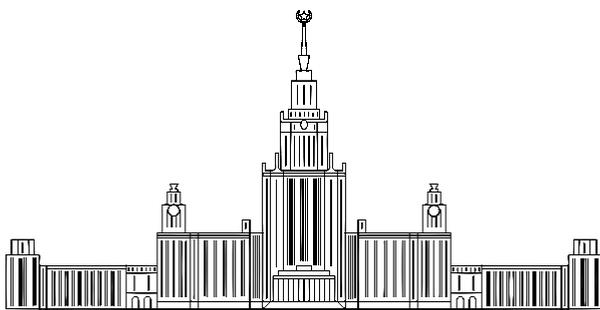


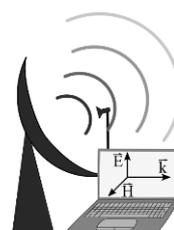
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова



Актуальные проблемы электродинамики

международная конференция, посвящённая
100 – летию со дня рождения

Алексея Георгиевича Свешникова



(Москва – 19 – 20 ноября 2024г.)
Сборник тезисов докладов

Москва 2024

**Международная конференция,
посвящённая 100 – летию со дня рождения А. Г. Свешникова
«Актуальные проблемы электродинамики 2024»
Сборник тезисов**

19 – 20 ноября 2024 г. Физический факультет.
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Программный комитет:

1. Боголюбов А.Н. профессор, зав. отделением физического факультета МГУ;
(председатель)
2. Бородачев Л.В. Д. ф.-м. н доцент физического факультета МГУ
3. Воеводин В.В. Д. ф.-м. н., член корр. РАН, директор НИВЦ МГУ
4. Еремин Ю.А. Д. ф.-м. н. в.н.с. ВМиК
5. Кравченко В.Ф. Д. ф.-м. н. профессор ИРЭ РАН
6. Соколов Д.Д. Д. ф.-м. н., профессор, и.о. зав. кафедрой математики,
физический факультет МГУ
7. Поляков П.А. Д. ф.-м. н., профессор, физический факультет МГУ
8. Тихонравов А.В. Д. ф.-м. н., профессор, научный руководитель НИВЦ МГУ

Организационный комитет:

1. Белокуров В.В. профессор, декан физического факультета МГУ
(председатель)
2. Коняев Д.А. с.н.с. физического факультета МГУ
(зам. председателя)
3. Шапкина Н.Е. доцент физического факультета МГУ
(зам. председателя)
4. Боголюбов Н.А. н.с. физического факультета МГУ
5. Волков В.Т. доцент физического факультета МГУ
6. Ерохин А.И. с.н.с. физического факультета МГУ
7. Минаев Д.В. ст. преп. физического факультета МГУ
8. Могилевский И.Е. доцент физического факультета МГУ
8. Мухартова Ю.В. доцент физического факультета МГУ
9. Петухов А.А. вед. программист физического факультета МГУ
10. Попов В. Ю. профессор физического факультета МГУ
11. Хлебников Ф.Б. вед. программист физического факультета МГУ
(секретарь)

Страница конференции: <http://math.phys.msu.ru/actual-electrodynamics-2024>

© Физический факультет МГУ, 2024
© Кафедра математики

Пленарные доклады

К 50-летию совместной научной работы с проф. А.Г.Свешниковым

On the 50th Anniversary of Scientific Collaboration with Prof. A.G. Sveshnikov

Еремин Ю. А.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК,
Москва, РФ.

eremin@cs.msu.ru.

Аннотация. В работе рассматриваются фундаментальные результаты, полученные в период длительного научного сотрудничества с Профессором А.Г. Свешниковым. Особое внимание уделяется обобщению оптической теоремы на случай возбуждения локальным источником и разработкой универсального метода исследования квантовых эффектов наноплазмоники.

Введение

В 1974 году в журнале Вычислительной математики и математической физики вышла статья А.Г. Свешникова и Ю.А. Еремина "Об одном численном алгоритме решения задач дифракции на локально-неоднородном теле". С тех пор наше научное сотрудничество не прерывалось все последующие годы. За все время сотрудничества, длившегося почти 50 лет, нами было опубликовано 157 совместных научных статей в рецензируемых журналах из них 6 крупных обзоров (данные из ИСТИНА). Последняя наша обзорная статья "Квазиклассические модели квантовой наноплазмоники на основе метода Дискретных источников" была опубликована в ЖВМ и МФ в 2021г.

