d}{dt}$, $\frac{dl}{dt} = W$, $\frac{d\vec{r}}{dl} = W(x, y) \nabla S$, $\frac{d\vec{r}}{dt} = W^2(x, y) \nabla S$. Отсюда следует, что семейство линий равного уровня S совпадают с семейством линий фронта квазиволны.

8. Сумма первого порядка асимптотического ряда. Найдем частичную сумму асимптотического ряда первого порядка: $u(\xi, \eta, t) = u_0(\xi, \eta, t) + \varepsilon u_1(\xi, \eta, t)$, $\hat{W} = \hat{W}_0 + \varepsilon \hat{W}_1$. Соберем слагаемые первого порядка относительно ε : $u'_\tau + \varepsilon V_s u'_\xi + \varepsilon^2 V_\theta u''_\eta = \kappa(A_{11} u''_{\xi\xi} + 2\varepsilon A_{12} u''_{\xi\eta} + \varepsilon^2 A_{22} u''_{\eta\eta}) + \varepsilon \kappa B_1 u'_\xi + \varepsilon^2 \kappa B_2 u'_\eta - f(u, \hat{s} + \varepsilon \xi, \tilde{\theta} + \eta)$. Теперь для бегущей квазиволны в первом порядке получим $-\hat{W}_1(u_0)'_\xi - \hat{W}_0(u_1)'_\xi + V_s(u_0)'_\xi = \kappa A_{11}(u_1)''_{\xi\xi} + 2\kappa A_{12}(u_0)''_{\xi\eta} + \kappa B_1(u_0)'_\xi - f''_{\theta u}(u_0(\xi, \hat{s}, \tilde{\theta}), \hat{s}, \tilde{\theta} + \nu\eta) \cdot \eta \cdot u_1 - f''_{\theta s}(u_0(\xi, \hat{s}, \tilde{\theta}), \hat{s}, \tilde{\theta} + \nu\eta) \cdot \eta \cdot \xi - f'_u(u_0(\xi, \hat{s}, \tilde{\theta}), \hat{s}, \tilde{\theta}) \cdot u_1 - f'_s(u_0(\xi, \hat{s}, \tilde{\theta}), \hat{s}, \tilde{\theta}) \cdot \xi$. В центральной точке $\eta = 0$ профиль и скорость квазиволны найдём:

$$\begin{cases} -\hat{W}_0(u_1)'_\xi - \kappa A_{11}(u_1)''_{\xi\xi} + f'_u(u_0(\xi, \hat{s}, \tilde{\theta})) \cdot u_1 = \tilde{W}_1(u_0)'_\xi + 2\kappa A_{12}(u_0)''_{\xi\eta}, \\ u_1(-\infty) = 0, \quad u_1(+\infty) = 0, \end{cases}$$

где $\tilde{W}_1 = \hat{W}_1 - V_s + \kappa B_1$, $B_1 = s''_{xx} + s''_{yy}$. Это есть линейная краевая для неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с однородными граничными условиями, причём соответствующая однородная краевая задача $-\hat{W}_0 v'_\xi - \kappa A_{11} v''_{\xi\xi} + f'_u(u_0(\xi)) \cdot v = 0$, $v(\pm\infty) = 0$, имеет нетривиальное решение $v = (u_0)'_\xi$. Поэтому задача разрешима при условии ортогональности правой части всем частным решениям однородной задачи: $\int_{-\infty}^{+\infty} (u_0)'_\xi \cdot (\tilde{W}_1(u_0)'_\xi + 2\kappa A_{12}(u_0)''_{\xi\eta}) d\xi = 0$, найдем отсюда

$$\tilde{W}_1 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} [(u_0)'_\xi]^2 d\xi \right]^{-1} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (u_0)'_\xi \cdot 2\kappa A_{12}(u_0)''_{\xi\eta} d\xi.$$

9. Примеры. Если обозначить угол между касательной к фронту и горизонтальным направлением как α , где $\tan \alpha = y'(x, t)$, то вертикальная скорость \tilde{W} связана с нормальной скоростью W_n , геометрической проекцией $\tilde{W} = W_n / \cos \alpha$. Одновременно, кривизна к плоской кривой задаётся формулой $\kappa = y'' / (1 + y'^2)^{3/2}$. Подставляя эти соотношения, получаем основное уравнение, описывающее вертикальное продвижение фронта: $\tilde{W} = \left(\tilde{U} + k \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \right) \sqrt{1 + y'^2}$.

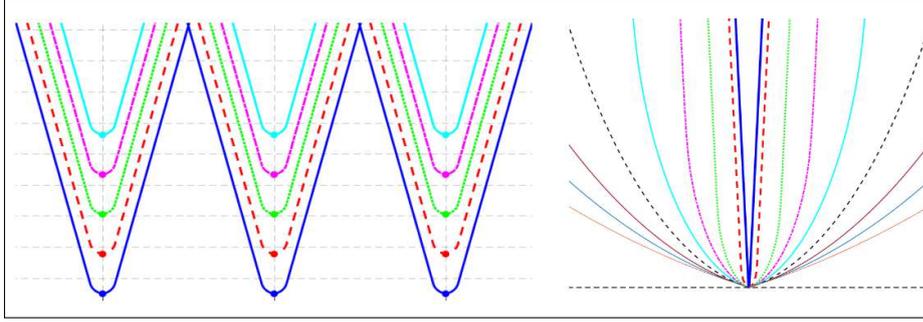


Рис.1. Эволюция фронта с учётом скорости дисбаланса и дрейфа кривизны. Слева: семейство линий фронта в различные моменты времени. Справа: показаны стационарные профили фронта при различных скоростях дисбаланса реакции \tilde{U} .

Для изоляции и выделения уникальной роли эффекта кривизны рассмотрим особый предельный случай, когда скорость дрейфа дисбаланса равна нулю ($\tilde{U} = 0$). При этом уравнение упрощается до: $\tilde{W} = k \frac{y'}{1+y'^2}$. Данное уравнение допускает элегантное аналитическое решение: $y = y_0 - \frac{1}{c} \ln |\cos(c(x - C_3))|$, $c = \frac{\tilde{W}}{\kappa}$.

