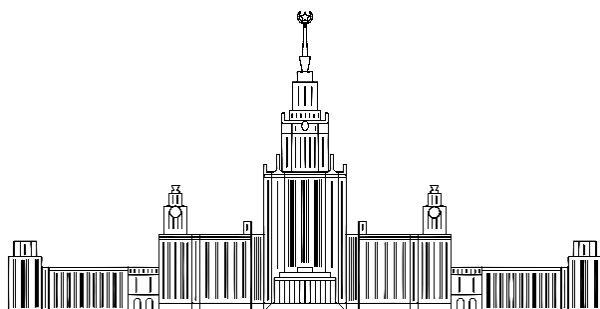


Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова



Актуальные проблемы электродинамики – 2025 имени профессора А. Г. Свешникова

международная конференция, посвящённая
80-летию профессора А.Н. Боголюбова



Москва – 18 – 19 ноября 2025г.
Сборник тезисов докладов

Москва 2025

**Международная конференция,
посвящённая 80-летию профессора А.Н. Боголюбова
«Актуальные проблемы электродинамики 2025 им. профессора А.Г. Свешникова»**
Сборник тезисов
Под редакцией
к.ф.-м.н. Ерохина А.И., к.ф.-м.н. Мухартовой Ю.В. и к.ф.-м.н. Шапкиной Н.Е.

18 – 19 ноября 2025 г. Физический факультет.
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Программный комитет:

- | | |
|---|---|
| 1. Боголюбов А.Н.
(председатель) | д. ф.-м. н., профессор, зав. отделением, физический факультет МГУ |
| 2. Бородачев Л.В. | д. ф.-м. н., доцент, физический факультет МГУ |
| 3. Воеводин В.В. | д. ф.-м. н., член корр. РАН, директор НИВЦ МГУ |
| 4. Еремин Ю.А. | д. ф.-м. н., в.н.с., ВМиК |
| 5. Соколов Д.Д. | д. ф.-м. н., профессор, и.о. зав. кафедрой математики, физический факультет МГУ |
| 6. Поляков П.А. | д. ф.-м. н., профессор, физический факультет МГУ |
| 7. Тихонравов А.В.
(зам. председателя) | д. ф.-м. н., профессор, научный руководитель НИВЦ МГУ |

Организационный комитет:

- | | |
|--|---|
| 1. Белокуров В.В.
(председатель) | профессор, декан физического факультета МГУ |
| 2. Коняев Д.А.
(зам. председателя) | с.н.с. физического факультета МГУ |
| 3. Шапкина Н.Е.
(зам. председателя) | доцент физического факультета МГУ |
| 4. Боголюбов Н.А. | н.с. физического факультета МГУ |
| 5. Волков В.Т. | доцент физического факультета МГУ |
| 6. Ерохин А.И. | с.н.с. физического факультета МГУ |
| 7. Минаев Д.В. | ст. преп. физического факультета МГУ |
| 8. Могилевский И.Е. | доцент физического факультета МГУ |
| 9. Мухартова Ю.В. | доцент физического факультета МГУ |
| 10. Петухов А.А. | вед. программист физического факультета МГУ |
| 11. Хлебников Ф.Б.
(секретарь) | вед. программист физического факультета МГУ |
| 12. Шушарин М.М. | м.н.с. физического факультета МГУ |

Страница конференции: <http://math.phys.msu.ru/actual-problems-2025>

Пленарные доклады

**А.Н. Боголюбов — ведущий специалист научной школы А.Н. Тихонова -
А.Г. Свешникова в области математической физики, прикладной и
вычислительной математики**

**A.N. Bogolyubov as a leading specialist in the scientific school of A.N. Tikhonov - A.G.
Sveshnikov in the field of mathematical physics, applied and computational
mathematics**

Могилевский И.Е.

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический
факультет, Москва, РФ*

imogilevsky@mail.ru

28 марта 2025 года исполнилось 80 лет заслуженному профессору Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, лауреату Ломоносовской премии МГУ за педагогическую деятельность Александру Николаевичу Боголюбову.

Научные интересы Боголюбова А.Н. связаны с исследованием математических проблем электродинамики, в частности, с построением, обоснованием и исследованием математических моделей волноведущих систем, применением методов конечных разностей и конечных элементов для исследования сложных электродинамических структур, в том числе метаматериалов.

А.Н. Боголюбов родился 28 марта 1945 года в Усть-Каменогорске. В 1963 году окончил с золотой медалью среднюю школу № 50 г. Москвы. Сразу после окончания школы поступил на физический факультет МГУ, который закончил с отличием в 1969 году. Его дипломная работа «Разложение по собственным функциям для случая непрерывного спектра» была выполнена под руководством академика Владимира Александровича Ильина. После окончания учебы на физическом факультете А.Н. Боголюбов был оставлен на работу в вычислительной лаборатории кафедры математики, которой руководил профессор В. Б. Гласко. В 1972 году Александр Николаевич Боголюбов поступил в аспирантуру кафедры математики, где его научным руководителем стал крупнейший специалист в области математической физики и вычислительной математики академик РАЕН, лауреат Государственной премии профессор Алексей Георгиевич Свешников. В 1975 году А.Н. Боголюбов защитил кандидатскую диссертацию «Применение метода конечных разностей к решению граничных задач электродинамики», в которой были построены и исследованы экономичные конечно-разностные алгоритмы для расчета широкого класса волноведущих систем.

В последующие годы А.Н. Боголюбовым было развито новое научное направление, связанное с разработкой и реализацией методов математического моделирования волноведущих систем на основе метода конечных разностей и метода конечных элементов. Совместно с учениками им был выполнен большой цикл работ по математическому моделированию широкого класса волноведущих систем высокочастотной электродинамики, акустики, интегральной и волоконной оптики. Были построены эффективные алгоритмы для решения прямых задач расчета волноведущих систем и решения задач их синтеза, проведены исследования спектральных свойств таких систем. Эти исследования составили основное содержание докторской диссертации А.Н. Боголюбова «Математическое моделирование волноведущих систем», защищенной в 1997 году.

В 50-х годах прошлого века А. Г. Свешниковым были введены парциальные условия излучения, которые в случае внешних задач дифракции позволяют редуцировать их к задачам в ограниченных областях с нелокальными граничными условиями. Использование разностных аналогов парциальных условий излучения оказалось

наиболее эффективным методом для построения численных алгоритмов решения широкого класса задач моделирования волноведущих систем. Под руководством А.Г. Свешникова и А.Н. Боголюбова на кафедре математики физического факультета МГУ был выполнен большой цикл работ по моделированию волноведущих систем со сложной геометрией и сложным заполнением на основе неполного метода Галеркина, методов конечных разностей и конечных элементов. Разработанные методы позволяют рассматривать волноведущие системы со сложным неоднородным и анизотропным заполнением, в частности, биизотропным, гироманитным, киральным, фрактальным, а также волноводы на основе фотонных кристаллов. Эти методы позволяют строить универсальные математические модели, отражающие основные характерные свойства киральных волноведущих систем, такие как гибридность мод, явление бифуркации мод, существование «обратной области», где фазовые и групповые скорости имеют противоположный знак, и т.д.

Специальный класс обратных задач математической физики составляют задачи синтеза волноведущих систем. Они ставятся как задачи математического проектирования для определения основных характеристик синтезируемого объекта, при которых этот объект обладает требуемыми техническими и эксплуатационными свойствами. Наиболее полный и универсальный подход к решению задач синтеза волноведущих систем заключается в рассмотрении таких задач как математически некорректных, с применением для их решения метода регуляризации А.Н. Тихонова. Такой подход предложен в работах А.Г. Свешникова и А.С. Ильинского. На кафедре математики физического факультета МГУ под руководством А.Г. Свешникова и А.Н. Боголюбова проведено исследование ряда важных задач синтеза волноведущих систем. Удалось решить следующие задачи: синтез круглых диэлектрических волноводов (в частности, волоконных световодов), синтез трехмерного волноводного перехода между двумя волноводами овального сечения, синтез плоского волноводного трансформатора и излучателя, синтез трехмерного волноводного перехода с согласующим ребром между круглыми и планарными волноводами, синтез волноведущих систем с киральным заполнением, синтез волноведущих систем на основе фотонных кристаллов.

А.Н. Боголюбовым и учениками на кафедре математики физического факультета МГУ проведен большой цикл работ теоретическому исследованию математических моделей электродинамических систем. Были введены новые функциональные пространства, в которых задача дифракции сведена к внутренней краевой задаче с нелокальными краевыми условиями. Установлены теоремы вложения для векторных функциональных пространств в областях с негладкой границей, в том числе содержащих экраны. Рассмотрен вопрос о дискретизации задачи дифракции в волноводе в скалярной постановке. Предложено обобщение преобразования Фурье (Fr-преобразование), с помощью которого задача о возбуждении колебаний сводится к задаче об обращении квадратичного компактного операторного пучка, свойства которого хорошо изучены. Выделена главная часть оператора парциальных условий излучения, задаваемая гиперсингулярным интегральным оператором. Доказаны теоремы существования и единственности обобщенного решения задачи о возбуждении сторонними источниками электромагнитных колебаний в области с кусочно-постоянным киральным заполнением, а также теоремы о свойствах спектральной задачи для волновода с кусочно-постоянным би-изотропным заполнением. Доказано возбуждение обратных волн в анизотропных волноводах определенного вида. Рассмотрены условия возникновения и свойства ловушечных мод волноводов.

Важное практическое значение имеет задача о расчете электромагнитного поля в волноведущих системах при наличии ребер на их границах и поверхностей разрыва диэлектрической проницаемости внутри волновода, что приводит к появлению особенностей у электромагнитного поля. На основе построенной асимптотики «по гладкости» электромагнитного поля в окрестности ребра удастся существенно повысить

скорость сходимости алгоритма численного расчета волноведущих систем с входящими ребрами.

В настоящее время А.Н. Боголюбов является одним из ведущих специалистов в области математической физики, прикладной и вычислительной математики, основы которых заложены в трудах А.Н. Тихонова, А.А. Самарского, А.Г. Свешникова. Им опубликовано свыше четырехсот научных работ, 7 книг, он участник многих всесоюзных, всероссийских и международных конференций, на которых им сделано более 140 докладов. В течение ряда лет А.Н. Боголюбов руководил научными проектами, поддержанными Российским фондом фундаментальных исследований.

Александр Николаевич обладает незаурядным талантом лектора и педагога, пользуется заслуженным уважением студентов и коллег. В 2010 он признан лучшим преподавателем года. Более 40 лет он читал общий курс «Методы математической физики» на физическом факультете МГУ. Александру Николаевичу объявлена благодарность «за неоценимый вклад в создание образовательных видеоматериалов к лекциям по методам математической физики». Им разработан и успешно читается общий курс «Основы математического моделирования», а также курс «Введение в математическое моделирование», создан ряд оригинальных спецкурсов по численным методам решения физических задач. На основе многолетнего опыта чтения лекций совместно с А.Г. Свешниковым и В.В. Кравцовым им написаны учебник «Лекции по математической физике», вошедший в серию «Классический университетский учебник», и книга «Задачи по математической физике», являющиеся основными учебными пособиями для студентов физических специальностей университетов, а также ряд других пособий.

Под его руководством выполнены и защищены свыше 30 дипломных работ, 15 кандидатских и одна докторская диссертация. В 1997 году он стал лауреатом премии имени М.В. Ломоносова за педагогическую деятельность.

А.Н. Боголюбов много сил отдает руководству работой студентов и аспирантов, постоянно участвует в проведении конференции для школьников «От атома до галактики», а также является постоянным участником различных мероприятий для учащихся школ как России, так и других стран.

А.Н. Боголюбов ведет большую научно-общественную работу. Он является членом Ученого Совета физического факультета МГУ, членом диссертационных советов при МГУ и диссертационного совета при Российском университете дружбы народов, входит в состав редколлегии «Журнала вычислительной математики и математической физики» и журналов «Математическое моделирование», «Электромагнитные волны и электронные системы», «Физические основы приборостроения». В 2016 году им получена премия по программе развития МГУ.

24 февраля 2015 года профессору А.Н. Боголюбову приказом ректора доверено руководство созданным на физическом факультете отделением прикладной математики, которое он успешно осуществляет по настоящее время.

**Анализ влияния квантовых эффектов на уровень энергии, поглощенной
плазмонными слоистыми наночастицами**

**Analysis of the influence of quantum effects on the level of energy absorbed by
plasmonic layered nanoparticles**

Еремин Ю.А., Лопушенко В.В.

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет
вычислительной математики и кибернетики, кафедра математической физики,*

119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 52.

eremin@cs.msu.ru, lopushnk@cs.msu.ru

Аннотация. На основе метода дискретных источников проведено исследование влияния квантовых эффектов на сечение поглощения золотых наночастиц с полимерным покрытием, обеспечивающим биосовместимость с тканями организма. Показано, что учет квантового эффекта может приводить к смещению максимума сечения поглощения в области прозрачности биотканей в сторону коротких волн на 10-15нм, а также небольшому снижению его амплитуды в пределах 5%.

Введение

Плазмонные наночастицы (НЧ) используются при визуализации, доставке лекарств, генной инженерии, биосенсорике и терапии рака. Плазмонная фототермическая терапия (ФТТ) основана на использовании металлических наночастиц, которые интенсивно поглощают электромагнитную энергию и преобразуют ее в тепло. Более мелкие наночастицы (менее 10 нм) могут легче проникать в опухоль, чем более крупные. Для использования в биомедицинских целях НЧ необходимо покрывать их полимерными веществами. Такое покрытие придает НЧ необходимые свойства для многих инновационных приложений, обеспечивая биосовместимость с тканями организма и не меняя при этом их фототермических свойств. Покрытие также позволяет избавиться от агрегации частиц и обеспечивает дисперсное распределение внутри опухоли [1]. Большинство НЧ, разработанных для ФТТ, интенсивно поглощают излучение в первом ближнем инфракрасном диапазоне (~650–950 нм), где свет легче проникает в ткани. Однако, при уменьшении размеров плазмонных НЧ возникают квантовые эффекты - пространственная нелокальность, смещение электронного облака по отношению к поверхности и затухание Ландау [2]. Эти эффекты могут существенно снижать эффективность проведения ФТТ.

В данной работе проводится анализ влияния квантовых эффектов (КЭ): пространственной нелокальности, смещение электронного облака и затухания Ландау на золотые НЧ, покрытые защитной оболочкой. Нами выбраны НЧ сфероидальной формы, покрытые слоем полиэтиленгликоля (ПЭГ), располагающиеся в плотной внешней среде (женская грудь). Учет КЭ осуществляется на основе мезоскопической теории с параметрами Фейбельмана [2]. Для решения граничной задачи рассеяния света используется метод дискретных источников, зарекомендовавший себя в качестве эффективного инструмента исследования подобных проблем [3].

Постановка задачи рассеяния

Будем рассматривать рассеяние плоской Р-поляризованной электромагнитной волны $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0\}$ на слоистой НЧ. Эта частица состоит из золотого ядра (область D_i), окруженного слоем диэлектрика (область D_s). Частица обладает осевой симметрией относительно оси OZ. Внешнюю область обозначим как D_e . Границы металлического ядра и диэлектрического слоя: $\partial D_{i,s}$ считаем достаточно гладкими. Все среды считаются немагнитными, а временная зависимость электромагнитного поля имеет вид $\exp(j\omega t)$. Тогда постановка задачи может быть записана как

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}_\alpha &= jk\varepsilon_\alpha \mathbf{E}_\alpha, \nabla \times \mathbf{E}_\alpha = -jk\mathbf{H}_\alpha \text{ в } D_\alpha, \alpha = i, s, e, \\ \mathbf{n}_i \times (\mathbf{E}_i(P) - \mathbf{E}_s(P)) &= -d_\perp \mathbf{n}_i \times \nabla \{ \mathbf{n}_i \cdot (\mathbf{E}_i(P) - \mathbf{E}_s(P)) \}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_i \times (\mathbf{H}_i(P) - \mathbf{H}_s(P)) &= 0, P \in \partial D_i, \\ \mathbf{n}_s \times (\mathbf{E}_s(Q) - \mathbf{E}_e(Q)) &= \mathbf{n}_s \times \mathbf{E}_0(Q), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mathbf{n}_s \times (\mathbf{H}_s(Q) - \mathbf{H}_e(Q)) = \mathbf{n}_s \times \mathbf{H}_0(Q), Q \in \partial D_s, \quad (3)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \cdot \left(\sqrt{\varepsilon_e} \mathbf{E}_e \times \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{H}_e \right) = 0, r = |M|, M \in D_e. \quad (4)$$

Здесь $\{\mathbf{E}_e, \mathbf{H}_e\}$ - рассеянное поле вне слоистой частицы, $\{\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i\}$ - полное поле внутри ядра, $\{\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s\}$ - полное поле внутри оболочки, $\varepsilon_{e,s,i}$ - диэлектрические проницаемости сред в $D_{i,s,e}$, причем $\text{Im } \varepsilon_{e,s} = 0$, $\text{Im } \varepsilon_i \leq 0$, $\mathbf{n}_{i,s}$ - внешние нормали к поверхностям $\partial D_{i,s}$, $k = \frac{\omega}{c}$, $d_{\perp}$ - комплексный параметр Фейбельмана.

Будем строить поля в областях $D_{i,s,e}$ на основе векторных потенциалов, которые в цилиндрической системе координат могут быть записаны следующим образом [3]:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{mn}^{1,\alpha} &= Y_m^\alpha(\zeta, z_n^\alpha) \{ \mathbf{e}_\rho \cos[(m+1)\varphi] - \mathbf{e}_\varphi \sin[(m+1)\varphi] \}, \alpha = i, s, e, \\ \mathbf{A}_{mn}^{2,\alpha} &= Y_m^\alpha(\zeta, z_n^\alpha) \{ \mathbf{e}_\rho \sin[(m+1)\varphi] + \mathbf{e}_\varphi \cos[(m+1)\varphi] \}, \mathbf{A}_n^{3,\alpha} = Y_0^\alpha(\zeta, z_n^\alpha) \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (5)$$

где соответствующие функции имеют вид

$$\begin{aligned} Y_m^e(\zeta, z_n^e) &= h_m^{(2)}(k_e R_{z_n^e}) \left(\frac{\rho}{R_{z_n^e}} \right)^m, Y_m^i(\zeta, z_n^i) = j_m(k_i R_{z_n^i}) \left(\frac{\rho}{R_{z_n^i}} \right)^m, \\ Y_m^{s\pm}(\zeta, z_n^s) &= h_m^{(2,1)}(k_s R_{z_n^s}) \left(\frac{\rho}{R_{z_n^s}} \right)^m, \end{aligned}$$

$h_m^{(1,2)}$ - сферические функции Ханкеля, в D_e $h_m^{(2)}$ удовлетворяет условиям излучения, j_m - сферические функции Бесселя, $k_{i,s} = k \sqrt{\varepsilon_{i,s}}$, $\zeta = (\rho, z)$, $\rho^2 = x^2 + y^2$, $R_{z_n}^2 = \rho^2 + (z - z_n)^2$, $\{z_n^\alpha\}_{n=1}^{N_\alpha^m}$ - координаты ДИ, распределенных вдоль оси вращения OZ и располагающихся внутри частицы.

Тогда представления для полей $\{\mathbf{E}_\alpha, \mathbf{H}_\alpha\}$ в случае Р-поляризации приобретают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\alpha^N &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N_\alpha^m} \left\{ p_{mn}^\alpha \frac{j}{k \varepsilon_\alpha} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}_{mn}^{1,\alpha} + q_{mn}^\alpha \frac{1}{\varepsilon_\alpha} \nabla \times \mathbf{A}_{mn}^{2,\alpha} \right\} + \sum_{n=1}^{N_\alpha^0} r_n^\alpha \frac{j}{k \varepsilon_\alpha} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}_n^{3,\alpha}, \\ \mathbf{H}_\alpha^N &= \frac{j}{k} \nabla \times \mathbf{E}_\alpha^N, \alpha = i, s\pm, e. \end{aligned} \quad (6)$$

Поле внутри оболочки представляется в виде суммы "уходящих" и "приходящих" волн, то есть

$$\mathbf{E}_s^N = \mathbf{E}_{s+}^N + \mathbf{E}_{s-}^N, \mathbf{H}_s^N = \mathbf{H}_{s+}^N + \mathbf{H}_{s-}^N. \quad (7)$$

Легко видеть, что построенные таким образом поля (6)-(7) удовлетворяют системе уравнений Максвелла (1) и условиям излучения (4). Неизвестные амплитуды ДИ определяются из условий сопряжения (2)-(3).

Результаты моделирования

Будем рассматривать слоистую НЧ, ядро которой представляет собой вытянутый золотой сфероид эквиобъемного диаметра $D=12\text{нм}$ и соотношениями осей $r=b/a=4$. В данном случае $b=30.2\text{нм}$, $a=7.6\text{нм}$. Ядро окружено диэлектрической оболочкой толщины $d=2\text{нм}$, состоящей из материала СТАВ (гексадецилтриметиламмония бромид), показатель преломления которого равен 1.526. НЧ располагается во внешней среде без поглощения, моделирующей женскую грудь с показателем преломления 1.405. Возбуждение частицы осуществляется Р-поляризованной плоской волной, распространяющейся в направлении, перпендикулярном оси симметрии ($\theta_0=90^\circ$).

На рисунке 1 приведены результаты, полученные для ядра - сфероида с эквиобъемным диаметром ядра $D=12\text{нм}$ и толщиной оболочки $d=2\text{нм}$ при различных вытянутостях сфероида $r=3.5, 4, 4.5$ с использованием двух подходов: классической теории (local response approximation, lra) и мезоскопической (surface response functions, srf), учитывающей квантовые эффекты. Видно, что увеличение вытянутости приводит к смещению ПР в область длинных волн, при этом влияние поверхностного квантового эффекта (КЭ) на величину ПР приводит к снижению амплитуды и сдвигу его в коротковолновую область на 10-15нм. Из поведения кривых следует, что подбором

соотношения осей сфероида можно добиться расположения ПР сечения поглощения в окне прозрачности биологических тканей в диапазоне $\lambda \sim 650\text{--}950\text{ нм}$.

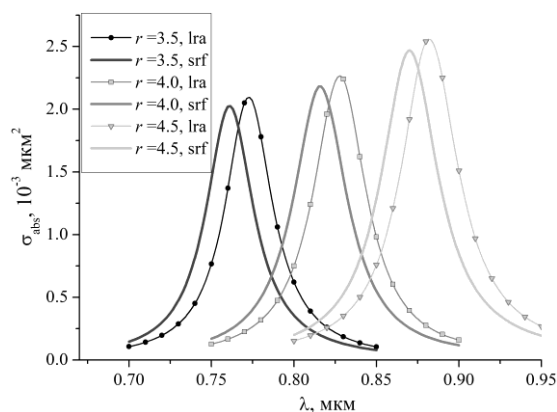


Рисунок 1. Сечение поглощения в зависимости от вытянутости сфероидального ядра.

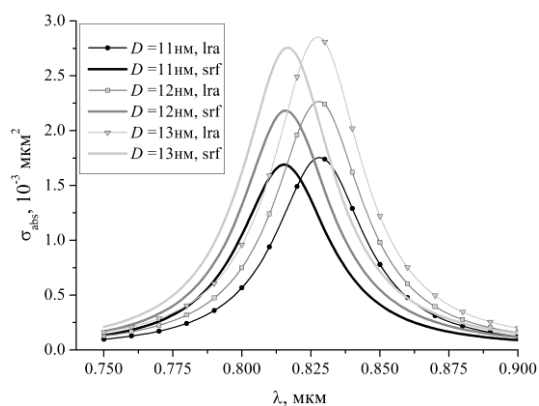


Рисунок 2. Сечение поглощения в зависимости от размера ядра.

На рисунке 2 приведены результаты сравнительного анализа влияния КЭ, для слоистой частицы с толщиной оболочки $d=2\text{ нм}$ при соотношении осей золотого сфероида $r=4$ для сфероидов с эквиобъемными диаметрами $D=11, 12, 13\text{ нм}$. Влияние КЭ в этом случае выражается в небольшом снижении амплитуды ПР и сдвиге в 10 нм в коротковолновую область. Характерная особенность в данном случае состоит в том, что изменение эквиобъемного диаметра золотого сфероида практически не влияет на положение ПР в частотной области и ведет лишь к изменению его амплитуды. Естественно, увеличение диаметра ведет к росту амплитуды ПР.

Заключение

В результате моделирования установлено, что посредством изменения геометрии плазмонного ядра возможно управлять положением максимума сечения поглощения в окне прозрачности биоматериалов, в то же время изменение объема ядра влияет только на амплитуду сечения. Показано, что учет квантового эффекта приводит к смещению максимума сечения поглощения в область коротких волн на $10\text{--}15\text{ нм}$, а также небольшому снижению его амплитуды в пределах 5% .

Литература

1. Skinner W.H., Salimi M., Moran L., et al. Plasmonic Nanoparticles for Photothermal Therapy: Benchmarking of Photothermal Properties and Modeling of Heating at Depth in Human Tissues // J. Phys. Chem. C. — 2025. — Vol. 129, no. 3. — P. 1864–1872.
2. Stamatopoulou P.E., Tserkezis C. Finite-size and quantum effects in plasmonics: manifestations and theoretical modelling [Invited] // Optical Materials Express. — 2022. — Vol. 12, no. 5. — P. 1869–1893.
3. Еремин Ю.А., Лопушенко В.В. Аномальное поведение интенсивности в зазоре парных наночастиц щелочных металлов с мезоскопическими граничными условиями // ВМУ, сер. 3, Физика, Астрономия. — 2025. — Т. 80, № 4. — С. 2540101.

Моделирование электромагнитного ускорения проводящего тела с учетом фазовых переходов

Modeling of electromagnetic acceleration of a conducting body taking into account phase transitions

Галанин М.П., Родин А.С.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, РФ

e-mail1 galan@keldysh.ru., e-mail2 rals@bk.ru

Аннотация. Решена задача моделирования ускорения металлических проводников в электромагнитном поле в двумерном приближении. Построены модели для описания движения тел с применением лагранжевых и эйлеровых координат с использованием определяющих соотношений термоупругопластического тела (для больших деформаций) и вязкой сжимаемой жидкости. Приведена модель, позволяющая описать движение тела с учетом наличия в нем разных фаз вещества. Выделяется переходная фаза от твердого тела к жидкости, для нее учитываются оба определяющих соотношений, взятые с весами. Построены численные алгоритмы, основанные на методе конечных элементов. Модель применена для решения задачи ускорения Al цилиндрической оболочки до скорости около 8 км/с. Представлены результаты, выполнено сравнение с известными данными.

Введение

Для изучения свойств вещества в экстремальных условиях часто используют столкновение разогнанного тела с образцом. Подобные эксперименты с ускорением тела электромагнитным полем проводятся на установках в ГНЦ РФ ТРИНИТИ [1, 2].

Для моделирования движения вещества с высокими скоростями (1 км/с и больше) обычно применяют магнитно-гидродинамическую (МГД) модель [3, 4]. В ряде экспериментов существенная часть тела длительное время находится в твердом состоянии, поэтому встает вопрос о применении более сложных моделей, позволяющих описать разные фазы вещества. В [5] предложена модель сквозного расчета гидродинамических и упругопластических процессов в полимерах под действием интенсивных потоков энергии. Для учета переходов используют разные способы. В [6] предложена однородная разностная схема для сквозного решения задачи Стефана с использованием принципа «размазывания» теплоемкости по температуре.

В данной работе построены модели, позволяющие учесть наличие фаз вещества в ускоряемом теле в один момент времени: твердую фазу, переходную фазу от твердого тела к жидкости, жидкую и газообразную (граница раздела жидкости и газа явно не выделяется). Для описания твердой фазы использованы различные модели упругого тела, а также модель термоупругопластического тела для больших деформаций.

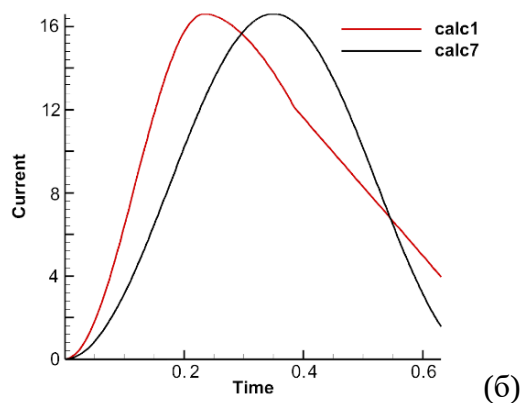
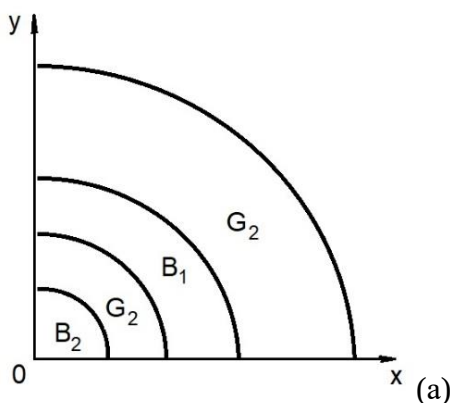


Рисунок 1. а - схема расчетной области; б - зависимости от времени тока в проводниках

Алгоритм применен для моделирования ускорения цилиндрической Al оболочки в магнитном поле [3]. На рис. 1.а приведена схема расчетной области, соответствующая 1/4 части сечения. Ускоритель включает анод (тело B_1) и катод (тело B_2), разделенные диэлектрической подобластью, по которым протекает заданный ток (в аноде и катоде он течет в противоположном направлении) с амплитудой 16.5 МА. На рис. 1.б показаны токи, использованные в расчетах (время в мкс). Ток создает поле, под действием которого внешняя поверхность анода разгоняется до скорости свыше 8 км/с.

Описание работы

Электромагнитные поля описываются системой уравнений Максвелла в квазистационарном приближении. Используются локальные формулировки законов сохранения массы (уравнение неразрывности), количества движения и энергии в лагранжевых (материальных) и эйлеровых координатах.

Для замыкания системы уравнений для каждой фазы вещества задается свое определяющее соотношение. Для твердого тела пластическая часть тензора скорости деформаций задана ассоциативным законом течения, положение поверхности текучести – условием Мизеса, предел текучести – моделью пластичности Джонсона-Кука. Для жидкости (газа) модель дополняется уравнением состояния для давления.

Рассмотрена модель сплошной среды, учитывающая, что в процессе нагружения могут происходить фазовые переходы твердое тело/жидкость, а затем жидкость/газ. Считаем, что в каждой точке компоненты напряжений можно представить в виде:

$$s_{ij} = \alpha s_{ij}^{sol} + (1 - \alpha)s_{ij}^{liq}, S_{ij} = \alpha S_{ij}^{sol} + (1 - \alpha)S_{ij}^{liq}.$$

Здесь s_{ij}^{sol} и S_{ij}^{sol} относятся к модели термоупругопластического тела; s_{ij}^{liq} и S_{ij}^{liq} относятся к модели жидкости (газа). Параметр α является весовым коэффициентом: если $\alpha = 1$, то среда - только в твердой фазе, если $\alpha = 0$, то только в жидкой, во всех других случаях среда - в переходной фазе. Коэффициент α связан с внутренней энергией.

Численная модель основана на расщеплении исходной системы по физическим процессам. На каждом шаге по времени выполняется цикл внешних итераций.

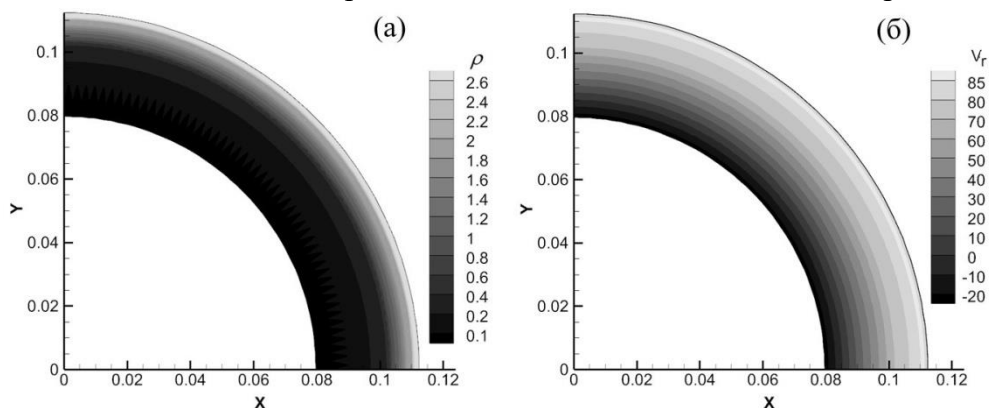


Рисунок 2: Распределения плотности (а) и скорости (б) в аноде при $t = 630$ нс

Геометрические параметры задачи взяты из [3]. Рассмотрен интервал времени 630 нс. Учтена зависимость проводимости Al от плотности и температуры, для жидкости (газа) – зависимости давления, внутренней энергии и удельной теплоемкости от плотности и температуры брались из широкодиапазонного уравнения состояния.

На рис. 2 показаны распределения модуля скорости (в 100 м/с) и плотности (г/см³) в аноде в $t = 630$ нс в расчете с шагом 0.3. Координаты нормированы на 10 см.

Из рис. 2.б видно, что внешняя часть анода разогналась до скорости свыше 8 км/с, поверхность сдвинулась относительно своего начального положения (8.425 мм) почти на 3 мм. При этом толщина анода увеличилась более чем в 3 раза.

На рис. 3.а приведены графики скорости внешней поверхности анода (в км/с), взятые из [3], сплошной график соответствует эксперименту, штриховой график – расчету по одномерному МГД коду. На рис. 3.б показан график скорости движения внешней поверхности анода (км/с), полученный в расчете ($t = 2.65$ мкс, $t = 3.10$ мкс на рис. 3.а соответствуют $t = 0.18$, $t = 0.63$ на рис. 3.б). Время нормировано на 1 мкс.

Графики на рис. 3 демонстрируют, что после прихода волны возмущения внешняя поверхность анода приобретает скорость около 6 км/с. Потом до поверхности доходит отраженная волна возмущения, которая ведет к следующему этапу увеличения скорости. В $t = 630$ нс в расчете 2 скорость движения внешней поверхности анода составила около 8.4 км/с. Данное значение близко к скорости [3] (8.5 км/с).

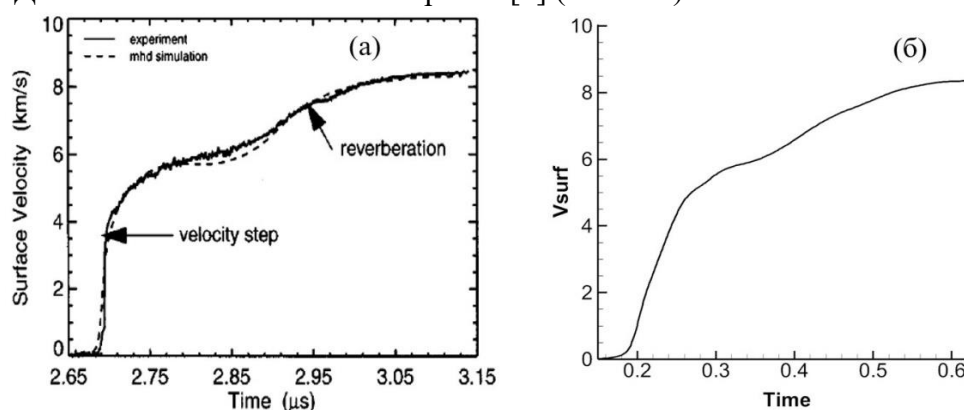


Рисунок 3: Зависимость от t скорости поверхности анода, (а) - из [3], (б) – из расчета

В расчетах получено, что в момент времени 630 нс вблизи внешней поверхности анода остается слой толщиной около 0.11 мм (10 % начальной толщины), который находится в твердом состоянии, при этом внешняя поверхность практически не нагрета (температура равна 320 К). В слое возникают растягивающие напряжения, характерные для модели твердого деформируемого тела. В ходе расчета в аноде регулярно возникал слой вещества, который относился к переходной фазе.

Некоторые дополнительные сведения о результатах приведены в [7, 8].

Заключение

Построена математическая и численная модель для описания движения металлических проводников в электромагнитном поле с учетом того, что их вещество может находиться в различных фазах. Для расчета движения вещества в твердой фазе использована модель термоупругопластического тела (для больших деформаций), для жидкой (газообразной) фазы - модель вязкой сжимаемой жидкости (газа). Отдельно выделена переходная фаза от твердого тела к жидкости: для точек вещества, относящихся к данной фазе, учитывается вклад обеих моделей, взятых с весами. Численная модель основана на методе конечных элементов. Проведена серия расчетов движения цилиндрического Al проводника, разогнанного электромагнитными силами до скорости около 8 км/с. Сравнение показало, что полученная скорость поверхности анода близка к экспериментальной кривой и к графику [3].