Оптическая теорема для локального источника

Оптическая теорема (теорема экстинкции) представляет собой фундаментальный результат теории рассеяния [1]. Она известна не только в электродинамике и акустике, но и в сейсмике и даже квантовой механике. Как известно, сечение экстинкции (СЭ) равно сечению рассеяния плюс сечение поглощения, то есть $\sigma_{ext} = \sigma_{sc} + \sigma_{abs}$. Таким образом, СЭ показывает какую часть энергии рассеиватель изымает из внешнего возбуждения. В случае возбуждения тела плоской волной СЭ имеет вид

$$\sigma_{ext} = \frac{4\pi}{k} \text{Im} F(\pi - \theta_0, 0) \quad (1)$$

здесь F – диаграмма рассеяния в направлении распространения плоской волны, падающей под углом θ_0 .

Вместе с тем, выражение для СЭ в случае возбуждения рассеивателя локальным источником не было известно. В работах [2], [3] было получено выражение для случая возбуждения рассеивателя мультипольным источником произвольного порядка. В основу подхода было положено представления для мультиполя, полученное в [4]

$$h_n^{(2)}(kr) P_n^m(\cos\theta) \exp \exp(-jm\varphi) = D_n^m h_0^2(kR_{M_0}) \quad (2)$$

где $h_n^{(2)}$ – сферическая функция Ханкеля, P_n^m – присоединенный полином Лежандра, M_0 – точка источника, (r, θ, φ) – сферические координаты, а оператор

$$D_n^m = (-1)^m j^{n+1} \exp \exp(-jm\varphi) \left[\frac{j}{k} \frac{\partial}{\partial \rho} \right]^m P_n^m \left(\frac{j}{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3)$$

В этом случае было показано, что сечение экстинкции принимает вид

$$\sigma_{ext} = \sigma_{sc}^0 - \frac{4\pi}{k} \text{Im} \{ (D_n^m)^+ U^s(M) \}_{M=M_0} \quad (4)$$

здесь σ_{sc}^0 – сечение излучения мультиполя, $(D_n^m)^+$ – эрмитово сопряженный оператор по отношению к D_n^m , U^s – рассеянное поле. Таким образом имеет место

Теорема. Сечение экстинкции при возбуждении мультипольным источником вычисляется дифференцированием рассеянного поля в единственной точке - точке

расположения мультиполя. Порядок производных определяется порядком самого мультиполя.

Поскольку рассеянное поле $U^s(M)$ вне препятствия представляет собой аналитическую функцию, то допускается вычисление производных любого порядка.

В дальнейшем полученный результат был обобщен на электромагнитный случай и при расположении мультиполя в присутствии прозрачного полупространства [3].

Метод исследования квантовых эффектов наноплазмоники

Наноплазмоника является драйвером технологического прогресса во многих областях. Инновационные устройства содержат элементы, размеры которых могут быть менее 10нм. В этом случае описание взаимодействия подобных структур со светом в рамках классической теории Максвелла может приводить к серьезным ошибкам. Таким образом, возникает необходимость учитывать присутствие квантовых эффектов (КЭ). Для описания влияния КЭ была разработана гидродинамическая теория Друде и ее обобщение – теория обобщенного нелокального отклика GNOR [5]. GNOR хорошо описывает объемную нелокальность и затухание Ландау, но не описывает выход электронов за пределы поверхности металла (spill out).

В самое последнее время появилась мезоскопическая теория, которая позволяет описать КЭ на основе мезоскопических граничных условий, обобщающих классические условия сопряжения для полей на поверхности структуры [5]. В рамках этой теории математическая постановка граничной задачи дифракции поля $\{E_0, H_0\}$ на плазмонной частице D_i включает в себя:

уравнений Максвелла для полного поля внутри $D_i - \{E_i, H_i\}$ и рассеянного поля во внешней области $D_e - \{E_e, H_e\}$

$$\text{rot}H_{i,e} = jk\varepsilon_{i,e}E_{i,e}, \text{rot}E_{i,e} = -jkH_{i,e} \text{ в } D_{e,i}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{мезоскопические граничные условия сопряжения для полных полей на поверхности } \partial D_i \\ n_i \times (E_i(P) - E_e(P) - E_0(P)) = -d_{\perp} n_i \times \nabla \{n_i \cdot (E_i(P) - E_e(P) - E_0(P))\}, \\ n_i \times (H_i(P) - H_e(P) - H_0(P)) = 0; \end{aligned} \quad (6)$$

условия излучения Сильвера-Мюллера для рассеянного поля.