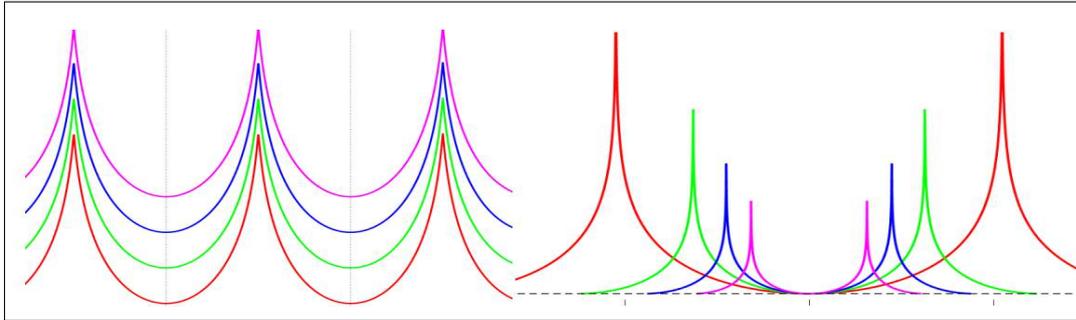


Рис.2. Эволюция фронта горения под действием только дрейфа кривизны. Слева: Семейство линий фронта в различные моменты времени. Справа: Влияние коэффициента κ на стационарную форму фронта.

Подставляя производные формы фронта $y' = -Ak_x \sin(k_x x)$, $y'' = -Ak_x^2 \cos(k_x x)$ где волновое число $k_x = 2\pi/L$, можно получить явное выражение для локальной скорости небаланса:

$$\tilde{U}(x) = \frac{\tilde{W}}{\sqrt{1 + A^2 k_x^2 \sin^2(k_x x)}} + \frac{k A k_x^2 \cos(k_x x)}{[1 + A^2 k_x^2 \sin^2(k_x x)]^{3/2}}. \quad (2)$$

Если эффектом кривизны можно пренебречь (т.е. коэффициент кривизны $k = 0$), данное выражение сводится к случаю, определяемому только скоростью небаланса: $\tilde{U}_1(x) = \frac{\tilde{W}}{\sqrt{1 + A^2 k_x^2 \sin^2(k_x x)}}$. Для анализа экстремальных свойств введём вспомогательную функцию $f(x) = \sqrt{1 + A^2 k_x^2 \sin^2(k_x x)}$. Тогда $\tilde{U}(x) = \frac{\tilde{W}}{f(x)} + \frac{k A k_x^2 \cos(k_x x)}{f^3(x)}$. В точке максимума (гребне) фронта ($x = 0$ или $x = 2n\pi/k_x$) имеем $\cos(k_x x) = 1$, $\sin(k_x x) = 0$, откуда $f = 1$ и $\tilde{U}_{\text{гребень}} = \tilde{W} + k A k_x^2$. В точке минимума $x = \pi/k_x$ или $x = (2n+1)\pi/k_x$, получаем $\cos(k_x x) = -1$, $\sin(k_x x) = 0$, также $f = 1$, и $\tilde{U}_{\text{ложбина}} = \tilde{W} - k A k_x^2$. В точках с максимальным наклоном ($x = \pi/(2k_x)$ или $x = (2n+1)\pi/(2k_x)$) выполняется $\cos(k_x x) = 0$, член кривизны обращается в нуль, поэтому $\tilde{U}_{\text{макс.наклон}} = \frac{\tilde{W}}{\sqrt{1 + A^2 k_x^2}}$.

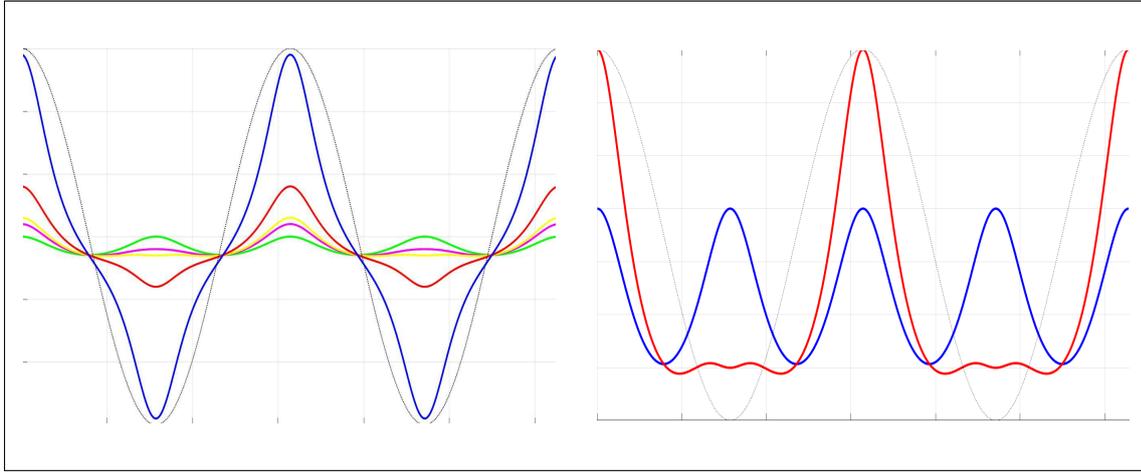


Рис.3. (а) Сравнение профилей несбалансированной скорости $\tilde{U}(x)$ для пяти различных значений коэффициента кривизны $k = 0.0, 0.2, 0.3, 0.8, 2.9$ (цветные сплошные линии) и формы волнового фронта $y(x)$ (чёрный пунктир). (б) Распределение локальной скорости небаланса при заданной косинусоидальной форме фронта. Чёрный пунктир: форма фронта $y(x)$; синяя сплошная линия: $\tilde{U}_1(x)$ (только скорость небаланса, $k = 0$); красная сплошная линия: $\tilde{U}(x)$ (скорость небаланса и дрейф кривизны, $k > 0$). Параметры: $\tilde{W} = 1.0, A = 1.0, L = 2\pi, k = 0.3$.