Литература

1. Е.В. Грабовский [et al]. Исследования работы импульсного магнитного компрессора с электродинамическим разгоном лайнера // Журнал технической физики, 2014, т.84, №7, с.126-135;
2. Олейник Г.М. [et al]. Ускорение металлических флаеров на установке АНГАРА-5-1 // Физика плазмы. 2024. Т. 50, № 8. С.с. 905 – 916.

3. R.W. Lemke [et al]. Characterization of magnetically accelerated flyer plates // Physics of plasmas, 2003, v.10, №4, p.1092-1099.
4. S.I. Tkachenko, K.V Khishchenko, P.R. Levashov. Homogeneity in a Metal Wire under Melting // International Journal of Thermophysics, 2005, v.26, №4, p.1167-1179.
5. Д.С. Бойков, О.Г. Ольховская, В.А. Гасилов. Моделирование газодинамических и упругопластических явлений при интенсивном энергокладе в твердый материал // Математическое моделирование, 2021, т.33, №12, с.82–102;
6. А.А. Самарский, Б.Д. Моисеенко. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // ЖВМ и МФ, 1965, №5, с.816-827;
7. М.П. Галанин, А.С. Родин. Математическое моделирование движения металлических проводников в электромагнитном поле с учётом наличия разных фаз ускоряемого вещества // Дифференциальные уравнения. 2025. Т. 61, № 7. С. 892–909.
8. А.С. Родин. Моделирование электромагнитного ускорения проводящего тела с применением различных определяющих соотношений для фаз вещества // Математическое моделирование. В печати.

Цифровая компенсация нелинейного искажения сигналов в волоконно-оптических линиях связи

Digital Compensation of the Signal Nonlinear Distortions in Fiber

Делицын А.Л.

МФТИ, Высшая Школа Современной Математики

delitsyn@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются основные методы цифровой компенсации в волоконно-оптических линиях связи. Обсуждаются достигнутые результаты и основные направления их дальнейшего развития.

Введение

Распространение сигналов в волоконно-оптических линиях связи на дальние расстояния (1000 км. и более) приводит к полному искажению передаваемой информации. Для ее восстановления применяется метод обратного распространения, заключающийся в численном решении задачи передачи сигнала в обратном направлении – от приемника к передатчику. Основной проблемой является разработка алгоритмов, работающих в реальном времени.

Описание работы

В настоящее время существует три основных подхода к решению задачи цифровой компенсации.

Первый подход заключается в применении конечно-разностных методов. Он отличается наибольшей точностью и наименьшей скоростью. Наиболее распространенным вариантом является Split Step Fourier Method. Вопросы, связанные с математическим исследованием характеристик этого метода, в частности его устойчивости, остаются открытыми.

Второй подход связан с применением теории возмущений. На базе подобного метода, комбинируемого с машинным обучением, работают компенсаторы, реализованные в виде компьютерных чипов. Существуют различные варианты теории возмущений. В докладе планируется их обсуждение, в том числе предполагается рассмотреть возможности построения быстрых алгоритмов на основе малоранговых аппроксимаций тензора, определяющего нелинейную поправку теории возмущений.

Третий подход основан на методе обратной задачи рассеяния. Существующие в настоящее время Layer Peeling алгоритмы решения прямой и обратной задачи рассеяния относятся к классу сверхбыстрых алгоритмов. Однако проблема их устойчивости

остается открытой и не позволяет применять эти методы для реальных задач в области больших мощностей сигналов.

Литература

1. А.Л. Делицын. Быстрые алгоритмы решения обратной задачи рассеяния для системы уравнений Захарова-Шабата и их приложения // Матем. заметки. — 2022. Т. 112, № 2, С. 198-217.

Компьютерное исследование параметрической робастности нелинейных алгоритмов следящего управления полетом квадрокоптера

Computer Study of Parametric Robustness of Nonlinear Algorithms Tracking Control of a Quadcopter

Филимонов Н.Б.

1) Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
физический факультет, Москва, РФ; 2) Институт проблем управления им.
В.А. Трапезникова РАН, Москва, РФ

nbfilimonov@mail.ru

Аннотация. Работа посвящена компьютерному исследованию в среде Python робастных свойств широко распространенных современных нелинейных алгоритмов следящего управления полетом БПЛА мультикоптерного типа – квадрокоптера – в условиях переменной нагрузки и помех.

Одним из прогрессивных видов БПЛА, набирающих все большую популярность и приобретающих все более широкое применение в гражданской и военной сферах, являются *квадрокоптеры* (КК), основными достоинствами которых является: компактность, простота конструкции, невысокая стоимость, малая взлетная масса при существенной массе полезной нагрузки, высокая устойчивость и маневренность. В настоящей работе рассматривается задача сравнительного анализа методом компьютерного моделирования в среде Python широко распространенных современных нелинейных алгоритмов управления полетом КК в условиях переменной нагрузки и помех.

Математическая модель движения КК

КК рассматривается как осесимметричная система (см. рис. 1) с шестью степенями свободы, соответствующих поступательному и вращательному движениям аппарата.

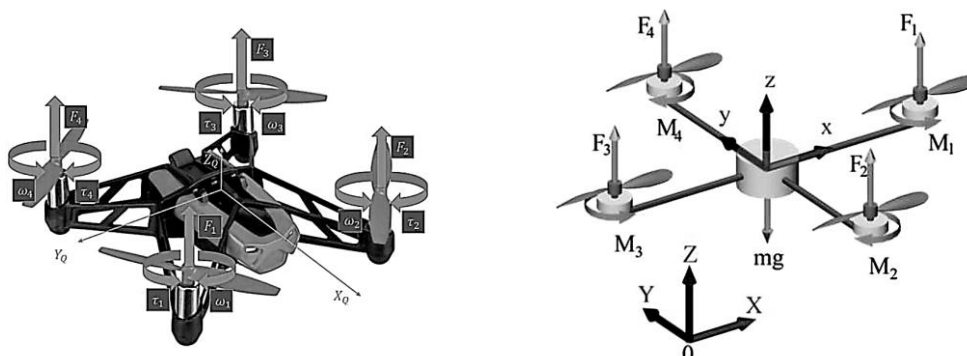


Рисунок 1. Схематичное изображение и геометрическая модель КК

Следуя обзору математических моделей динамики КК [1], в качестве его переменных состояния приняты пространственные координаты центра масс (x, y, z) и угловые координаты (крен φ , тангаж θ и рысканье ψ) колебаний вокруг центра масс аппарата вместе с их производными:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{12})^T, x_1 = z, x_2 = \dot{z}, x_3 = x, x_4 = \dot{x}, x_5 = y, x_6 = \dot{y}, x_7 = \varphi, x_8 = \dot{\varphi}, x_9 = \theta, x_{10} = \dot{\theta}, x_{11} = \psi, x_{12} = \dot{\psi},$$

а в качестве управляющих переменных принята общая тяга u_z и три крутящих момента $u_\varphi, u_\theta, u_\psi$, обеспечивающие соответственно подъем, спуск и повороты аппарата вокруг своих осей: $\mathbf{u} = (u_z, u_\varphi, u_\theta, u_\psi)^T$.

В качестве математической модели пространственного движения КК принята следующая система дифференциальных уравнений Ньютона-Эйлера 12-го порядка, описывающих объединенную поступательную и вращательную динамику аппарата:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{u_z[\cos(\varphi)\sin(\theta)\cos(\psi) + \sin(\varphi)\sin(\psi)]}{m} - \frac{k_x}{m}\dot{x}, \\ \ddot{y} = \frac{u_z[\cos(\varphi)\sin(\theta)\sin(\psi) + \sin(\varphi)\cos(\psi)]}{m} - \frac{k_y}{m}\dot{y}, \\ \ddot{z} = \frac{u_z[\cos(\varphi)\cos(\theta)]}{m} - \frac{k_z}{m}\dot{z} - g, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} = \frac{u_\varphi}{I_x} + \frac{(I_y - I_z)}{I_x}\dot{\psi}\dot{\theta} - \frac{I\Omega}{I_x}\dot{\theta} - \frac{k_\varphi}{I_x}\dot{\varphi}^2, \\ \ddot{\theta} = \frac{u_\theta}{I_y} + \frac{(I_z - I_x)}{I_y}\dot{\psi}\dot{\varphi} - \frac{I\Omega}{I_y}\dot{\varphi} - \frac{k_\theta}{I_y}\dot{\theta}^2, \\ \ddot{\psi} = \frac{u_\psi}{I_z} + \frac{(I_x - I_y)}{I_z}\dot{\theta}\dot{\varphi} - \frac{k_\psi}{I_z}\dot{\psi}^2, \end{cases} \quad (2)$$

где m - масса аппарата; I - сумма моментов инерций винтов относительно оси z ; I_x, I_y, I_z - моменты инерции винтов относительно соответствующих осей, причем $I_x = I_z$; k_x, k_y, k_z - коэффициенты аэродинамического сопротивления перемещению; $k_\varphi, k_\theta, k_\psi$ - коэффициенты аэродинамического сопротивления вращению;

$$\Omega = \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} \omega_i$$

- суммарная угловая скорость вращения всех четырех винтов, ω_i - угловая скорость вращения i -го винта; $g = 9,81 \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ - ускорение свободного падения.

Задача следящего управления полетом КК

Рассматривается следующая задача следящего управления КК: для управляемого беспилотника с уравнениями динамики (1), (2) методами современной теории нелинейных автоматических систем синтезируется управляющий вектор $\mathbf{u} = (u_z, u_\varphi, u_\theta, u_\psi)^T$, обеспечивающий в процессе полета отслеживание вектором управляемых выходных переменных $\mathbf{y} = (x, y, z, \varphi, \theta, \psi)^T$ его произвольно заданного (программного) изменения $\mathbf{y}_d(t) = (x_d(t), y_d(t), z_d(t), \varphi_d(t), \theta_d(t), \psi_d(t))^T$, т.е. выполнение следующего целевого условия следящего управления:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{e}(t)| = 0, \mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_d(t).$$

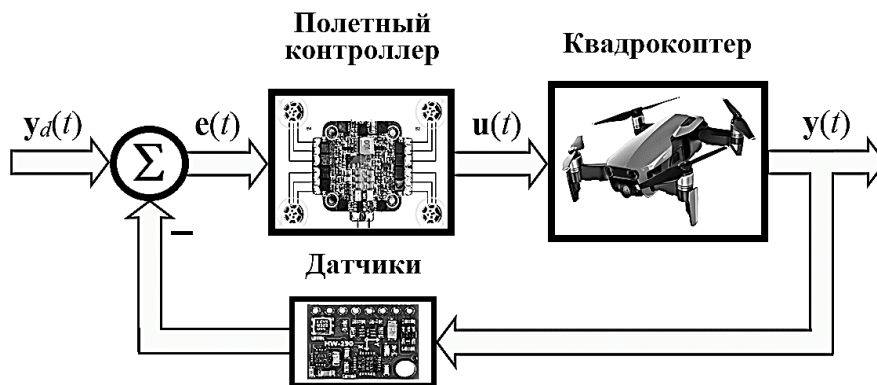


Рисунок 2. Блок-схема системы следящего управления КК

Блок-схема системы следящего управления полетом КК представлена на рисунке 2.

В качестве показателей эффективности следящего управления полетом КК положены, во-первых, прямые показатели качества (перерегулирование и время регулирования), характеризующие склонность к колебаниям и быстродействие процесса управления и, во-вторых, амплитуду входных управляющих воздействий, характеризующую энергозатраты на выработку управляющих воздействий.

Компьютерная верификация в среде Python нелинейных алгоритмов следящего управления полетом КК

К настоящему времени достигнут значительный прогресс в системах управления полетом КК. При этом перечень применяемых подходов включает как классические, так и современные методы автоматического управления [2]. Несмотря на наличие многочисленных методов синтеза алгоритмов управления полетом КК, многие из них оказываются малоэффективными в условиях *априорной неопределенности*, обусловленной действием параметрических возмущений. В связи с этим все большую актуальность приобретает проблема разработки **робастных алгоритмов управления** полетом КК, способных обеспечить слабую чувствительность его динамических характеристик (устойчивость и качество процессов управления) к изменению параметров математической модели в условиях параметрических возмущений [3].

В качестве алгоритмов управления полетом КК рассмотрены следующие широко распространенные современные нелинейные алгоритмы:

- алгоритм следящего управления методом скользящих режимов,
- алгоритм следящего управления методом обхода интегратора,
- алгоритм следящего управления методом линеаризации обратной связи,
- алгоритм следящего управления методом «глубокой» обратной связи,
- алгоритм следящего упреждающего управления методом МРС,
- алгоритм следящего терминального управления компенсационным методом.

Сравнительный анализ эффективности данных алгоритмов проводился путем их компьютерной верификации в среде Python на модели динамики КК (1), (2) в условиях помех и априорной неопределенности его математической модели, вызванной параметрическим возмущением ее основного параметра – массы m , лежащей в диапазонах: $[-30\%, +30\%]$ и $[-50\%, +50\%]$ от ее номинального невозмущенного значения.

Литература

1. Chovancova A., Fico T., Chovanec L., Hubinsk P. Mathematical Modelling and Parameter Identification of Quadrotor (a survey) // Procedia Engineering. 2014. Vol. 96. - P. 172-181.
2. Idrissi M., Salami M., Annaz F. A Review of Quadrotor Unmanned Aerial Vehicles: Applications, Architectural Design and Control Algorithms // Journal of Intelligent & Robotic Systems. 2022. Vol. 104. No. 22. - 33p.

3. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. - 303с.
4. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 464 с.
5. Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Нелинейные и оптимальные системы. СПб.: Питер, 2006. - 272с.
6. Халил Х.К. Нелинейные системы. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. - 832 с.
7. Андриевский Б.Р., Бобцов А.А., Фрадков А.Л. Методы анализа и синтеза нелинейных систем управления. СПб.: ИПМаш РАН, 2017. - 327 с.

Магнитогидродинамические процессы в аккреционных дисках

Magnetohydrodynamical processes in accretion discs

Михайлов Е.А.^{1,2}, Жихарева Е.Н.¹, Фролова М.В.¹

- 1) Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ; 2) Физический институт имени П.Н. Лебедева РАН, Москва, РФ.

ea.mikhajlov@physics.msu.ru

Аннотация. Аккреционные диски образуются при движении газопылевой среды в двойных системах. В них должно присутствовать магнитное поле, которое объясняет большое количество газодинамических процессов. Его генерация, по-видимому, объясняется с помощью механизма динамо. Он основан на одновременном действии альфа-эффекта и дифференциального вращения. Ввиду быстрого вращения аккреционных дисков и сильной зависимости угловой скорости от расстояния до центра данные процессы должны протекать даже более интенсивно, чем во многих других объектах. Здесь возможно использовать те же подходы, которые ранее применялись в галактических дисках [1]. Отдельное внимание стоит уделить влиянию случайных возмущений на эволюцию поля [2]. Они могут быть связаны с переносом поля с падающим веществом. Исследованы процессы генерации поля в аккреционных дисках, изучены его статистические характеристики [3].

Литература

1. D. V. Boneva, E. A. Mikhailov, M. V. Pashentseva, D. D. Sokoloff. Magnetic fields in the accretion discs for various boundary conditions // Astronomy and Astrophysics — 2021. — V. 652. — A38.
2. D. A. Grachev, E. A. Mikhailov, E. N. Zhikhareva. Magnetic fields with random initial conditions in discs with Kepler rotation curve // Open Astronomy. — 2023. — V. 32. — 20220216.
3. Е. Н. Жихарева, Е. А. Михайлов. Неоднородности магнитных полей аккреционных дисков и их устойчивость // Журнал технической физики. — 2024. — Т. 94, №. 12. — С. 2014 – 2016.

Квантовые и квантово-инспирированные аннилеры: обзор современного состояния и возможности применения для решения задач электродинамики

Quantum and quantum-inspired annealers: overview of the current state and possibilities of application for solving problems of electrodynamics

Малетин Н.В.¹, Минаев Д.В.^{2,3}

- 1) Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Центр инжиниринга перспективных технологий, Москва, РФ; 2) Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет,

Аннотация. Решение волновых уравнений — фундаментальная задача в физике и технике. Стандартный метод анализа (Фурье-преобразование, приводящее к уравнению Гельмгольца) сталкивается с численными трудностями при сложной геометрии и высоких частотах, где длина волны мала. Традиционные подходы (метод конечных разностей, метод конечных элементов) применимы, но их сложность быстро растет, что мотивирует развитие новых алгоритмов, включая квантовые. Одним из активно развивающихся направлений квантовых вычислений являются квантовые аннилеры.

Обзор современного состояния квантовых аннилеров

Первыми практическими плодами развития квантовых вычислений можно считать появление достаточно мощных гибридных квантово-классических и квантово-инспирированных цифровых отжигателей (аннилеров), предназначенных для решения задач QUBO (Quadratic Unconstrained Binary Optimization). К задачам QUBO эффективно могут быть сведены многие практически интересные задачи оптимизации. Вычислительные мощности современных отжигателей уже позволяют использовать их при решении научно-прикладных и бизнес-задач оптимизации практического масштаба. Квантовые компьютеры адиабатического типа, также называемые квантовыми отжигателями, наряду с квантовыми компьютерами вентильного типа в настоящее время относятся к самым развитым направлениям реализации квантовых вычислений.

Согласно консенсус-прогнозу научного сообщества главным кандидатом на создание в будущем универсальных полномасштабных FTQC (Fault-Tolerant Quantum Computers) являются квантовые компьютеры вентильного типа. Однако сроки появления таких FTQC оцениваются как 20+ лет [1], и пока ни они сами, ни их классические эмуляторы не могут использоваться для решения задач практических масштабов, т.к. могут работать с задачами, содержащими лишь 10^2 - 10^3 бинарных переменных.

В то же время наиболее мощные гибридные квантово-классические и квантово-инспирированные отжигатели уже сейчас могут работать параллельно с задачами оптимизации, содержащими 10^5 - 10^7 бинарных переменных. Это открывает возможность их практического использования на ближне- и среднесрочных временных горизонтах и определяет их долгосрочные перспективы как специализированных квантовых или гибридных вычислительных устройств, предназначенных для решения задач оптимизации.

Наиболее мощными в настоящее время являются гибридный отжигатель D-Wave, цифровые отжигатели Toshiba, Fujitsu и Hitachi и оптоэлектронная когерентная машина Изинга NTT (Nippon Telegraph and Telephone), способные работать параллельно с 10^6 , 10^7 , $0.5 \cdot 10^6$, 10^5 и 10^5 бинарными переменными соответственно. Большое количество примеров использования этих отжигателей для решения практических и квазипрактических бизнес-задач оптимизации приведено в соответствующих разделах сайтов этих компаний ([2], [3], [4]).

Внутренним представлением задач в отжигателях являются задачи QUBO. Задача QUBO — это задача определения координат глобальных минимумов квадратичного полинома от бинарных переменных

$$H(q_1, q_2, \dots, q_N) = \alpha_{00} + \sum_{i=1}^N \sum_{j \geq i}^N \alpha_{ij} q_i q_j, \quad (1)$$

где $q_1, q_2, \dots, q_N$ — бинарные переменные, принимающие значения 0 или 1, а α_{ij} — действительные коэффициенты, кодирующие условие задачи.

К задачам QUBO могут быть сведены все вычислительные задачи. Известны QUBO-формулировки для многих NP-полных и NP-трудных задач, включая все 21 NP-

полные задачи Карпа [5]. Однако не все задачи могут быть сведены к эффективным задачам QUBO, т.е. к задачам QUBO, обладающей хорошей масштабируемостью. Масштабируемость определяется здесь тем, насколько быстро с ростом размеров задачи растет количество необходимых для ее кодирования бинарных переменных. В то же время многие практически интересные задачи оптимизации сводятся к эффективным задачам QUBO. Это открывает перспективы решения таких задач на отжигателях если не уже сейчас, то в недалеком будущем.

Наиболее подходящими для решения на отжигателях являются задачи дискретной комбинаторной оптимизации, многие из которых изначально органично формулировать именно как задачи QUBO. Из бизнес-задач к таким задачам относятся прежде всего задачи логистики, маршрутизации и управления трафиком [6], а также некоторые финансовые задачи, такие, как, например, задача оптимального управления портфелем [7]. Из научных и научно-практических задач к комбинаторно-оптимизационным можно отнести задачи моделирования на решетках, например, задачи моделирования поведения полимеров [8] или задачи квантового моделирования систем Изинга [9].

Другим перспективным классом научно-практических задач для отжигателей являются задачи оптимизации функций от непрерывных переменных со сложным ландшафтом. Прежде всего это задачи параметризации сложных моделей различной природы, часто решаемые оптимизационными методами. Использование методов квантового отжига при решении такого класса задач обсуждается, например, для задач вычислительного материаловедения [10], медицинской томографии [11], инверсии сейсмических данных [12]

Возможности применения аннилеров для решения задач электродинамики

В работе [13] приводится решение одномерного уравнения Гельмгольца при различных граничных, начальных условиях и при различных неоднородностях, используя квантовый отжигатель от компании D-Wave в рамках псевдоспектрального подхода, где решение представляется с помощью определенного набора подходящих базисных функций

$$\begin{cases} u''(x) + \tau^2 u(x) = F(x), \\ u(0) = \alpha; u'(0) = \beta. \end{cases} \quad (2)$$

Применение этого инструментария для параметризации сложных моделей с большим числом переменных сталкивается с двумя ключевыми проблемами. Во-первых, стандартные методы преобразования задач оптимизации в формат QUBO приводят к нелинейному росту количества вспомогательных бинарных переменных при увеличении масштаба задачи. Во-вторых, существующие вычислительные системы имеют жесткие ограничения на общее число переменных и связей между ними. Кроме того, с ростом задачи качество решений значительно ухудшается, а время расчета на гибридных и цифровых отжигателях резко возрастает ([14], [15]).

Так в работе [16] исследуется вопрос, как квантовые отжигатели могут помочь в решении задач для уравнения Гельмгольца с помощью метода конечных элементов, который приводит к необходимости решения линейной системы, которая представляет сложность для классических компьютеров. Сначала линейная система приводится к виду обобщенной проблемы собственных значений (generalized eigenvalue problem, gEVP). Полученная gEVP преобразуется в задачи квадратичной безусловной бинарной оптимизации (QUBO), которые решаются с помощью адаптивного квантового алгоритма для поиска собственных значений (adaptive quantum annealing eigensolver, AQAE) и его классического аналога. Результаты работы показывают, что большое число обусловленности системы требует более мелкой дискретизационной сетки для сходимости AQAE, что приводит к задачам QUBO большего размера. Кроме того, было выявлено, что AQAE проявляет либо устойчивость, либо неустойчивость в зависимости от конкретной обобщенной проблемы собственных значений.

Развитие области квантовых вычислений идет огромными темпами. В связи с этим, разработка методов преобразования задач многопараметрической оптимизации в QUBO-форму с минимальным количеством переменных представляется крайне актуальной.

Литература

1. *Langione M. et al.* 2019 Where Will Quantum Computers Create Value—and When? Website of the Boston Consulting Group <https://www.bcg.com/publications/2019/quantum-computers-create-value-when>
2. <https://www.dwavesys.com/learn/customer-success-stories/>
3. <https://www.global.toshiba/ww/products-solutions/ai-iot/sbm.html>
4. <https://www.fujitsu.com/global/services/business-services/digital-annealer/>
5. *ucas A.* 2014 Ising formulations of many NP problems. *Front. Physics* 2:5
6. *Yarkoni S. et al.* 2022 Quantum Annealing for Industry Applications: Introduction and Review *Rep. Prog. Phys.* 85 104001
7. *Mugel S. et al.* 2022 Dynamic portfolio optimization with real datasets using quantum processors and quantum-inspired tensor networks *Phys. Rev. Research* 4 013006
8. *Micheletti C. et al.* 2021 Polymer Physics by Quantum Computing. *Phys. Rev. Lett.* 127 080501
9. *King A. D. et al.* 2024 Computational supremacy in quantum simulation (arXiv: 2403.00910)
10. *Maletin N.V., Dremov V.V., Klebanov I.I.* 2023 On the possibility of using quantum annealers to solve problems of parametrization of intermolecular interaction potentials. *Laser Phys. Lett.* 20 1152205
11. *Nau M.A. et al.* 2022 Hybrid adiabatic quantum computing for tomographic image reconstruction -- opportunities and limitations (arXiv:2212.01312)
12. *Nickolay V Maletin, Anastasiia M Eremenko and Dmitry V Minaev.* 2024 An algorithm for solving a 1D seismic data inversion problem on quantum or digital annealers in the presence of a priori information on layer parameters specified by arbitrary functions *Laser Phys. Lett.* 22 015201
13. *Aigerim Bazarkhanova, Alejandro J. Castro , Antonio A. Valido* Solving wave equation problems on D-Wave quantum annealers, Jul 18, 2025, 2507.13724 [quant-ph]
14. *Atanu Rajak, Sei Suzuki, Amit Dutta, Bikas K. Chakrabarti* Quantum Annealing: An Overview Jul 5, 2022, DOI: 10.1098/rsta.2021.0417
15. *алетин Н.В.* Использование квантовых и квантово-подобных отжигателей для решения научно-практических задач параметризации сложных моделей. Некоторые математические аспекты *Mathematical Problems in Quantum Information Technologies*, 27.05.2024
16. *Arnaud Remi, Francois Damanet and Christophe Geuzaine* Solving Helmholtz problems with finite elements on a quantum annealer oct 17, 2024, 2410.13740 [quant-ph]

Математическое моделирование

Моделирование взаимодействия электромагнитного поля с плазменным слоем

Simulation of the interaction of an electromagnetic field with a plasma layer

Гордеева Н.М.^{1,2}, Гвоздев П.А.², Станкевич Ю.Б.

1) ФИЦ ИУ РАН, Москва, РФ; 2) МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, РФ

nmgordeeva@bmstu.ru, gvozdevpa@student.bmstu.ru, juliastan@bmstu.ru

Аннотация. Рассмотрены два способа выбора области и постановки краевых условий для задачи взаимодействия электромагнитного излучения со слоем плазмы. Первый способ – постановка краевых условий на границах слоя плазмы. Второй способ – решение краевой задачи в полупространстве и применение принципа суперпозиции для нахождения решения в слое плазмы. Цель настоящей работы – определить границы применимости каждой модели и обосновать возможность использования каждой модели математическими выкладками. Показано, что для применения принципа суперпозиции надо по-разному учитывать вклад разных мод.

Введение

В работе рассматриваются варианты построения математической модели воздействия внешнего поля на электронную плазму, находящуюся внутри некоторого ограниченного тела. Если размеры тела таковы, что его толщина намного меньше других измерений, то можно считать, что рассматривается бесконечный слой, а математическая постановка краевой задачи включает постановку краевых условий на границах этого слоя. Учитывая, что решение имеет сильно выраженный приграничный эффект, т.е. основное возмущение происходит в приграничной области, предлагается сравнить решение для слоя и суперпозицию двух решений для полупространства. Вопрос является актуальным, т.к. исследуемые тела могут иметь разную форму, когда границу сложного вида удобно представить как сумму более простых вариантов.

Описание работы

При кинетическом подходе поведение плазмы описывается кинетическим уравнением Больцмана, которое дополняется системой уравнений Максвелла [1, 2]. Полученные уравнения можно решить аналитически методом малых возмущений, с помощью применения преобразования Фурье и теории задачи Римана, см. [3, 4]. В процессе решения возникает дисперсионная функция $\Lambda(z)$, от которой зависит вид решения задачи [5, 6].

Учитывая геометрию задачи (поле направлено вдоль оси Ox) и факторизацию искомых функций, уравнения упрощаются, искомая функция – амплитуда самосогласованного электрического поля, возникающего в плазме, – $E(x)$ зависит только от одной пространственной переменной $x \in (-l, l)$ (в случае рассмотрения слоя) или $x > 0$ (в случае рассмотрения полупространства). На самой границе ставятся условия Дирихле. В случае рассмотрения полупространства на бесконечности требуется ограниченность модуля $E(x)$.

Приведем представление общего решения для самосогласованного электрического поля $E(x)$, возникающего в плазме:

$$E(x) = \frac{Q_0}{\Lambda_\infty} - \frac{B\lambda_0}{A} \left(Q_1 e^{-\frac{Ax}{\lambda_0}} - \frac{B}{A} Q_2 e^{\frac{Ax}{\lambda_0}} \right) + \frac{B}{iA} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q(s)k(s)}{\Lambda_0(s)} e^{-\frac{Ax}{s}} ds, \quad (1)$$

здесь Q_0, Q_1, Q_2 – произвольные константы, $Q(s)$ – произвольная функция, которые находятся из краевых условий, функция $\Lambda_0(s)$ связана с дисперсионной функцией $\Lambda(z)$ с помощью формул Сохоцкого, $\pm\lambda_0$ – корни дисперсионной функции $\Lambda(z)$.

Несмотря на разные постановки краевой задачи, решение имеет аналогичный вид, электрическое поле складывается из трех составляющих:

$$E(x) = E_a + E_b(x) + E_c(x), \quad (2)$$

где первое слагаемое E_a не зависит от координат, а зависит только от физических параметров (частоты столкновений в плазме, частоты внешнего поля и плазменной частоты), второе слагаемое $E_b(x)$ зависит от корней дисперсионной функции, а третье слагаемое $E_c(x)$ выражается через интеграл с некоторой плотностью $Q(s)$.

Слагаемые $E_a, E_b(x), E_c(x)$ вносят разный вклад в сумму $E(x)$. Так при малых частотах внешнего поля абсолютные значения E_a и $E_c(x)$ намного меньше абсолютного значения $E_b(x)$. С ростом частоты внешнего поля ω вклад E_a и $E_c(x)$ возрастает, подробнее см. [5, 6].

Принимая во внимание, что основное возмущение в ряде случаев происходит около границы, было проведено сравнение решения для слоя $x \in (-l, l)$ и суммы двух решений для полупространств $x > -l$ и $x < l$, т.е. величина $E(x)$ вычислялась как сумма $E_a, E_b(x), E_c(x)$, вычисленных в соответствующих полупространствах.

Расчеты показали, что сумма решений для полупространств отличается от значения для слоя на некоторую константу, равную E_a . Дополнительные вычисления были проведены в предположении, что в качестве суммы, соответствующей суперпозиции, надо использовать формулу:

$$E(x) = E_a + E_{b_left}(x) + E_{c_left}(x) + E_{b_right}(x) + E_{c_right}(x), \quad (3)$$

т.е. первое слагаемое E_a считать один раз, а остальные – два раза. В таком случае результаты вычислений для слоя и по формуле (3) совпали с высокой точностью.

Предполагается, что возможным объяснением этого факта может быть то, что слагаемое E_a определяется физическими характеристиками задачи. Так, его зависимость от частоты внешнего воздействия согласуется с формулой для диэлектрической проницаемости [7], т.е. характеризует саму плазму. Два других слагаемых показывают пространственные эффекты, связанные с геометрией задачи.

Заключение

По результатам моделирования предлагается при расчете самосогласованного электрического поля в объеме сложной формы применять модифицированный способ вычислений: первое слагаемое, как константу, описывающую саму среду, учитывать один раз, а для вычисления остальных слагаемых, связанных с геометрией задачи, использовать принцип суперпозиции.

Литература

1. Власов А.А. О вибрационных свойствах электронного газа // ЖЭТФ. 1938. Т. 8. Вып. 3. С. 291-318.
2. Биккин Х.М., Ляпилин И.И. Неравновесная термодинамика и физическая кинетика. Екатеринбург: УрО РАН, 2009.
3. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции, вып. 1. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматлит, 1959.
4. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
5. Bezrodnykh S.I., Gordeeva N.M. Solution of a Boundary Value Problem for a System of Integro-Differential Equations Arising in a Modal of Plasma Physics // Mathematical Notes. 2023. V. 114. № 5. P. 704-715.
6. Gordeeva N.M. Calculating a Perturbation of a Plasma Layer by an Electric Field // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2024, V. 64. № 3. P. 465-479.
7. Морозов А.И. Введение в плазмодинамику. М.: Физматлит, 2006.

Нелинейные искажения сигнала в многоканальной волоконно-оптической линии связи и методы их компенсации

Nonlinear signal distortion in a multichannel fiber optic communication line and methods for its compensation

Кузнецов Г.В.¹, Делицын А.Л.^{1,2}

1)Национальный исследовательский университет «Высшая Школа Экономики», факультет физики, Москва, РФ; 2)МФТИ, Высшая школа современной математики.

gvkuznetsov@edu.hse.ru, delitsyn@mail.ru

Аннотация. Рассмотрена задача о зависимости межканального взаимодействия от расстояния между каналами в частотной области ($\Delta\omega$) на основе нелинейного уравнения Шредингера. В качестве меры взаимодействия используется Bit Error Rate (BER). Установлен эффект остаточного взаимодействия при увеличении расстояния между каналами.

Описание работы

Рассматривается 2х-канальная задача прямого и обратного распространения временного сигнала, соответствующего случайной последовательности бит.

С помощью платформы, реализованной на языке matlab, проведена симуляция распространения сигнала по 2 каналам. Для описания распространения сигнала используется безразмерное Нелинейное Уравнение Шрёдингера (НУШ) для двух поляризаций [1]. Безразмерное НУШ для двух поляризаций.

$$\begin{cases} i \frac{\partial q_x}{\partial z} = \frac{\partial^2 q_x}{\partial t^2} + 2(|q_x|^2 + |q_y|^2) q_x, \\ i \frac{\partial q_y}{\partial z} = \frac{\partial^2 q_y}{\partial t^2} + 2(|q_x|^2 + |q_y|^2) q_y, \\ q_x(t, 0) = q_x^0(t), q_y(t, 0) = q_y^0(t). \end{cases} \quad z \in [0; L_z], t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

Для численного решения НУШ используется метод расщепления по физическим параметрам (SSFM) [1], он же сплит-степ Фурье метод. На первом шаге с помощью алгоритма сплит-степ (SSFM) моделируется прямое распространения сигнала по 2 каналам. Сигнал генерируется с помощью квадратурной амплитудной модуляции (QAM-16) из случайной последовательности символов, затем нормируется в соответствии с заданным значением параметра Launch Power.

Положение первого канала в частотной области зафиксировано, он соответствует полезной информации. Второй канал может изменять своё положение относительно первого канала (расстояние регулируется параметром $\Delta\omega$), он соответствует шуму.

После прямого распространения сигнал фильтруется, и назад распространяется лишь часть, соответствующая первому каналу (обратная эволюция). Из неё восстанавливается последовательность символов, а затем бит и сравнивается с исходным кодом, вычисляется bit error rate (BER).

При малом значении параметра Launch Power, можно считать, что мы находимся в линейном режиме и сигнал восстанавливается полностью, $BER = 0$, несмотря на отбрасывание 2го канала. При большом значении Launch Power и значительной протяженности линии нелинейность задачи сказывается в межканальном взаимодействии сигналов. Параметры симулятора линии приведены в таблице ниже:

Таблица 1. Физические параметры, соответствующие симуляции.

Количество символов	Символьная частота, ГГц	Протяженность одного спана, км	Число спанов	Launch Power, dBm
2^{18}	138.17	80	20	15

Основной задачей настоящей работы является исследование поведения BER в нелинейном режиме в зависимости от расстояния между каналами. Правдоподобно, что при увеличении расстояния между каналами влияние 2го канала на первый должно ослабевать и BER должен уменьшаться, также как это происходит с интенсивностью искажения [2], [3].