Здесь n_i – единичная нормаль к поверхности, $\{E_0, H_0\}$ – поле внешнего возбуждения, d_{\perp} – параметр Фейбельмана (ПФ). Вещественная часть ПФ описывает положение центроида облака индуцированных зарядов по отношению к поверхности частицы. Так что, $d_{\perp} < 0$ означает "вдавливание" облака внутрь (spill in) и характерен для металлов с большой работой выхода электрона (Au, Ag, Pt), в то время как $d_{\perp} > 0$ означает выход облака за пределы поверхности (spill out), что характеризует щелочные металлы (Na, K).

Будем строить поля в областях $D_{i,e}$ на основе метода дискретных источников [6]. Соответствующие векторные потенциалы, индуцированные источниками, распределенными вдоль оси симметрии рассеивателя OZ , могут быть записаны как

$$\begin{aligned} A_{mn}^{1,\alpha} = Y_m^{\alpha}(\zeta, z_n^{\alpha}) \{e_{\rho} \cos[(m+1)\varphi] - e_{\varphi} \sin[(m+1)\varphi]\}, \alpha = i, e, \\ A_{mn}^{2,\alpha} = Y_m^{\alpha}(\zeta, z_n^{\alpha}) \{e_{\rho} \sin[(m+1)\varphi] + e_{\varphi} \cos[(m+1)\varphi]\}, A_n^{3,\alpha} = Y_0^{\alpha}(\zeta, z_n^{\alpha}) e_z. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $e_{\rho}, e_{\varphi}, e_z$ – базис цилиндрической системы, а соответствующие функции

$$Y_m^e(\zeta, z_n^e) = h_m^{(2)}(k_{e,s} R_{z_n^e}) \left(\frac{\rho}{R_{z_n^e}}\right)^m, Y_m^i(\zeta, z_n^i) = j_m(k_i R_{z_n^i}) \left(\frac{\rho}{R_{z_n^i}}\right)^m, \quad (8)$$

где j_m – сферические функции Бесселя, $k_i = k\sqrt{\varepsilon_i}$, $\zeta = (\rho, z)$, $\rho^2 = x^2 + y^2$, $R_{z_n}^2 = \rho^2 + (z - z_n)^2$, $\{z_n^{\alpha}\}_{n=1}^{N_m^{\alpha}}$ – координаты ДИ, распределенных вдоль оси вращения OZ .

Тогда, представления для полей $\{E_{i,e}, H_{i,e}\}$ могут быть записаны как

$$\begin{aligned}
& E_{\alpha}^N \\
&= \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N_{\alpha}^m} \left\{ p_{mn}^{\alpha} \frac{j}{k \varepsilon_{\alpha}} \text{rot rot } A_{mn}^{1,\alpha} + q_{mn}^{\alpha} \frac{1}{\varepsilon_{\alpha}} \text{rot } A_{mn}^{2,\alpha} \right\} + \sum_{n=1}^{N_{\alpha}^0} r_n^{\alpha} \frac{j}{k \varepsilon_{\alpha}} \text{rot rot } A_n^{3,\alpha}, H_{\alpha}^N \quad (9) \\
&= \frac{j}{k} \text{rot } E_{\alpha}^N, \alpha = i, e.
\end{aligned}$$

Легко убедиться, что построенные поля удовлетворяют системе уравнений Максвелла и условиям излучения. Неизвестные амплитуды $\{p_{mn}^{e,i}, q_{mn}^{e,i}, r_n^{e,i}\}$ определяются посредством удовлетворения мезоскопическим граничным условиям.

В качестве примера рассмотрим задачу дифракции плоской волны на вытянутом сфероиде эквиобъемного диаметра $D=10\text{nm}$, расположенным в кристалле SiO_2 ($\sqrt{\varepsilon_i} = 1.46$), при угле падения плоской волны $\theta_0 = 90^\circ$. При данном угле падения вектор электрического поля параллелен большей оси сфероида, что гарантирует большую амплитуду плазмонного резонанса (ПР). В качестве вещества частиц выберем Au и Na [7]. Будем исследовать сечения экстинкции и интенсивность поля на "острие" сфероида. На рисунках 1,2 приведены результаты для сфероидов с соотношением осей $r=3$.