Рис.3 иллюстрирует влияние параметра кривизны k на пространственное распределение несбалансированной скорости $\tilde{U}(x)$. Показаны пять кривых, соответствующих значениям (линии зелёного, пурпурного, жёлтого, красного и синего цветов соответственно). Для сравнения чёрным пунктиром приведена форма волнового фронта $y(x) = A \cos(kx)$.

10. Модель лидеров конечной ширины. Эволюция волнового фронта управляется уравнением баланса нормальной скорости: $\frac{\tilde{W}}{\sqrt{1+y'^2}} = \tilde{U}(x) + k \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$. На рис. 4 показаны три полных периода, в каждом из которых выпуклая лидирующая область плавно соединяется с вогнутой промежуточной областью.

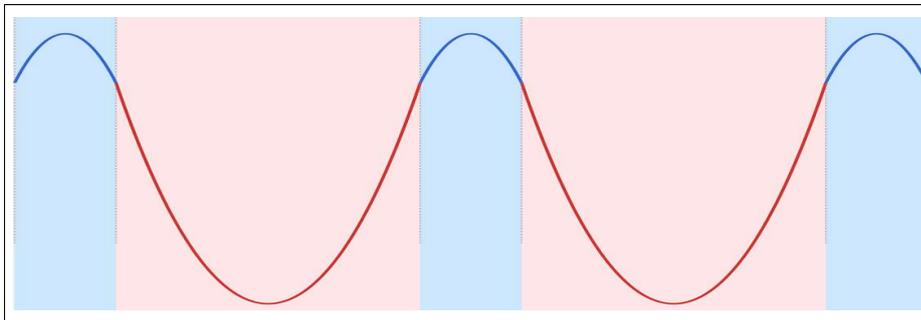


Рис.4.

Области с синим фоном соответствуют областям с $\tilde{U} > 0$, движимым реакцией, в то время как области со светло-голубым фоном соответствуют областям с $\tilde{U} = 0$, движимым исключительно кривизной, что наглядно демонстрирует пространственную неоднородность динамики. Сама кривая волнового фронта, изображенная более темным оттенком поверх фона, демонстрирует геометрические особенности: выпук-

лость представлена параболой с отрицательной кривизной, а впадина — параболой с положительной кривизной, причем на границах областей достигается строгая непрерывность первой производной.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Тихонов А.Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра. // Матем. сборник. 1948. **22(64)**, №.2. С. 193–204.
- [2] *Нефедов Н.Н.* Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакции–диффузии–адвекции: теория и применение. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. **61**, №.12. С. 2074–2094.
- [3] *Вайнберг Б.Р.* Асимптотические методы в уравнениях математической физики. // М., изд-во МГУ. 1982.

Применение асимптотических методов для восстановления граничного условия краевой задачи с периодическими условиями во времени

Вэй Юйсюань¹, Чэн Хань²

^{1,2}МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия.

E-mails: ¹591056451@qq.com, ²chenghan999999@qq.com

В работе представлен алгоритм применения асимптотических методов для решения обратной задачи по восстановлению периодического во времени граничного условия в следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = -u \frac{\partial u}{\partial x} + q(t)u \\ (x, t) \in D := \{x \in (-1, 1); t \in \mathbb{R}\} \\ u(-1, t) = u_{\text{left}}(t), u(1, t) = u_{\text{right}}(t), t \in \mathbb{R} \\ u(x, t) = u(x, t + T), x \in [-1, 1], t \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1)$$

где ε – малый параметр ($0 < \varepsilon \ll 1$), функции $u_{\text{left}}(t)$, $u_{\text{right}}(t)$ и $q(t)$ – достаточно гладкие T -периодические по переменной t , $q(t) > 0$.

Обратная задача ставится следующим образом. Определить функцию $u_{\text{right}}(t) = h_0(t)$, чтобы за время $t = T$ получить заданное распределение функции

$$f(x) = \int_0^T u(x, t) dt, x \in [-1, 1].$$

Для решения обратной задачи используем асимптотические методы. Построим асимптотическое приближение $U_0(x, t, h_0(t))$ решения нулевого порядка. Согласно работе [1], функция $U_0(x, t, h_0(t))$ является равномерным приближением решения задачи (1) с точностью $O(\varepsilon)$. Будем решать обратную задачу путем минимизации функционала

$$J[h_0(t)] = \int_{-1}^1 \left(\int_0^T U_0(x, t, h_0(t)) dt - \int_0^T u_{\text{num}} dt \right)^2 dx \quad (2)$$

Выбор начального приближения в алгоритме минимизации функционала осуществляется на основании асимптотического метода дифференциальных неравенств [2].

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ им. М.В. Ломоносова

ЛИТЕРАТУРА

- [1] N. Nefedov, L. Recke, K. Schneider, "Existence and asymptotic stability of periodic solutions with an interior layer of reaction-advection-diffusion equations", *J. of Math. Analysis and Appl.*, **405**:1, (2013) 90-103.

- [2] Н. Н. Нефедов, "Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакции–диффузии–адвекции: теория и применение", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **61**:12 (2021), 2074–2094.

Mean Square Hyers-Ulam stability for a system of stochastic differential equations with two independent stochastic parameters

E. Georgievskaja

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Moscow, Russia.