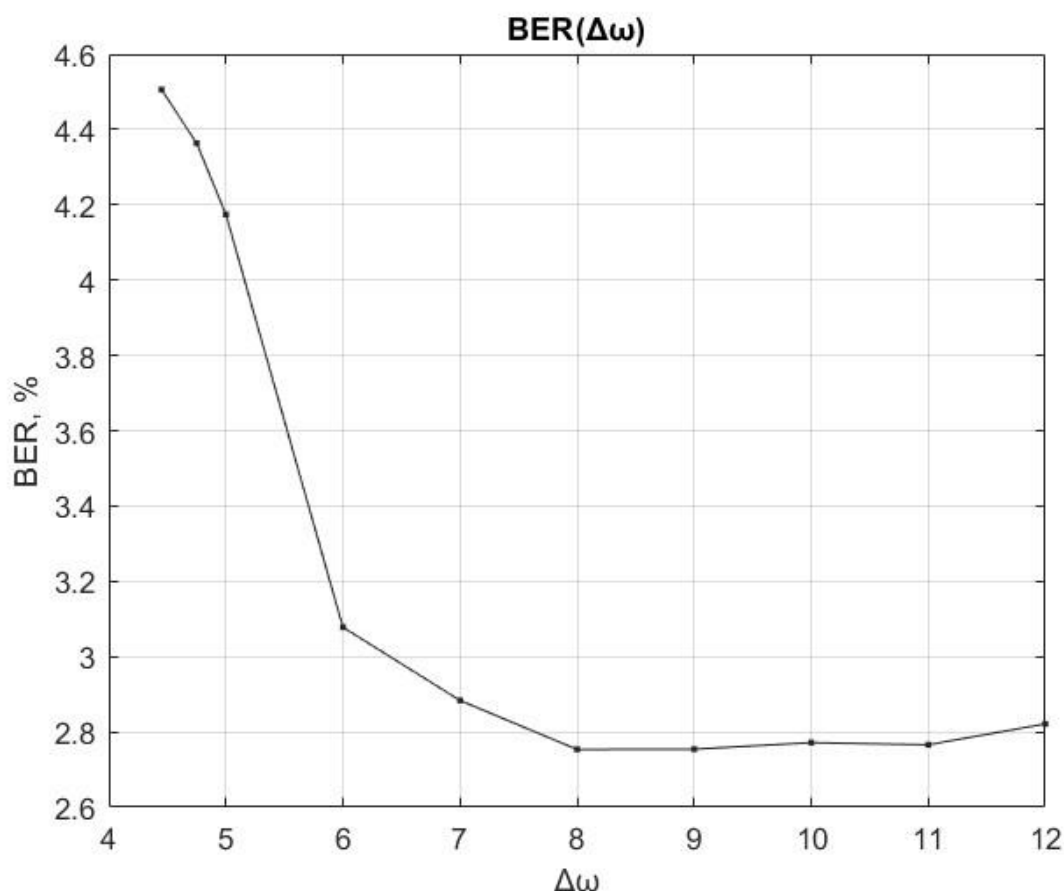


Рисунок 1. График зависимости bit error rate от расстояния между каналами.

Вопреки нашим ожиданиям, наблюдается следующий эффект: выход на остаточный постоянный уровень BER.

Заключение

Для двухканальной задачи обнаружен эффект существования остаточного уровня битовой ошибки, который отличается от привычного представления о межканальном взаимодействии в линейных системах. Эффект представляет интерес для дальнейшего исследования для более общей задачи, отвечающей увеличению числа каналов и добавлению шума.

Литература

1. A. Delitsyn, D. Konyaev, V. Kakurin, V. Gromov, Perturbation Theory with Accelerated Convergence for Fiber-Optic Nonlinearity Compensation // Comm. in Nonlin. Sci. and Numer. Simul (принято к опубликованию).
2. Bo Xu and Maïté Brandt-Pearce, Senior Member, IEEE, Comparison of FWM- and XPM-induced crosstalk using the Volterra series transfer function method // Journal of Lightwave Technology, Vol. 21, No. 1, January 2003.
3. Hoon Kim, Associate Member, IEEE, Cross-phase-modulation-induced nonlinear phase noise in WDM direct-detection DPSK systems // Journal of Lightwave Technology, Vol. 21, No. 8, August 2003.

Исследование свойств метаматериальных маскирующих оболочек

Study of the properties of metamaterial cloaking shells

Боголюбов А.Н., Никитченко А.Д.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ.

bogan7@yandex.ru, nikitchenko.ad15@physics.msu.ru

Аннотация. В работе изучен алгоритм для синтеза параметров метаматериальных маскирующих оболочек. Маскирующие свойства полученных конфигураций были подтверждены численными расчетами. Обсуждаются преимущества и недостатки такого подхода к маскировке. Изучена устойчивость полученных конфигураций к изменению параметров среды, маскирующей оболочки и маскируемого объекта.

Введение

Маскирующая оболочка представляет собой устройство, позволяющее существенно уменьшить или полностью устранить взаимодействие маскируемого объекта с внешним электромагнитным полем в заданном диапазоне частот. Объект считается замаскированным, когда отсутствует поглощение падающего излучения и минимизируется переизлученная энергия. Такие свойства достигаются за счёт специального подбора параметров оболочки, окружающей объект.

Описание работы

В литературе описано множество подходов к созданию маскирующих оболочек [1]-[4]. В данной работе изучается подход, основанный на компенсации рассеянного поля. В работе рассматривается цилиндрический объект с относительной диэлектрической проницаемостью больше единицы, который покрывается специальной диэлектрической оболочкой с относительной диэлектрической проницаемостью меньше единицы. При правильном подборе толщины маскирующей оболочки происходит подавление рассеянного поля за счет противоположной направленности дипольных моментов в объекте и оболочке. Этот эффект приводит к существенному уменьшению эффективного сечения рассеяния, делая систему практически невидимой для внешнего наблюдателя.

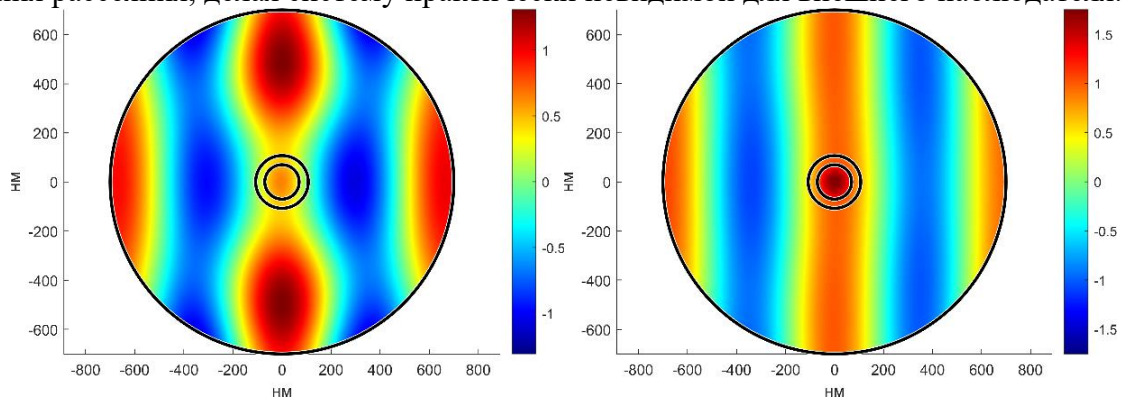


Рисунок 2. Вещественная компонента z-компоненты полного электрического поля. Слева – незамаскированный цилиндр, справа – замаскированный.

Целью данной работы было исследование метода компенсации рассеянного поля. Изучена устойчивость метода к изменению рабочей длины волны излучения, к изменению толщины маскируемого объекта, к изменению относительной диэлектрической и магнитной проницаемости маскируемого объекта, маскирующей оболочки и окружающей среды.

В качестве метрик эффективности маскировки использовались интегральная рассеянная мощность и угловое дифференциальное сечение рассеяния. Для верификации полученных результатов были проведены прямые расчеты, продемонстрировавшие работоспособность предложенного алгоритма.

Заключение

Изучен алгоритм для синтеза параметров метаматериальных маскирующих оболочек. Получены преимущества и недостатки данного подхода к электромагнитной маскировке. Получена удовлетворительная устойчивость оптимальных конфигураций к изменению параметров среды, маскирующей оболочки и маскируемого объекта.

Литература

1. Pendry J.B., Schurig D., Smith D.R. Controlling Electromagnetic Fields // Science. — 2006. — Vol. 312. — P. 1780-1782.
2. Schurig D., Mock J.J., Justice J.B., Cummer S.A., Pendry J.B., Starr A.F., Smith D.R. Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies // Science. — 2006. — Vol. 314. — P. 977-80.
3. Cai W., Chettiar U.K., Kildiev A.V., Shalaev V.M. Revolution analysis of three-dimensional arbitrary cloaks // Nat. Photon. — 2007. — Vol. 1. — P. 224- 227.
4. Silveirinha M.G. Metamaterial homogenization approach with application to the characterization of microstructured composites with negative parameters // Phys. Rev. B. — 2007. — Vol. 75. — P. 115104.

Построение матрицы формы молекулы ДНК

Construction of the DNA molecule shape matrix

Плохотников К.Э.

1) *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ;* 2) *Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва, РФ.*

psygma@yandex.ru

Аннотация. Понятие матрицы формы, или морфы для описания произвольной молекулярной системы (кластера) введено автором ранее. Матрица формы всегда может быть построена по имеющейся конфигурации атомов кластера. В общем же случае морфа – это симметричная матрица с неотрицательными элементами размером $N \times N$, где N — число атомов в кластере. Вариация матрицы формы кластера позволила регулировать число локально равновесных конфигураций аффилированной функции потенциальной энергии и, тем самым, в известных пределах решить проблему выбора равновесной конфигурации кластера из набора возможных. Рассмотрен пример построения первичной структуры небольшого фрагмента молекулы ДНК, именуемой еще олигонуклеотидом, в качестве локально равновесной конфигурации подходящей функции потенциальной энергии. Матрица формы олигонуклеотида строится последовательно путем построения матриц формы всех входящих компонентов, включая четыре азотистых основания ДНК: аденина (А), гуанина (G), цитозина (С) и тимина (Т). Определены матрицы формы углеводной компоненты нуклеиновой кислоты – дезоксирибозы, а также комбинации углеводной компоненты и фосфатной группы нуклеиновой кислоты – дезоксирибозы-фосфат. Наконец, построены матрицы формы нуклеозидмонофосфатов (нуклеотидов): дезоксиаденозина, дезоксигуанозина, дезоксицитидина, тимидина. Искомая матрица формы олигонуклеотида (молекулы ДНК) определяется в виде блочно-диагональной матрицы, в которой в качестве блоков выступают матрицы формы отдельных нуклеотидов. Построенная матрица формы ДНК имеет перспективу обобщения данного формата описания на случай вторичной и последующих структур молекулы ДНК.

Введение

Пусть мультиатомный кластер состоит из N атомов, позиции которых описываются радиус-векторами $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, \dots, N$. Определим функцию потенциальной энергии U мультиатомного кластера в следующем виде:

$$U = \varepsilon \sum_{1 \leq i < j = N} \phi \left(\frac{r_{i,j}}{p_{i,j}} \right), \quad (1)$$

где $r_{i,j} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$, ε — неотрицательный параметр. Функция $\phi = \phi(a)$ одной переменной a имеет один-единственный минимум. Для определенности функцию ϕ выберем в форме потенциала Ми (Леннарда-Джонса), т.е. $\phi(a) = \frac{m}{n-m} a^{-n} - \frac{n}{n-m} a^{-m}$, где n, m ($n > m > 0$) — некоторые константы.

В (1) присутствует матрица формы $\{p_{i,j}\}$, $i, j = 1, \dots, N$, которая по определению является симметричной матрицей с неотрицательными элементами, т.е. $p_{i,j} = p_{j,i} \geq 0$, $i, j = 1, \dots, N$.

Рассмотрим специальный случай, когда локально равновесная геометрия мультиатомного кластера известна и характеризуется набором радиус-векторов $\mathbf{p}_i = (u_i, v_i, w_i)$, $i = 1, \dots, N$. В этом случае матрицу формы по определению подсчитаем согласно формуле:

$$p_{i,j} = |\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j| = \sqrt{(u_i - u_j)^2 + (v_i - v_j)^2 + (w_i - w_j)^2}, \quad (2)$$

где $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, N$.

Определим процедуру нахождения локального минимума функции (1) методом градиентного спуска, рассматривая в качестве переменных спуска $3N$ переменных $\mathbf{r}_i$, $i = 1, \dots, N$. В этом случае запишем:

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= -\frac{\partial U}{\partial x_k} = \frac{nm}{n-m} \varepsilon \sum_{j=1(j \neq k)}^N \mu \left(\frac{p_{k,j}}{r_{k,j}} \right) \frac{x_{k,j}}{r_{k,j}^2}, \\ \dot{y}_k &= -\frac{\partial U}{\partial y_k} = \frac{nm}{n-m} \varepsilon \sum_{j=1(j \neq k)}^N \mu \left(\frac{p_{k,j}}{r_{k,j}} \right) \frac{y_{k,j}}{r_{k,j}^2}, \\ \dot{z}_k &= -\frac{\partial U}{\partial z_k} = \frac{nm}{n-m} \varepsilon \sum_{j=1(j \neq k)}^N \mu \left(\frac{p_{k,j}}{r_{k,j}} \right) \frac{z_{k,j}}{r_{k,j}^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где точка над величинами обозначает производную по переменной, по которой осуществляется градиентный спуск, $\mu(a) = a^n - a^m$, $x_{k,j} = x_k - x_j$, $y_{k,j} = y_k - y_j$, $z_{k,j} = z_k - z_j$, $k, j = 1, \dots, N$.

Система уравнений (3) решалась численно, при этом начальные положения $3N$ переменных x_k, y_k, z_k , $k = 1, \dots, N$ выбирались равномерно случайными числами из отрезка $[-L, L]$, где L некоторый положительный параметр.

С учетом предыдущих работ автора [1,2], где введено понятие матрицы формы, следует ожидать, что локально равновесная конфигурация молекулярной системы $\mathbf{R}_i$, $i = 1, \dots, N$ уравнений (3) должна быть такой, что $R_{i,j} = |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j| = p_{i,j}$, $1 \leq i < j = N$. Кроме того, полученная конфигурация должна выступать в качестве глобального минимума функции потенциальной энергии (1).

Описание работы

Существует множество подходов к моделированию динамики отдельных молекул ДНК [3–8]. Сравнивая понятие матрицы формы с аппроксимационным, мультипараметрическим потенциалом взаимодействия атомов кластера ряда компьютерных программ молекулярно динамического моделирования отметим, что в части спектра настраиваемых параметров он заметно избыточен, тогда как матрица формы специфична для описания данной молекулярной системы, она достаточна для (практически) однозначного воспроизведения в пространстве позиций атомов кластера.

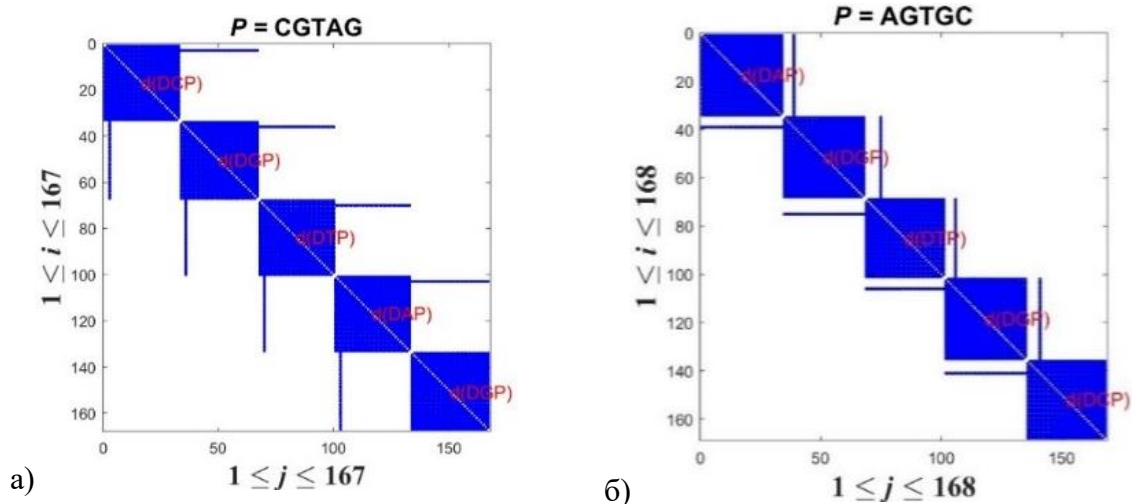
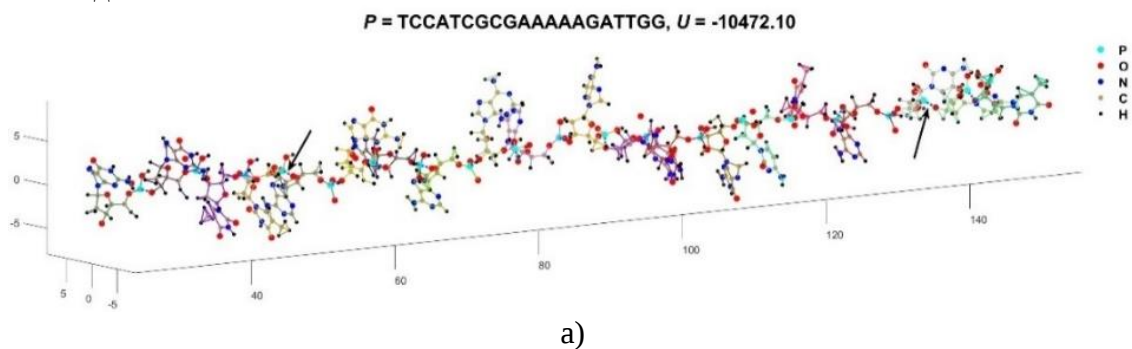


Рисунок 1.а) Первый формат композиции матрицы формы, $3' \leftarrow 5'$, б) Второй формат композиции матрицы формы, $3' \rightarrow 5'$

На рисунке 1 приведены примеры двух схем композиций матриц формы полинуклеотидов, состоящих из пяти нуклеотидов. На рис.1 точками отмечены ненулевые элементы матриц форм. Построение матриц форм осуществляется по главной диагонали с левого верхнего угла до правого нижнего, при этом первый и последний нуклеотид не претерпели изменений в гидроксильных группах 5'-ОН и 3'-ОН соответственно. Последовательность нуклеотидов на рис.1 выбиралась равномерно случайно. Матрицы формы отдельных нуклеотидов помечены стандартной аббревиатурой (dAMP, dGMP, dCMP, dTMP). Скопление точек в виде прямых линий на рис.1 обозначает проявление схем композиции $3' \leftrightarrow 5'$ последующего нуклеотида с предыдущим.

С помощью вычислительного эксперимента, т.е. путем решения задачи (1) — (3), был построен олигонуклеотид в качестве локально равновесной конфигурации. Для этого выбирался случайный набор нуклеотидов и каждый из двух способов композиции соответствующих матриц формы в единую матрицу формы всего олигонуклеотида. Решалась численно система уравнений градиентного спуска (3).

На рисунке 2 приведен результат конкретного расчета олигонуклеотида, состоящего из 20 нуклеотидов, объединенных согласно первой и второй схемам композиции. Отдельные нуклеотиды окрашены случайными цветами. Прямые линии соединяют те пары атомов в пределах каждого нуклеотида, длина которых меньше двух значений минимального парного расстояния. Черные стрелы на рис.8 указывают на некоторые пунктирные линии, которые обозначают места композиции пары нуклеотидов $3' \leftrightarrow 5'$.



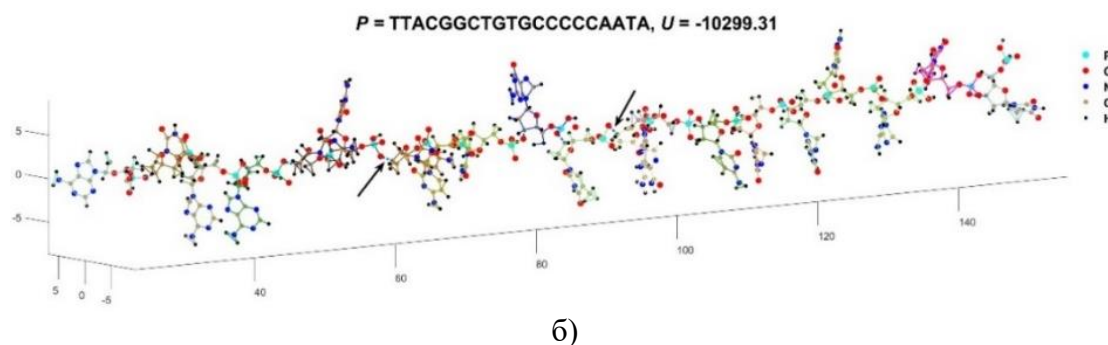


Рисунок.2. Локально равновесный фрагмент молекулы ДНК, построенный согласно первой схеме композиции отдельных нуклеотидов (а) и построенный согласно второй схеме композиции отдельных нуклеотидов (б)

Заключение

В докладе представлен метод описания молекулярных систем с точки зрения подсчета энергии кластера и определения геометрии распределения атомов кластера в пространстве в терминах бинарного потенциала и аффилированной с ней матрицы формы. Для иллюстрации понятия матрицы формы (морфы) рассмотрена задача описания первичной структуры молекулы ДНК в качестве локально равновесной конфигурации подходящей функции потенциальной энергии. На данном примере иллюстрируется применение универсальной методики композиции матрицы формы для произвольной биологической молекулы. Предлагаемая методика позволила шаг за шагом в последовательности: азотистые основания (аденин, гуанин, цитозин, тимин) → дезоксирибоза → дезоксирибоза-фосфат → нуклеотиды → олигонуклеотид (небольшой фрагмент ДНК) построить искомую матрицу формы. Последняя позволила воспроизвести в качестве равновесной выбранный фрагмент молекулы ДНК с произвольной последовательностью азотистых оснований.

Литература

1. Плехотников К.Э. Определение матрицы формы мультиатомного кластера // Математическое моделирование, 2024, т. 36, №6, с. 153–169; DOI: <https://doi.org/10.20948/mm-2024-06-10>.
2. Плехотников К.Э. О множестве локально равновесных конфигураций потенциальной энергии мультиатомного кластера // Учёные записки физического факультета Московского университета (УЗФФ), 2024, №5, 2450101, с. 1–19; <http://uzmu.phys.msu.ru/file/2024/5/2450101.pdf>.
3. Lu X. J., Olson W.K. 3DNA: A Versatile, Integrated Software System for the Analysis, Rebuilding and Visualization of Three-Dimensional Nucleic-Acid Structures// Nat Protoc, 2008, vol.3, No.7, p.1213—27; DOI: 10.1038/nprot.2008.104; <https://github.com/intbio/PyNAMod>.
4. Mu Z.-C., Tan Y.-L., Liu J., Zhang B.-G., Shi Y.-Z. Computational Modeling of DNA 3D Structures: From Dynamics and Mechanics to Folding// Molecules, 2023, vol.28, 4833. <https://doi.org/10.3390/molecules28124833>
5. Tadashi Ando, David G. Priest, Vipin Kumar, et al. Sub-nucleosomal Genome Structure Reveals Distinct Nucleosome Folding Motifs// Cell, 2019, vol.176, No.3, p.520–534e25. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cell.2018.12.014>
6. https://en.wikipedia.org/wiki/Comparison_of_software_for_molecular_mechanics_modeling
7. <https://ambermd.org/index.php>
8. <https://en.wikipedia.org/wiki/AMBER>

Технологичный принцип ондулятора на постоянных магнитах

The technological principle of a permanent magnet undulator

Поляков П.А., Пятаков М.А.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ.

pa.polyakov@physics.msu.ru

Аннотация. В работе предложен нетрадиционный принцип ондулятора на постоянных магнитах, обладающий рядом технологических преимуществ по сравнению с традиционными схемами. Полученные результаты имеют теоретическое и прикладное значение в науке и технике.

Введение

Ондуляторы — основные элементы в источниках магнитотормозного излучения и лазерах на свободных электронах [1]. Это магнитные системы, которые создают знакопеременное периодическое магнитное поле. Такое поле нужно для того, чтобы проходящие в нем электроны приобретали волнообразную траекторию. При движении зарядов по этой траектории они испускают излучение высокой мощности [2]. В ондуляторах на постоянных магнитах периодическое магнитное поле, близкое к синусоидальному, порождается системой мощных постоянных магнитов с чередующимися разноименными магнитными полюсами. Технически сооружение такой конструкции требует большой точности в регулировке зазоров между магнитами и создании жесткого каркаса для крепления сотни увесистых магнитов. В этом состоит одна из ключевых технологических трудностей в разработке таких устройств.

Описание работы

В данной работе предлагается иной подход к созданию ондулятора на постоянных магнитах посредством изготовления длинной однородно намагниченной полоски из магнитожесткого материала с периодическим профилем. Жесткость и точность профиля этой полоски легко может быть обеспечена естественной твердостью магнитожесткого материала (например, NeFeB). Однородная намагниченность этой полоски также может быть легко реализована с помощью мощного электромагнита. Рассмотрим широкую длинную полоску с косинусоидальным профилем с одной стороны, как показано на рисунке 1.

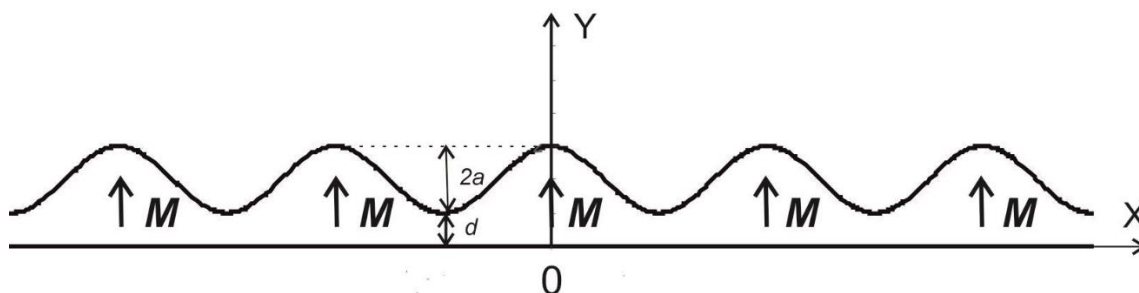


Рисунок 1. Профиль намагниченной полоски.

Профиль намагниченной вдоль оси Y полоски изменяется по закону

$$y(x) = a(1 + \cos kx) + d, \quad (1)$$

где a, k, d — константы, M — модуль вектора намагниченности. Магнитное поле, создаваемое таким профилем на высоте $y \gg a$ согласно работе [3], изменяется по гармоническому закону

$$H_x(x, y) = 2\pi M a k e^{-ky} \sin kx, \quad (2)$$

$$H_y(x, y) = 2\pi M a k e^{-ky} \cos kx. \quad (3)$$

Такая зависимость магнитного поля от пространственной координаты x является классическим ондуляторным магнитным полем [4].

На рисунке 2 приведен график зависимости составляющей вектора напряженности магнитного поля $H_y(x, 4a)$, нормированного на величину вектора намагниченности M , от координаты x на высоте $y=4a$ при следующих значениях числовых параметров: $a=0,25$ см, $k = 1 \text{ см}^{-1}$, $d = 0,002$ см.

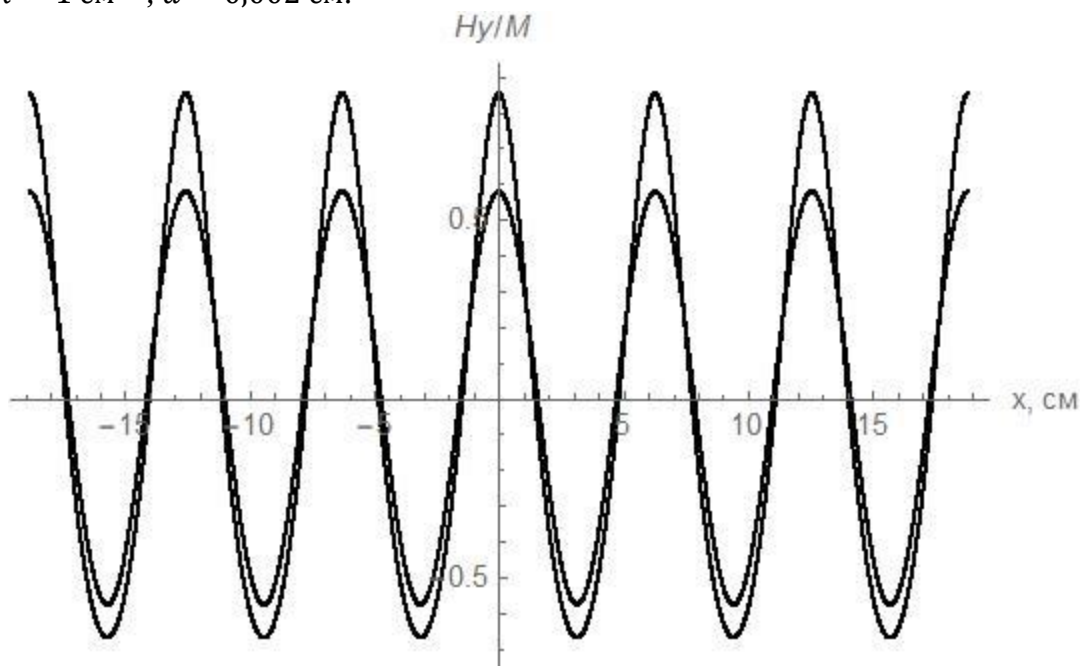


Рисунок 2. График зависимости $H_y(x, 2 \text{ см})/M$ от координаты x

Меньшая по амплитуде косинусоида на рисунке 2 построена на основании аналитической приближенной формулы (3). Кривая с большей амплитудой представляет точное численное решение магнитостатической задачи для синусоидального профиля, изображенного на рисунке 1. Из рисунка 2 следует, что приближенная косинусоидальная зависимость магнитного поля, определяемая формулой (3), вполне удовлетворительно аппроксимирует точное решение уже на расстоянии одной глубины профиля.

Заключение

В заключение отметим, что амплитуда изменения напряженности магнитного поля на высоте 1 см в рассмотренном случае достигает порядка половины величины вектора намагниченности. Для магнита NeFeB она составляет порядка 0,5 кЭ. Если сконструировать ондулятор из двух аналогичных профилированных полосок (снизу и сверху), то амплитуда напряженности магнитного поля удвоится и составит 1 кЭ. Это поле не является рекордным для магнитных ондуляторов, но предложенный принцип обладает рядом технологических преимуществ. Прежде всего, не требует сложной конструкции магнитов, создает поле, близкое к синусоидальному, и имеет значительно меньшую массу магнитов.

Литература

1. Н.А. Винокуров, Е.Б. Левичев. Ондуляторы и вигглеры для генерации излучения и других применений // Успехи физических наук. — 2015. — Т.185, № 9. — С.917-940.
2. М. В. Ковальчук, А. Е. Благоев. Европейский рентгеновский лазер на свободных электронах. Кристаллография. — 2022. — Т. 67, № 5. — С. 677–725.
3. М. А. Пятаков, М. Л. Акимов, П. А. Поляков. Магнитное поле постоянного магнита с поверхностным рельефом // Электричество. — 2024. — № 1. — С. 4–9.
4. Т. Маршалл. Лазеры на свободных электронах. Пер. с англ. — М.:Мир, 1987. —240 с.

Моделирование взаимодействия в островке Лангерганса с помощью автомата Мура

Modeling interactions in the Langerhans Island using a Moore automaton

Профорова Е.С.¹, Репченко А.С.², Громов М.Н.², Грачев Е.А.²

1) *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, Москва, РФ*; 2) *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ*
repchenko.as17@physics.msu.ru, grachevea@gmail.com

Аннотация. В работе разработана формальная дискретная модель эндокринного островка Лангерганса на основе автомата Мура. Показано, что предложенный подход позволяет однозначно описать ключевые режимы секреции инсулина, глюкагона и соматостатина.

Введение

Современные подходы к моделированию метаболизма человека сталкиваются с трудностями: многомасштабные модели слишком сложны, требуют больших ресурсов и длительной верификации. Эффективным решением является поэтапное построение частных моделей отдельных подсистем с их последующей интеграцией.

В данной работе рассматривается модель островков Лангерганса – ключевого звена регуляции глюкозного обмена. Используя формализм конечных автоматов [1], мы сосредотачиваемся на их функциональной роли в секреции инсулина, глюкагона и соматостатина, что создаёт основу для дальнейшей интеграции в комплексные организменные модели, например, электрических схем регуляции уровня инсулина для больных диабетом.

Описание работы

Островки Лангерганса представляют собой специализированные эндокринные структуры поджелудочной железы, обеспечивающие ключевые механизмы регуляции углеводного обмена. Эти трёхмерные клеточные образования включают несколько функционально различных типов клеток, выполняющих строго специализированные задачи. Наиболее значимыми среди них являются: α -клетки, продуцирующие глюкагон; β -клетки, секретирующие инсулин; δ -клетки, вырабатывающие соматостатин, выполняющий модулирующую функцию внутриостровковых взаимодействий.

Структурная организация островка обеспечивает его автономность и в то же время тесную интеграцию с системами кровообращения и иннервации. Благодаря этому островки способны быстро реагировать на изменения концентрации глюкозы и других метаболитов во внеклеточной среде. Особенностью их функционирования является согласованная динамика секреции гормонов, направленная на поддержание гомеостаза, при этом регуляторные механизмы имеют как локальный, так и системный характер [2, 3].

Чтобы наглядно понять, как работает островок Лангерганса, мы рассмотрим автоматную модель. Автоматная модель позволяет проследить связь между α , β и δ -клетками за любой промежуток времени. Мы не рассматриваем конкретную связь, которая ориентируется на проходящее время, мы следим за количеством шагов, который происходят за определенный отрезок времени. Автоматная модель помогает учитывать задержки реакции одной клетки на другую.

Детерминированным конечным автоматом называется упорядоченная пятёрка $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, где $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$ – конечное множество состояний; $\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\}$ – конечный входной алфавит; $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$ – функция переходов; $q_0 \in Q$ – начальное состояние; $F \subseteq Q$ – множество допускающих (терминальных) состояний.

Автомат Мура задаётся шестёркой $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, \lambda, q_0)$, где $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$ – конечное множество состояний; $\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\}$ – входной алфавит; $\Gamma = \{b_1, \dots, b_p\}$ –

Автомат Мура работает в дискретные моменты времени $t = 0, 1, 2, \dots$. В момент t на вход подаётся символ $a(t) \in \Sigma$, после чего выполняется переход $q(t+1) = \delta q(t)$, $a(t)$, и одновременно на выходе формируется значение $b(t) = \lambda q(t)$. Фиксируя $q(0) = q_0$ и входное слово $a(0)a(1)\dots a(k)$, однозначно получаем последовательности состояний $q(1), \dots, q(k+1)$ и выходных символов $b(0), \dots, b(k)$. В модели эндокринного островка Лангерганса выход однозначно определяется конфигурацией активности клеток, то есть состоянием системы. Автоматы Мура позволяют формализовать каждый устойчивый режим секреции, комбинацию активности α -, β - и δ -клеток, как отдельное состояние с фиксированным выходом.

```

graph LR
    S1((0,0,1)) -- "-1,0,1" --> S2((0,0,0))
    S2 -- "0,1" --> S2
    S2 -- "-1" --> S3((1,0,0))
    S3 -- "-1" --> S4((1,1,1))
    S3 -- "-1, 0, 1" --> S4
    S4 -- "0" --> S5((1,0,1))
    S4 -- "-1" --> S5
    S5 -- "1" --> S6((0,1,1))
    S6 -- "1" --> S7((0,1,0))
    S6 -- "0" --> S4
    S6 -- "-1,0" --> S4
    S7 -- "1" --> S7
    S7 -- "-1" --> S8((1,1,0))
    S8 -- "-1,0,1" --> S4

```

Тройка чисел является словарем включения α , β и δ клеток (например, 0,1,1 – включены только β и δ клетки). Переходы -1/0/1 – пониженный, нейтральный и повышенный уровень глюкозы в крови соответственно. Регулировка значений α , β и δ клеток очень точно отвечает методом конечного автомата, так как нас волнует, когда клетка включена, когда выключена, как одна клетка влияет на другую. Так же в автомат легко включить задержку между результатом влияния одной клетки на другую. Переход в разные состояния автомата происходят автоматически, как только одна клетка включилась, то две другие определенным образом приходят в действие и состояние автомата незамедлительно меняется.