E-mail: ekaterinageorgiy@mail.ru

The following system of stochastic equations from [1], modeling the genome evolution process, has been investigated:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = D_v(-v + f), \\ \frac{du}{dt} = -D_u u (u^2 - (f - \gamma v)^2), \\ u(0) = u^0, \quad v(0) = v^0. \end{cases}$$

where:

u is the function of variability in the process of fixing mutations that promote speciation;

v is the speciation inhibitor function;

γ is the kinetic coefficient of the activator, determined by the ratio of the probabilities of negative mutations to increased mutations, that is, to those that cause the speciation, $0 < \gamma < 1$;

D_u is the rate factor activator. This is an average base pair replacement rate per genome per generation (in arbitrary units);

D_v is the rate factor inhibitor – the average DNA repair rate (in arbitrary units). D_v is determined from the relation $D_v = 10^{-3} D_u$;

f is a stochastic value, estimated by jumps in the size of the genome and its coding part from the average value \bar{f} for the considered samples of prokaryotes, unicellular, and multicellular organisms.

The aim of the present work is to investigate the stability of solutions in the mean-square sense according to Hyers–Ulam [2,3].

This work presents a method for decoupling a system of stochastic differential equations into independent equations in the most general case.

Stability is proved using Ito’s lemma and the estimation of stability parameters. As a result of this study, explicit estimates for the stability parameters have been obtained, which determine the limits of the model’s applicability.

REFERENCES

- [1] Sidorova, A., Tverdislov, V., Levashova, N., Garaeva, A., “A model of autowave self-organization as a hierarchy of active media in the biological evolution”, *Biosystems*, Volume

198, 2020, 104234

- [2] Hyers D.,H., "On the stability of the linear functional equation", *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 27 (1941), 222-224
- [3] Zhao X., "Mean square Hyers-Ulam stability of stochastic differential equation driven by Brownian motion" // *Adv Differ Equ* 2016, 271 (2016)

Движение теплового фронта в задаче о нагреве кремниевой пластины в ламповом реакторе

А. Р. Махмудов¹, А. О. Орлов², Е. И. Никулин³, Р.Л. Аргун⁴

^{1,2,3,4}МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, Россия.

E-mails: ¹makhmudov.ar21@physics.msu.ru, ²orlov.andrey@physics.msu.ru,

³nikulin@physics.msu.ru, ⁴argun.rl14@physics.msu.ru

В работе рассматривается математическая модель теплопереноса в тонкой кремниевой пластине при её нагреве в ламповом реакторе. Динамика температурного поля $T_w(x, t)$ описывается нелинейным уравнением теплопроводности, учитывающим баланс входящих и выходящих тепловых потоков:

$$-c\rho d \frac{\partial T_w}{\partial t} + d \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(T_w) \frac{\partial T_w}{\partial x} \right) = -q(T_w, x). \quad (1)$$

Здесь c, ρ, d — удельная теплоемкость, плотность и толщина пластины. Коэффициент теплопроводности кремния $\kappa(T_w)$ существенно зависит от температуры, а функция источника $q(T_w, x)$ описывает разность потоков излучения нагревателя и собственного излучения пластины по закону Стефана-Больцмана ($\sim T_w^4$).

В приближении тонкой пластины (при достаточно большой ширине пластины L и ее достаточно малой толщине d) и после перехода к безразмерным переменным задача сводится к сингулярно возмущенному уравнению типа «реакция-диффузия» с нелинейной диффузией:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(D(u, x, \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - f(u, x, \varepsilon) = 0. \quad (2)$$

Функция $f(u, x, 0)$ имеет три корня (бистабильность), что соответствует существованию двух устойчивых температурных режимов. Переход между ними происходит в виде узкого движущегося внутреннего слоя (теплового фронта).

Особенностью задачи является наличие нелинейной функции $D(u, x, \varepsilon)$ под знаком производной. С помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств Н.Н. Нефедова доказана теорема существования и единственности решения, а также получена оценка точности построенного асимптотического приближения методом пограничных функций А.Б. Васильевой. Получен закон движения фронта, что позволяет аналитически предсказывать динамику прогресса пластины.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 25-71-10024.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Махмудов А. Р., Орлов А. О., Волков В. Т. Формирование фронта в задаче реакция–диффузия с нелинейной диффузией // Итоги науки и техн. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., 243 (2025), 56–62.
- [2] Орлов А. О., Махмудов А. Р. Движение фронта в задаче реакция–диффузия в случае баланса реакции и диффузии // ТМФ, 224:1 (2025), 181–195.

**Асимметричные пограничные слои в сингулярно возмущённой задаче
реакция-диффузия-адвекция**

А. О. Орлов¹, Сюн Чжусюань², Ли Чжицян³, В. Т. Волков⁴

^{1,2,3,4} МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, Россия.

E-mails: ¹orlov.andrey@physics.msu.ru, ²3273187750@qq.com, ³2106340412@qq.com,

⁴volkovvt@mail.ru

В работе рассматривается сингулярно возмущенная задача в полосе $D = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in (0, a)\}$ с периодическими условиями по переменной x :

$$\varepsilon^4 \Delta u = \varepsilon \left(\vec{A}(u, x, y, \varepsilon), \vec{\nabla} \right) u + B(u, x, y, \varepsilon), \quad (1)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. На границах области $y = 0$ и $y = a$ заданы условия Дирихле.

Ключевой особенностью задачи является сочетание сверхслабой диффузии (порядка ε^4) и слабой адвекции (порядка ε). Показано, что такая анизотропия параметров приводит к возникновению асимметричных пограничных слоев. Асимптотическое приближение решения строится методом пограничных функций А. Б. Васильевой в виде:

$$U(x, y, \varepsilon) = \bar{u}(x, y, \varepsilon) + L(\xi, x, \varepsilon) + R(\eta, x, \varepsilon), \quad (2)$$

где \bar{u} — регулярная часть, а L и R — функции пограничного слоя, $\xi = y/\varepsilon^3$, $\eta = (a - y)/\varepsilon$.

Установлено, что в окрестности границы $y = 0$ формируется слой толщины $O(\varepsilon^3)$, в то время как у границы $y = a$ возникает слой толщины $O(\varepsilon)$.

Для обоснования формальной асимптотики применяется асимптотический метод дифференциальных неравенств [1] Н. Н. Нефедова. Сконструированы верхнее и нижнее решения задачи (барьерные функции), учитывающие специфику разномасштабных слоев. Доказана теорема о существовании решения $u(x, y, \varepsilon)$ задачи (1) указанной структуры и исследована его асимптотическая устойчивость по Ляпунову.

Результаты асимптотического анализа проиллюстрированы на примере, который имеет точное решение.

Работа выполнена в рамках государственного задания МГУ имени М.В. Ломоносова.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Н.Н. Нефедов, “Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакция-диффузия-адвекция: теория и применение” // *ЖВМ и МФ*, **61**:12 (2021), 2074–2094.

- [2] Е.Е. Букжалев, “О сингулярно возмущенном уравнении с решением типа пограничного слоя, растянутые переменные которого зависят от разных степеней параметра возмущения” // *ЖВМ и МФ*, **43**:12 (2003), 1836–1847.

К теории систем линейных уравнений Коши-Римана с полярной особенностью в младших коэффициентах

А. Б. Расулов

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», Кафедра высшей математики.

E-mail: rasulzoda55@gmail.com

1. Постановка задачи

Хорошо известно, насколько важную роль в приложениях играет теория обобщенных аналитических функций, созданная И.Н. Векуа [1]. Она имеет глубокие связи со многими разделами анализа, геометрии и механики, включая квазиконформные отображения, теорию поверхностей, теорию оболочек и газовую динамику.

Многие результаты исследований обобщенных аналитических функций, полученные в скалярном случае, были обобщены на системы с несколькими неизвестными функциями в случае регулярных коэффициентов (см., например, [2, 4]).

Системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими неизвестными функциями, коэффициенты нижнего порядка которых имеют полярные сингулярности, изучены мало [3].

Настоящая работа посвящена представлению общего решения систем эллиптических уравнений в области D на плоскости с особенностями в младших коэффициентах. Главной частью этих систем уравнений является оператор Коши-Римана. Носителями особенностей служит множество $l = \{z : \rho(z) = 0\}$, состоящее как из изолированных особых точек, так и из некоторых линий. Это представление используется для исследования краевых задач.

Пусть D — область, содержащая начало координат и ограниченная границей $\Gamma \in C^{1,\mu}$, $0 < \mu < 1$, ориентированной против часовой стрелки, и пусть $D_0 = D \setminus \{l\}$.

В стандартной записи $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$, $u_k(z) = u_{1k}(x, y) + iu_{2k}(x, y)$, $k = 1, 2, \dots, n$, в области D_0 рассмотрим систему эллиптических уравнений в частных производных первого порядка с сингулярными коэффициентами вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{a}{\rho} - a_0\right)u + Au + \frac{1}{\rho_1}B\bar{u} = F, \quad (1)$$

где a — комплексное число и функция $a_0 \in L^p(D)$, $p > 2$ — скалярные величины, и для краткости через $\rho(z)$ обозначено одно из ее значений :

$$\rho(z) = \{\bar{z}|z|^{\alpha-1}; |z - \bar{z}|^\alpha; |R - |z||^\alpha\}, \text{ где } \alpha \geq 1. \quad (2)$$

Также в (1) $u = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ -искомый, $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ -известный вектор функции, а ρ_1 также может принимать одно из значений ρ .

Относительно обратимых матриц $A \equiv A_{n \times n}$ и $B \equiv B_{n \times n}$ система (1) изучается в двух случаях: 1) когда все элементы этих заданных матриц комплексные числа, 2) когда все элементы этих заданных матриц аналитические функции комплексного переменного z .

Для уточнения класса решений систем уравнений (1) напомним некоторые известные факты из теории эллиптических систем, изложенные в монографии И.Н. Векуа [1] и в книге Л. Берса, Ф. Джона, М. Шехтера [5].

Заметим, что функция f принадлежит соболевскому пространству $W^{1,p}(D_0)$, если в любой подобласти $G_0 \in D_0$ ее обобщенная производная $f_z, f_{\bar{z}} \in L^p_{loc}(G_0)$, $p > 2$.

Пусть в некотором открытом множестве G на плоскости задана линейная эллиптическая система первого порядка с постоянными старшими коэффициентами, младшие коэффициенты и правая часть которой принадлежат $L^p_{loc}(G)$, т.е. принадлежат $W^{1,p}(G_0)$ в любой ограниченной области G_0 , лежащей в G вместе со своей границей. Тогда на основании внутренней регулярности (см. монографию И.Н. Векуа [1]) любое слабое решение u этого уравнения регулярно в том смысле, что оно принадлежит классу $W^{1,p}_{loc}(G)$ и удовлетворяет рассматриваемой системе. В силу теоремы вложения функция u в действительности принадлежит классу $C^\mu(\bar{G}_0)$ с показателем $\mu \leq (p - 2)/p$. Этот факт был доказан И.Н. Векуа в [1]. В соответствии с внутренней регулярностью решений в дальнейшем решение линейной эллиптической системы первого порядка предполагается регулярным в открытом множестве D_0 .

Вектор функцию $u(z) \in W^{1,p}_{loc}(D_0)$, где $p > 2$, удовлетворяющую уравнению (1), почти всюду, называем его *регулярным* решением.

Введем оператор Помпейю–Векуа ([1] с.29)

$$(T\varphi)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{\varphi(\zeta) d_2\zeta}{\zeta - z}, \quad (3)$$

где $d_2\zeta$ означает элемент площади. Хорошо известно, что при $p > 2$ этот оператор действует $L^p(D) \rightarrow W^{1,p}(D) \subseteq H(\bar{D})$ и удовлетворяет уравнению

$$(T\varphi)_{\bar{z}} = \varphi; \quad (3^+)$$

В настоящей работе найдено *регулярное* решение для уравнения (1) с изолированной полярной особенностью $\rho(z) = \bar{z}$ в младшем коэффициенте, которое получается из первой компоненты $\rho(z)$ в обозначении (2), при $\alpha = 1$ и когда матрица B -нулевая матрица. Эти результаты могут быть использованы для решения краевых задач Римана–Гильберта и других задач.

2. Скалярный случай.