31

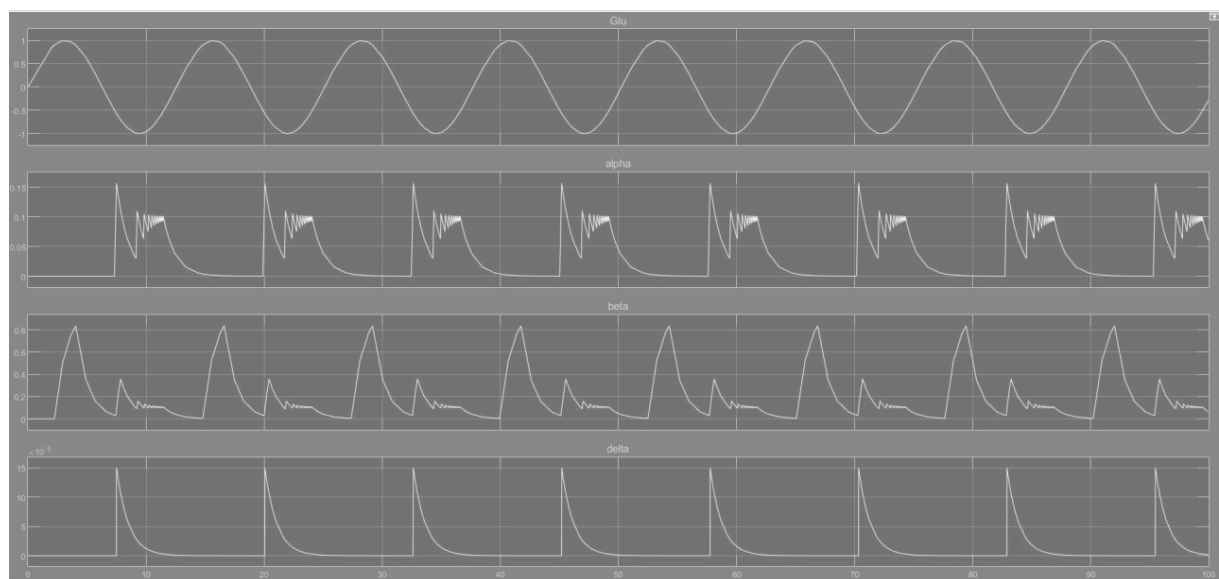
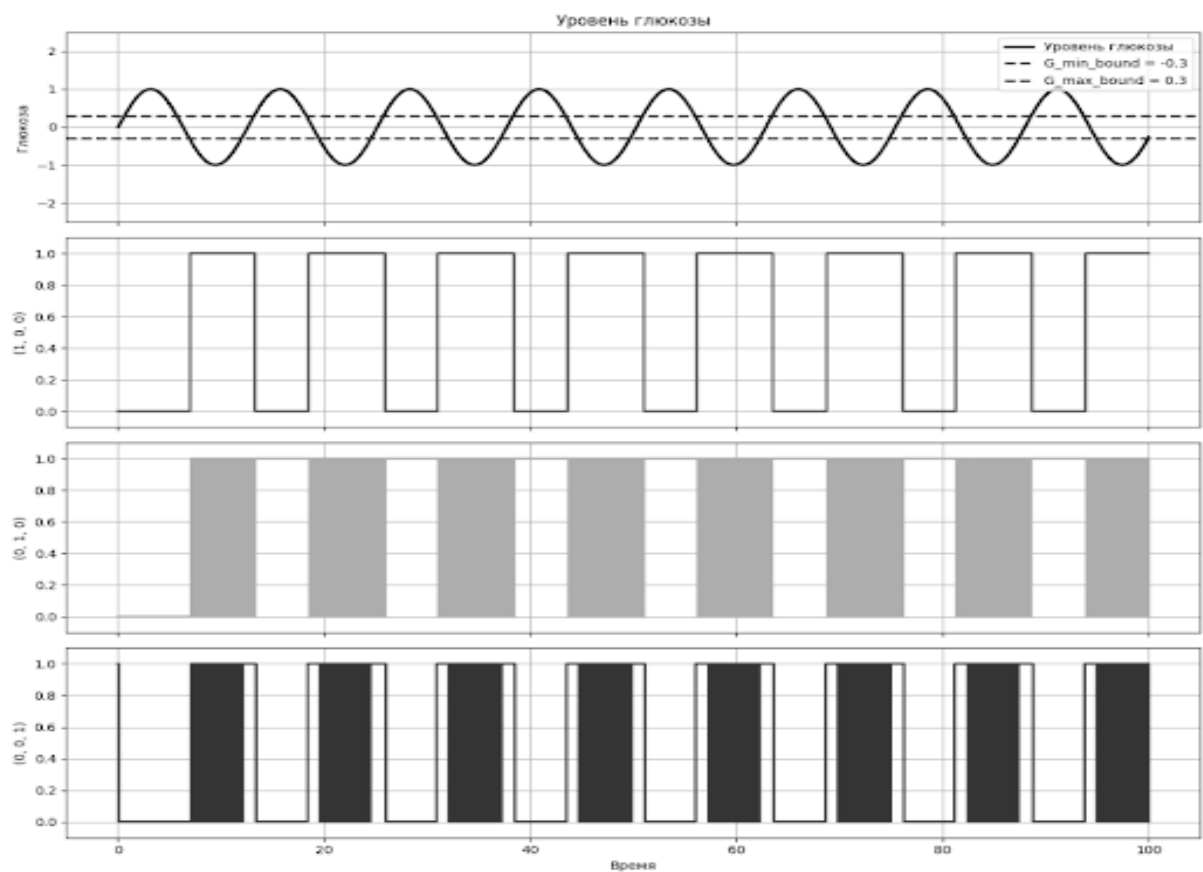


Рисунок 2. Результат моделирования интегральной схемы взаимодействия α , β и δ клеток.

Модель всего островка Лангерганса на дифференциальных уравнениях была реализована с помощью программы Matlab Simulink. Полученные графики изменения гормонов глюкагона, инсулина и соматостатина отражают действительность. Четко видно конкурирующее взаимодействие между α , β -клетками (глюкагон и инсулин) и регулирующая роль δ -клеток (соматостатин).

Возможно так же описание модели с помощью дифференциальных уравнений, которые будут считывать уровень глюкозы и после этого описывать модель поведения клеток. Но тогда будет более сложная, динамическая модель, которая использует внешние данные. В данной работе была поставлена задача дискретного управляющего

модуля без непрерывной модели метаболизма, который может работать на более медленных временных интервалах (минутах, секундах). Ценность работы как раз состоит в выборе моделирования, которое может описывать динамику работы островка в целом. Данную модель можно разработать с помощью электрических схем, поэтому мы использовали программу Matlab Simulink.

Заключение

Предложенный дискретный подход демонстрирует высокую эффективность и точность моделирования режимов секреции в островках Лангерганса и может стать универсальным блоком в сложных мультикомпонентных моделях углеводного обмена, а также электрической схемой устройства контроля уровня инсулина для людей с диабетом.

Литература

1. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. Москва: Наука, 1985. — 320 с.
2. Brereton M.F., Vergari E., Zhang Q., Clark A. Alpha-, Delta- and PP-cells: Are They the Architectural Cornerstones of Islet Structure and Co-ordination? // Journal of Histochemistry & Cytochemistry. 2015. Vol. 63, No. 8. P. 575–591.
3. Zhang Q., Huising M.O., Da Silva Xavier G., Hauge-Evans A.C. Editorial: The pancreatic islet a multifaceted hub of inter-cellular communication // Frontiers in Endocrinology. 2023. Vol. 14. P. 1182897.

Скалярная задача дифракции на теле с конической особенностью

Scalar diffraction problem on a body with a conical feature

Ровенко В.В.¹, Боголюбов А.Н.², Могилевский И.Е.²

1) НИИЦ «Курчатовский институт», Москва, РФ; 2) Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ.

rovenko.vladimir@physics.msu.ru

Аннотация. В работе рассматривается подход к актуальным задачам электродинамики, связанным с изучением задач скалярной и электромагнитной дифракции на объектах со сложной геометрией. На примере скалярного случая рассматривается подход к решению, связанный с методом явного выделения особенностей. Полученные результаты имеют теоретическое и прикладное значение в науке и технике. Решение таких задач востребовано, в частности, при проектировании и анализе маскирующих оболочек (стелс-технологии), антенных систем и микроволновых устройств.

Введение

В настоящее время весьма актуальными являются задачи скалярной и электромагнитной дифракции на сложных структурах при наличии ребер и конических точек на их границах. В частности, результат их решения может быть использован при решении задач о прохождении луча в маскирующей оболочке [2], [5], волноведущих и антенных систем. Известно, что наличие ребер, кромок и конических точек приводит к появлениям сингулярностей у поля в их окрестностях [3], [4], что существенно усложняет применение численных методов для исследования подобных задач. Одним из весьма эффективных способов преодоления этих проблем является выделение особенности решения в явном виде, то есть построение асимптотического представления решения в окрестности особой точки границы. При этом существенно используются результаты по асимптотике решения эллиптических краевых задач, представленные в работах В.А. Кондратьева [1], а также С.А. Назарова и Б.А. Пламеневского [4].

Постановка и решение задачи

Постановка задачи. Рассматривается скалярная задача дифракции на идеально проводящем теле, содержащем коническую точку. Предполагается, что источники сосредоточены в конечной области D_0 , находящейся вне тела. На его боковой поверхности ставятся однородные условия Дирихле, на бесконечности — условия излучения Зоммерфельда. С учётом указанных условий математическая постановка задачи примет вид:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = f(M) \text{ supp } f(M) \in D_0, \\ u|_S = 0, \\ \partial u / \partial r - iku = \bar{o}\left(\frac{1}{r}\right), r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1)$$

В окрестности конической точки ставится условие Мейкснера:

$$u \sim r^\beta, \beta > -3/2. \quad (2)$$

Отметим, что при указанных условиях задача имеет единственное решение [3].

Основная цель нашей работы состоит в выделении сингулярной части поля в окрестности конической точки.

Преобразования для построения решения. Основная цель данной главы состоит в выделении сингулярной части поля в окрестности конической точки. Для детального исследования поля в этой области данная задача сначала рассматривается в случае бесконечного конуса в области D_0 вне конуса. В дальнейшем использование срезающей функции позволит исходную задачу дифракции свести к рассматриваемой задаче в бесконечном конусе. Вводится сферическая система координат с центром в конической точке. Данный подход позволяет существенно упростить граничные условия, что дает возможность более детально исследовать свойства искомого решения. Основное уравнение задачи (1) преобразуется следующим образом: слагаемое $k^2 u$ перенесем в правую часть, оставив слева только главную часть оператора Гельмгольца — оператор Лапласа. Для новой правой части сохраним обозначение $f(M)$. Таким образом, получим уравнение Пуассона вне бесконечного конуса:

$$\Delta u = f. \quad (3)$$

На его боковой поверхности остаются однородные условия Дирихле:

$$u|_S = u|_{\substack{\theta=\alpha \\ r \in [0; +\infty)}} = 0. \quad (4)$$

Здесь $u = u(r, \theta, \varphi)$, $f = f(r, \theta, \varphi)$, (r, θ, φ) — сферическая система координат, S — боковая поверхность конуса, α — половина угла раствора конуса, Δ — оператор Лапласа. Условия на бесконечности заменятся принадлежностью решения к функциональному пространству специального вида, впервые предложенному В.А. Кондратьевым, что позволит лучше охарактеризовать решение в окрестности конической точки и на бесконечности [1]. Итак, введём пространство функций V_γ^l с нормой:

$$\|u\|_{V_\gamma^l}^2 = \sum_{s=0}^l \int_{D_0} r^{2\gamma-2(l-s)} \left| \frac{\partial^s u}{\partial x^s} \right|^2 dV. \quad (5)$$

Здесь x — координата, $l \geq 0$ — целое, γ — любое вещественное число. Пусть правая часть $f(M) \in V_\gamma^l$.

Используем выражение для оператора Лапласа в сферической системе координат, сделаем замену переменных, проведём преобразование Фурье относительно новых переменных [6]. Из свойств преобразования Фурье для образа $\hat{F}(\lambda, \theta, \varphi)$ вытекает следующая оценка [1]:

$$\sum_{s=0}^l \int_{-\infty+ih}^{\infty+ih} |\lambda|^{2s} \|\tilde{F}\|_{V^{2l-2s}(\tilde{D})}^2 d\lambda \leq C \|f\|_{V^l(D_0)}^2, h = -\gamma + l + \frac{1}{2}. \quad (6)$$

Подробнее свойства $V^{2l-2s}(\tilde{D})$ и $V^l(D_0)$ описаны в работе [1].

Используя свойства преобразования Фурье, получим [6]:

$$\hat{u}_{nm}(\lambda) = \frac{\hat{F}_{nm}(\lambda)}{[(i-\lambda)\lambda - n_m(n_m+1)]}, \quad (7)$$

$$\hat{u}(\lambda, \theta, \varphi) = \sum_{n,m} \frac{\hat{F}_{nm}(\lambda)}{(i-\lambda)\lambda - n_m(n_m+1)} P_{n_m}^{(m)}(\cos \theta) e^{im\varphi}. \quad (8)$$

Делая обратное преобразование Фурье, получим решение искомой задачи, принадлежащее пространству Кондратьева V_γ^{l+2} .

Исследование асимптотики. Пока построенное в пространстве Фурье-образов решение (8) определено лишь на прямой $h = -\gamma + l + \frac{1}{2}$. Для построения его асимптотики, то есть представления решения в виде суммы функций, описывающих особенность, и гладкой части необходимо, чтобы функция (8) была определена в некоторой полосе $h_1 < h < h_2$, а для этого потребуется, чтобы функция $f(M) \in V_{\gamma_1}^{l_1} \cap V_{\gamma_2}^{l_2}$ с разными индексами $l_i, \gamma_i, i = 1, 2$. В силу условия (2) $u \sim r^{-3/2}$, а число $l = 1$, поскольку оно связано с половиной порядка оператора. Значит, из условия интегрируемости решения в окрестности D_ε конической точки (поведение представленного ниже подынтегрального выражения должно быть не хуже, чем r^{-1}):

$$\int_{D_\varepsilon} r^{2\gamma-2} u^2 dD_\varepsilon = \int_{D_\varepsilon} r^{2\gamma-2} r^{-3} r^2 \sin \theta dr = \int_{D_\varepsilon} r^{2\gamma-3} \sin \theta dr \Rightarrow 2\gamma - 3 > -1 \Rightarrow \gamma > 1.$$

Из формулы для определения прямой h : $h = -\gamma + \frac{3}{2}$. Следственно, функция (8) будет определена в следующей полосе: $h_1 < h < h_2$. Тогда из (8) находим особые точки Фурье-образа решения. Теорема о вычетах позволяет перейти от интегрирования по прямой $\text{Im } \lambda = h_1$ к интегрированию по прямой $\text{Im } \lambda = h_2$, а находящиеся между ними полюсы решения (8) позволяют получить асимптотическое представление решения [6]. Использование срезающей функции $\chi(r)$ [4] позволяет осуществить переход от искомой задачи к задаче на бесконечном конусе (d – некоторое число) [6]:

$$\chi(r) = \begin{cases} 1, & r < d, \\ 0, & r > 2d. \end{cases} \quad (9)$$

Окончательное асимптотическое разложение решение задачи дифракции на конической особенности имеет вид ($\tilde{u}(r, \theta, \varphi)$ – гладкая часть решения):

$$\begin{aligned} u(r, \theta, \varphi) = & \\ = & \chi \sum_{h_1 < n_m < h_2} C_{n,m} r^{n_m} P_{n_m}^{(m)}(\cos \theta) e^{im\varphi} + \\ + & \chi \sum_{h_1 < n_m+1 < h_2} D_{n,m} r^{n_m+1} P_{n_m}^{(m)}(\cos \theta) e^{im\varphi} + \tilde{u}(r, \theta, \varphi). \end{aligned} \quad (10)$$

Заключение

Изложенный выше метод позволяет решать задачи дифракции не только с одной, но и с несколькими коническими особенностями, а также видеть явно поведение составляющих решения для интеграции с численным моделированием или качественным анализом поведения особенности (Рисунок 1).

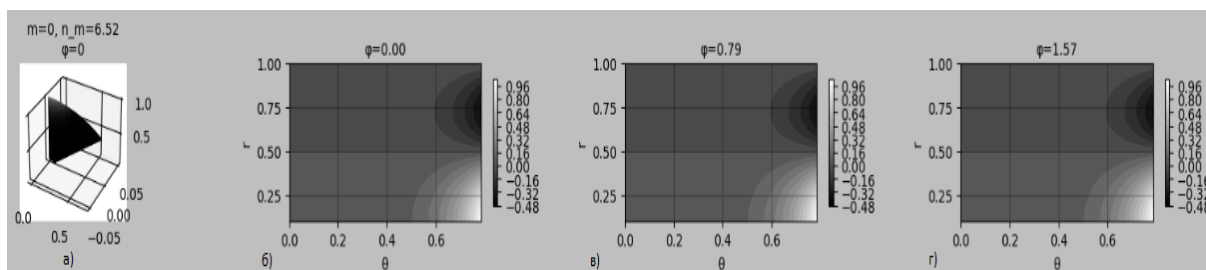


Рисунок 3. а) Поверхность в декартовых координатах (X, Y, Z). б) Контурный график в полярных координатах (θ , r) для $\varphi=0$. в) То же для $\varphi=\pi/4$. г) То же для $\varphi=\pi/2$.

Литература

1. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками // Тр. ММО, **16** — Издательство Московского университета, М., 1967. — С. 209–292.
2. Могилевский И. Е., Ровенко В. В. Математическое моделирование метода волнового обтекания в задачах маскировки // Физические основы приборостроения. — 2014. — Т. 3, № 4. — С. 28-39.
3. Свешников А. Г., Могилевский И. Е. Избранные математические задачи теории дифракции. — Москва, 2012. — 239 с.
4. Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. — Наука, 1991. — 334 с.
5. Дубинов А. Е., Мытарева Л. А. Маскировка материальных тел методом волнового обтекания // УФН. — 2010. — Т. 180, № 5. — С. 475-493.
6. Rovenko V.V., Mogilevsky I.E. Solution of boundary problems for elliptic equation in domains with conical or corner points // PIERS Proceedings 2017, United States. — P. 2102-2105.

Построение модели трехмерного зеркала коллиматора со скруглёнными краями методом трансляции сечений

Construction of a model of a three-dimensional collimator mirror with rounded edges using the section translation method

Хлебников Ф.Б.¹, Пропой М.И., Коняев Д.А.^{1,2}, Боголюбов А.Н.¹, Шапкина Н.Е.^{1,2}

1) Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ; 2) Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН, Москва РФ.

mnfkh1@gmail.com

Аннотация. Большинство современных компактных полигонов для измерения характеристик рассеяния тел не могут функционировать без коллиматоров, приборов, преобразующих поле источника (антенны) в поле, близкое по своим характеристикам к полю плоской волны. Применение скруглённых краёв для подавления дифракционных эффектов и улучшения равномерности отражённого поля в рабочей зоне было и остаётся для них перспективным направлением развития. В настоящей работе предложен метод построения трёхмерного коллиматора со скруглённым краем при помощи трансляции двумерных сечений зеркала друг относительно друга, а также показано, что оптимизация параметров двумерных сечений позволяет улучшить поле в рабочей зоне такого коллиматора.

Введение

Компактный полигон — это сравнительно небольшой измерительный стенд, внутри которого плоская волна формируется при помощи системы, состоящей из облучателя и коллиматора, преобразующего волну от источника. В результате работы

коллиматора в некоторой области напротив него отражённое электромагнитное поле приобретает свойства, близкие к свойствам поля плоской волны. Применение коллиматоров позволяет проводить эксперименты по дифракции и рассеянию плоской электромагнитной волны на объектах сложной формы внутри безэховой камеры, лишённой практически всех недостатков открытых полигонов, существенно повышая при этом точность измерений и снижая их стоимость. Наиболее распространены зеркальные коллиматоры, выполненные в виде несимметричной вырезки параболоида вращения, в фокусе которого находится источник излучения. Одним из наиболее значимых источников неоднородности отраженного поля является дифракция волн на кромках коллиматора. Существует два основных подхода, призванных уменьшить влияние этого эффекта. Первый из них — применение зазубренных кромок зеркального коллиматора, рассеивающих поле, падающее на края коллиматора. Другим способом снижения неоднородности является скругление кромки коллиматора, что позволяет перенаправить рассеянное поле [1]. Зеркала со скруглёнными краями оказываются сложнее в производстве и проектировании, однако во многих теоретических и практических работах они зачастую показывают лучшие характеристики отражённого поля [2].

Описание работы

Проектирование трёхмерного несимметричного параболического зеркала со скруглёнными краями, обладающего вторым порядком гладкости — нетривиальная задача, особенно в том случае, когда геометрические параметры скруглений предполагаются переменными величинами, которые предстоит варьировать. В настоящей работе предложен метод трансляции сечений, опирающийся на уже разработанные методы построения и анализа протяжённых цилиндрических параболических зеркал и их двумерных направляющих [3]. Рассматривая одну такую направляющую в качестве горизонтального сечения будущего зеркала, а вторую — как сечение вертикальное, построим трёхмерное зеркало как поверхность, которую описывает одно сечение, двигаясь вдоль второго.

Если на каждом из сечений уже введена готовая сетка, к примеру, равномерная по длине дуги, такая трансляция автоматически породит сетку и на полученной поверхности, причём на обращённой к источнику стороне этой поверхности узлы будут располагаться в вершинах четырёхугольников, близких к квадратам. Проведя диагональ в каждом из таких четырёхугольников, получим естественную треугольную сетку высокого качества.

Если исходные сечения были замкнутыми кривыми, то результирующая поверхность получит самопересечения в зоне тени, что нежелательно для постановки и решения задачи дифракции на ней. Предполагая, что точки на «задней» поверхности зеркала, не должны влиять на распределение поля в рабочей зоне, а также учитывая, что реальные зеркала коллиматоров таких стенок не имеют, удалим лишние узлы сетки, оставив лишь ту часть поверхности, которая необходима (Рисунок 1).

В рабочей зоне, расположенной на двойном фокусном расстоянии от зеркала коллиматора, ставится задача дифракции, которая численно решается методом моментов при помощи базисных функций Рао-Вильтона-Глиссона [4, 5].

Полученное распределение поля в рабочей зоне неоднородно, кроме того, оно зависит от геометрических параметров зеркала, в частности, от ширины и толщины скруглений краёв. Обратная задача оптимизации трёхмерного несимметричного зеркала оказалась бы очень трудоёмкой, так как решение прямой задачи в полной векторной постановке занимает немало времени.

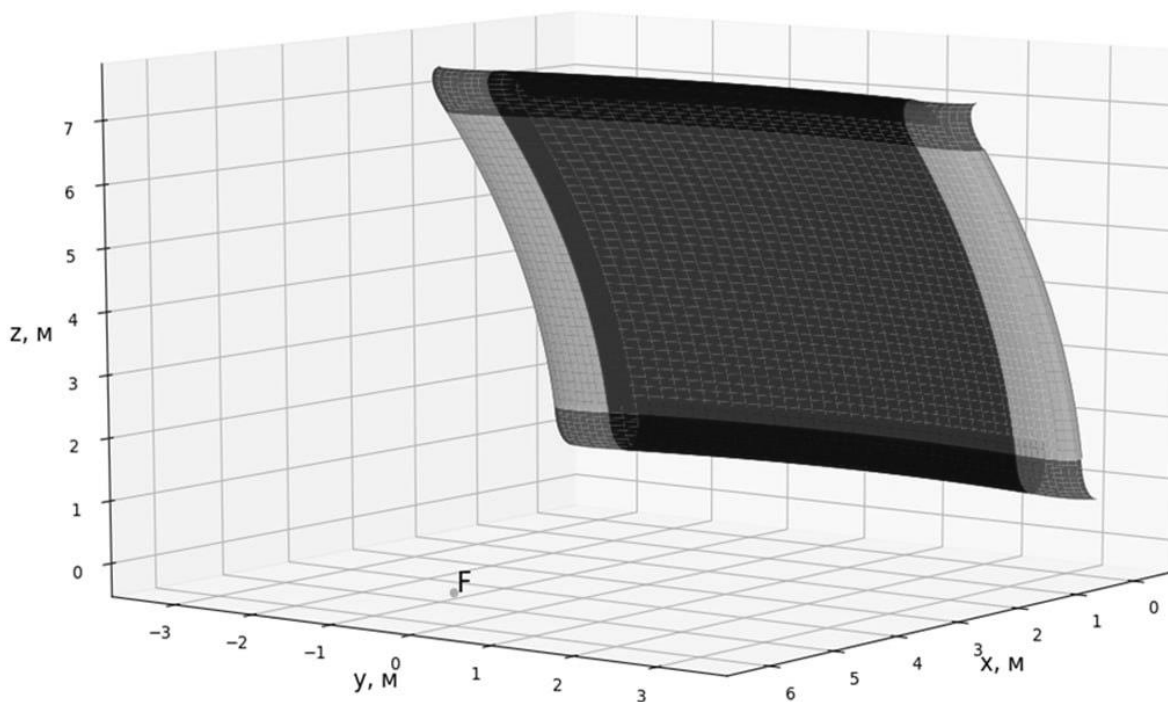


Рисунок 1. Трёхмерный коллиматор, полученный методом трансляции сечений

В то же время, анализ результатов расчёта в отдельных сечениях трёхмерной рабочей зоны показал, что распределения полученного поля очень близки к распределениям полей, отражённых от протяжённых коллиматоров с такими же параметрами скруглений. В силу этого было предложено провести оптимизации форм вертикального и горизонтального сечений по отдельности, после чего строить трёхмерное зеркало из двумерных уже оптимизированных сечений. Этот подход позволил быстро построить трёхмерное несимметричное зеркало, обладающее приемлемыми характеристиками поля в рабочей зоне [6].

Заключение

Используя направляющие построенных ранее протяжённых модельных коллиматоров с различными геометрическими параметрами, в работе удалось построить трёхмерное несимметричное параболическое зеркало коллиматора, а также решить задачу о распределении поля, отражённого от него в рабочую зону. Было показано также, что оптимизация двумерных сечений зеркала, используемых при этом построении, позволяет значительно улучшить свойства поля и в рабочей зоне трёхмерного коллиматора. Это важный результат, который позволяет избежать необходимости напрямую решать крайне трудозатратную задачу синтеза скруглений трёхмерного несимметричного зеркала коллиматора, ограничившись вместо этого решением пары задач для протяжённых модельных зеркал.

Литература

1. Балабуха Н. П., Зубов А. С., Солосин В. С. // Компактные полигоны для измерения характеристик рассеяния объектов. М.: Наука, 2007.
2. Lee T. H., Burnside W. D. Performance trade-off between serrated edge and blended rolled edge compact range reflectors //IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1996. – Т. 44. – №. 1. – С. 87-96.
3. Ф. Б. Хлебников, А. Н. Боголюбов, Д. А. Коняев, Н. Е. Шапкина Математическое моделирование электромагнитного поля в рабочей зоне компактного полигона // Физические основы приборостроения. — 2018. — № 2. — С. 63–69.

4. А. Л. Делицын, Д. А. Коняев, С. С. Новикова, Ф. Б. Хлебников О возможностях применения современных многопроцессорных систем при решении задачи дифракции электромагнитных волн на телах сложной формы // *Физические основы приборостроения*. — 2022. — Т. 11, № 2. — С. 49–54.
5. Викуловская А. А., Коняев Д. А. О сборке матрицы в методе моментов и ее реализации для идеально проводящих тел // *Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия*. — 2024. — Т. 79, № 5. — С. 245010.
6. М. И. Пропой, Ф. Б. Хлебников, Д. А. Коняев и др. Методика построения модели трехмерного зеркала коллиматора со скруглёнными краями на основе решения двумерных задач синтеза // *Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия*. — 2025. — № 4.

Численное моделирование турбулентного динамо Казанцева в рамках каскадного мгд-подхода

Numerical simulation of the turbulent Kazantsev dynamo within the shell MHD approach

Юшков Е.В., Дуканов И.А., Абушзада И., Соколов Д.Д.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,

физический факультет, Москва, РФ

yushkov.msu@mail.ru

Аннотация. В работе проведено численное сравнение процессов генерации магнитной энергии в рамках модели Казанцева и в рамках каскадного мгд-моделирования. Найдены пороги генерации и вычислены зависимости скоростей роста магнитной энергии от параметров задачи. Подтверждена корректная работа механизма мелкомасштабной генерации в обеих моделях. На основании численных результатов выдвинуто предположение о причинах неудачи экспериментального подтверждения данного динамо-механизма.

Описание работы

Пороговые явления являются типичными процессами магнитогидродинамической теории динамо, которая описывает усиление магнитной энергии в случайных потоках электропроводящих жидкостей. Это усиление связано с вмороженностью магнитного поля в проводящий поток, благодаря чему гидродинамическая энергия преобразуется в магнитную. Однако для того, чтобы этот процесс был эффективным, характеристики турбулентного потока должны быть "выше" некоторого порогового значения для преодоления различных диссипативных эффектов. В середине 20-го века Юджин Паркер показал, что генерация магнитного поля Солнца в его конвективной оболочке может быть осуществлена за счет дифференциального вращения и асимметрии зеркального потока (спиральности) [1]. Классическая теория магнитного динамо среднего поля, позже разработанная Краузе, Штеенбеком и Рэдлером, подтвердила выводы Паркера и ясно продемонстрировала, что "надпороговая" гидродинамическая спиральность играет решающую роль в росте магнитных полей [2].

Однако возбуждение динамо-механизма может существовать и без специфических факторов: развитой мгд-турбулентности с "надпороговыми" магнитными числами Рейнольдса может быть вполне достаточно для генерации магнитной энергии. Этот механизм известен как мелкомасштабное (турбулентное) магнитное динамо. Название "мелкомасштабный" связано с тем фактом, что магнитная энергия генерируется в масштабах, много меньших, чем типичная корреляционная длина поля скорости. Главной особенностью такого динамо является способность работать в условиях зеркально-симметричной турбулентности с нулевой гидродинамической спиральностью и пространственной однородностью. Но есть одна особенность этого механизма, связанная с тем, что при мелкомасштабной генерации магнитная энергия может

увеличиваться, в то время как среднее магнитное поле может оставаться постоянным или даже уменьшаться. Вот почему этот тип генерации магнитного поля менее удобен для лабораторных и астрофизических исследований и, как следствие, менее изучен до такой степени, что пока неясно, как это явление выглядит в реальности [3].

Естественным современным подходом к решению задачи о мелкомасштабном динамо является прямое численное моделирование. Этот способ подтверждает, что в случайной среде действительно может генерироваться магнитная энергия, которое растет от небольших напряженностей поля до равномерного распределения кинетической энергии при условии, что магнитное число Рейнольдса достаточно велико. Спорным остается вопрос о роли магнитного числа Прандтля, а также о применимости прямого численного моделирования к реальным объектам, что приводит к необходимости использования упрощенных моделей. Существуют две модели, которые в принципе допускают такую экстраполяцию, а именно модель мелкомасштабного динамо, представленная в 60-х годах Казанцевым и Крайчнаном [4], и подход с использованием оболочечных (каскадных) моделей, предложенный в 70-х годах Обуховым и Лоренцом [5]. Проблема в том, что эти подходы сформулированы в совершенно разных терминах, и перевести представление с одного языка на другой представляется затруднительным. Цель нашей работы – показать, как перевести одно описание в другое, и продемонстрировать соответствие между двумя моделями, а также прояснить, какие особенности более четко видны в одной модели, а какие в другой.

Литература

1. *E. N. Parker* Hydromagnetic dynamo models. – *Astrophysical Journal*. – 1955. – Vol. 122 – P. 293.
2. *M. Steenbeck, F. Krause, K. H. Rädler* Berechnung der mittleren Lorentz-Feldstärke für ein elektrisch leitendes Medium in turbulenter, durch Coriolis-Kräfte beeinflusster Bewegung. – *Zeitschrift für Naturforschung A*. – 1966. – Vol. 21(4), P. 369-376.
3. *P. Tzeferacos, A. Rigby, A. F. Bott, A. R. Bell, R. Bingham, A. Casner, G. Gregori* Laboratory evidence of dynamo amplification of magnetic fields in a turbulent plasma. – *Nature communications*. – 2018. – Vol. 9(1), P. 591.
4. *P. Kazantsev* Enhancement of a magnetic field by a conducting fluid. – *Sov. Phys. JETP*. – 1968. – Vol. 26(5). – P. 1031-1034.
5. *E. N. Lorenz* Low order models representing realizations of turbulence. – *Journal of Fluid Mechanics*. – 1972. – Vol. 55. – P. 545-563.

Теоретическая и экспериментальная электродинамика

Частный метод решения задач о генерации аксионоподобных частиц электромагнитными полями и волнами

A private method for solving problems about the generation of axion-like particles by electromagnetic fields and waves

Бедда А.В., Данцев Г.А., Денисов В.И.

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический
факультет, Москва, РФ
bedda.andrew@yandex.ru*

Аннотация. В работе рассматривается актуальная задача электродинамики – фоторождение аксионоподобных частиц электромагнитным излучением пульсара при его распространении в кулоновском поле. Полученные результаты имеют теоретическое и прикладное значение в астрофизике.

Введение

В настоящее время в научной литературе активно обсуждаются вопросы генерации аксионоподобных частиц различными конфигурациями электромагнитных полей и волн.

К аксионоподобным частицам [1] относятся аксион – массивная частица, полевой переменной для которой служит аксиальный скаляр α , арион, описываемый строго безмассовым аксиальным полем χ , дилатон многомерной теории гравитации и дилатон физики высоких энергий, полевой переменной для которых является скалярное поле Ψ .

Электромагнитным источником для аксиона и ариона является скалярное произведение индукции магнитного поля $\mathbf{B}$ и напряженности электрического поля $\mathbf{E}$. Источником для поля дилатона служит инвариант тензора электромагнитного поля $F_{ik}F^{ik} = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)$. В задачах о генерации аксионоподобных частиц электромагнитными полями и волнами основная проблема заключается в очень сложном выражении для источника, требующем разработки особого метода для решения уравнения поля. Покажем это на примере задачи о генерации арионов электромагнитным излучением пульсара при его распространении во внешнем кулоновском поле.

Описание работы

Пусть в начале координат находится кулоновский центр с зарядом Q . Его электрическое поле имеет вид:

$$\mathbf{E}_0 = \frac{Q\mathbf{r}}{r^3}. \quad (1)$$

Не ограничивая общности, будем считать, что пульсар находится в точке $\mathbf{r}_p = \{x_p, y_p, z_p\}$. Он создает электромагнитное поле, вектор $\mathbf{B}_w(\mathbf{r}, \tau)$ у которого при $r > R_s$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{w(r,\tau)} = & \\ = & \frac{3(\mathbf{m}(\tau) \cdot \mathbf{R}) \mathbf{R} - R^2 \mathbf{m}(\tau)}{R^5} - \frac{\dot{\mathbf{m}}(\tau)}{c R^2} + \frac{3(\dot{\mathbf{m}}(\tau) \cdot \mathbf{R}) \mathbf{R}}{c R^4} + \\ & + \frac{(\ddot{\mathbf{m}}(\tau) \cdot \mathbf{R}) \mathbf{R} - R^2 \ddot{\mathbf{m}}(\tau)}{c^2 R^3}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ и точка над вектором дипольного магнитного момента $\mathbf{m}$ означает производную по запаздывающему времени $\tau = t - R/c$, а

$$\mathbf{m}(\tau) = |\mathbf{m}| (\cos(\omega\tau) \sin\theta_0, \sin(\omega\tau) \sin\theta_0, \cos\theta_0)$$

θ_0 – угол между вектором магнитного дипольного момента звезды и осью вращения звезды.

В этом случае уравнение арионного поля в силу выражений (1) и (2) принимает вид:

$$\begin{aligned}
\Delta\chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} &= -g_{ay} (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{B}_w) = \\
&= -Q g_{ay} \left\{ \frac{3(\mathbf{m}(\tau) \cdot \mathbf{R})(\mathbf{R} \mathbf{r})}{R^5 r^3} - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m}(\tau))}{R^3 r^3} - \frac{(\mathbf{r} \dot{\mathbf{m}}(\tau))}{c R^2 r^3} + \right. \\
&+ \left. \frac{3(\dot{\mathbf{m}}(\tau) \cdot \mathbf{R})(\mathbf{R} \mathbf{r})}{c R^4 r^3} + \frac{(\ddot{\mathbf{m}}(\tau) \cdot \mathbf{R})(\mathbf{R} \mathbf{r}) - R^2(\ddot{\mathbf{m}}(\tau) \mathbf{r})}{c^2 R^3 r^3} \right\},
\end{aligned} \tag{3}$$

где g_{ay} – константа взаимодействия арионов с электромагнитным полем.

Источник в правой части уравнения (3) имеет чрезвычайно громоздкий вид и при записи решения этого уравнения в виде запаздывающего потенциала не позволяет провести точное интегрирование. Поэтому предлагается изменить метод решения уравнения.

Так как нас интересует только зависящая от времени часть поля арионов χ , то отбросим статическую часть у вектора $\mathbf{m}(\tau)$ и запишем его в комплексном виде:

$$\mathbf{m}(\tau) = |\mathbf{m}| \sin \theta_0 e^{-ik(ct-R)} \mathbf{u},$$

где $\mathbf{u} = \{1, i, 0\}$.

Вектор $\mathbf{B}_w(\mathbf{r}, \tau)$ в силу соотношения (2), запишем в виде:

$$\mathbf{B}_{w(\mathbf{r}, \tau)} = \text{Re} \left\{ \text{rot}_0 \text{rot}_0 \left(\frac{\mathbf{m}(\tau)}{R} \right) \right\},$$

где rot_0 – оператор ротора по координатам вектора $\mathbf{r}_p = \{x_0, y_0, z_0\}$.