Приведем некоторые известные факты, доказанные автором (например, в работах [4, 5]).

В предположении, что u -искомая функция и является скалярной величиной, в области $D_\varepsilon = \{z : |z| \geq \varepsilon, z \in D\}$ рассмотрим главную часть уравнения

$$\begin{cases} \partial_{\bar{z}} u = A_0, \\ A_0(z) = \frac{a}{z} + a_0(z), \end{cases} \quad (4)$$

где $n > 1$, $a_0 \in L^p(D)$, $p > 2$, при любом $\varepsilon > 0$.

Введем сингулярный интеграл

$$\Omega(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (T_\varepsilon A_0)(z) \equiv -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{D_\varepsilon} \frac{A_0(\zeta) d_2 \zeta}{\zeta - z},$$

где интегральный оператор T_ε определяется аналогично (3) по отношению к области D_ε .

В следующих обозначениях:

$$\operatorname{Re} a = a_1, \quad \omega = 2a \ln |z|, \quad h(z) = (T a_0)(z) + \frac{a}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\ln |\zeta| d\zeta}{\zeta - z}, \quad (6)$$

справедливо:

Лемма. Пусть $a \in \mathbb{C}$ и функция

$$a_0 = A_0 - \frac{a}{z} \in L^p(G), \quad p > 2.$$

Тогда функция

$$\Omega(z) = 2a \ln |z| + h(z), \quad z \neq 0, \quad (7)$$

где $h(z) \in H(\bar{G})$ и определяется равенством (6), является решением уравнения

$$\Omega_{\bar{z}} = A_0,$$

причем функция Ω вблизи особой точки $z = 0$ имеет поведение

$$\Omega = O(\ln |z|), \quad \text{при } z \rightarrow 0.$$

Также, в скалярном случае решение неоднородного уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{a}{z} - a_0 \right) u = f$$

при условии $|z|^{-2a} f \in L^p(D)$, $p > 2$ дается формулой

$$u = |z|^{2a} e^h [\phi + T|z|^{-2a} e^{-h} f]$$

с произвольной аналитической в D функцией $\phi \in C(\bar{D})$, см. [1, 5, 6].

3. Векторный случай. Так как собственные значения различны, матрица $A(z)$ диагонализируема с помощью аналитической $P(z)$ -матрицы перехода

$$\Lambda(z) = P(z)A(z)P^{-1}(z), \quad \Lambda(z) = \operatorname{diag}(\lambda_1(z), \dots, \lambda_n(z))$$

Поскольку элементы $A(z)$ аналитичны, компоненты матрицы $P(z)$ и собственные значения $\lambda_k(z)$ также будут аналитическими функциями в области D .

Имеет место

Теорема Пусть в системе уравнений (1) $a = a_1 + ia_2$ — комплексное число и функция $a_0 \in L^p(D)$, $p > 2$ — скалярные величины, и

$$\rho(z) = \bar{z}.$$

Элементы обратной матрицы $A(z)$ аналитичны, и данная матрица имеет различные собственные значения $\lambda_k(z)$, $k = \overline{1, n}$ и B -нулевая матрица.

1. Структура общего решения

Тогда, при $-1 < 2a_1 < 1$ и функция $a_0(z) \in L^p(D)$ и $|z|^{-2a}F \in L^p(D)$, $p > 2$ любое регулярное решение уравнения (1) из класса $W_{loc}^{1,p}(D_0)$, $p > 2$ в области D_0 с разрезом, соединяющим точку $z = 0$ с бесконечно удаленной точкой $z = \infty$ дается формулой

$$u = |z|^{2a} e^h \left\{ \sum_{j=1}^n p_{kj}(z) e^{-\lambda_j(z)\bar{z}} \left(\phi_j(z) + T_D \left[\tilde{f}_j e^{\lambda_j \bar{\zeta} - h(\zeta)} \right] \right) \right\}, \quad (9)$$

где $\phi_j(z)$, $j = \overline{1, n}$ — произвольные аналитические функции, $p_{kj}(z)$ — элементы матрицы собственных векторов, $h(z)$ — определяется согласно формуле (6), а \tilde{f}_j — компоненты вектора $P|z|^{-2a}F$.

2. Существование непрерывного решения.

Если $0 < 2a_1 < 1$, то единственное решение, непрерывное в точке $z = 0$ и обращающееся там в нуль (при $F(0) = 0$), определяется выбором аналитического вектора $\phi(z)$ в области D , $\phi(z) \in C(\bar{D})$. В случае $-1 < 2a_1 < 0$ решение имеет в точке $z = 0$ интегрируемую особенность, характер которой определяется множителем $|z|^{2a}$.

4. Случай постоянной матрицы, т.е. когда $A_{n \times n} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ -заданная матрица все элементы которой комплексные числа, а $B_{n \times n} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ -нулевая матрица.

В этом случае, мы ограничимся (при $n = 2$) примером конкретной матрицы $A_{2 \times 2} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$:

$$A(z) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Пусть в системе уравнений (1) коэффициент $a = a_1 + ia_2$ — комплексное число ($-1 < 2a_1 < 1$) и функция $a_0 \in L^p(D)$, $p > 2$ — скалярные величины, и

$$\rho(z) = \bar{z}.$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{a}{\rho} - a_0 \right) u_1 + 3u_1 + u_2 = f_1(t), \\ \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{a}{\rho} - a_0 \right) u_2 + 2u_1 + 2u_2 = f_2(t). \end{cases}$$