Тогда уравнение (3) примет вид:

$$\Delta\chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -g_{ay} q \left[\frac{\partial^2}{\partial x_0^\nu \partial x_0^\beta} - g^{\mu\sigma} g_{\nu\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_0^\mu \partial x_0^\sigma} \right] \left(\frac{x^\nu m^\beta(\tau)}{r^3 R} \right). \tag{4}$$

Решение уравнения (4) запишем через некоторый суперпотенциал $J^{\nu\beta}$:

$$\chi = -g_{ay} q \left[\frac{\partial^2}{\partial x_0^\nu \partial x_0^\beta} - g^{\mu\sigma} g_{\nu\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_0^\mu \partial x_0^\sigma} \right] J^{\nu\beta}. \tag{5}$$

Для выполнения уравнения (3) достаточно, чтобы суперпотенциал удовлетворял уравнению:

$$\Delta J^{\nu\beta}(t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 J^{\nu\beta}(t)}{\partial t^2} = |\mathbf{m}| \sin \theta_0 u^\beta \left(\frac{x^\nu e^{-ik(ct-R)}}{r^3 R} \right). \tag{6}$$

Точное решение уравнения (6), удовлетворяющее принципу причинности, имеет вид:

$$J^{\nu\beta}(t) = \frac{i |\mathbf{m}| \sin \theta_0 u^\beta}{2k} \left\{ \frac{x^\nu}{r} + \frac{x_0^\nu}{r_0} \right\} \frac{\exp(i k (r_0 + r)) - \exp(i k R)}{r_0 + (\mathbf{r} \mathbf{r}_0)} e^{-i k c t}.$$

Подставляя это выражение в соотношение (5), получим точное решение уравнения (3):

$$\begin{aligned}
\chi = & \frac{g_{ay}|\mathbf{m}|q \sin\theta_0}{2(1+\cos\gamma)r_0^2r} \times \{ \sin\theta_0 [i k r_0 \cos\gamma - 1 - \cos\gamma] e^{i[k(r+r_0-ct)+\varphi_0]} - \\
& - i k r_0 \sin\theta e^{i[k(r+r_0-ct)+\varphi]} \} - \frac{g_{ay}|\mathbf{m}|q}{2(1+\cos\gamma)r_0^2r \sqrt{(r^2+r_0^2-2rr_0\cos\gamma)^3}} \times \\
& \times \{ r_0 \sin\theta [i k \sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\gamma}(r+r_0)(r\cos\gamma-r_0)-r(r- \\
& - r_0)(\cos\gamma+1)] e^{i[k(\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\gamma}-ct)+\varphi]} + \\
& + \sin\theta_0 [i k \sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\gamma} r_0 (r-r_0\cos\gamma)(r+r_0) + (\cos\gamma+1) \times \\
& \times (r^3+r_0^3-2r^2r_0\cos\gamma)] e^{i[k(\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\gamma}-ct)+\varphi^0]} \},
\end{aligned} \tag{7}$$

где $\cos\gamma = \cos\theta \cos\theta_0 + \sin\theta \sin\theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$, а γ - угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$.

Заключение

Таким образом, развитый частный метод позволил получить хотя и громоздкое, но точное решение (7) исходного уравнения (3). Во избежание недоразумений, сообщаем, что все формулы проверены с использованием компьютерной алгебры REDUCE.

Финансирование

Исследование выполнено в рамках научной программы Национального центра физики и математики, направление № 5 «Физика частиц и космология»

Литература

1. Bedda A., Denisov V., Denisova I., Gavrish O. Arion Radiation during Wave Propagation in the Galactic Magnetic Field // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. - 2025. - Vol. 89, No. 4, - P. 633-638.

Обратное преобразование Фурье мультипликативных интегралов в методе спектро радиа метрии

Inverse Fourier Transform of Product Integrals in the Spectroradiometry Method

Будунова К.А.

Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва, Россия.
1917schw@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается обратное преобразование Фурье параметрических мультипликативных интегралов. Обсуждаются некоторые свойства функций, являющихся результатом преобразования, приводится пример их вычисления. Определяется вклад обратного преобразования Фурье мультипликативного интеграла в формирование интерферограммы в методе спектро радиа метрии для облака, содержащего аэрозоль.

Обратное преобразование Фурье мультипликативного интеграла как интеграл на основе операции свертки

Мультипликативным интегралом [1] называется функционал, получающийся в результате замены в формуле для интеграла операции суммы произведением. В данной работе рассматриваются параметрические мультипликативные интегралы вида

$$P(\omega) = \exp \left(\int_a^b \ln f(x; \omega) dx \right). \tag{1}$$

Положим в формуле (1) $a = 0, b = 1$. Функция $P(\omega)$ может быть выражена пределом $P(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} P_N(\omega)$, где

$$P(\omega) = \prod_{j=0}^{N-1} (f(j/N; \omega))^{1/N}. \quad (2)$$

Пусть N – фиксированное число и $f(x_0; \omega) \geq 0$ для каждого $x_0 = j/N$, $j = 0, \dots, N-1$, является ограниченной суммируемой с квадратом целой функцией экспоненциального типа $\leq \sigma$. Можно показать, что в этом случае:

1) в пространстве обобщенных функций медленного роста существует обратное преобразование Фурье $\varphi(x_0; t)$ функции $f^{1/N}(x_0; \omega)$, причем

$$\underbrace{\varphi(x_0; t) * \varphi(x_0; t) * \dots * \varphi(x_0; t)}_n = F^{-1}[f(x_0; \omega)](t); \quad (3)$$

2) обратное преобразование Фурье $p_N(t)$ функции $P_N(\omega)$ может быть выражено сверткой

$$p_N(t) = \phi_1(t) * \phi_2(t) * \dots * \phi_N(t), \quad (4)$$

где $\phi_{j+1}(t) = \varphi(j/N; t)$, $j = 0, \dots, N-1$.

Если $P(\omega)$, $P_N(\omega)$ – абсолютно интегрируемые на вещественной оси функции, причем $P_N(\omega)$ сходится к $P(\omega)$ в L_1 , то

$$p(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} p_N(t). \quad (5)$$

Формулы (3), (4), (5) позволяют связать обратное преобразование Фурье мультипликативного интеграла (1) с интегрированием на основе операции свертки.

Обратное преобразование Фурье мультипликативных интегралов в спектрорадиометрии

Метод Фурье-спектрорадиометрии позволяет определять распределение и концентрацию загрязняющих веществ в атмосфере. Рассмотрим модель, в которой исследуемое облако загрязняющих веществ имеет размер L_1 находится на расстоянии L_2 от спектрорадиометра. Наблюдаемый экспериментально оптический спектр $B(\nu)$ задается выражением [2]

$$B(\nu) = (\Phi_0(\nu) + P(\nu, T)) \exp(-D_1(\nu)) \exp(-D_2(\nu)) + P(\nu, T), \quad (6)$$

где T – температура трассы и облака, ν – волновое число, $D_1(\nu)$ – оптическая толщина облака, $D_2(\nu)$ – оптическая толщина трассы, $\Phi_0(\nu)$ – спектр излучения подстилающей поверхности, $P(\nu, T)$ – функция Планка. При наличии в облаке аэрозоля величина $D_1(\nu)$ определяется суммой [3]

$$D_1(\nu) = D_1^m(\nu) + D_1^a(\nu). \quad (7)$$

В формуле (7)

$$D_1^m(\nu) = L_1 \sum_{s=1}^S \sigma_s(\nu) n_s, \quad D_1^a(\nu) = L_1 \int_0^\infty \left(\sum_{m=1}^M N_m K_m(r, \nu) \pi r^2 g_m(r) \right) dr, \quad (8)$$

где n_s – концентрация молекулярной составляющей с номером s , $\sigma_s(\nu)$ – сечение поглощения для s -й составляющей, $s = 1, \dots, S$; N_m – концентрация аэрозольной фракции с номером m , $K_m(r, \nu)$ – фактор эффективности ослабления для m -й фракции, $g_m(r)$ – функция распределения аэрозольных частиц по размерам [4], $m = 1, \dots, M$. Введем связанную с подынтегральным выражением в (8) функцию $\varphi(r, \nu)$:

$$\ln \varphi(r, \nu) = -L_1 \sum_{m=1}^M N_m K_m(r, \nu) \pi r^2 g_m(r).$$

Тогда, в соответствии с (7), (8),

$$\exp(-D_1(\nu)) \exp(-D_2(\nu)) = G(\nu) H(\nu), \quad (9)$$

$$G(\nu) = \exp(-D_1^m(\nu) - D_2(\nu)), H(\nu) = \exp\left(\int_0^\infty \ln \varphi(r, \nu) dx\right). \quad (10)$$

Интерферограмма $I(x)$ для спектра $B(\nu)$ вычисляется по формуле

$$I(x) = \int_0^{+\infty} B(\nu) \cos(2\pi\nu x) d\nu.$$

Используя (7), (9), (10) для интерферограммы можно получить следующее выражение:

$$I(x) = [(f_0 + p_T) * h * g](2\pi x) + p_T(2\pi x). \quad (11)$$

В (11) $f_0(x)$ – косинус-преобразование Фурье функции $\Phi_0(\nu)$, $p_T(x)$ – косинус-преобразование Фурье функции Планка, равное

$$p_T(x) = \frac{2\pi T^4 k^4}{c^2 h^3} q_0\left(\frac{Tkx}{h}\right),$$

где c – скорость света, h – постоянная Планка, k – постоянная Больцмана, $q_0(x)$ – функция, определяемая формулой

$$q_0(x) = \pi^4 \frac{1 + 2\text{ch}^2(\pi x)}{\text{sh}^4(\pi x)} - \frac{3}{x^4}.$$

Функции $g(x)$ и $h(x)$ задаются косинус-преобразованиями Фурье $g(x) = F_c[G(\nu)](x)$, $h(x) = F_c[H(\nu)](x)$. Таким образом,

$$h(x) = 2\pi \text{Re} \left\{ F^{-1} \left[\exp \left(\int_0^\infty \ln \varphi(r, \nu) dr \right) \right] (x) \right\}.$$

Пример вычисления обратного преобразования Фурье мультипликативного интеграла

Рассмотрим параметрический мультипликативный интеграл

$$P_a(\omega) = \exp \left(\int_0^a \ln |\text{sinc}(\tau\omega)| d\tau \right), a > 0. \quad (12)$$

Для функции (10) при $a = 1$ справедливы следующие представления:

$$P_1(\omega) = |\text{sinc} \omega| \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ e^{-2} \left| 1 + \frac{\omega}{\pi k} \right|^{\frac{\pi k}{\omega}} \left| 1 - \frac{\omega}{\pi k} \right|^{-\frac{\pi k}{\omega}} \right\}; \quad (13)$$

$$P_1(\omega) = \frac{e}{2|\omega|} \prod_{k=1}^{\infty} \exp(-\text{sinc}(2k\omega)/k).$$

Мультипликативный интеграл $P_a(\omega)$ связан с функцией $P_1(\omega)$ формулой $P_a(\omega) = (P_1(a\omega))^a$.

Выражение (13) удобно использовать для представления обратного преобразования Фурье $p_a(x) = F^{-1}[P_a(\omega)](x)$ функции $P_a(\omega)$. Так, для $P_2(\omega)$:

$$F^{-1}[P_2(\omega)](x) = \frac{e^2}{8} \int_{-\infty}^x dx_1 \int_{-\infty}^{x_1} q(y) dy - C_1 x - C_0,$$

где

$$q(x) = (\delta(x) + \psi_1(x)) * (\delta(x) + \psi_2(x)) * (\delta(x) + \psi_3(x)) * \dots,$$

$$\psi_k(x) = F^{-1} \left[\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l 2^l \text{sinc}^l(4k\omega)}{k^l l!} \right] (x),$$

$$C_0 = \frac{e^2}{8} \int_{-\infty}^0 dx_1 \int_{-\infty}^{x_1} q(y) dy - \int_{-\infty}^{+\infty} P_2(\omega) d\omega, \quad C_1 = \frac{e^2}{8} \int_{-\infty}^0 q(y) dy.$$

Графики некоторых функций $p_a(x)$ показаны на рисунке 1.

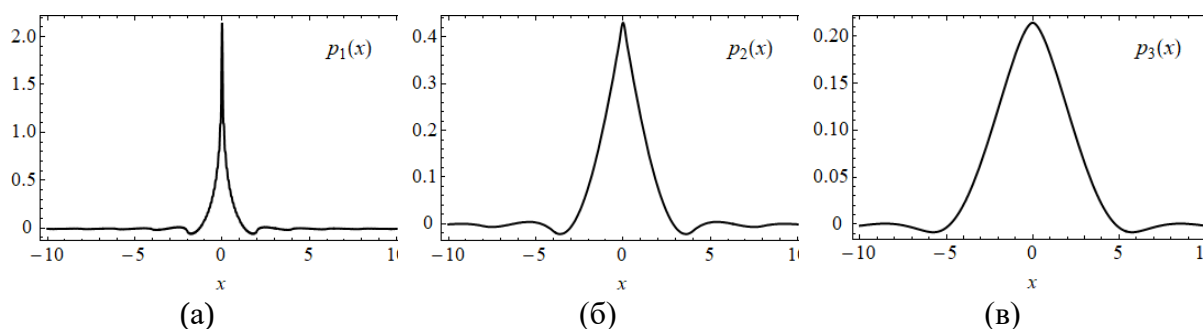


Рисунок 1. Результаты приближенного вычисления обратного преобразования Фурье $p_a(x)$ функции $P_a(\omega)$ для $a = 1$ (а), $a = 2$ (б), $a = 3$ (в).

Заключение

Рассмотрена операция обратного преобразования Фурье для параметрического мультипликативного интеграла. Приведен пример расчета функций, являющихся результатом данного преобразования. В методе спектрорадиометрии для облака, содержащего аэрозоль, получена формула интерферограммы, включающая обратное преобразование Фурье мультипликативного интеграла.

Литература

1. A. Slavik. Product Integration, its History and Applications. – Prague: Matfyzpress, 2007.
2. А.Н. Морозов, С.И. Светличный. Основы Фурье-спектрорадиометрии. – М.: Наука, 2006.
3. Ю.М. Тимофеев, А.В. Васильев. Теоретические основы атмосферной оптики. – СПб: Наука, 2003.
4. В.Е. Зуев, М.В. Кабанов. Современные проблемы атмосферной оптики. Том 4: Оптика атмосферного аэрозоля. – Л.: Гидрометеиздат, 1987.

Использование линзы Лüneбурга для проведения бистатистических измерений коэффициента отражения от материалов

Using a Luneburg lens to conduct bistatic reflectance measurements of materials

Гильмутдинов Р.В., Меньших Н.Л., Фёдоров С.А.

Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН, Москва, РФ.

psevduch777@gmail.com

Аннотация. Настоящее исследование посвящено усовершенствованию облучателя бистатистической установки гигагерцового диапазона частот путём интеграции линзы Лüneбурга. Предложенная модификация обеспечивает формирование электромагнитного поля с заданными параметрами в зоне размещения образца материала при исследовании в широкой полосе частот. В задачах определения коэффициента зеркального отражения от материалов в свободном пространстве существенным фактором погрешности выступают краевые эффекты. В рамках работы выполнено численное моделирование эксперимента по измерению коэффициента отражения методом моментов с применением модернизированного облучателя. Результаты демонстрируют повышение точности за счёт реализации предложенной конструкции.

Введение

В современной радиотехнике и радиофизике наблюдается устойчивая тенденция к применению диэлектрических линз [1] в проектировании приемо-передающих систем с заданными характеристиками [2].

Бистатистические исследования характеристик рассеяния объектов сталкиваются с рядом фундаментальных ограничений [3], существенно снижающих точность измерений [4].

Целями настоящей работы являются: формирование заданного распределения электромагнитного поля в рабочей зоне размещения исследуемого образца при измерении модуля коэффициента отражения (МКО) с оптимизированными амплитудно-фазовыми характеристиками.

Описание работы

Рассмотрена линза Люнебурга с градиентной диэлектрической проницаемостью материала. Численные исследования зеркального отражения от образцов материалов проводились методом моментов в программе FEKO. Результаты численного моделирования с линзой и без линзы сравнивались между собой, а также с аналитическим расчетом по формулам Френеля [5] для бесконечного слоя материала.

Линзовый коллиматор. Настоящая работа развивает предыдущие исследования авторов, посвященные разработке и оптимизации интегрированной антенной системы с линзовым коллиматором [6] с использованием гиперболической линзы.

В данной работе для создания необходимого амплитудно-фазового распределения поля предлагается использовать сферическую линзу Люнебурга, интегрированную непосредственно в передающую широкополосную антенну Satimo SH2000. Для модернизации измерительного стенда выбрана только часть рабочего диапазона облучателя: от 5 до 10 ГГц.

Радиус линзы и расстояние до антенны определялось с целью нивелирования краевых эффектов для плоских квадратных образцов со стороной 200 мм. Зависимость диэлектрической проницаемости от расстояния до центра линзы задается следующей формулой (1), где R – радиус линзы, r – расстояние до центра:

$$\varepsilon = \sqrt{2 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}. \quad (1)$$

Исследование антенны с интегрированной линзой Люнебурга. Рисунок 1 демонстрирует типовую конфигурацию измерительной системы, включающей линзу Люнебурга, интегрированную с антенной Satimo SH2000. Геометрический центр основания антенны (задняя крышка) принят за начало координат (точка O1). Конфигурация системы определяется следующими параметрами: расстояние между объектом и антенной составляет $L = 625$ мм; смещение центра линзы относительно основания антенны равно $d = 160$ мм; радиус линзы $R = 80$ мм. Линза моделируется как 8 концентрических сфер, каждая из которых обладает постоянным показателем преломления.

Предполагается, что облучатель с линзой Люнебурга жестко связан с антенной, которая вращается вокруг измеряемого образца на тележке.

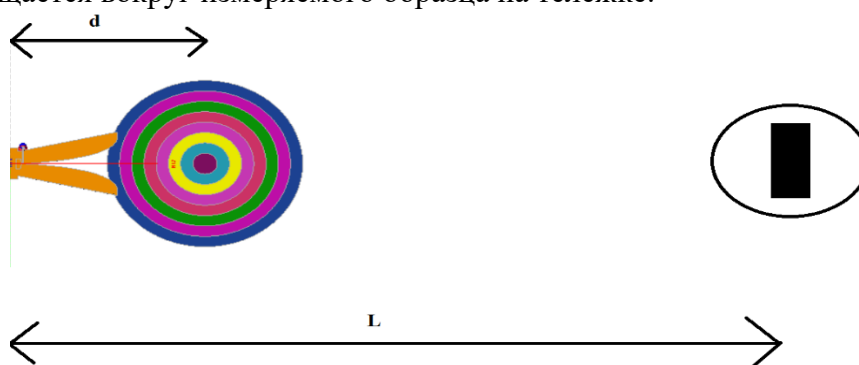


Рисунок 4. Схема антенны с линзой Люнебурга

Рисунок 2 представляет сравнительный анализ амплитудных распределений поля на частоте 5 ГГц для трех конфигураций: антенна с линзой Люнебурга, антенна с гиперболической линзой [6], антенна в исходном виде. Полученные данные подтверждают возможность эффективного подавления краевых эффектов при

измерениях модуля коэффициента отражения (МКО) квадратных образцов размером 200×200 мм.

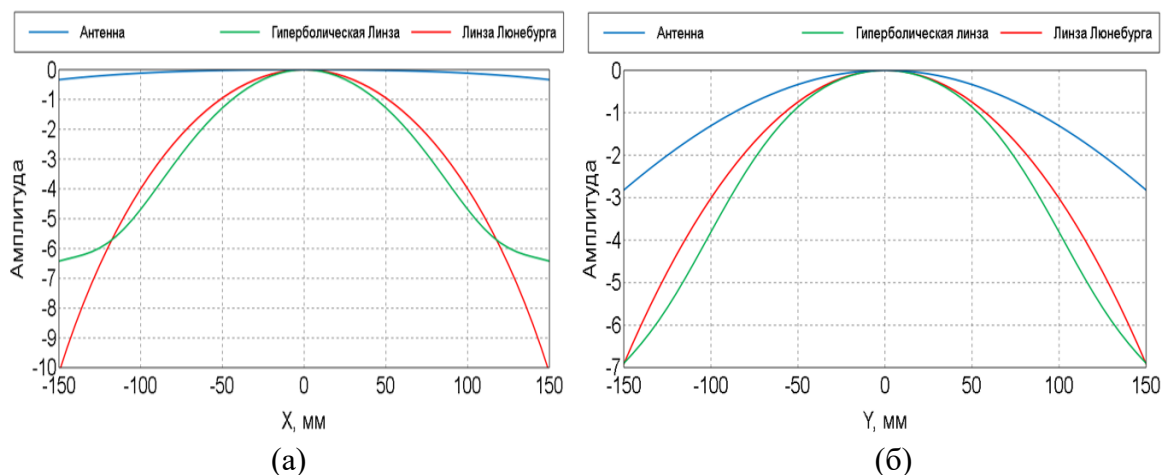


Рисунок 2. Срезы амплитуды поля в зоне нахождения измеряемого объекта, частота 5 ГГц а) Н-плоскость, б) Е-плоскость

Для оптимизации вычислительного процесса применен двухэтапный подход: расчет распределения поля в ограниченной области между линзой и образцом; использование полученного распределения как эквивалентного источника. Исследовался образец материала [7] с известными материальными параметрами – имеющий частотную дисперсию.

На рис. 3 представлены результаты МКО, полученные 4 методами: аналитический расчет, облучение плоской волной, облучение системой с гиперболической линзой и линзой Люнебурга.

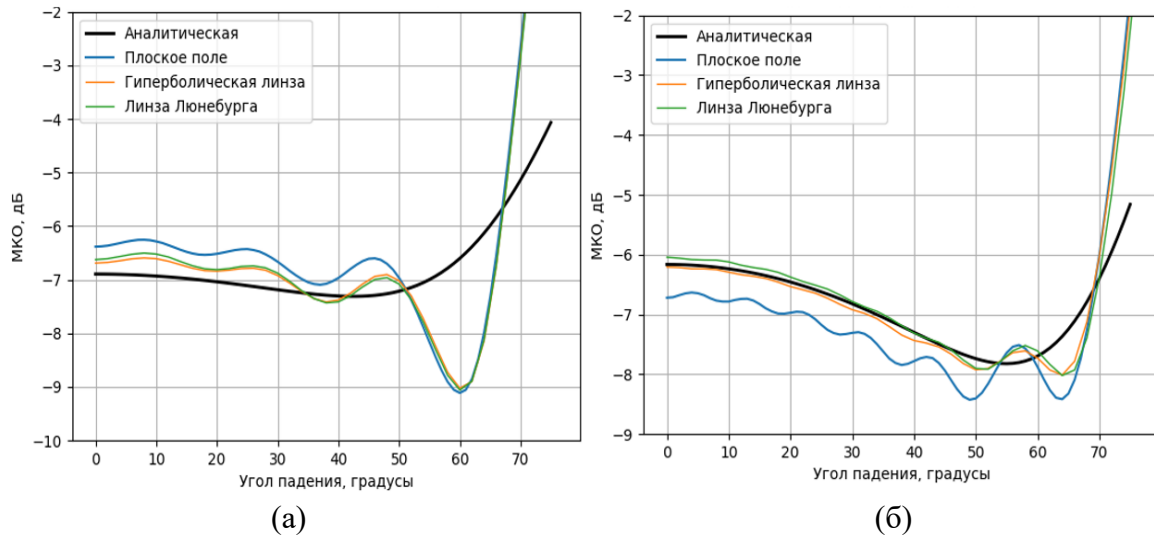


Рисунок 3. Графики зависимостей МКО от угла падения а) Н-плоскость, б) Е-плоскость

Проведенный анализ демонстрирует, что в угловом диапазоне $0-45^\circ$ измерения МКО с использованием модифицированного поля обеспечивают лучшее соответствие аналитическим расчетам по сравнению с традиционным методом облучения плоской волной. Особенно важно отметить практически полное совпадение результатов, полученных с облучателем, оснащенным линзой Люнебурга, с данными системы антенна-линза.

Заключение

Результаты исследований демонстрируют, что применение линзы Люнебурга обеспечивает формирование электромагнитного поля с требуемым распределением амплитуды в рабочей области измерительного стенда, сохраняющее свои характеристики в широком частотном диапазоне.

Предложенная конструкция облучателя характеризуется существенно более низким уровнем боковых и задних лепестков по сравнению с традиционными решениями. В рабочем диапазоне частот 5-10 ГГц использование системы антенна-линза Люнебурга обеспечивает значительное снижение методической погрешности измерений: с 0.8 до 0.4 дБ для значений МКО -5 дБ и с 1.0 до 0.6 дБ при МКО -10 дБ.

Литература

1. *Fernandes C.A., Lima E. B., Costa, J. R.* Dielectric lens antennas. Handbook of antenna technologies, pp. 1001-1064, 2016.
2. *Зелкин Е.А., Петрова Р.А.* Линзовые антенны. М.: Советское радио, 1974.
3. *Гильмутдинов Р.В., Меньших Н.Л., Федоров С.А., Брук Л.В.* Методика обработки сигналов, позволяющая уменьшить погрешности измерений бистатических характеристик рассеяния образцов материалов. Журнал радиоэлектроники. 2024. №. 10. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2024.10.10>
4. *Gilmutdinov R. V., Menshikh N.L., Fedorov S.A.* Improving the accuracy of measurements of the bistatic scattering characteristics of material samples of various configurations. Meas Tech, V. 67, pp. 467-476, 2024. <https://doi.org/10.1007/s11018-024-02367-1>
5. *Бреховских Л. М.,* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 503 с.
6. *Gilmutdinov R.V., Fedorov S.A., Menshikh N.L.* Modernization of the Electromagnetic Field Formation System for Bistatic Measurements," 2023 Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW), Divnomorskoe, Russian Federation, 2023, pp. 92-95
7. *Semenenko V.N., Chistyayev V. A, Politiko A. A, Kibets S. G.,* Complex permittivity and permeability of composite materials based on carbonyl iron powder over an ultrawide frequency band. Physical Review Applied, 16(1), 014062 (2021).

Динамика магнитного поля при наличии холловской проводимости и термодиффузии

Magnetic field dynamics in presence of Hall conductivity and thermodiffusion

Бисноватый-Коган Г.С.^{1,2}, Глушихина М.В.²

1) НИЯУ МИФИ, Москва, РФ; 2) Институт космических исследований РАН, Москва, РФ.

gkogan@cosmos.ru, m.glushikhina@cosmos.ru

Аннотация. В данной работе выведены уравнения, описывающие динамику магнитного поля при наличии холловских токов с использованием стандартного электродинамического рассмотрения. Мы рассматриваем столкновительные среды и учитываем температурные градиенты, которые создают термодиффузионный электрический ток при наличии холловской составляющей. Влияние токов Холла на структуру магнитного поля и демпфирование рассмотрено в простых моделях. Найдено условие для создания затравочного магнитного поля в немагнитной среде с наличием термодиффузии, которое необходимо для действия механизма, известного как "батарея Бирмана".

Введение

В присутствии магнитного поля кинетические коэффициенты, описывающие заряженные частицы, становятся анизотропными. Это связано как с плазмой, так и с

металлами. Такая анизотропия представляет собой возникновение так называемых токов Холла. Они возникают в среде столкновения из-за действия силы Лоренца на заряженные частицы в промежутках между столкновениями.

Существует обширная литература, в которой исследуется влияние токов Холла на структуру магнитного поля и демпфирование. Наиболее поразительной особенностью токов Холла является их свойство сохранять энтропию и отсутствие выделения тепла. Следовательно, ослабление магнитного поля из-за токов Холла может происходить только косвенно, путем изменения структуры магнитного поля. Большое количество авторов исследовали этот вопрос в различных областях науки, от астрофизики до исследований плазмы в ускорителях [1] - [7].

В нашей работе получены уравнения с использованием точных электродинамических расчетов, описывающих динамику магнитного поля под действием токов Холла. Мы рассматриваем столкновительную среду, полностью ионизованную плазму в космической среде и в лабораториях. Учтено влияние температурного градиента, который создаёт термодиффузионный электрический ток, и проанализировано его взаимодействие с магнитным полем. Магнитные и электрические поля разделены на внутренние и внешние для описания их происхождения и взаимосвязанного влияния друг на друга. При наличии термодиффузии достигается условие для создания затравочного магнитного поля в немагнитной среде, которое необходимо для действия механизма, известного как "батарея Бирмана" [8] – [9]. Рассмотрены простые модели, иллюстрирующие влияние тока Холла на структуру магнитного поля и демпфирование.

Описание работы

Уравнения, описывающие динамику магнитного поля в полностью ионизованной неоднородной плазме, получены строгим образом с учетом токов Холла, сторонней Э.Д.С. и эффектов термодиффузии. В полученной в нашей работе системе уравнений внутренние и внешние величины магнитного и электрического полей $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$, а также электрического тока $\mathbf{j}$ четко разделены.

При наличии скалярных термодиффузии λ_0 , электропроводности σ_0 и внешнего электрического поля $\mathbf{E}''$ получено следующее уравнение для эволюции магнитного поля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = & \nabla \times [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + c \nabla \mathbf{E}'' + c \nabla \left(\frac{\lambda_0}{\sigma_0} \right) \times \nabla T + \frac{c^2}{4\pi\sigma_0} \nabla^2 \mathbf{B} - \\ & - \frac{c^2}{4\pi} \left[\nabla \left(\frac{1}{\sigma_0} \right) \times \nabla \times \mathbf{B} \right] + \frac{c^2}{4\pi} \nabla \times \left[\frac{\omega \tau_e}{\sigma_0 B} \mathbf{B} \times [\nabla \times \mathbf{B}] \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

При переменных коэффициентах переноса температурный член в уравнении (1) может быть отличным от нуля даже при изначально нулевых значениях $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$, что приводит к созданию затравочного магнитного поля в немагнитной среде. При функции $\lambda_0/\sigma_0 = f(\rho, T)$ затравочное магнитное поле создается при ненулевом значении $\delta f/\delta \rho [\nabla \rho \times \nabla T]$.

Получены уравнения для соотношения внешнего тока, градиента температуры и внешних и внутренних магнитных полей для различных пространственных геометрий. Приведены примеры расчётов с использованием системы уравнений, связывающих температурный градиент, внешнее магнитное поле и электрический ток с внутренними, для плазменного цилиндра [10] и плазменного тора. В обоих случаях индуцированный извне электрический ток может формироваться за счет температурного градиента (термодиффузии) или внешнего электрического поля (батареи или аккумулятора). Во всех случаях внутреннее магнитное поле, создаваемое токами Холла, имеет направление, противоположное направлению внешнего магнитного поля.

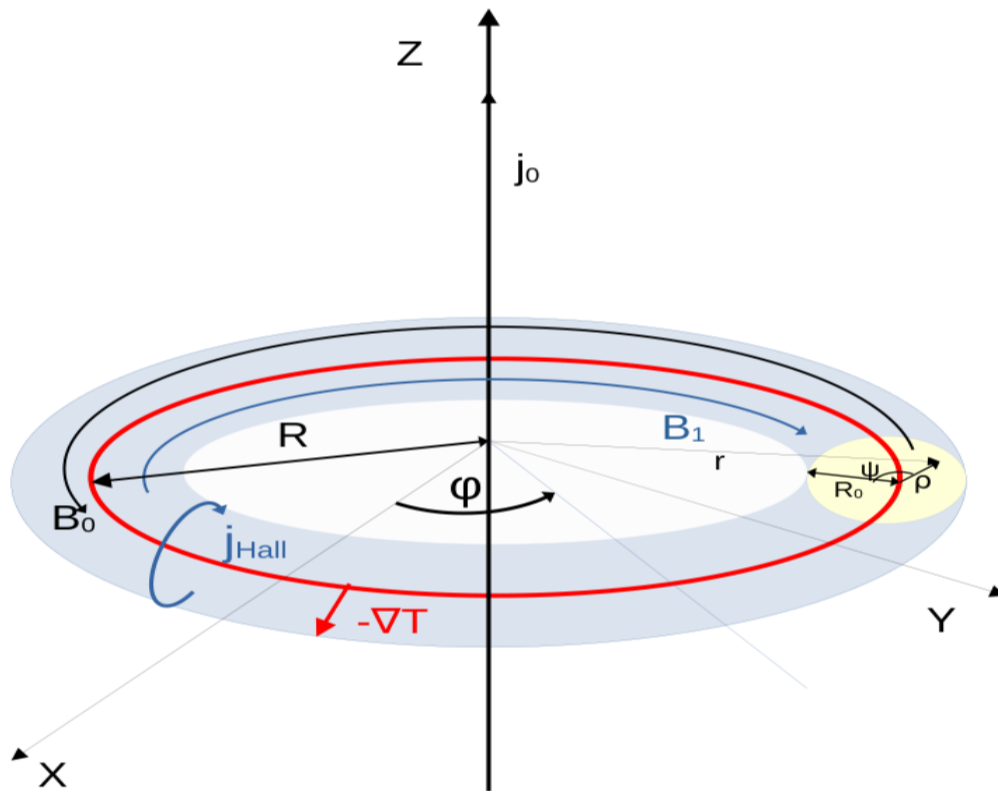


Рисунок 1. Тор с начальным электрическим током j_0 , создающим круговое магнитное поле B_0 . B_0 и температурный градиент ∇T создают холловский электрический ток j_{Hall} . Индуцированное магнитное поле B_1 определяется холловским током j_{Hall} и направлено в противоположную сторону B_0

Заключение

Полученные уравнения могут быть использованы для теоретического моделирования поведения магнитного поля в астрофизических объектах, таких как различные типы звезд, полностью ионизированный галактический газ и т.д. Другое применение может быть связано с численным моделированием лабораторных экспериментов по получению и ускорению намагниченной, высокоэнергетичной, неоднородной плазмы, некоторые из которых связаны с лабораторной астрофизикой.

Литература

1. Goldreich P., Reisenegger A. Magnetic field decay in isolated neutron stars, // *Astrophysical Journal*. — 1992. — v. 395. — pp. 250-258.
2. Young E. J. Magnetic field evolution in neutron stars, Thesis (PHD), 1998 - The Louisiana state university.
3. Shalybkov D. A., Urpin V. A. The Hall effect and the decay of magnetic fields // *Astronomy and Astrophysics* — 1997. — v. 321. — pp. 685--690.
4. Geppert U., Rheinhardt M. Non-linear magnetic field decay in neutron stars // *Astronomy and Astrophysics*. — 2002. — v. 392. — pp. 1015.
5. Pons J. A., Geppert U. Magnetic field dissipation in neutron star crusts: from magnetars to isolated neutron stars // *Astronomy and Astrophysics*. — 2007. - v. 470. - pp. 315.
6. Pons J. A., Viganò D. Magnetic, thermal and rotational evolution of isolated neutron stars // *Living Reviews in Computational Astrophysics*. — 2019. — v. 5, Issue 1, id. 3.
7. Biermann L. Über den Ursprung der Magnetfelder auf Sternen und im interstellaren Raum// *Zeitschrift Naturforschung Teil A*. — 1950. — v.5 — pp. 65.

9. Biermann L., Schluter A. Cosmic radiation and cosmic magnetic fields. II // Phys. Rev. — 1951. — v. 82 — pp. 863.
10. Bisnovaty-Kogan G. S., Glushikhina M. V. Nonlinear Hall effect in a stationary cylinder with a radial heat flux// J. Plasma Phys. - 2024. — v.90 - id. 905900112.

Исследование применимости метода физической оптики в промежуточной зоне

Study of Applicability of the Physical Optics Method in the Intermediate Zone

Жиров А.В.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, Москва, РФ.

zhirovartemiy@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается применимость метода физической оптики с использованием специального приближения для промежуточной зоны. Проведено сравнение результатов расчёта поля рассеяния с методом моментов, реализованным в программном комплексе ФЕКО. Показано, что модифицированное приближение МФО обеспечивает удовлетворительное согласие с полноволновыми результатами.

Введение

Метод физической оптики (МФО) является одним из наиболее распространённых асимптотических подходов для моделирования электромагнитного рассеяния. Он основан на предположении, что размеры объекта существенно превышают длину волны, а волновое поле в точках освещённой поверхности можно аппроксимировать падающей плоской волной. Благодаря этому метод физической оптики обеспечивает быстрое вычисление интегралов поля и широко применяется при анализе антенн, отражателей, рассеяния на плоских и криволинейных поверхностях.

Тем не менее, классическая формулировка МФО корректна только для дальней зоны (зоны излучения), где выполняется приближение сферических волн плоскими и можно пренебречь кривизной волнового фронта. В промежуточной зоне (зоне Френеля), где расстояние до наблюдателя сравнимо с размером рассеивателя и не выполняется условие дальней зон, предлагается проверить эффективность МФО в сравнении с точным методом моментов, а использовать для этого специальную аппроксимацию, подходящую только для промежуточной зоны.

Описание работы

Целью работы является оценка точности метода физической оптики, основанной на приближениях, описывающих рассеяние в промежуточной зоне, путём сравнения его результатов с методом моментов (МоМ), реализованным в программном комплексе ФЕКО, который используется как эталонный полноволновой метод.

Для достижения цели были поставлены следующие задачи:

1. Реализовать численный расчёт поля рассеяния методом физической оптики в приближениях промежуточной зоны для плоского идеально проводящей пластинки.
2. Провести моделирование той же задачи в ФЕКО с применением метода моментов.
3. Сравнить результаты в промежуточной зоне по амплитуде.