Общее решение этой системы уравнений имеет вид

$$u_1(z) = |z|^{2a} e^h \{ \phi_1 e^{-\bar{z}} + \phi_2 e^{-4\bar{z}} \} - |z|^{2a} e^h \left\{ \frac{e^{-\bar{z}}}{3\pi} \int_D \frac{|\zeta|^{-2a} (f_1 - f_2)(\zeta) e^{\zeta - h(\zeta)} d_2 \zeta}{\zeta - z} + \frac{e^{-4\bar{z}}}{3\pi} \int_D \frac{|\zeta|^{-2a} (2f_1 + f_2)(\zeta) e^{4\bar{\zeta} - h(\zeta)} d_2 \zeta}{\zeta - z} \right\};$$

$$u_2(z) = |z|^{2a} e^h \{ -2\phi_1 e^{-\bar{z}} + \phi_2 e^{-4\bar{z}} \} + |z|^{2a} e^h \left\{ \frac{2e^{-\bar{z}}}{3\pi} \int_D \frac{|\zeta|^{-2a} (f_1 - f_2)(\zeta) e^{\bar{\zeta} - h(\zeta)} d_2 \zeta}{\zeta - z} - \frac{e^{-4\bar{z}}}{3\pi} \int_D \frac{|\zeta|^{-2a} (2f_1 + f_2)(\zeta) e^{4\bar{\zeta} - h(\zeta)} d_2 \zeta}{\zeta - z} \right\}.$$

где $\phi_j(z)$, $j = \overline{1, 2}$ — произвольные аналитические функции, непрерывные в замкнутой области \bar{D} .

Замечание 1. Аналогичные результаты получены и для других значений ρ и ρ_1 указанных в (2) и когда матрица B - ненулевая матрица.

Замечание 2. Полученно эти явное представление используется для исследования различного рода краевых задач.

Полученные выше результаты удобно использовать в исследовании сингулярно-возмущенных задач.

5. Сингулярно-возмущенная система уравнений.

Например, система уравнений с малым параметром и с постоянной матрицей A с различными собственными значениями λ_1, λ_2 , а также граничными условиями типа Римана-Гильберта

$$\begin{cases} \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{a}{\rho} - a_0 \right) u_1 + a_{11} u_1 + a_{12} u_2 = 0, \\ \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{a}{\rho} - a_0 \right) u_2 + a_{21} u_1 + a_{22} u_2 = 0. \end{cases}$$

сводится к исследованию, двух скалярных уравнений:

$$\varepsilon \tilde{u}_{k\bar{z}} - \lambda_k \tilde{u}_k = 0, \quad k = 1, 2$$

с аналогичными условиями типа Римана-Гильберта, которые исследованы ранее (см. например [8]). Заметим, что функции u_k $k = 1, 2$ и \tilde{u}_k $k = 1, 2$ связаны некоторыми функциональными соотношениями.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции / И.Н. Векуа М.: Наука, Главное издательство физико-математической литературы, 1988. — 510 с.
- [2] Солдатов А.П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. И. А.П. Солдатов // Совр. Проблемы математики. — 2017. — Т. 63, № 1. — С. 1–189.
- [3] Раджабов Н.Р. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами. — Душанбе: Изд-во ТГУ, 1992. — 236 с.
- [4] Виноградов В.С., Краевая задача для эллиптической системы первого порядка на плоскости, Дифференциальные уравнения, 1971, Т. 7, Вып. 8, 1440–1448

- [5] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1966. — 352 с.
- [6] Расулов А.Б. Интегральные представления решений линейной эллиптической системы второго порядка с внутренней сверхсингулярной точкой /А.Б.Расулов //Докл. РАН. 2009. Т.429, №6, С.735-737.
- [7] Rasulov A.B. Representation of the General Solution of an Equation of the Cauchy–Riemann Type with a Supersingular Circle and a Singular Point // Differential Equations, 2017, Vol. 53, No. 6, pp. 1–9.
- [8] Расулов А.Б., Федоров Ю.С. Сингулярно возмущенное уравнение Коши–Римана с особенностью в младшем коэффициенте, Журнал вычислительной математики и математической физики, 2020, том 60, № 10, с. 105–111

Стационарирование фронта в задаче реакция-диффузия в случае кусочно-линейного разрывного источника модульного типа

Чжао Вэньсинь¹, Н.Т. Левашова²

^{1,2}МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия.

E-mails: ¹2219878382@qq.com, ²levashovant@physics.msu.ru

В работе исследуется процесс стабилизации решения вида движущегося фронта начально-краевой задачи для уравнения реакция-диффузия с кусочно-линейным разрывным источником модульного типа (разрыв происходит при достижении искомой функцией заданного порогового значения) к стационарному решению с большим градиентом на границе разрыва.

Рассматриваемая начально-краевая задача имеет вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} &= f(u, x, \varepsilon), \quad x \in (-1, 1), \quad t \in (0, T], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(-1, t, \varepsilon) &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, t, \varepsilon) = 0, \quad t \in (0, T], \\ u(x, 0, \varepsilon) &= u_{init}(x, \varepsilon), \quad x \in [-1, 1], \end{aligned} \quad (1)$$

where

$$f(u, x, \varepsilon) = \begin{cases} u - \varphi^{(-)}(x), & u < 0, \\ u - \varphi^{(+)}(x), & u \geq 0. \end{cases}$$

Здесь $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ – малый параметр, а $u_{init}(x, \varepsilon)$ – непрерывная функция, имеющая вид фронта.

Будем считать, что в каждый момент времени $t \in [0, T]$ фронт локализован в окрестности точки $\hat{x}(t)$.

Определение 1. Функция

$$u(x, t) \in C^{1,0}([-1, 1] \times [0, T]) \cap C^{2,1}((-1, \hat{x}) \times (0, T] \cup (\hat{x}, 1) \times (0, T]).$$

называется решением задачи (1), если она удовлетворяет уравнению (1) в каждой из областей $(-1, \hat{x}) \times (0, T]$ и $(\hat{x}, 1) \times (0, T]$, а также начальным и граничным условиям задачи (1).

Существование у задачи (1) решения такого вида доказано в работах [1, 2].

В настоящем исследовании получены условия существования устойчивого стационарного решения задачи (1) вида фронта, локализованного в окрестности точки x^* , то есть функции $u_s(x)$, являющейся решением задачи

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} = f(u_s(x), x, \varepsilon), \quad x \in (-1, 1), \quad \frac{\partial u_s}{\partial x}(-1, \varepsilon) = 0, \quad \frac{\partial u_s}{\partial x}(1, \varepsilon) = 0 \quad (2)$$

в смысле следующего определения.