Постановка задачи. На тонкую идеально-проводящую пластинку перпендикулярно падает плоская электромагнитная волна. Поле рассеяния считается в зависимости от угла θ , который меняется от -90 градусов до 90 .

Исследование проводится в промежуточной зоне:

$$\frac{D}{4} + \frac{D}{2} \left(\frac{D}{\lambda} \right)^{1/3} \leq R \leq \frac{D^2}{\lambda}, \quad (1)$$

D – характерный размер пластины, R – расстояние до области наблюдения.

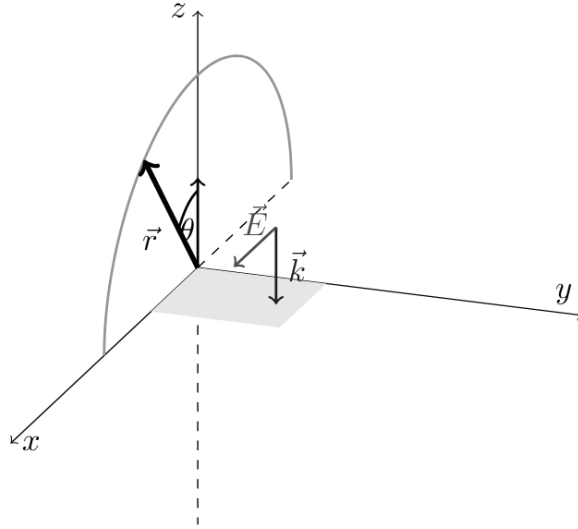


Рисунок 5 - Постановка задачи

Методика расчёта. Рассматривается падение плоской электромагнитной волны нормального падения на квадратный идеально проводящий экран.

Расчёт методом физической оптики выполняется в разработанной автором программе на языке С, в которой реализована дискретизация интеграла по поверхности методом трапеций. Используется выражение для наведённых поверхностных токов:

$$\mathbf{J} = 2[\mathbf{n} \times \mathbf{H}_{in}], \quad (2)$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности, $\mathbf{H}_{in}$ — магнитное поле падающей волны. Рассеянное поле вычисляется интегрированием по всей освещённой области поверхности с использованием фундаментального решения уравнений Максвелла.

А само поле $\mathbf{E}$ считается через векторный потенциал, который рассчитывается по следующей формуле, подходящей для промежуточной зоны [1]:

$$A_{\Phi}^{E,M}(R, \theta, \varphi) = \frac{\exp(-jkR)}{4\pi R} \int_S J^{E,M}(x', y') \exp \left\{ jk \left[R' \cos \alpha - \frac{R'^2}{2R} (1 - \cos^2 \alpha) \right] \right\} dS \quad (3)$$

Для проверки результатов выполнялось моделирование аналогичной задачи в программном комплексе Altair FEKO. В расчёте использовался метод моментов (МоМ), обеспечивающий точное решение интегральных уравнений электродинамики без приближений МФО.

Результаты. Построены угловые распределения амплитуды рассеянного электрического поля для диапазона углов $\theta = -90^\circ \dots +90^\circ$. В промежуточной зоне диаграммы, рассчитанные методами МФО и МоМ, неплохо совпадают.

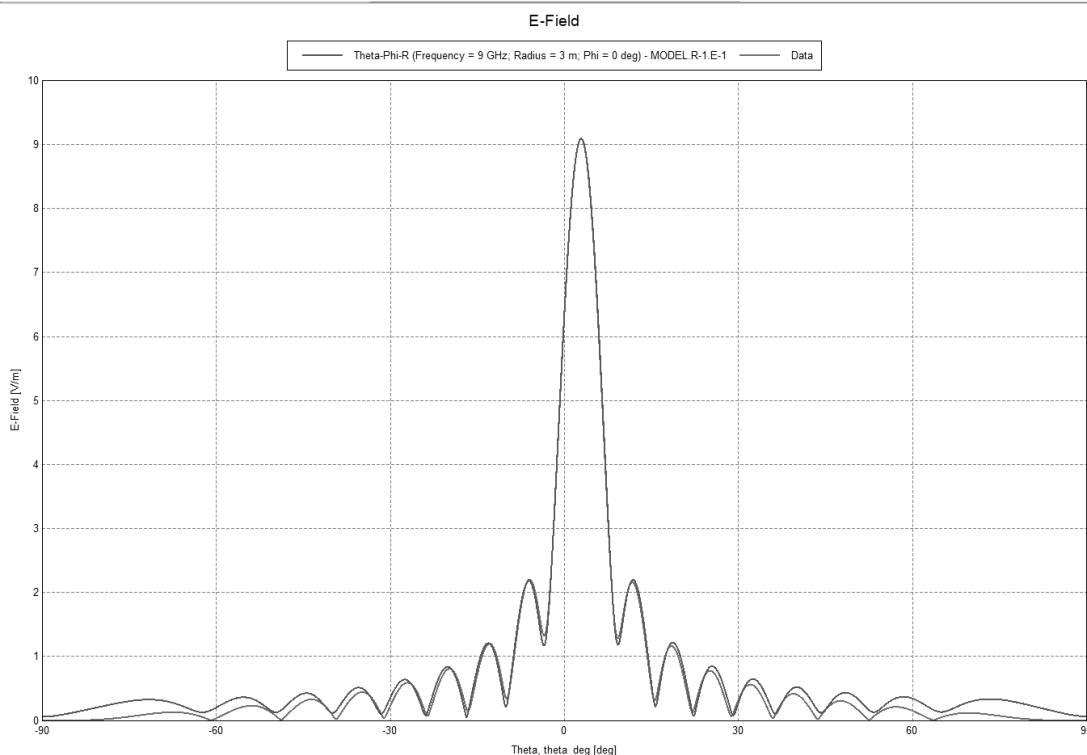


Рисунок 2 – Зависимость модуля поля рассеяния $|E|$ от угла θ

На данном графике показан один из полученных результатов для следующих параметров: частота падающей э/м волны – 9 ГГц, радиус до зоны наблюдения – 3 м, амплитуда напряженности падающей волны – 15 В/м.

Заключение

Проведённое исследование показало, что метод физической оптики обеспечивает удовлетворительное согласие с методом моментов.

Таким образом, приближение для промежуточной зоны в методе физической оптики может использоваться для оценки распределения поля рассеяния в области, удовлетворяющей неравенству (1).

Литература

1. Марков Г.Т., Сазонов Д.М. Антенны. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Энергия, 1975. — 528 с.
2. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. — М.: Советское радио, 1957. — 572 с.
3. Rao, S. M., Wilton, D. R., Glisson, A. W. — Electromagnetic Scattering by Surfaces of Arbitrary Shape // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 1982. — Vol. 30, No. 3. — P. 409–418.

Проекционный метод для анализа излучения радиального диполя расположенного на оси магнитно-диэлектрического тела вращения.

A projection method for analysis of radiation from a radial dipole arranged on the axis of a magneto-dielectric body of revolution.

Кушнерёв М.М.^{1,2}, Скобелев С.П.^{1,2}

1) Московский физико-технический институт, Москва, РФ; 2) ПАО «Радиофизика», Москва, РФ.

kushneryov.mm@phystech.edu, s.p.skobelev@mail.ru

Аннотация. Исследуется задача излучения радиального электрического диполя, находящегося на оси тела вращения, которое включает однородную диэлектрическую сферу и внешний неоднородный диэлектрический слой. Для ее решения разработана новая модификация гибридного проекционного метода. Метод предполагает

проектирование полей на поперечные сферические функции совместно с использованием одномерного метода конечных элементов в проекционной форме по радиальной координате.

Введение

В общем случае строгое решение задачи рассеяния электромагнитных волн неоднородными телами вращения может быть получено исключительно численными методами. Целью данной работы является разработка модификации гибридного проекционного метода (ГПМ) для электродинамического анализа неоднородных магнитно-диэлектрических тел вращения. Ранее подобная задача была решена для неоднородного объекта из немагнитного материала [1].

Описание работы

Продольное сечение магнитно-диэлектрического тела вращения, расположенного в свободном пространстве, показано на рис. 1 в декартовой (x, y, z) и сферической (r, θ, φ) системах координат. Тело включает однородную сферу радиуса a_1 с относительной диэлектрической проницаемостью ε_1 и относительной магнитной проницаемостью μ_1 , центр которой совпадает с началом координат. Сфера окружена неоднородным внешним слоем с относительными диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(r, \theta)$ и магнитной проницаемостью $\mu(r, \theta)$. Неоднородность слоя может также проявляться в отклонении его внешней поверхности от сферической.

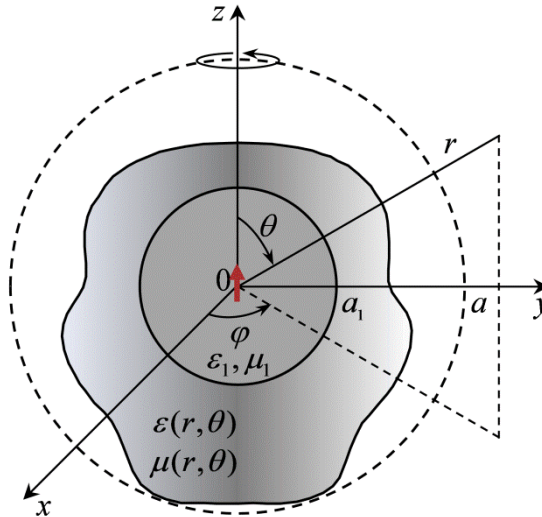


Рисунок 1. Геометрия задачи

Предполагается, что тело возбуждается элементарным радиальным электрическим диполем, расположенным в начале координат (рис. 1). Задача заключается в определении поля, излучаемого диполем в присутствии тела. Электромагнитное поле при указанном возбуждении обладает азимутальной компонентой магнитного поля H_φ , радиальной E_r и меридиональной E_θ компонентами электрического поля. Эти компоненты должны удовлетворять уравнениям Максвелла:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} = i\omega\mu_0\hat{\mu}H_\varphi, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial(\sin\theta H_\varphi)}{\partial \theta} = i\omega\varepsilon_0\hat{\varepsilon}E_r + j_r^e, \quad (2)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r} = -i\omega\varepsilon_0\hat{\varepsilon}E_\theta, \quad (3)$$

где $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\mu}$ – диэлектрическая и магнитная проницаемости в соответствующей области,

$$j_r^e(r, \theta, \varphi) = I^e l \frac{\delta(r-0)\delta(\theta-0)\delta(\varphi-0)}{r^2 \sin \theta} \quad (4)$$

представляет собой плотность тока диполя с дипольным моментом, определяемым током I^e и длиной l , а ω — круговая частота при гармонической зависимости полей от времени вида $e^{-i\omega t}$.

Выражая E_r и E_θ из (2) и (3) и подставляя их в (1), получаем уравнение для магнитного поля H_φ :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\hat{\varepsilon}} \frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\hat{\varepsilon} \sin \theta} \frac{\partial(rH_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} \right) + \hat{\mu} k^2 r H_\varphi = 0, \quad (5)$$

где $k = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число в свободном пространстве, λ — длина волны.

Вводится сфера радиуса a с центром в начале координат, охватывающая рассматриваемое тело и диполь (рис. 1). Уравнение (5) рассматривается в областях $r \geq a$, $a_1 \leq r \leq a$ и $0 \leq r \leq a_1$. Для первой области, где $\hat{\varepsilon} = 1$, $\hat{\mu} = 1$ и правая часть равна нулю, решение находится методом разделения переменных. Решение представляется в виде суперпозиции расходящихся сферических волн:

$$H_\varphi(r, \theta) = \frac{1}{kr} \sum_{q=1}^{\infty} B_q \zeta_q(kr) T_q(\theta), \quad (6)$$

где B_q — коэффициенты, подлежащие определению, $\zeta_q(kr)$ — функции Риккати–Ханкеля I рода,

$$T_q(\theta) = \sqrt{\frac{2q+1}{2q(q+1)}} P_q^1(\cos \theta) \quad (7)$$

ортонормированные поперечные функции, определяемые присоединенными функциями Лежандра $P_q^1(\cos \theta)$.

Решение уравнения (5) для поля внутри центральной сферы ($0 \leq r \leq a_1$), где присутствует электрический диполь и $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_1$, $\hat{\mu} = \mu_1$, записывается в виде разложения

$$H_\varphi(r, \theta) = \frac{1}{kr} \sum_{q=1}^{\infty} \left(A_q^i \zeta_q(k_1 r) + A_q \psi_q(k_1 r) \right) T_q(\theta) \quad (8)$$

с неизвестными коэффициентами A_q , соответствующими рассеянному полю, функциями Риккати–Бесселя $\psi_q(k_1 r)$, волновым числом $k_1 = k \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$ и коэффициентами

$$A_q^i = -\frac{2ik_1^2 I^e l}{4\sqrt{3}\pi\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} \delta_{q1}, \quad (9)$$

соответствующими полю электрического диполя.

Решение уравнения (5) для поля в области $a_1 \leq r \leq a$, где $\hat{\varepsilon} = \varepsilon(r, \theta)$, $\hat{\mu} = \mu(r, \theta)$ внутри слоя и $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_1$, $\hat{\mu} = \mu_1$ вне него, ищется в виде разложения:

$$H_\varphi(r, \theta) = \sum_{q=1}^{\infty} H_q(r) T_q(\theta) \quad (10)$$

по поперечным функциям (7) с неизвестными коэффициентами $H_q(r)$, зависящими от r .

Магнитные поля (6), (8), (10) и соответствующие поперечные электрические поля, получаемые из (3), должны быть непрерывны на сферических поверхностях $r = a_1$ и $r = a$. Проектирование этих граничных условий на поперечные функции (7) с весом $\sin \theta$ дает следующие соотношения для коэффициентов разложения:

$$A_p^i \zeta_p(k_1 a_1) \delta_{p1} + A_p \psi_p(k_1 a_1) - k a_1 H_p(a_1) = 0, \quad (11)$$

$$k a H_p(a) - B_p \zeta_p(ka) = 0, \quad (12)$$

$$\sum_{q=1}^{\infty} \tilde{\varepsilon}_{pq}(a_1) \frac{\partial (rH_p(r))}{\partial r} \Big|_{r=a_1} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} (A_p^i \xi'_p(k_1 a_1) \delta_{p1} + A_p \psi'_p(k_1 a_1)), \quad (13)$$

$$\sum_{q=1}^{\infty} \tilde{\varepsilon}_{pq}(a) \frac{\partial (rH_p(r))}{\partial r} \Big|_{r=a} = B_p \zeta'_p(ka), \quad (14)$$

где

$$\tilde{\varepsilon}_{pq} = \int_0^{\pi} \frac{1}{\hat{\varepsilon}(r, \theta)} T_p(\theta) T_q(\theta) \sin \theta d\theta, \quad (15)$$

и $p = 1, 2, \dots$.

Магнитное поле (10) должно удовлетворять уравнению (5). Подстановка (10) в (5), проектирование (5) на поперечные функции (7), учет свойств функций Лежандра

$$P_q^1(\theta) = -\frac{dP_q}{d\theta}, \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP_q}{d\theta} \right) = -q(q+1)P_q, \quad (16)$$

интегрирование второго слагаемого в (5) по частям дают следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dr} \sum_{q=1}^{\infty} \tilde{\varepsilon}_{pq}(r) \frac{dV_q}{dr} - \frac{\alpha_p}{r^2} \sum_{q=1}^{\infty} \tilde{\varepsilon}_{0pq}(r) \alpha_q V_q + \tilde{\mu}_{pq} k V_p = 0, \quad (17)$$

где $V_q(r) = krH_q(r)$,

$$\tilde{\mu}_{pq}(r) = \int_0^{\pi} \frac{1}{\hat{\varepsilon}(r, \theta)} T_p(\theta) T_q(\theta) \sin \theta d\theta, \quad (18)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{0pq}(r) = \int_0^{\pi} \hat{\mu}(r, \theta) \bar{P}_p(\theta) \bar{P}_q(\theta) \sin \theta d\theta, \quad (19)$$

$$\bar{P}_p(\theta) = \sqrt{\frac{2p+1}{2}} P_p(\cos \theta), \quad (20)$$

а $\alpha_p = \sqrt{p(p+1)}$. Полиномы (20) – это нормированные полиномы Лежандра.

Решение системы (17) осуществляется с использованием одномерного метода конечных элементов в проекционной форме. Представим неизвестные зависящие от r коэффициенты в виде разложения по конечному числу треугольных функций $f_n(r)$, $n = 1 \dots N$:

$$V_q(r) = \sum_{n=1}^N V_{nq} f_n(r), \quad (21)$$

где V_{nq} — неизвестные постоянные коэффициенты.

Проектирование уравнений (17) на треугольную функцию $f_n(r)$, интегрирование первого слагаемого по частям и подстановка (13), (14) сводят (17) к системе линейных алгебраических уравнений:

$$B_p \zeta'_p(ka) \delta_{n'N} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} (A_p^i \xi'_p(k_1 a_1) \delta_{p1} + A_p \psi'_p(k_1 a_1)) \delta_{n'1} + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{n=1}^N (I_1 - \alpha_p \alpha_q I_2 - I_3) V_{qn} = 0, \quad (22)$$

где

$$I_1 = k \int_{a_1}^a \tilde{\mu}_{pq}(r) f_n f_{n'} dr, \quad (23)$$

$$I_2 = \frac{1}{k} \int_{a_1}^a \tilde{\varepsilon}_{0pq}(r) \frac{f_n f_{n'}}{r^2} dr, \quad (24)$$

$$I_3 = \frac{1}{k} \int_{a_1}^a \varepsilon_{pq}(r) \frac{f_n}{dr} \frac{f_{n'}}{dr} dr, \quad (25)$$

для $n' = 1, 2, \dots, N$ и $p = 1, 2, \dots$.

Заключение

Уравнение (11), где $ka_1 H_p(a_1) = V_{1p}$, уравнения (22) и уравнение (12), где $ka H_p(a) = V_{Np}$, образуют полную систему линейных алгебраических уравнений. Её размер составляет $(N + 2)L$, где L — число учитываемых поперечных функций в (6), (8), (10). Матрица системы имеет блочно-ленточную структуру с тремя диагоналями.

Литература

1. Е. И. Семерня, С. П. Скобелев Модификация проекционного метода для анализа излучения радиального диполя в присутствии неоднородного тела вращения // Математическая физика. - 2020. - Т. 60, № 12. - С. 2131–2142.

Электродинамический волновой импеданс слоистого полупространства

Electrodynamic wave impedance of layered half-space

Плецинский Н.Б.

Казанский федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий, Казань, РФ.

pnb@kpfu.ru

Аннотация. Электродинамический волновой импеданс полупространства определяется как коэффициент в импедансном граничном условии для уравнений Максвелла, которому должны удовлетворять следы электрического и магнитного векторов ориентированной волны. Это условие представляет собой необходимое и достаточное условие разрешимости некоторой граничной задачи. Волновой граничный импеданс слоистого полупространства получен на основе зависимости между импедансными условиями на двух сторонах плоского слоя. Рассмотрена задача о скачке касательных компонент электромагнитного поля на границе раздела сред.

Введение

Электрический импеданс для элементов цепей переменного тока по Хевисайду представляет собой отношение комплексной амплитуды напряжения к комплексной амплитуде тока. В качестве акустического импеданса рассматривается отношение амплитуды звукового давления к колебательной объемной скорости. «В волновых движениях всех видов можно обычно найти две величины ... такие, что ... их отношение может быть принято за обобщенный импеданс» [1, с. 128].

В одномерном случае, когда электромагнитное поле зависит только от координаты z , уравнения Максвелла распадаются на две независимые подсистемы. Волновыми импедансами обычно называют отношения $W_1 = E_x/H_y$ и $W_2 = -E_y/H_x$. В однородной изотропной среде $W_1 = W_2 = \sqrt{\mu/\varepsilon}$, это импеданс среды.

Покажем, что в трехмерном случае волновой электродинамический импеданс может быть определен как коэффициент в условии разрешимости некоторой переопределенной задачи для уравнений Максвелла.

Импедансные граничные условия и электродинамический импеданс

Переопределенная задача. Рассмотрим общую схему вывода условий разрешимости одной переопределенной задачи для системы уравнений с частными производными 1-го порядка с постоянными коэффициентами в полупространстве [2]. Пусть $u = (u_1, \dots, u_{2m})$ – решение системы из $2m$ уравнений, зависящее от переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$ и z . После интегрального преобразования Фурье $x \rightarrow \xi$ эта система преобразуется в систему уравнений $u' = Au$, дифференцирование проводится по z , а ξ рассматривается как параметр и в дальнейшем не указывается.

Предположим, что матрица A имеет собственные значения $\lambda_j, j = 1..2m$, и их геометрическая кратность совпадает с алгебраической кратностью. Тогда $u(z) = BD(z)c$, где B – матрица из собственных векторов матрицы A как из столбцов, $D(z)$ – диагональная матрица из элементов $e^{\lambda_j z}$ и c – вектор из $2m$ элементов, не зависящих от z . Будем говорить, что решение $u(z)$ ориентировано, если у вектора c половина элементов равна нулю.

Задача определения ориентированного решения $u(z)$ в полупространстве $z > 0$ по следу $u(0)$ на гиперплоскости $z = 0$ переопределена – условий больше чем неизвестных. Поэтому вектор $u(0)$ должен удовлетворять необходимому и достаточному условию вида $Mu(0) = 0$, где M – некоторая матрица размером $m \times 2m$. Разделим матрицу и вектор на блоки так: $M^L u^T(0) + M^R u^B(0) = 0$. Если $u^T(z)$ можно интерпретировать как потенциал (силу, напряжение или температуру), а $u^B(z)$ – как поток (скорость, ток или тепловой поток), то это условие будем называть импедансным условием, а матрицу $W = -(M^L)^{-1}M^R$ – импедансом.

Запишем условие $Bc = u(0)$ в блочном виде: $B^{LT}c^T + B^{RT}c^B = u^T(0)$, $B^{LB}c^T + B^{RB}c^B = u^B(0)$. Если ориентация решения задана равенством $c^B = 0$, то $M^L B^{LT} + M^R B^{LB} = 0$. Тогда импеданс $W = B^{LT}(B^{LB})^{-1}$. Импеданс ориентированного решения в однородной среде не зависит от z .

Электродинамический волновой импеданс. Запишем уравнения Максвелла для комплексных амплитуд, применим преобразование Фурье $x, y \rightarrow \xi, \eta$ и исключим неизвестные E_z и H_z . Получим систему уравнений

$$E' = \frac{-1}{i\omega\epsilon} P H, H' = \frac{1}{i\omega\mu} P E, P = P(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \xi\eta & k^2 - \xi^2 \\ \eta^2 - k^2 & -\xi\eta \end{pmatrix}, \quad (1)$$

здесь $E = (E_x, E_y)$, $H = (H_x, H_y)$ и $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$. Пусть $\gamma = \gamma(\xi, \eta) = \sqrt{k^2 - \xi^2 - \eta^2}$, причем $\text{Re } \gamma \geq 0$ или $\text{Im } \gamma > 0$. Матрица P такая, что $P^2 = -k^2 \gamma^2 I$, I – единичная матрица. Решение этой системы уравнений

$$E = e^{i\gamma z} c^+ + e^{-i\gamma z} c^-, H = \frac{-1}{\omega\mu\gamma} P [e^{i\gamma z} c^+ - e^{-i\gamma z} c^-], \quad (2)$$

где $c^\pm = c^\pm(\xi, \eta)$ – двумерные векторы. При $c^- = 0$ имеем положительно ориентированные волны, при $c^+ = 0$ – отрицательно ориентированные волны. Легко проверить, например, что положительно ориентированные волны переносят энергию в направлении оси z или затухают в этом направлении.

В рассматриваемом случае матрица B состоит из блоков

$$B^{LT} = B^{RT} = I, -B^{LB} = B^{RB} = \frac{1}{\omega\mu\gamma} P. \quad (3)$$

Следовательно, волновой электродинамический импеданс $W = \frac{1}{\omega\epsilon\gamma} P$, матрица P определена формулой (1). При этом вектор-функции $e(x, y), h(x, y)$ являются следами положительно ориентированной волны на плоскости $z = 0$ тогда и только тогда, когда их образы Фурье удовлетворяют импедансному условию $e - Wh = 0$ (иначе $Pe + \omega\mu\gamma h = 0$ или $\omega\epsilon\gamma e - Ph = 0$).

Переопределенная задача для слоя. Рассмотрим неориентированное электромагнитное поле в слое $z_j < z < z_{j+1}$ с параметрами μ_j, ϵ_j . Обозначим e_j^+, h_j^+ и e_{j+1}^-, h_{j+1}^- образы Фурье следов касательных составляющих электрического и магнитного векторов на нижней и верхней границах слоя соответственно. Если зададим одновременно все четыре следа, то получим переопределенную задачу. Эти следы должны быть связаны друг с другом линейными соотношениями, так как все они выражаются через векторы c_j^+, c_j^- по формулам (2). Условия разрешимости переопределенной задачи можно представить в виде

$$e_{j+1}^- = \cos \gamma_j d_j \cdot e_j^+ + i \frac{\sin \gamma_j d_j}{\omega \epsilon_j \gamma_j} P_j h_j^+, h_{j+1}^- = -i \frac{\sin \gamma_j d_j}{\omega \mu_j \gamma_j} P_j e_j^+ + \cos \gamma_j d_j \cdot h_j^+, \quad (4)$$

здесь $d_j = z_{j+1} - z_j$. Следовательно, если на верхней границе слоя задано импедансное условие вида $e_{j+1}^+ - W_{j+1} h_{j+1}^+ = 0$, то оно пересчитывается в импедансное условие вида $e_j^- - W_j h_j^- = 0$ на нижней границе с помощью формул (4).

Импеданс слоистого полупространства. Пусть полупространство $z > 0$ состоит из нескольких слоев, разделенных плоскостями $z = z_j, j = 1..n$. На границах раздела сред должны быть непрерывны касательные составляющие электрического и магнитного векторов. Если в верхнем полубесконечном слое электромагнитное поле должно быть положительно ориентировано, то на его границе $z = z_n$ должно быть выполнено импедансное условие $e_{n+1}^+ - W_{n+1} h_{n+1}^+ = 0$, где W_{n+1} – импеданс среды. Последовательно пересчитывая импедансы через слои, дойдем до условия вида $e_1^+ - W_1 h_1^+ = 0$ на плоскости $z = 0$. Величину W_1 будем называть граничным волновым импедансом слоистого полупространства.

Задача о скачке. Нужно найти электромагнитные поля в верхнем полупространстве $z > 0$ и в нижнем полупространстве $z < 0$, удовлетворяющие условиям сопряжения при $z = 0$ вида $e^+(x, y) - e^-(x, y) = a(x, y)$, $h^+(x, y) - h^-(x, y) = b(x, y)$ и импедансным граничным условиям для уходящих на бесконечности волн.

Перейдем к образам Фурье в условиях сопряжения и получим систему из четырех линейных уравнений вида $e^+ - e^- = a$, $h^+ - h^- = b$, $e^+ - W^+ h^+ = 0$, $e^- - W^- h^- = 0$. Здесь W^+ – волновой граничный импеданс верхнего полупространства для положительно ориентированных волн, W^- – волновой граничный импеданс нижнего полупространства для отрицательно ориентированных волн. Эта система уравнений имеет единственное решение. Компоненты искомых полей в полупространствах находятся по следам полей на плоскости $z = 0$.

К задаче о скачке сводится задача об отражении и преломлении электромагнитной волны, набегающей на плоскую границу раздела сред. Заметим, что в случае сред без поглощения следы компонент плоской волны на плоскости $z = 0$ нужно рассматривать как обобщенные функции (распределения медленного роста на бесконечности), так как их образы Фурье представляют собой ϕ -функции.

Явное решение задачи о скачке можно использовать при выводе интегрального уравнения задачи дифракции электромагнитной волны на тонком проводящем экране, размещенном на границе раздела сред. Из граничных условий на экране и вне экрана следует, что вне экрана $a(x, y) = 0, b(x, y) = 0$, а на экране вектор-функция $a(x, y)$ задана, а вектор-функция $b(x, y)$ является искомой величиной.

Заключение

Таким образом, в неограниченном слое слоистого полупространства могут распространяться только уходящие на бесконечность электромагнитные волны, если на границе полупространства задано импедансное граничное условие, в котором содержится граничный импеданс волны, ориентированной в соответствующем направлении.

Литература

1. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т.1. — М.: ИЛ, 1958. — 930 с.
2. Pleshchinskii N. B., Stekhina K.N. Wave impedances of elastic stratified medium // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — Vol. 44, no. 1. — P. 430–436.

Построение приближённых граничных условий для задач дифракции на телах высокой проводимости с рёбрами на границе

Construction of approximate boundary conditions for problems of diffraction on highly-conductive bodies with edges on the boundary

Шушарин М.М., Могилевский И.Е., Боголюбов А.Н.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ

nirashush1999@gmail.com, imogilevsky@mail.ru, bogan7@yandex.ru

Аннотация. Импедансные граничные условия были получены А.Н. Щукиным и М.А. Леонтовичем для задач дифракции на проводящих телах с гладкой границей. В данной работе производится построение приближённых граничных условий для тел высокой проводимости при наличии рёбер на границе области. Для этого применяется метод, основанный на работах О.И. Паныча, где для условий Щукина-Леонтовича были получены старшие порядки малости, учитывающие кривизну границы. Рассматривается задача дифракции вертикально-поляризованной волны на клине без скачка магнитной проницаемости на поверхности раздела сред. В такой постановке у электромагнитного поля нет особенности в окрестности ребра, что существенно упрощает задачу. Для уравнения Гельмгольца с отрицательным коэффициентом, где справедлив принцип максимума, проводится оценка порядка аппроксимации решения во внешней области.

Введение

Импедансные граничные условия, также называемые условиями Щукина-Леонтовича, применяются в задачах, где приближение идеального проводника описывает решение недостаточно точно, но требуется избежать расчёта поля в области внутри проводника. Приближённые граничные условия, представленные в работах А.Н. Щукина и М.А. Леонтовича, были выведены для плоской границы [1]. Их результаты были расширены в диссертации О.И. Паныча [2], где рассматривались границы произвольной конечной кривизны, при этом было показано, что кривизна входит в старшие порядки малости импедансных условий. Также О.И. Паныч сформулировал условия применимости импедансных граничных условий, одним из которых является требование малости толщины скин-слоя по сравнению с радиусом кривизны границы. Очевидно, что это условие нарушается, если на границе раздела сред присутствуют рёбра.

В данной работе рассматривается частный случай задачи дифракции на цилиндре с ребром, где электромагнитное поле не имеет сингулярности вблизи ребра. Такое условие реализуется, например, в постановке, где $H_z = 0$, а магнитная проницаемость не испытывает скачка на поверхности раздела сред. Для такой постановки, модифицируя метод, предложенный О. И. Панычем, получены приближённые граничные условия на границе тела высокой проводимости для задачи дифракции.

Описание работы

Метод, используемый в работе, основан на способе получения старших компонент приближённых граничных условий для поверхностей конечной кривизны из работ О. И. Паныча. Основной особенностью этого метода заключается в том, что по степеням малого параметра решение раскладывается не во всей внешней области, а только на границе раздела сред S , что позволяет аппроксимировать решение на границе. В силу устойчивости задачи по граничным условиям, решение во внешней области будет близко к точному при высокой проводимости.

Рассматривается задача дифракции для вертикальной поляризации при $\mu = 1$. Пусть волновые числа $k_e = \frac{\omega}{c}$, $k_i^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon'$, комплексная диэлектрическая проницаемость: $\varepsilon' = \varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$, а источники заданы на конечном носителе: $\text{supp} f \subset \{M \in \Omega_e : R_M < K\}$. Предполагаем, что проводимость во внутренней области Ω_i высока: $\sigma \rightarrow \infty$. Для задачи

$$\begin{cases} \Delta E^i(M) + k_i^2 E^i(M) = f(M), M \in \Omega_i, \\ \Delta E^e(M) + k_e^2 E^e(M) = 0, M \in \Omega_e, \\ E^e|_S = E^i|_S, \frac{\partial E^e}{\partial n}\bigg|_S = \frac{\partial E^i}{\partial n}\bigg|_S, \\ \frac{\partial E^e}{\partial r} - ik_e E^e = \bar{o}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), r \rightarrow \infty \end{cases} \quad (1)$$

построим решение во внутренней области в виде потенциала простого слоя, а во внешней – через функцию Грина G задачи Дирихле:

$$\begin{aligned} E^i(M) &= \iint_S \mu(Q) \psi_i(M, Q) dS_Q, M \in \Omega_i, \\ E^e(M) &= E_0(M) + \iint_S \frac{\partial G}{\partial n}(M, Q') \iint_S \mu(Q) \psi_i(Q', Q) dS_Q dS_Q, M \in \Omega_e, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\psi_i = \frac{e^{ik_i R_{MQ}}}{R_{MQ}}$, $E_0(M)$ – решение однородной задачи Дирихле.

Решение, построенное таким образом, удовлетворяет [3] всем условиям задачи кроме условия отсутствия скачка нормальной производной при переходе через поверхность раздела сред. Из условия на скачок нормальной производной выводится интегро-дифференциальное уравнение для плотности поверхностного потенциала $\mu(Q)$, которое можно решить приближённо, раскладывая по степеням малого параметра $\frac{1}{|k_i|}$ потенциалы простого и двойного слоя, входящие в уравнение. Так интегро-дифференциальное уравнение сводится к алгебраическому, из которого, в свою очередь, выражается соотношение между нормальной производной и значением решения на границе. Основным отличием полученных приближённых граничных условий от импедансных условий для гладких границ является наличие в них связи между значениями решения по разные стороны ребра.

Для соответствующей задачи, где во внутренней области решение подчиняется уравнению Гельмгольца, а во внешней – уравнению Пуассона, в которой справедлив принцип максимума, проведена оценка порядка аппроксимации приближённым решением точного во внешней области.

Заключение

Рассмотрена задача дифракции на теле с ребром для случая, где электромагнитное поле не имеет особенности вблизи ребра. Модифицируя метод из работ О.И. Паныча, получены приближённые граничные условия на поверхности раздела сред для задачи дифракции, а для аналогичной задачи с уравнением Гельмгольца во внутренней области и уравнением Пуассона во внешней, сделана оценка порядка аппроксимации решения. Полученные граничные условия могут быть использованы для построения приближённого решения в задачах дифракции на высокопроводящих телах сложной формы.

Литература

1. А. Г. Свешников, И. Е. Могилевский Избранные математические задачи теории дифракции — Физический Факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2012.
2. О. И. Паныч О приближённых краевых условиях в задачах дифракции — Диссертация на соискание учёной степени кандидата ф.-м. наук, кафедра математики, Москва, 1951.
3. А. Г. Свешников, А. Н. Боголюбов, В. В. Кравцов Лекции по математической физике — Физический Факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 1993.

Численные методы

Дискретная модель поглощения мощного электромагнитного импульса слоем плотной плазмы

A discrete model of absorption of a powerful electromagnetic pulse by a dense plasma layer

Бородачев Л.В.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ.

borodach2000@mail.ru

Аннотация. Работа посвящена построению численно экономичной и физически адекватной модели взаимодействия ультрамощных сверхкоротких лазерных импульсов с приповерхностной плазмой конденсированной мишени. В целях верификации модели рассмотрено нормальное падение плоскополяризованной волны большой амплитуды, сопровождающееся ее поглощением в режиме аномального скин-эффекта.

Введение

Совершенствование технологии создания твердотельных лазеров привело к возможности получения электромагнитных импульсов сверхкороткой длительности (менее пс) и весьма большой интенсивности (порядка сотен ТВт). Их качественное своеобразие проявляется, в частности, при падении на конденсированные мишени, когда в поверхностном слое вещества образуется закритичная плазма с температурой в сотни эВ. Ионы в масштабах времени взаимодействия не успевают сдвинуться сколь-нибудь заметным образом, граница плазмы оказывается резкой, и энергия излучения активно усваивается электронной компонентой [1], [2].

В этой связи можно ожидать, что с повышением мощности пикосекундных лазеров удастся получить лабораторную плазму большой концентрации и высокой температуры [3]. Помимо очевидно значимого практического приложения, связанного с проблемой УТС, рассматриваемое взаимодействие весьма интересно и в плане фундаментальных вопросов физики высокотемпературной плазмы.