Определение 2. Функция

$$u_s(x) \in C^1[-1, 1] \cap C^2((-1, x^*) \cup (x^*, 1)).$$

называется решением задачи (2), если она удовлетворяет уравнению (2) на каждом из интервалов $(-1, x^*)$ и $(x^*, 1)$, а также граничным условиям задачи (2).

Основной результат работы сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема. При достаточно малом значении ε для решения $u(x, t)$ задачи (1) выполняется предельное равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |u(x, t) - u_s(x)| = 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 25-71-10024).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. I. Volpert , V. A. Volpert, "Traveling-wave solutions of parabolic systems with discontinuous nonlinear terms", *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, **49**:1 (2002), 113-139.
- [2] Н. Н. Нефедов, Е. И. Никулин, А. О. Орлов, "Движение фронта в задаче со слабой адвекцией в случае непрерывного источника и источника модульного типа", *Дифференциальные уравнения*, **58**:6 (2022), 763–776.

Стационарное решение в системе Тихоновского типа в случае разрыва коэффициентов адвекции и нелинейных источников

Е. А. Чунжук¹, Н. Т. Левашова², Е. И. Никулин³

^{1,2,3}МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия.

E-mails: ¹chunzhukea@my.msu.ru, ²levashovant@my.msu.ru, ³nikulinei@my.msu.ru

В работе исследуется стационарная сингулярно возмущённая система Тихоновского типа с малым параметром $\varepsilon > 0$. Особенностью постановки задачи является наличие скачкообразных изменений коэффициентов адвекции и нелинейных источников в точке $x = 0$. Подобные задачи возникают, например, в области физики полупроводников при моделировании процессов в средах с разрывными характеристиками.

Рассматривается следующая система

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon^2 A(u, x) \frac{\partial u}{\partial x} - g(u, v, x, \varepsilon) = 0, & -1 < x < 1, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - B(v, x) \frac{\partial v}{\partial x} - f(u, v, x, \varepsilon) = 0, & -1 < x < 1. \end{cases} \quad (1)$$

Пусть заданы условия Дирихле для функции u и v

$$u(-1, \varepsilon) = u^0, \quad u(1, \varepsilon) = u^1, \quad v(-1, \varepsilon) = v^0, \quad v(1, \varepsilon) = v^1.$$

Функции $f(u, v, x, \varepsilon)$, $g(u, v, x, \varepsilon)$, $A(u, x)$ и $B(v, x)$ терпят разрыв первого рода в точке $x = 0$, которая делит отрезок на две подобласти $D^{(-)} := (-1, 0)$ и $D^{(+)} := (0, 1)$:

$$\begin{aligned} f(u, v, x, \varepsilon) &= \begin{cases} f^{(-)}(u, v, x, \varepsilon), & x \in D^{(-)}, \\ f^{(+)}(u, v, x, \varepsilon), & x \in D^{(+)}, \end{cases} \\ g(u, v, x, \varepsilon) &= \begin{cases} g^{(-)}(u, v, x, \varepsilon), & x \in D^{(-)}, \\ g^{(+)}(u, v, x, \varepsilon), & x \in D^{(+)}, \end{cases} \\ A(u, x) &= \begin{cases} A^{(-)}(u, x), & x \in D^{(-)}, \\ A^{(+)}(u, x), & x \in D^{(+)}, \end{cases} \\ B(v, x) &= \begin{cases} B^{(-)}(v, x), & x \in D^{(-)}, \\ B^{(+)}(v, x), & x \in D^{(+)}, \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

причем $f^{(-)}(u, v, 0, \varepsilon) \neq f^{(+)}(u, v, 0, \varepsilon)$, $g^{(-)}(u, v, 0, \varepsilon) \neq g^{(+)}(u, v, 0, \varepsilon)$.

В результате исследования доказаны существование и асимптотическая устойчивость стационарного решения с внутренним переходным слоем для сингулярно возмущённой задачи (1)-(2). В работе построена формальная асимптотика по алгоритму А.Б. Васильевой, на основе которой сконструированы верхнее и нижнее решения, что

позволило применить метод дифференциальных неравенств (Н.Н. Нефедов и др.) для доказательства существования решения исходной задачи. Также, теоретические результаты проиллюстрированы на двух модельных примерах.

Работа поддержана грантом РНФ, проект № 25-71-10024.

Е.А. Чунжук является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В.Ф. Бутузов, А.Б. Васильева, Н.Н. Нефедов, “Асимптотическая теория контрастных структур (обзор)” // *Автомат. и телемех.*, **7** (1997), 4-32.
- [2] V.F. Butuzov, N.N. Nefedov, K.R. Schneider, “Singularly Perturbed Problems in Case of Exchange of Stabilities” // *Jour. of Math. Sci.*, **121**:1 (2004), 1973-2079.
- [3] Н.Н. Нефедов, “Существование, асимптотика и устойчивость по Ляпунову решений периодических параболических задач для систем реакция-диффузия тихоновского типа” // *Матем. заметки*, **115**:2 (2024), 276-285.
- [4] Н.Н. Нефедов, А.О. Орлов, “Существование и устойчивость стационарных решений с пограничными слоями в системе быстрого и медленного уравнений реакция-диффузия-адвекция с KPZ-нелинейностями” // *Теор. мат. физ.*, **220**:1 (2024), 137-153.
- [5] A. Karamyshev, E. Nikulin, “Existence and Stability of Stationary Solutions with Boundary Layers in a Tikhonov-Type System Arising in the Drift-Diffusion Model of Semiconductors of Sub-Debye-Length” // *Russ. J. Math. Phys.*, **32** (2025), 713-727.
- [6] Н.Т. Левашова, Е.А. Чунжук, А.О. Орлов, “Стабилизация фронта в среде с разрывными характеристиками” // *Теор. мат. физ.*, **220**:1 (2024), 93-112.