Как известно, в условиях активного поглощения падающая электромагнитная волна экспоненциально затухает в масштабах скин-слоя ("скинируется") [4]. В силу взаимодействия электронов с высокочастотным полем излучения здесь появляется группа горячих частиц, играющих основную роль в перекачке части волновой энергии в кинетическую. Их интенсивное тепловое движение вызывает существенное возмущение самосогласованных полей и токов, и корректное представление общей физической картины возможно лишь на кинетическом уровне [2]. Причем в бесстолкновительном приближении, ибо в силу значительной мощности накачки (порядка 10^{18} Вт/см²) тепловая скорость электронов скин-слоя такова, что длина их свободного пробега оказывается больше глубины проникновения внешнего коротковолнового поля в плазму. При этом сам процесс взаимодействия носит принципиально нелинейный характер, поскольку зависит от текущей температуры электронной компоненты, и происходит в режиме аномального скин-эффекта.

Отметим, что сложность изучаемого явления требует дальнейшей детализации и количественного уточнения существующей физической картины, которые в силу ее принципиальной нелинейности возможны только на базе активного использования численных экспериментов, в частности, по методу макрочастиц (ММ) как наиболее эффективному [5]. Учитывая значительную вычислительную ресурсоемкость ММ, первостепенное значение имеет при этом оптимальное модельное представление рассматриваемого процесса.

Цель настоящей работы состоит в построении численно экономичной и физически адекватной кинетической модели, позволяющей методом компьютерного эксперимента

рассмотреть случай сильных ультракоротких световых импульсов, когда энергия осцилляции электронов плазмы в поле поглощаемой волны излучения оказывается больше их характерной тепловой энергии, но меньше величины, требующей релятивистских поправок [6].

Построение дискретной модели

Указанные выше моменты физической картины позволяют достоверно представить процесс взаимодействия в рамках самосогласованной плазменной модели.

Отметим ее основные черты.

- Гибридное описание плазменных компонент: электроны в кинетическом представлении, ионы в виде однородного положительного фона, обеспечивающего глобальную электронейтральность всей системы.
- Бесстолкновительное приближение динамики частиц, ибо в силу значительной мощности накачки (порядка 10^{18} Вт/см²) тепловая скорость электронов скин-слоя такова, что длина их свободного пробега оказывается больше глубины проникновения внешнего коротковолнового поля в плазму.
- Низкочастотная (дарвинская, или безызлучательная) аппроксимация [7] внутренних электромагнитных полей. Существенная закритичность приповерхностной плазмы и вид падающего излучения обуславливают проявление эффектов, связанных с динамикой электронной компоненты, в масштабах скин-слоя (l_s) и на временах порядка периода световой волны ($1/\omega_o$). Отсюда следует сравнительно низкочастотный характер исследуемых процессов, что позволяет пренебречь поперечным током смещения в полевом формализме [8].
- Резкая граница плазма-вакуум с условиями излучения для полевой компоненты (отраженная часть падающей электромагнитной волны) и зеркальным отражением для частиц (динамической компоненты). В масштабах времени действия внешнего светового импульса ионы, по сути, остаются неподвижными, а электроны могут уходить в вакуум на расстояние дебаевского радиуса, который оказывается много меньше длины скин-слоя.
- Диффузная граница (с возможным излучением прошедшей волны) между «горячим» скин-слоем и «холодным» кором – основным объемом плазмы, обеспечивающая свободный вынос тепла (без выноса заряда) быстрыми частицами из области.

В целях верификации модели было рассмотрено нормальное к поверхности мишени падение S-поляризованного светового импульса. При этом учет известного соотношения – d лазерного пятна много больше длины скин-слоя l_s – позволил редуцировать фазовую геометрию системы, используя координаты (x, v_x, v_y, v_z), и провести компьютерные эксперименты со следующими базовыми параметрами:

$$L = 3l_s, \omega_0 = 0.1\omega_{pe}, \frac{B_0}{\sqrt{4\pi n_0 m_e c^2}} = 0.35$$

на базе обычных РС индивидуального пользования. Заметим, что при твердотельной плотности мишени указанные параметры соответствуют интенсивности светового излучения, близкой к релятивистскому порогу [3] и существенной закритичности приповерхностной плазмы [4].

Сравнение полученных данных с прогнозами теории [1], [2] и результатами соответствующих кинетических расчетов по методу крупных частиц в рамках полной электромагнитной модели с электрон-ионными столкновениями [9] позволило сделать вывод об их разумном совпадении. При этом в целом полученная физическая картина отвечает той, которая по предварительным оценкам должна иметь место при воздействии субпикосекундных импульсов неодимового лазера интенсивностью 10^{17} — 10^{19} Вт/см² на конденсированную мишень.

Таким образом, построенная на базе открытых самосогласованных систем дискретная безызлучательная модель дала возможность корректно описать практически важный режим аномального (бесстолкновительного) поглощения мощного

ультракороткого светового импульса приповерхностным слоем плазмы. В этой связи можно полагать, что она будет перспективна для численного анализа взаимодействия лазер – плазма в усложненных фазовых геометриях. Например, в случае косого к поверхности конденсированной мишени падения лазерного излучения.

Литература

1. *Milchberg H.M., Freeman R.R.* Studies of hot plasmas produced by an intense subpicosecond laser // *Phys. Fluids*. – 1990. – V. B 2. – P. 1395-1399.
2. *Гамалий Е.Г., Тихончук В.Т.* О воздействии мощных ультракоротких импульсов света на вещество // *Письма в ЖЭТФ*. – 1988. – Т. 48, №8. – С. 413-415.
3. *Андреев А.В., Гордиенко В.М., Савельев А.Б.* Ядерные процессы в высокотемпературной плазме, индуцируемой сверхкоротким лазерным импульсом // *Квантовая электроника*. – 2001. – Т. 31. – С. 941-956.
4. *Кондратенко А.Н.* Проникновение поля в плазму. – М.: Наука, 1979. – 231 с.
5. *Hockney R.W., Eastwood J.W.* Computer Simulation Using Particles. – New York: McGraw-Hill, 1981. – 540 p.
6. *Галкин А.Л., Клинов В.К., Коробкин В.В.* Генерация электроном субаттосекундных электромагнитных импульсов при движении в релятивистски интенсивных лазерных полях // *Прикладная физика*. – 2009. – №1. – С. 65-71.
7. *Darwin C. G.* Dynamical Motions of Charged Particles // *Philosophical Magazine*. — 1920. — V. 39. — P. 537-551.
8. *Бородачев Л. В.* Критерии адекватности безызлучательного предела в численных исследованиях разреженной плазмы // *Известия РАН. Серия физическая*. – 2025. – Т. 89, № 4. – С. 627-631.
9. *Denavit J.* Absorption of high-intensity subpicosecond lasers on solid density targets // *Phys. Rev. Lett.* – 2002. – V. 69. – P. 3052-3055.

Направляемые волны периодического волновода в слоистой среде

Periodic waveguide guided waves in the layered media

Быков А.А.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, Москва, РФ.

abykovmsu@mail.ru

Аннотация. Сформулирована и обоснована математическая модель нерегулярного волновода с периодической зависимостью параметров среды подложки от продольной координаты, основанная на применении метода Галеркина. Эта модель обобщает модель волновода с периодически модулированным импедансом. Материал подложки предполагается слабо поглощающим, что приводит к уходу энергии направляемой моды в подложку и проявляется в виде наличия мнимой части продольного волнового числа. Показано, что периодическая зависимость показателя преломления подложки от координаты порождает лакуны на дисперсионной кривой. Решение представляется в виде линейной комбинации координатных функций, каждая из которых точно удовлетворяет уравнениям Максвелла внутри цилиндрической области, а на границе набор координатных функций образует полную систему. В периодически модулированном материале подложки решение представляется в виде ряда Фурье по функциям, удовлетворяющим условиям Флоке. Для вычисления параметра Флоке (который в этой задаче выполняет роль продольного волнового числа) находим электрическое и магнитное поля как отрезки ряда Фурье по полной системе квазипериодических функций (базиса Флоке). Для расчёта коэффициентов Фурье мы используем метод Галеркина, поэтому коэффициент Фурье с заданным фиксированным номером m зависит также от количества координатных функций Фурье-Флоке n . Построено также разложение решения в ряд по степеням малого параметра. Для решения

задачи о собственных волнах периодического волновода с потерями на границах мы в данной работе применим комбинацию двух методов: поверхностный вариант метода Галеркина и гомотопии, который называют также методом погружения, методом инвариантного погружения. Метод гомотопии основан на погружении заданной задачи в семейство задач, зависящих от искусственно введённого в постановку задачи параметра.

Рассмотрим электромагнитное поле цилиндрического волновода в области $D = \{x \in (-\infty, +\infty), y \in (-\infty, +\infty)\}$. Рассматриваем поля вида $\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(x, y)e^{-i\omega t}$, $\vec{H}(x, y, z, t) = \vec{H}(x, y)e^{-i\omega t}$. Величину диэлектрической проницаемости ε предполагаем периодической функцией координаты x : $\varepsilon(x + a) = \varepsilon(x)$. Требуется найти решения уравнений Максвелла в D , удовлетворяющие условию квазипериодичности (Флоке): $\vec{E}(x + a, y) = e^{i\gamma a} \vec{E}(x, y)$, $\vec{H}(x + a, y) = e^{i\gamma a} \vec{H}(x, y)$. Для расчета компонент полей из уравнений получим уравнения $\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \chi^2 E_z = 0$, $\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \chi^2 H_z = 0$, причем $\vec{E}_\perp = -\frac{i\omega\mu}{\chi^2} \text{rot}_\perp \vec{H}_z$, $\vec{H}_\perp = \frac{i\omega\varepsilon}{\chi^2} \text{rot}_\perp \vec{E}_z$, где $\vec{E}_\perp = (E_x, E_y)$, $\vec{H}_\perp = (H_x, H_y)$. Условия квазипериодичности приводят к следующим выражениям координатных функций метода Галеркина [1]: $\varphi_m(x) = e^{i\gamma_m x}$, $\gamma_m = \gamma + \frac{2\pi m}{a}$, $m \in \{-\infty, +\infty\}$. Введем также дополняющие координатные функции по другой координате (в данном случае это y), мы укажем также значения показателей для волн, бегущих в направлениях $\pm y$: (+) и (-): $\psi_m^{(+)}(y) = e^{i\tilde{p}_m^{(+)} y}$, $\psi_m^{(-)}(y) = e^{i\tilde{p}_m^{(-)} y}$, $\tilde{p}_m^{(-)} = -\tilde{p}_m^e$, $\tilde{p}_m^{(+)} = \tilde{p}_m^e$, $\tilde{p}_m^e = \sqrt{\chi^2 - \gamma_m^2}$. Выберем ветвь квадратного корня так, чтобы показатель в направлении $+y$ имел положительную вещественную часть. Общее решение имеет вид:

$$\begin{cases} E_z(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varphi_m(x) (\psi_m^{(+)}(y) e_m^{(+)} + \psi_m^{(-)}(y) e_m^{(-)}), \\ H_z(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) (\psi_n^{(+)}(y) h_n^{(+)} + \psi_n^{(-)}(y) h_n^{(-)}), \end{cases} \quad (1)$$

$e_m^{(-)}$, $e_m^{(+)}$, $h_m^{(-)}$, $h_m^{(+)}$ - коэффициенты Фурье. Для вычисления этих коэффициентов мы используем конечный отрезок ряда Фурье, а для коэффициентов - метод Галеркина [2]. Пусть, начиная с этого момента, задано число $\mathbf{n}$, определяющее количество используемых для записи приближённого решения координатных функций. Пусть $\Phi(x) = (\varphi_{-\mathbf{n}}(x), \dots, \varphi_{\mathbf{n}}(x))^T$, $\Upsilon^{(+)}(y) = \text{diag}(\psi_{-\mathbf{n}}^{(+)}(y), \dots, \psi_{\mathbf{n}}^{(+)}(y))$, $\Upsilon^{(-)}(y) = \text{diag}(\psi_{-\mathbf{n}}^{(-)}(y), \dots, \psi_{\mathbf{n}}^{(-)}(y))$, $\Phi(x)$ есть вектор - столбец координатных функций, $\Upsilon^{(+)}(y)$, $\Upsilon^{(-)}(y)$ - диагональные матрицы. Используем далее векторы-столбцы коэффициентов Фурье: $e^{(+)} = (e_{-\mathbf{n}}^{(+)}, \dots, e_{\mathbf{n}}^{(+)})^T$, $e^{(-)} = (e_{-\mathbf{n}}^{(-)}, \dots, e_{\mathbf{n}}^{(-)})^T$, $h^{(+)} = (h_{-\mathbf{n}}^{(+)}, \dots, h_{\mathbf{n}}^{(+)})^T$, $h^{(-)} = (h_{-\mathbf{n}}^{(-)}, \dots, h_{\mathbf{n}}^{(-)})^T$. Таким образом, далее везде в векторах имеется ровно $N = 2\mathbf{n} + 1$ идущих подряд координатных функций. Пусть диагональные матрицы M , $P^{(+)}$, $P^{(-)}$ содержат на диагонали числа $\{\mu_m\}$, $\{\tilde{p}_m^{(+)}\}$, $\{\tilde{p}_m^{(-)}\}$. Запишем представления Галеркина для полей в виде векторно - матричных равенств:

$$\begin{cases} E_z(x, y) = \Phi^T(x) \Upsilon^{(+)}(y) e^{(+)} + \Phi^T(x) \Upsilon^{(-)}(y) e^{(-)}, \\ H_z(x, y) = \Phi^T(x) \Upsilon^{(+)}(y) h^{(+)} + \Phi^T(x) \Upsilon^{(-)}(y) h^{(-)}. \end{cases} \quad (2)$$

В области подложки решаем уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \chi^2 \rho(x) E_z = 0, \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \chi^2 \rho(x) H_z = 0, \end{cases} \quad (3)$$

причём $\rho(x+a) = \rho(x)$. Запишем представления Галеркина для полей в виде: $E_z(x, y) = \Phi^T(x)Y^{(e)}(y)$, $H_z(x, y) = \Phi^T(x)Y^{(h)}(y)$. Теперь обобщённый оператор Гельмгольца примет вид:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \chi^2 \rho(x) E_z = \frac{d^2 \Phi^T}{dx^2} Y^{(e)} + \Phi^T \frac{d^2 Y^{(e)}}{dy^2} + \chi^2 \rho(x) \Phi^T(x) Y^{(e)}(y).$$

Для расчёта коэффициентов ряда Фурье $Y^{(e)}(y)$ в области подложки используем метод Галеркина:

$$-\langle \frac{d\Phi^{\hat{a}}}{dx} | 1 | \frac{d\Phi^T}{dx} \rangle \cdot Y^{(e)} + \langle \Phi^{\hat{a}} | 1 | \Phi^T \rangle \cdot \frac{d^2 Y^{(e)}}{dy^2} + \chi^2 \langle \Phi^{\hat{a}} | \rho(x) | \Phi^T \rangle \cdot Y^{(e)},$$

и для расчёта $Y^{(e)}(y)$ получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\langle \Phi^{\hat{a}} | 1 | \Phi^T \rangle \cdot \frac{d^2 Y^{(e)}}{dy^2} + [\chi^2 \langle \Phi^{\hat{a}} | \rho(x) | \Phi^T \rangle - \langle \frac{d\Phi^{\hat{a}}}{dx} | 1 | \frac{d\Phi^T}{dx} \rangle] \cdot Y^{(e)}(y) = 0, \quad (4)$$

Частные решения ищем в виде

$$Y^{(e)}(y) = \vec{W} \cdot e^{i\lambda(y-b)} \cdot c^{(+)} + \vec{W} \cdot e^{-i\lambda(y-b)} \cdot c^{(-)}.$$

Получим

$$\lambda^2 \langle \Phi^{\hat{a}} | 1 | \Phi^T \rangle \vec{W} = [\chi^2 \langle \Phi^{\hat{a}} | \rho(x) | \Phi^T \rangle - \langle \frac{d\Phi^{\hat{a}}}{dx} | 1 | \frac{d\Phi^T}{dx} \rangle] \cdot \vec{W}, \quad (5)$$

Пусть W и Λ есть полная система собственных векторов и собственных значений задачи (5). Тогда общее решение уравнения (4) имеет вид $Y^{(e)}(y) = W e^{i\Lambda(y-b)} c^{(+)} + W e^{-i\Lambda(y-b)} c^{(-)}$, а решение, удовлетворяющее условию отсутствия источников на бесконечности, получается при $c^{(-)} = 0$: $Y^{(e)}(y) = W e^{i\Lambda(y-b)} c^{(+)}$. В векторно-матричном виде запишем также выражения для поперечных компонент полей:

$$\begin{cases} E_x = -\frac{i\omega\mu}{\chi^2} \frac{\mathbf{D}H_z}{\mathbf{D}y}, & E_y = +\frac{i\omega\mu}{\chi^2} \frac{\mathbf{D}H_z}{\mathbf{D}x}, \\ H_x = \frac{i\omega\varepsilon}{\chi^2} \frac{\mathbf{D}E_z}{\mathbf{D}y}, & H_y = -\frac{i\omega\varepsilon}{\chi^2} \frac{\mathbf{D}E_z}{\mathbf{D}x}, \end{cases} \quad (6)$$

$$\frac{\mathbf{D}E_z}{\mathbf{D}x} = \frac{d\Phi^T}{dx} Y^{(+)} e^{(+)} + \frac{d\Phi^T}{dx} Y^{(-)} e^{(-)}, \quad \frac{\mathbf{D}H_z}{\mathbf{D}x} = \frac{d\Phi^T}{dx} Y^{(+)} h^{(+)} + \frac{d\Phi^T}{dx} Y^{(-)} h^{(-)},$$

$$\frac{\mathbf{D}E_z}{\mathbf{D}y} = \Phi^T \frac{dY^{(+)}}{dy} e^{(+)} + \Phi^T \frac{dY^{(-)}}{dy} e^{(-)}, \quad \frac{\mathbf{D}H_z}{\mathbf{D}y} = \Phi^T \frac{dY^{(+)}}{dy} h^{(+)} + \Phi^T \frac{dY^{(-)}}{dy} h^{(-)}.$$

На поверхности сопряжения волноведущей области и подложки: $y = b$, одновременно верно $E_z(x, y)|_{y=b-0} = E_z(x, y)|_{y=b+0}$, $\frac{\partial E_z(x, y)}{\partial y}|_{y=b-0} = \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial y}|_{y=b+0}$, поэтому

одновременно

$$\begin{cases} E_z(x, y)|_{y=b-0} = \Phi^T(x)(Y^{(+)}(b)e^{(+)} + Y^{(-)}(b)e^{(-)}), \\ E_z(x, y)|_{y=b+0} = \Phi^T(x)W(e^{i\Lambda(y-b)}c^{(+)} + e^{-i\Lambda(y-b)}c^{(-)}). \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \left. \frac{dE_z}{dy} \right|_{y=b-0} = \Phi^T(x)(iP^{(+)}Y^{(+)}(b)e^{(+)} + iP^{(-)}Y^{(-)}(b)e^{(-)}), \\ \left. \frac{dE_z}{dy} \right|_{y=b+0} = \Phi^T(x)W(i\Lambda e^{i\Lambda(y-b)}c^{(+)} - i\Lambda e^{-i\Lambda(y-b)}c^{(-)}). \end{cases} \quad (8)$$

Условия проекционного сшивания при $y = b$ дадут

$$\begin{cases} Y^{(+)}(b)e^{(+)} + Y^{(-)}(b)e^{(-)} = W(c^{(+)} + c^{(-)}), \\ iP^{(+)}Y^{(+)}(b)e^{(+)} + iP^{(-)}Y^{(-)}(b)e^{(-)} = i\Lambda W(c^{(+)} - c^{(-)}), \end{cases} \quad (9)$$

Так как $c^{(-)} = 0$, исключим из этой системы $c^{(-)}$. Добавим условие $e_m^{(+)} + e_m^{(-)} = 0$ на поверхности $y = 0$ и получим нелинейное уравнение для вычисления γ (обычно называемое характеристическим уравнением):

$\det[(I - \Lambda^{-1}P^{(+)}Y^{(+)}(b) - (I - \Lambda^{-1}P^{(-)}Y^{(-)}(b))]e = 0,$
 Затем находим коэффициенты Фурье направляемой моды:

$$[(I - \Lambda^{-1}P^{(+)}Y^{(+)}(b) - (I - \Lambda^{-1}P^{(-)}Y^{(-)}(b))]e = 0, \quad (10)$$

Численное решение задачи (10) основано на методе [2].

Заключение

Разработан и обоснован численный метод расчёта направляемых мод периодического волновода на периодически модулированной подложке.

Литература

1. Свешников А.Г. Неполный метод Галеркина. // Докл. АН СССР, 1977. Т. 236, №.5. С. 1076-1079.
2. Быков А.А. Устойчивый численный метод построения фундаментальной матрицы для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. // Докл. АН СССР, 1984. Т. 274, №. 1. С.11-14.

Получение радиоизображения объектов при сканировании в ближней зоне на плоскости

Radar image construction in case of planar near field scanning

Викуловская А.А.^{1,2}, Коняев Д.А.^{1,3}

1) Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН, Москва, РФ;
 2) Московский физико-технический институт, Долгопрудный, РФ; 3) Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ.

arina2938@yandex.ru, konyaev@physics.msu.ru.

Аннотация. В работе рассматривается способ построения бистатистического радиоизображения объекта, облучаемого плоской волной, рассеянное поле от которого сканируется на плоскости в ближней зоне. В предлагаемом методе сначала производится пересчет значений поля из ближней зоны в дальнюю, затем используется метод обратных проекций, адаптированный в данной работе под описанную ранее конфигурацию. Для пересчёта применяются два подхода — традиционный, основанный на разложении по плоским волнам, и метод, использующий идеи дискретных источников. При помощи численного эксперимента показано, что метод дискретных источников обеспечивает лучшее радиоизображение при недостаточном с точки зрения применимости традиционного метода числе точек сканирования, что делает его предпочтительным для практического использования в безэховых камерах при измерении бистатистических характеристик при невозможности обеспечить достаточное число точек сканирования.

Введение

Радиоизображения [1] представляют собой важный инструмент для анализа и визуализации радиолокационных свойств объектов. В настоящее время большинство радиолокационных изображений формируется в моностатической конфигурации, когда передающая и принимающая антенны расположены в одной точке или очень близко друг к другу. Однако, в связи с возросшим в последнее время интересом к бистатистической схеме радара, актуальной является задача получения двухпозиционных характеристик объектов, а также их радиоизображений. В связи с этим существующие, а также проектируемые безэховые камеры необходимо снабдить возможностью измерения таких характеристик. Для решения этой задачи можно поместить в безэховой камере дополнительный сканер, предназначенный для измерений в ближней зоне. При этом общеизвестные методы построения радиоизображения предполагают нахождение объекта в дальней зоне приемной антенны, что зачастую невозможно при использовании сканера в компактном полигоне.

Предлагаемый алгоритм

В данной работе для получения радиоизображения предлагается использовать следующий алгоритм: сначала значения поля, полученные на плоскости в ближней зоне, пересчитываются в дальнюю зону, а затем по полученным данным с помощью метода обратных проекций [2] строится радиоизображение. Используются два метода пересчета значений из ближней в дальнюю зону: метод, основанный на разложении рассеянного поля по плоским волнам, далее в тексте обозначаемый как традиционный [3], и метод, основанный на идеях дискретных источников [4]. В работе [5] было показано, что последний метод может лучше передавать ЭПР объекта по сравнению с традиционным методом.

В данной работе метод обратных проекций был адаптирован для бистатической конфигурации с источником в виде плоской волны и значениями поля, заданными на участке бесконечно удаленной сферы.

Апробация метода

Апробация адаптированного алгоритма проводилась при помощи численного эксперимента. Рассмотрим модельную конфигурацию, представленную на рисунке 1.

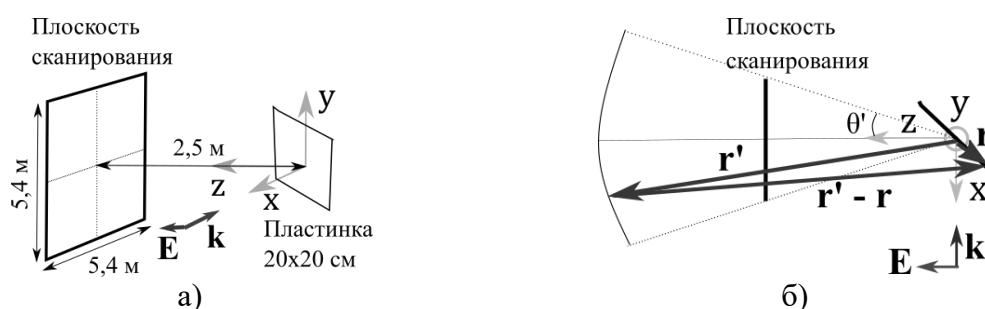


Рисунок 1. Модельная конфигурация: а) вид сбоку; б) вид сверху

В модельной конфигурации на идеально проводящую пластинку размером 20 на 20 см, расположенную под углом 45 градусов к оси X, плоская волна падает с положительного направления оси X. Значения рассеянного поля определяются с помощью программного комплекса FEKO на плоскости, перпендикулярной оси Z и находящейся на расстоянии 2,5 м от начала координат. Сканирование ведется на нескольких частотах (от 2 до 18 ГГц с шагом в 400 МГц), количество точек сканирования на плоскости 51x51. Далее одним из рассматриваемых методов производится расчёт поля в дальней зоне. Затем значения поля, полученные на дуге с угловым размером 60 градусов, которая является частью бесконечно удаленной окружности с центром в начале координат, используются для построения изображения следующим образом:

$$f(x, z) = \sum_k \sum_{\theta'} S(k, \theta') \exp(-ikx) \exp(ik(e_{r'}, r)). \quad (1)$$

Здесь $f(x, z)$ – радиоизображение точки (x, z) ; θ' – угол, который составляет вектор r' с осью Z; $S(k, \theta')$ – значение комплексной амплитуды ко-поляризованной компоненты электрического поля в дальней зоне; $k = 2\pi f/c$ – волновое число, f – частота излучения, r – радиус-вектор рассматриваемой точки (x, z) , r' – радиус-вектор положения точки «приема сигнала» на дуге бесконечно удаленной ($|r'| \rightarrow +\infty$) окружности; $e_{r'} = r'/|r'|$ – единичный вектор вдоль направления r' .

Изображение пластины, полученное описанным методом, представлено на рисунке 2. Из рисунка 2а видно, что при использовании метода пересчёта поля в дальнюю зону, основанного на идеях дискретных источников, положение и размеры пластины передаются хорошо (в рамках разрешения, определяемого угловой апертурой сканирования и шириной полосы частот). При этом для традиционного метода пересчета количество точек сканирования оказывается недостаточным, что приводит к ошибочной

передаче размера и положения пластинки на радиоизображении (рисунок 2б). Это указывает на преимущество метода пересчета, основанного на идеях дискретных источников, так как в натурном эксперименте желательнее сократить время сканирования поля на плоскости, из-за ограниченности времени, в течение которого можно гарантировать требуемую стабильность работы измерительного оборудования. Последнее обстоятельство делает практически не реализуемой возможность обеспечить достаточное число точек измерения для применения традиционного метода во многих случаях.

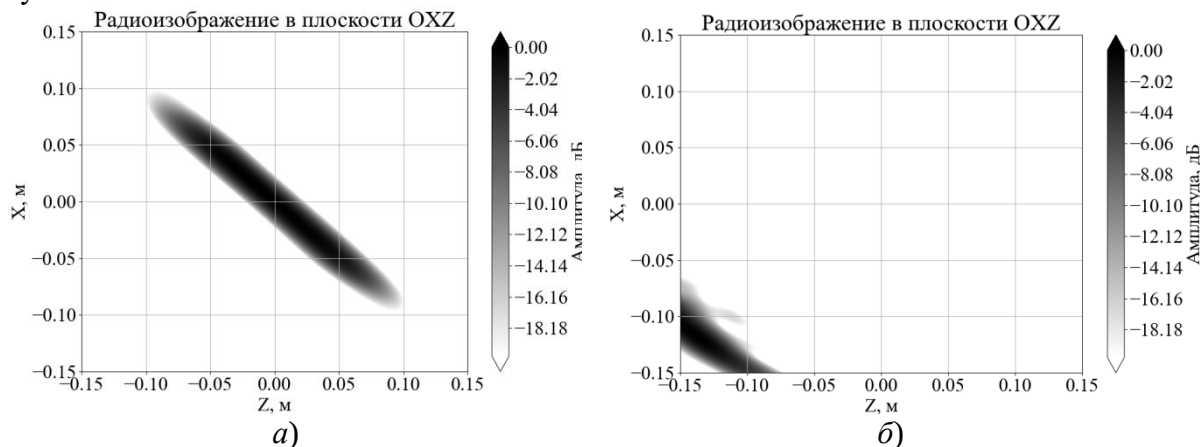


Рисунок 2. Радиоизображение пластины, полученное с помощью пересчета при одинаковых параметрах (количество точек сканирования 51x51, область расчета изображения 30x30 см с шагом 3 мм: а) на основе метода дискретных источников; б) на основе метода разложения по плоским волнам

Заключение

В данной работе предложен метод построения радиоизображений объектов в бистатической конфигурации, при которой объект облучается плоской волной, а рассеянное им поле сканируется сбоку на плоскости в ближней зоне в безэховой камере. Метод основан на пересчёте в дальнюю зону и последующем восстановлении изображения с помощью адаптированного метода обратных проекций. Численный эксперимент показал, что использование метода пересчёта, основанного на идеях дискретных источников, позволяет построить радиоизображение при меньшем количестве точек сканирования по сравнению с традиционным методом, основанном на разложении по плоским волнам.

Литература

1. Dean L. *Mensa High resolution radar imaging*. — Artech House Radar Library, 1991.
2. M. D. Desai and W. K. Jenkins, "Convolution backprojection image reconstruction for spotlight mode synthetic aperture radar," // *IEEE Transactions on Image Processing*. — 1992. — Vol. 1, no. 4. — P. 505–517.
3. Л. Д. Бахрах Методы измерений параметров излучающих систем в ближней зоне. — Издательство "Наука", Ленинградское отделение, 1985. — С. 272.
4. Еремин Ю. А., Свешников А. Г. Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции. — Издательство Московского университета, 1992
5. Балабуха Н. П., Коняев Д. А., Шапкина Н. Е. Метод получения двухпозиционной диаграммы ЭПР тела по данным электромагнитного поля на плоскости или цилиндре в ближней зоне с помощью дискретных источников // *Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия*. — 2025. — № 3.

Контактизация и интегрируемость

Contactization and Integrability

Кушнер А.Г.¹, Мухина С.С.²

1) Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ; 2) Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова РАН, лаборатория управления сплошными средами, Москва, РФ.

kushner@physics.msu.ru, sveta.mukhina.1998@mail.ru

Аннотация. В докладе предложен метод контактизации широкого класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными. Он основан на представлении уравнений набором трех распределений на пятимерном контактном многообразии и тесно связан с вопросами интегрируемости. Метод применяется ко многим задачам механики сплошных сред и, в частности, к задачам нелинейной фильтрации.

Традиционное геометрическое описание систем двух невырожденных дифференциальных уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными основано на представлении таких систем парами дифференциальных 2-форм в 4-мерном пространстве [1,2]. С этими формами можно связать поля линейных операторов, квадрат которых скалярен, и которые определяют либо структуру почти произведения (для гиперболических систем), либо почти комплексную структуру (для эллиптических систем). Если эти структуры являются интегрируемыми, то с помощью замен переменных система приводится либо к волновой системе с постоянными коэффициентами, либо к системе Коши-Римана.

В докладе мы представляем отличное от приведенного выше геометрическое описание таких систем. А именно, мы рассматриваем такие системы не в 4-мерном, а в 5-мерном пространстве, снабженном контактной структурой [3]. Такой подход расширяет класс допустимых преобразований до псевдогруппы контактных преобразований. Приводятся условия, при которых нелинейные системы контактно эквивалентны линейным системам с постоянными коэффициентами. Эти условия формулируются в терминах дифференциальных форм, обращение которых в нуль и является условием контактной эквивалентности. Подход применен к построению точных решений уравнений Баренблатта, описывающих процесс двухфазной фильтрации в пористых средах раствора воды с поверхностно активными реагентами и нефти, а также к уравнениям течения баротропного газа [4].

Наш метод существенно отличается от методов теории симметрий дифференциальных уравнений [5] и позволяет находить их точные решения даже в случаях, когда алгебры Ли симметрий недостаточно богаты для этого.

Литература

1. Lychagin V. V. Differential equations on two-dimensional manifolds // Russian Math. — 1992. Vol. 36, no. 5. — P. 38–51.
2. A. G. Kushner, V. V. Lychagin, and V. N. Rubtsov. Contact Geometry and Nonlinear Differential Equations. Cambridge: Cambridge University Press. — 2007. — 496 pp.
3. Kushner A. G., Mukhina S. S. Contactization of First Order PDE Systems // Lobachevskii Journal of Mathematics (принято в печать).
4. Mukhina S. S. Contact Geometry of Barotropic Gas // Lobachevskii Journal of Mathematics (принято в печать).
5. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.— 399 с.

Классические и символьные алгоритмы для решения задачи электромагнитного рассеяния на проникаемом либо идеально проводящем шаре

Classic and symbolic algorithms to solve problem of electromagnetic scattering on either penetrable or perfectly conducting spherical particle

Лопушенко И.В.

Независимый исследователь

lopushenko.ivan@yandex.ru

Аннотация. В работе рассматриваются различные реализации алгоритмов для решения задачи рассеяния электромагнитных волн на сферической частице в широком диапазоне размерных параметров и показателей преломления: от наноразмерных металлических наночастиц, в которых присутствуют квантовые эффекты, до больших рассеивателей с размерами, в десятки тысяч раз превышающими длину волны. Основное внимание уделяется возможности быстрого получения результатов с помощью как существующих эталонных подходов, так и с помощью предлагаемых алгоритмов на основе методов компьютерной алгебры. Проводится сравнение возможностей классических численных подходов и разрабатываемых символьных алгоритмов.

Описание работы

В настоящее время существует множество программных комплексов и алгоритмов, в которых тем или иным образом реализована возможность построения решения для задачи рассеяния электромагнитных волн на самых разнообразных препятствиях. Задача рассеяния на шаре – классическая краевая задача математической физики [1], которая допускает аналитическое решение, известное в международном сообществе как теория Ми [2], и тем самым является исключительно необходимой составной частью для верификации результатов работы подобных программных комплексов.

Тем не менее, в различных вычислительных реализациях формул теории Ми, как правило, присутствует ряд особенностей и различий, которые могут ограничивать пределы их применимости. В частности, при анализе экстремальных рассеивателей, размер r которых в тысячи и десятки раз превышает длину волны, между различными алгоритмами могут возникать некоторые отличия, обусловленные в том числе машинной точностью вычислений [3]. Другим примером является противоположный предельный случай, когда размеры физического объекта являются мезоскопическими, т.е. становятся сопоставимыми с размерами атома [4]. В этом случае для корректного решения требуется модификация математической постановки задачи, а вместе с ней – и модификация соответствующих вычислительных алгоритмов, поскольку классического решения становится недостаточно для адекватного описания физических процессов.

В данной работе проводится сравнение некоторых распространенных реализаций теории Ми [5] – [7], а также предлагается новая реализация на основе символьных вычислений. Особое внимание при этом уделяется эталонной программе MIEV0 от У. Уискомбе [3], которая считается одной из наиболее протестированных и эффективных реализаций теории Ми благодаря большому количеству пользователей и длительному периоду разработки, начиная с первой публикации в 1979 году [5]. Обширная документация и исходные коды данной программы были размещены её автором в сети интернет, и уже долгое время находятся в свободном доступе. Их применение требует навыков владения языком Fortran и соответствующими программными средствами. Для того, чтобы сделать использование данного алгоритма более удобным с точки зрения современных средств научной разработки, автором настоящей работы была собрана бинарная библиотека на его основе, совместимая со средой MATLAB. Поддерживаются все версии среды в 64-разрядной системе Windows, начиная с R2011a. Данная библиотека находится в открытом доступе, сохраняет все возможности и высокую производительность первоначального кода MIEV0,

протестирована в соответствии с рекомендациями оригинального разработчика, и может быть использована любыми исследователями для построения эталонных решений [8].

Реализация символьных алгоритмов, основанных на принципах компьютерной алгебры, ставит перед собой задачу расширения возможностей классических алгоритмов для построения эталонных решений преимущественно в области малых мезоскопических частиц, актуальных в ряде современных приложений благодаря устойчивой тенденции к миниатюризации инновационных устройств и сенсоров [4]. Эта возможность обеспечивается благодаря гибкости символьных алгоритмов при выборе граничных условий и базисных функций для решения задачи дифракции, а также отсутствию ограничений на точность вычислений. Последнее обстоятельство позволяет также с осторожным оптимизмом применять методы компьютерной алгебры в области больших частиц, однако эти приложения для символьных алгоритмов являются достаточно трудоемкими за счёт необходимости вычисления большого количества членов ряда в разложении рассеянного поля. В большинстве случаев, такие попытки избыточны – как в силу высокой производительности классических решений, так и благодаря возможности предельного перехода к методам физической или геометрической оптики.

Как и в MIEV0, в предлагаемой символьной реализации присутствует возможность вычисления сечений экстинкции Q_{ext} , рассеяния Q_{sca} и поглощения Q_{abs} , параметра асимметрии g , а также угловой зависимости комплексных амплитуд рассеянных полей S_1 и S_2 для двух взаимно перпендикулярных состояний поляризации падающего излучения (см. частный пример на рис. 1). Случаи рассеяния как на проницаемом, так и на идеально проводящем шаре, присутствующие в MIEV0, дополнены в символьных алгоритмах случаями рассеяния на мезоскопических наночастицах [9]. Тестирование этих результатов проводится с помощью сравнения с численными методами, разработанными с учетом соответствующих квантовых эффектов, а также с имеющимися экспериментальными данными [9-12].

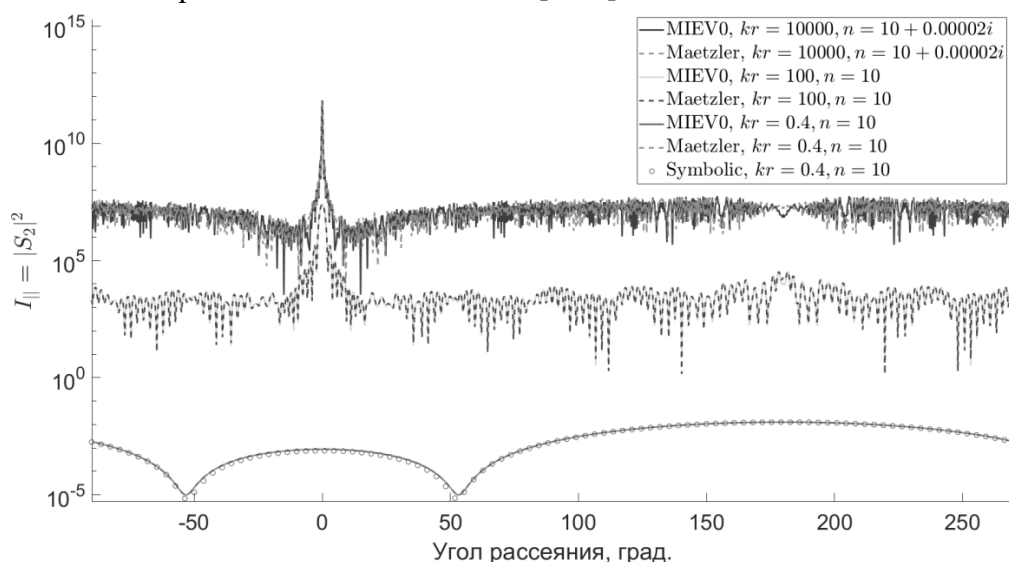


Рисунок 1. Индикатриса рассеяния для плоской волны, поляризованной вдоль плоскости падения, при рассеянии на сфере с размерным параметром kr и показателем преломления n . Сплошные линии – решение, полученное с помощью эталонной программы MIEV0 [3,5,8]. Пунктирные линии – решение, полученное с помощью программы [7] на основе алгоритма, предложенного Бореном и Хафменом [6]. Символы – решение для частицы с размерным параметром порядка длины волны, построенное с помощью алгоритма на основе компьютерной алгебры.

Литература

1. Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. Задачи по математической физике (под редакцией А. Г. Свешникова). — М.: Изд-во МГУ, 1998. — 350 с.
2. Hergert, W., Wriedt, T. The Mie Theory: Basics and Applications. — Springer Berlin Heidelberg, 2012. — 256 p.
3. Wiscombe, W. Improved Mie scattering algorithms // Appl. Opt. — 1980. — Vol. 19, no. 9. — P. 1505–1509.
4. Monticone F., Mortensen N. A., Fernández-Domínguez A. I. et al. Nonlocality in photonic materials and metamaterials: roadmap // Opt. Mater. Express. — 2025. — Vol. 15, no. 7. — P. 1544–1709.
5. Wiscombe, W. Mie Scattering Calculations - Advances in Technique and Fast, Vector-Speed Computer Codes // Ncar Tech Note TN-140+STR. — 1979. — National Center for Atmospheric Research, Boulder, Colorado.
6. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. — М.: Мир, 1986. — 664 с.
7. Mätzler C. MATLAB Functions for Mie Scattering and Absorption. // Research Report No. 2002-11. — University of Bern, 2002: <https://scattport.org/images/scattering-code/Mie-Matlab-Maetzler.zip>
8. Lopushenko, I. MATLAB interface to W. Wiscombe's Mie scattering Fortran program. // GitHub, 2025: https://github.com/ilopushenko/miev0_matlab_interface/
9. Лопушенко И. В. Реализация теории рассеяния Ми для решения задач мезоскопической электродинамики. // Актуальные проблемы электродинамики, сборник тезисов докладов. — 2024. — С. 43–45.
10. Еремин Ю. А., Свешников А. Г. Квазиклассические модели квантовой наноплазмоники на основе метода Дискретных источников (обзор) // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2021. — Т. 61, № 4. — С. 34–62.
11. Lopushenko I. V., Sveshnikov A. G. Discrete sources method to solve nonlocal scattering problems in plasmonic applications // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2020. — Vol. 41, no. 7. — P. 1337–1353.
12. Mortensen N. A. Mesoscopic Electrodynamics – the interplay of nanoscale morphology with the quantum and nonlocal plasmon response of metals. // University of Copenhagen, 2019. — 123 p.

Применение метода фазового поля для моделирования структуры пены

Application of the phase field method for modeling the foam structure

Семенов Н.А.¹, Еленина Т.Г.¹, Савенков Е.Б.²

1) Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ; 2) Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша, Москва, РФ.

tel-fyr@mail.ru

Аннотация. В работе проводится численное исследование модели типа диффузной границы, описывающей эволюцию структуры пены. Подробно рассматривается сама модель и вычислительные алгоритмы для ее анализа. Исследуется зависимость структуры пены в стационарном состоянии от параметров свободной энергии системы. Проводится сравнение явной и линейной полунейной, основанной на выпуклом расщеплении Эйра, разностных схем.

Введение

Потребность в моделировании многофазных систем возникает во многих областях науки и техники [1], [2], [3]. Однако из-за необходимости описания большого числа объектов (фаз, границ раздела), а также учёта процессов, связанных со слиянием и

разделением фаз, подобные вычисления обладают высокой сложностью. Для решения этой проблемы применяется метод фазового поля, позволяющий упростить вычисления за счёт описания всей системы одной функцией параметра порядка. В рамках этого метода эволюция системы определяется уравнением Аллена-Кана или уравнением Кана-Хилларда в зависимости от того, сохраняется ли в условиях конкретной задачи параметр порядка [4].

Описание работы

В данной работе метод фазового поля применён для построения модели, описывающей эволюцию структуры пены. Пенной называем ячеистую структуру, в которой заполненные газом ячейки разделены тонкими плёнками – стенками пузырьков. В рамках представленной модели каждому пузырьку ставится в соответствие отдельная фаза, а область раздела фаз описывается как диффузная граница [5]. В соответствии с видом эволюционных уравнений, эволюция системы определяется видом свободной энергии. Для воспроизведения моделью свойств пены в качестве функции плотности свободной энергии используется модифицированный потенциал двойной ямы, предложенный в работе [6]. Он обеспечивает разделение и несмещение фаз, а также запрещает слияние ячеек пены и обеспечивает формирование стенок между ними. Вместе с тем, энергия дополнена слагаемым, позволяющим задать объёмы каждой ячейки пены в стационарном состоянии. Для численного решения эволюционных уравнений были предложены явная и линейная полуневная разностные схемы. Последняя основана на методе выпуклого расщепления Эйра [7], чья идея заключается в разделении свободной энергии на выпуклую вниз и выпуклую вверх части. В полудискретном приближении эволюционных уравнений члены, соответствующие выпуклой вниз части, рассматриваются неявно, в то время как члены, связанные с выпуклой вверх частью, рассматриваются явно. Полученные таким образом разностные схемы являются безусловно градиентно устойчивыми.

Заключение

В результате работы были построены явная и полуневная разностные схемы для численного анализа модели в одномерном и двумерном случаях, а также проведено исследование влияния параметров модели на структуру пены в стационарном состоянии. Полученные результаты открывают возможность моделирования структур пен, обладающих заданными свойствами, путём подбора параметров модели.

Литература

1. J. Lowengrub, A. Rätz, A. Voigt. Phase-field modeling of the dynamics of multicomponent vesicles: Spinodal decomposition, coarsening, budding, and fission // *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics* vol. 79 (2009), pp. 031926.
2. R. Kobayashi. Modeling and numerical simulations of dendritic crystal growth // *Physica D: Nonlinear Phenomena* vol. 63 (1993), pp. 410—423.
3. W. Boettinger и др. Phase-Field Simulation of Solidification 1 // *Annu. Rev. Mater. Res* vol. 32 (2002), pp. 163—94.
4. R. Qin, H. Bhadeshia. Phase field method// *Materials Science and Technology* vol. 26 (2010), pp. 803—811.
5. Е.В. Зипунова, Е.Б. Савенков. О моделях диффузной границы для описания динамики объектов высшей коразмерности // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*, vol. 122 (2020), pp. 1–34.
6. T. Lavoratti, S. Heitkam, U. Hampel, G. Lecrivain. A computational method to simulate mono- and polydisperse two-dimensional foams flowing in obstructed channel // *Rheologica Acta* vol. 60 (2021).
7. М.А. Бочев, И.А. Фахурдинов, Е.Б. Савенков. Эффективное устойчивое интегрирование по времени уравнений Кана–Хилларда: явные, неявные и явно-

Численное моделирование дифракции волн на тонком идеально проводящем проводе методом моментов

Numerical solution of the diffraction problem on a perfectly conducting wire by the method of moments

Хузин И.С.¹, Коняев Д.А.^{1,2}

1) Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ; 2) Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН, Москва, РФ.

khuzin.is20@physics.msu.ru, konyaev@physics.msu.ru

Аннотация. В работе рассматривается применение метода моментов при решении задачи дифракции электромагнитных волн на тонком идеально проводящем проводе, имеющего произвольную форму изгиба, а также конечную длину, много большую диаметра его сечения. В качестве базисных функций используются конечные элементы нулевого, первого и второго порядков. Разработана соответствующая программа, позволяющая численно решать задачу дифракции на идеально проводящих проводах. Получены результаты для проводов различной конфигурации. Полученные результаты сравниваются с результатами, рассчитанными с помощью программного комплекса ФЕКО. Показаны недостатки использования функций нулевого порядка для расчета поверхностных характеристик.

Введение

В настоящее время одной из наиболее актуальных проблем электродинамики является задача дифракции электромагнитных волн на телах сложной формы. Ввиду присутствия тонких проводов в различных сложных объектах, возникает достаточно актуальная задача дифракции на данных проводах, имеющих произвольную форму изгиба, а также конечную длину, много большую диаметра его сечения. Из-за отсутствия аналитического решения для рассматриваемого тела, в данной работе используется один из наиболее эффективных численных методов для задач дифракции – метод моментов [1].

Описание работы

Рассмотрим идеально проводящий провод T , представляющий собой тонкую проволоку кругового сечения произвольной формы (рисунок 1).

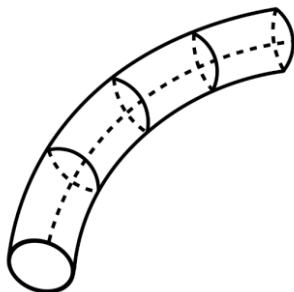


Рисунок 1. Пример рассматриваемого объекта

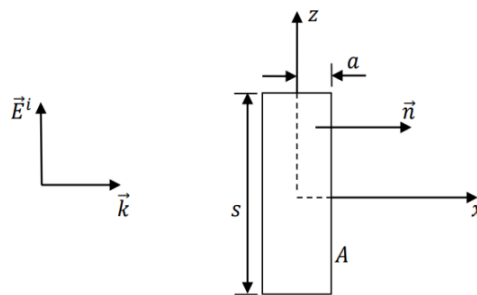


Рисунок 2. Конфигурация задачи

Обозначим комплексную амплитуду падающего электромагнитного поля как $\{\vec{E}^i, \vec{H}^i\}$, а рассеянного как $\{\vec{E}^s, \vec{H}^s\}$. Временная зависимость задается как $e^{i\omega t}$. Тогда стационарная задача дифракции падающего электромагнитного поля на провод является внешней краевой задачей для уравнений Максвелла [2],[3]:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}(\vec{H}^s + \vec{H}^i) = i\omega\varepsilon(\vec{E}^s + \vec{E}^i), \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{T}, \\ \operatorname{rot}(\vec{E}^s + \vec{E}^i) = -i\omega\mu(\vec{H}^s + \vec{H}^i), \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{T}, \\ [(\vec{E}^s + \vec{E}^i), \vec{n}] = 0, \vec{r} \in A, \\ [\vec{e}_r, \vec{E}^s] = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}[\vec{e}_r, [\vec{e}_r, \vec{H}^s]] + o\left(\frac{1}{r}\right), r \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (1)$$

где $\vec{e}_r$ — орт сферической системы координат, $\vec{n}$ — внешняя нормаль к поверхности провода — границе A , ε, μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости внешней по отношению к проводу среды.

Поставленная задача сводится к интегро-дифференциальному уравнению относительно плотности поверхностных токов [4]:

$$\frac{i}{4\pi} \left[\omega\mu \int_S \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\sigma' + \frac{1}{\omega\varepsilon} \left(\vec{\nabla} \int_S (\vec{\nabla}, \vec{J}(\vec{r}')) \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\sigma' \right), \vec{n} \right] = [\vec{E}^i, \vec{n}], \quad (2)$$

где $\vec{J}(\vec{r}')$ — плотность тока на поверхности проводника.

Данное уравнение решается методом моментов [4]. Рассматриваемый провод разбивается на N отдельных сегментов при условии, что длина каждого сегмента значительно превышает радиус. Пренебрегая зависимостью плотности поверхностного тока от угла, потребуем выполнение граничного условия на оси провода, а не на его поверхности. Обозначив радиус каждого сегмента как a , можно представить интеграл по поверхности сегмента, как одномерный по его длине l :

$$\int_S \vec{f}(\vec{r}) d\sigma = 2\pi a \int_0^l \vec{f}(\vec{r}(\xi)) d\xi \quad (3)$$

В соответствии с методом моментов приближенное решение задачи (2) ищется в виде разложения по базисным векторным функциям:

$$\vec{J}(\vec{r}') = \sum_{m=1}^N I_m \vec{f}_m(\vec{r}(\xi)) \quad (4)$$

Таким образом, поставленная задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений, для решения которой используется Гауссово-сеточный метод [5]. В качестве базисных функций рассматриваются постоянные, кусочно-линейные и кусочно-квадратичные функции, реализующие нулевой, первый и второй порядки точности решения соответственно [6].

Опишем более подробно используемые базисные функции. Функции нулевого порядка постоянны вдоль каждого сегмента и равны 0 всюду вне его. Кусочно-линейные функции возрастают от 0 до 1 на левом сегменте относительно узла и убывают от 1 до 0 на правом. Кусочно-квадратичные функции имеют более сложную структуру: часть из них, как и линейные, достигает максимума в узле — возрастая от 0 до 1 на левом сегменте и убывая от 1 до 0 на правом; другая часть определена на каждом сегменте отдельно и принимает максимальное значение в середине сегмента — возрастая от 0 до 1 к его центру и затем убывая обратно до 0 к соседнему узлу.

Результаты. Рассмотрим следующую задачу, конфигурация которой изображена на рисунке 3: исследуется дифракция плоской волны частотой 1 ГГц на отрезке провода кругового сечения радиуса 3,6 мм, который образует круговую петлю радиусом 0.08λ .

На рисунке 4 представлены численное решение, полученное разработанной программой, с использованием вышеупомянутых базисных функций и решение, полученное при помощи программного комплекса FEKO, при разбиении данного провода на 9 сегментов с шагом $\lambda/12$. Анализ данного рисунка показывает, что результаты расчетов с применением базисных функций 1-го и 2-го порядков

обеспечивают хорошее соответствие с результатами программного комплекса FEKO, тогда как решение на основе функций 0-го порядка имеет значительные расхождения.

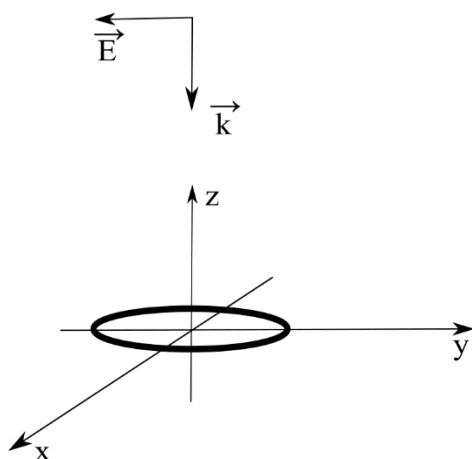


Рисунок 3. Конфигурация задачи

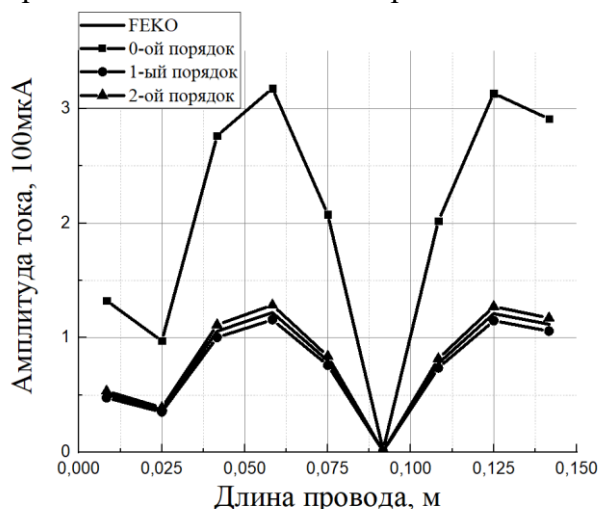


Рисунок 4. Распределение амплитуды тока вдоль провода

Заключение

В работе представлена программа, позволяющая строить численное решение задач дифракции электромагнитных полей на идеально проводящем тонком проводе.

В программе реализованы несколько видов базисных функций, на основе результатов можно сделать вывод, что постоянные функции нулевого порядка неприменимы к небольшим моделям и плохо передают поверхностные характеристики. Для решения данной проблемы реализованы функции более высокого порядка, при использовании которых видим хорошее совпадение численного решения и решения, полученного при помощи FEKO.

Литература

1. Митра Р. Вычислительные методы в электродинамике. – М.: Издательство Мир, 1977.
2. Ильинский А. С., Кравцов В. В., Свешников А. Г. Математические модели электродинамики, Учебное пособие. – Высш. шк., 1991.
3. Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма. – ОГИЗ, 1948.
4. Rao S., Wilton D., Glisson A. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape // IEEE Transactions on antennas and propagation. – 1982. – Т. 30, №. 3. – С. 409-418.
5. Калиткин Н. Н., Альшина Е. А. Численные методы, книга 1, Численный анализ. – М.: Академия, 2013.
6. Стренг Г. Теория метода конечных элементов. – 1977.

Диаграммы Вороного для объектов различной природы в курсе прикладной геометрии и топологии

Voronoi Diagrams for Objects of Various Nature in the Course of Applied Geometry and Topology

Шишкин А.П.¹, Профорова Е.С.², Громов М.Н.¹, Грачев Е.А.¹

1) Московский Государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ; 2) Московский Государственный университет имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, Москва, РФ.

shishkin.ap17@physics.msu.ru, grachevea@gmail.com

Аннотация. В работе рассматриваются алгоритмы построения диаграмм Вороного относительно объектов различной природы: отдельных точек, совокупностей точек

(кластеров), выпуклых оболочек. Обсуждается возможность использования различных метрик, включая евклидову и метрику Минковского. Предлагается методическое изложение материала в рамках курса «Высшая геометрия и топология», что позволяет студентам осмыслить как классические алгоритмы вычислительной геометрии, так и их обобщения в пространствах различной размерности.

Введение

Диаграммы Вороного являются фундаментальным инструментом в прикладной геометрии и топологии, находя применение в задачах анализа данных, компьютерной графики, оптимизации и моделирования. Они позволяют разделить пространство на области, каждая из которых ассоциируется с определенным объектом (например, точкой или кластером), на основе минимального расстояния в заданной метрике.

Традиционно диаграмма Вороного определяется для множества точек в евклидовом пространстве. Однако в современных задачах возникает необходимость рассматривать не только отдельные точки, но и более сложные объекты: кластеры, многоугольники, множества данных. Кроме того, интерес представляет расширение классических определений на пространства с иными метриками, такими как метрика Минковского (L_1, L_∞) или псевдометрики.

Цель данной работы — представить методику построения диаграмм Вороного относительно точек и кластеров в различных метриках, а также продемонстрировать возможности включения этого материала в курс «Высшая геометрия и топология».

Описание работы

Диаграмма Вороного. Диаграмма Вороного для множества объектов $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ в метрическом пространстве (X, d) определяется как разбиение пространства X на области $V(s_i)$, где каждая область $V(s_i)$ включает все точки $x \in X$, для которых $d(x, s_i) \leq d(x, s_j)$ для всех $j \neq i$. В случае точек в евклидовом пространстве диаграмма Вороного представляет собой разбиение на выпуклые многоугольники (в 2D) или многогранники (в 3D). Однако при рассмотрении кластеров, представленных как выпуклые оболочки, построение диаграммы усложняется, так как необходимо учитывать геометрию кластера и выбранную метрику.

Диаграммы Вороного для кластеров. Для двух кластеров $C_1, C_2 \subset R^d$, представленных как выпуклые оболочки, граница их областей Вороного определяется множеством точек, равноудалённых от обоих кластеров. В простейшем случае задача сводится к нахождению геометрического места точек, минимизирующих расстояние до ближайшего элемента каждого кластера. Такой подход может быть использован для анализа границ раздела в задачах классификации.

Метрики и обобщения. В евклидовой метрике (L_2) границы ячеек Вороного являются отрезками и дугами гиперплоскостей. В метрике Минковского (L_1 , манхэттенской) границы приобретают форму, связанную с ромбической или прямоугольной геометрией. В метрике L_∞ ячейки становятся прямоугольными областями. Введение псевдометрик и работа в пространствах большей размерности позволяет расширить спектр задач, включая топологический анализ данных.

В разных пространствах области Вороного приобретают специфическую форму. В евклидовой метрике (L_2) границы ячеек — это гиперплоскости, а сами области в двумерном случае выглядят как многоугольники. В метрике Минковского (L_1 , «манхэттенской») границы становятся ломаными, а области принимают ромбовидный или крестообразный вид. В норме L_∞ ячейки превращаются в прямоугольные области, ограниченные линиями, параллельными осям.

В псевдометриках и пространствах большей размерности структура областей Вороного может быть значительно сложнее: границы становятся кусочно-гладкими или даже незамкнутыми. На практике используют двумерные и трёхмерные проекции многомерных диаграмм, что особенно полезно в задачах машинного обучения и анализа данных.

Алгоритмы построения диаграмм Вороного. Для точек в евклидовом пространстве применяются классические алгоритмы, такие как алгоритм Фортуна, основанный на сканировании плоскости и построении параболической фронтальной линии. Время работы алгоритма составляет $O(n \log n)$, где n — число точек. Для кластеров, представленных выпуклыми оболочками, предлагается модификация алгоритма, учитывающая границы кластеров. В этом случае диаграмма Вороного строится на основе расстояний от точек пространства до ближайшей точки на границе выпуклой оболочки.

При использовании метрики Минковского, в частности, манхэттенской метрики (L_1), форма областей Вороного изменяется: вместо выпуклых многоугольников в 2D получаются области с границами, параллельными осям координат. Это требует адаптации алгоритмов, таких как метод «разделяй и властвуй», для учета специфики метрики. В пространствах высших размерностей (например, 3D и выше) применяются методы, основанные на триангуляции Делоне, которая является двойственной структурой к диаграмме Вороного.

Методический аспект. Рассмотрение диаграмм Вороного в курсе «Высшая геометрия и топология» имеет несколько целей:

- продемонстрировать студентам универсальность геометрических конструкций,
- сформировать навыки работы с различными метриками,
- показать связь прикладной геометрии с современными задачами анализа данных,
- развить умение интерпретировать алгоритмы через геометрические и топологические образы.

Для учебного процесса полезно рассматривать:

- визуализацию диаграмм в двумерном случае (точки и кластеры),
- сравнение границ Вороного в метриках L_2, L_1, L_∞ ,
- переход к трёхмерным случаям и псевдометрикам.

Заключение

Диаграммы Вороного — эффективный инструмент для моделирования и обучения, рассматриваемый в различных метриках и пространствах. Их включение в курс «Высшая геометрия и топология» помогает студентам понять взаимосвязь геометрии, топологии и вычислительных алгоритмов.

Материал о диаграммах Вороного важен не только теоретически, но и для практического применения. Он способствует усвоению геометрических и топологических принципов в междисциплинарном контексте, а также служит основой для изучения более сложных вопросов вычислительной математики и топологического анализа данных. Это позволяет студентам не только понимать абстрактные концепции, но и использовать их для решения прикладных задач, требующих интерпретации данных с помощью топологических методов и геометрических алгоритмов.

Литература

1. Препарата Ф., Шеймос М. *Вычислительная геометрия: введение*. — Пер. с англ. — М.: Мир, 1989. — 478 с.
2. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. *Стереометрия. Геометрия в пространстве : учебное пособие для учащихся школ и абитуриентов*. — Висагинас : Alfa, 1998. — 576 с.
3. Okabe A., Boots B., Sugihara K., Chiu S. N. *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. 2nd ed. — Wiley, 2000. — 696 p.
4. De Berg M., Cheong O., van Kreveld M., Overmars M. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. — 3rd ed. — Berlin: Springer, 2008 — pp. 147–151, 164–166

Повышение помехоустойчивости короткоимпульсных СШП систем связи на основе восстановления принимаемого сигнала с помощью биортогональных частотно-модифицированных вейвлетов Кравченко

Improving the noise stability of short-pulse UWB communication systems based on the restoration of the received signal using biorthogonal frequency-modified wavelets Kravchenko

Юрин А.В.¹, Будунова К.А.²

1) ФГКУ СЭЦ СК России, Москва, РФ; 2) Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва, РФ.

yualex@rambler.ru

Аннотация. В работе рассматривается применение кратномасштабного анализа на базе частотно-модифицированных биортогональных вейвлетов Кравченко для восстановления короткоимпульсного СШП сигнала в приемном тракте с целью повышения помехоустойчивости системы связи.

Введение

В цифровой радиосистеме с реализацией приема-передачи короткоимпульсных СШП сигналов (далее – КСШП сигналы) требуется учитывать влияние канала связи на регистрируемый сигнал для повышения помехоустойчивости. В канале связи возникает ряд искажений, а также зашумление, которые могут препятствовать дальнейшей синхронизации и оцениванию полученного СШП сигнала. Вносимые искажения определяются импульсной характеристикой канала связи, которая обусловлена процессами распространения сигнала в пространстве и в антенно-фидерном тракте. При этом импульсная характеристика может быть определена заранее теоретическим путем или по данным моделирования, а также получена вычислением на этапе синхронизации системы (операция носит название идентификации системы [1]). Таким образом, процесс помехоустойчивого приема можно представить как задачу, связанную с восстановлением сигнала исходной формы в приемном тракте [1-3].

Описание работы

Математическая формулировка постановки задачи восстановления сигнала сводится к решению операторного уравнения, представляющего собой интегральное уравнение Фредгольма первого рода типа свертки

$$y(t) = Lx(t) + n(t) = (\lambda * x)(t) + n(t), \quad (1)$$

которое приводит принимаемый сигнал $y(t)$ к виду, близкому к сигналу на входе канала связи $\tilde{x}(t)$, что делает последующую корреляционную обработку $\tilde{x}(t)$ более эффективной. При этом, предполагается, что канал связи, по которому распространяется полезный сигнал, представляет собой линейную, инвариантную во времени систему, описываемую импульсной характеристикой $\lambda(t)$, а шум $n(t)$ является аддитивным и гауссовским (АБГШ) с дисперсией σ^2 .

В [2] предложен и обоснован математический аппарат построения биортогональных частотно-модифицированных вейвлетов Кравченко, с использованием которых можно получить кратномасштабную аппроксимацию решения интегрального уравнения типа свертки (1). Биортогональный вейвлет-базис получается посредством модификации ортогональных вейвлетов Кравченко с финитным спектром [4], [5] функцией, стабилизирующей решение задачи (1).

В соответствии с алгоритмом обработки принятого сигнала на основе кратномасштабного анализа на базе частотно-модифицированных биортогональных вейвлетов Кравченко [2] принятый сигнал в виде временных отсчетов $y_n = y(t_n)$ подвергается вейвлет-разложению с использованием фильтров $\{\bar{\theta}_{J+1}\}$, $\{\bar{\eta}_{J+1}\}$ частотно-модифицированных биортогональных вейвлетов Кравченко. В результате получают коэффициенты вейвлет-разложения $cA_J = \{a_j^y\}$ и $cD_J = \{b_j^y\}$ масштаба J . Далее

аппроксимирующие коэффициенты вейвлет-разложения $cA_j = \{a_j^y\}$ при $j_0 - 1 \leq j \leq J$ должны быть обработаны фильтрами $\{\bar{h}_k\}$, $\{\bar{g}_k\}$ исходных ортогональных вейвлетов. Таким образом, образуется дискретная последовательность коэффициентов вейвлет-разложения $\{cA_{j_0}, cD_j: j_0 \leq j \leq J\}$. Детализирующие коэффициенты $\{cD_j: j_0 \leq j \leq J\}$ в последствии подвергаются пороговой обработке для шумоподавления. После чего, выполняется обратное дискретное вейвлет-преобразование с использованием фильтров ортогональных вейвлетов. При этом схема вейвлет-восстановления обеспечивает решение интегрального уравнения (1). Таким образом, предложенный в [2] алгоритм позволяет в рамках единой операции обработки принятого сигнала на основе кратномасштабного анализа на базе частотно-модифицированных биортогональных вейвлетов Кравченко проводить его шумоочистку и компенсировать искажения канала связи.

Заключение

На основе кратномасштабного анализа на базе частотно-модифицированных биортогональных вейвлетов Кравченко предложен вейвлетный подход повышения помехоустойчивости КСШП системы связи.

Литература

1. Айфичер Э.С., Джервис Б.У. Цифровая обработка сигналов: практический подход. Изд.2-е.: Пер.с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2008. — 992 с.
2. В.Ф. Кравченко, В.И. Пустовойт, А.В. Юрин. Восстановление сигналов с помощью новых биортогональных частотно-модифицированных вейвлетов Кравченко в случае представления измерительного процесса сверточной моделью // Радиотехника и электроника. — 2020. — Т. 65, № 4. — С. 390–416.
3. V.O. Kalinin; V.I. Nosov. Assessment of effect of influences on pulse-based UWB radio communication systems // International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON). – 2016.
4. В.Ф. Кравченко, А.В. Юрин. Новый класс вейвлет-функций в цифровой обработке сигналов и изображений // Успехи современной радиоэлектроники. — 2008. — № 5. — С. 3-64.
5. В.Ф. Кравченко, О.В. Кравченко, В.И. Пустовойт, Д.В. Чуриков, А.В. Юрин. Применение семейств атомарных, WA-систем и R-функций в современных проблемах радиофизики. Часть II // Радиотехника и электроника. — 2015. — Т. 60, № 2. — С. 109-148.

Оглавление

Пленарные доклады	2
А.Н. Боголюбов — ведущий специалист научной школы А.Н. Тихонова - А.Г. Свешникова в области математической физики, прикладной и вычислительной математики	
Могилевский И.Е.	2
Анализ влияния квантовых эффектов на уровень энергии, поглощенной плазмонными слоистыми наночастицами	
Еремин Ю.А., Лопушенко В.В.	4
Моделирование электромагнитного ускорения проводящего тела с учетом фазовых переходов	
Галанин М.П., Родин А.С.	8
Цифровая компенсация нелинейного искажения сигналов в волоконно-оптических линиях связи	
Делицын А.Л.	11
Компьютерное исследование параметрической робастности нелинейных алгоритмов следящего управления полетом квадрокоптера	
Филимонов Н.Б.	12
Магнитогидродинамические процессы в аккреционных дисках	
Михайлов Е.А. ^{1,2} , Жихарева Е.Н. ¹ , Фролова М.В. ¹	15
Квантовые и квантово-инспирированные аннилеры: обзор современного состояния и возможности применения для решения задач электродинамики	
Малетин Н.В. ¹ , Минаев Д.В. ^{2,3}	15
Математическое моделирование.....	19
Моделирование взаимодействия электромагнитного поля с плазменным слоем	
Гордеева Н.М. ^{1,2} , Гвоздев П.А. ² , Станкевич Ю.Б.	19
Нелинейные искажения сигнала в многоканальной волоконно-оптической линии связи и методы их компенсации	
Кузнецов Г.В. ¹ , Делицын А.Л. ^{1,2}	21
Исследование свойств метаматериальных маскирующих оболочек	
Боголюбов А.Н, Никитченко А.Д.	23
Построение матрицы формы молекулы ДНК	
Плохотников К.Э.	24
Технологичный принцип ондулятора на постоянных магнитах	
Поляков П.А., Пятаков М.А.	28
Моделирование взаимодействия в островке Лангерганса с помощью автомата Мура	
Профорова Е.С. ¹ , Репченко А.С. ² , Громов М.Н. ² , Грачев Е.А. ²	30
Скалярная задача дифракции на теле с конической особенностью	
Ровенко В.В. ¹ , Боголюбов А.Н. ² , Могилевский И.Е. ²	33

Построение модели трехмерного зеркала коллиматора со скруглёнными краями методом трансляции сечений	
Хлебников Ф.Б. ¹ , Пропой М.И., Коняев Д.А. ^{1,2} , Боголюбов А.Н. ¹ , Шапкина Н.Е. ^{1,2}	36
Численное моделирование турбулентного динамо Казанцева в рамках каскадного мГД-подхода	
Юшков Е.В., Дуканов И.А., Абушзада И., Соколов Д.Д.	39
Теоретическая и экспериментальная электродинамика	41
Частный метод решения задач о генерации аксионоподобных частиц электромагнитными полями и волнами	
Бедда А.В., Данцев Г.А., Денисов В.И.	41
Обратное преобразование Фурье мультипликативных интегралов в методе спектрорадиометрии	
Будунова К.А.	43
Использование линзы Люнебурга для проведения бистатистических измерений коэффициента отражения от материалов	
Гильмутдинов Р.В., Меньших Н.Л., Фёдоров С.А.	46
Динамика магнитного поля при наличии холловской проводимости и термодиффузии	
Бисноватый-Коган Г.С. ^{1,2} , Глушихина М.В. ²	49
Исследование применимости метода физической оптики в промежуточной зоне	
Жиров А.В.	52
Проекционный метод для анализа излучения радиального диполя расположенного на оси магнитно-диэлектрического тела вращения.	
Кушнерёв М.М. ^{1,2} , Скобелев С.П. ^{1,2}	54
Электродинамический волновой импеданс слоистого полупространства	
Плещинский Н.Б.	58
Построение приближённых граничных условий для задач дифракции на телах высокой проводимости с рёбрами на границе	
Шушарин М.М., Могилевский И.Е., Боголюбов А.Н.	61
Численные методы	63
Дискретная модель поглощения мощного электромагнитного импульса слоем плотной плазмы	
Бородачев Л.В.	63
Направляемые волны периодического волновода в слоистой среде	
Получение радиоизображения объектов при сканировании в ближней зоне на плоскости	
Викуловская А.А. ^{1,2} , Коняев Д.А. ^{1,3}	68
Контактизация и интегрируемость	
Кушнер А.Г. ¹ , Мухина С.С. ²	71

Классические и символьные алгоритмы для решения задачи электромагнитного рассеяния на пронизаемом либо идеально проводящем шаре	
Лопушенко И.В.	72
Применение метода фазового поля для моделирования структуры пены	
Семененко Н.А. ¹ , Еленина Т.Г. ¹ , Савенков Е.Б. ²	74
Численное моделирование дифракции волн на тонком идеально проводящем проводе методом моментов	
Хузин И.С. ¹ , Коняев Д.А. ^{1,2}	76
Диаграммы Вороного для объектов различной природы в курсе прикладной геометрии и топологии	
Шишкин А.П. ¹ , Профорова Е.С. ² , Громов М.Н. ¹ , Грачев Е.А. ¹	78
Повышение помехоустойчивости короткоимпульсных СШП систем связи на основе восстановления принимаемого сигнала с помощью биортогональных частотно-модифицированных вейвлетов Кравченко	
Юрин А.В. ¹ , Будунова К.А. ²	81
Оглавление	83