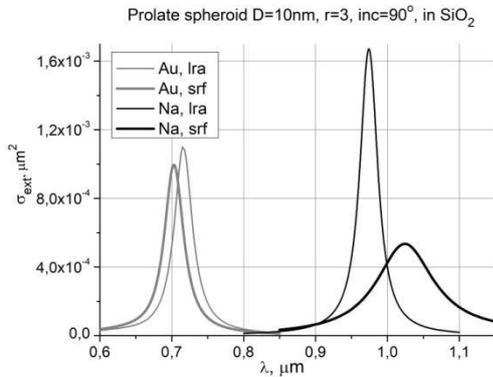


Рисунок 1

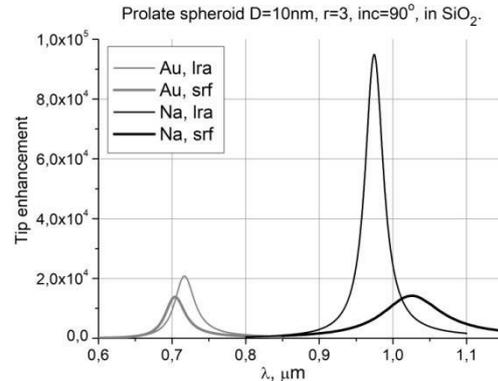


Рисунок 2

Как видно из рисунков учет квантового эффекта (srf) влечет за собой снижение амплитуды (damping) ПР по сравнению с классическим случаем (lra). При этом, для Au ПР сдвигается влево (blue shift), в то время как для Na ПР сдвигается вправо (red shift). Эти обстоятельства обусловлены разными знаками ПФ – d_{\perp} для Au и Na [5]. Так для Na ($d_{\perp} > 0$) выход электронов за поверхность как бы "удлинняет" частицу, сдвигая ПР вправо. Легко видеть, что соотношения между ПР для lra и srf различны на Рис. 1 и 2. Снижение амплитуды ПР при учете квантового эффекта наиболее заметно на Рис. 2. Это обстоятельство лишь подчеркивает различие между "ближней" и дальней зонами применительно к плазмонным полям, которые в большей степени концентрируются вблизи плазмонной структуры.

Литература

1. Хенл Х., Мауэ А., Вестнфаль К. Теория дифракции М. Мир, 1964. – 428 с.
2. Eremin Yu. A., Sveshnikov A.G. Optical theorem for multipole sources in wave diffraction theory // Acoust. Phys. – 2016. – Vol. 62. – P. 263–268.
3. Eremin Yu. A., Sveshnikov A.G. Generalized Optical Theorem to a Multipole Source Excitation in the Scattering Theory // Russian J. Math. Phys. – 2017. – Vol. 24, № 2. – P. 207–215.
4. Devaney A.J., Wolf E. Multipole expansions and plane wave representations of the electromagnetic field // J. Math. Phys. – 1974. – Vol. 15. – P. 234–244.
5. Mortensen N.A. Mesoscopic electrodynamics at metal surfaces (Review) // Nanophotonics. – 2021. – Vol.10, N10. – P. 2563–2616.

6. *Еремин Ю. А., Свешников А. Г.* Квазиклассические модели квантовой наноплазмоники на основе метода Дискретных источников (обзор) // Ж. Вычислит. матем. мат. физ. – 2021. – Т. 61, № 4. – С. 34–62.
7. *Eremin Yu A., Lopushenko V.V.* Comparative Analysis of the Influence of Surface Quantum Effects on Optical Characteristics of Alkali and Noble Metallic Nanoparticles // Computat. Math. Math. Phys. – 2024. – Vol. 64, № 7. – P. 1587–1594.

О взаимодействии научных школ кафедр математики и оптики

On the Interaction of Scientific Schools of the Mathematics and Optics Departments

Короленко П. В.^{1,2}

1) *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ;* 2) *Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Москва, РФ.*

e-mail pvkoroenko@rambler.ru

Аннотация. В докладе рассматриваются актуальные проблемы электродинамики, ставшие предметом исследований научных школ на кафедрах математики и оптики.

Введение

Научные школы, сформировавшиеся на кафедрах математики и оптики, внесли существенный вклад в решение на физическом факультете МГУ разнообразных задач электродинамики. Полученные в ходе проведенных исследований данные можно рассматривать в качестве перспективного базиса для развертывания дальнейших работ в указанном направлении. Целью данного сообщения является систематизация выполненных на кафедрах работ по темам, представляющим взаимный интерес.

Проблематика исследований

Взаимодействие научных школ можно проиллюстрировать на примере решения задач по прохождению электромагнитного излучения через многослойные системы. Еще в 1974 году руководители научных школ – заведующий кафедрой математики академик Тихонов А.Н. и заведующий кафедрой оптики профессор Королев Ф.А. – вместе с сотрудниками опубликовали работу [1] о синтезе многослойных систем. Уделял внимание этой теме и возглавивший после А.Н. Тихонова кафедру математики профессор Свешников А.Г. [2]. Данное научное направление развивается на кафедрах до последнего времени. Проводимые исследования с самого начала носили взаимно дополняющий характер. Если на кафедре математики работа строилась на основе развития новых теоретических представлений, часто базирующихся на решении обратных задач, то на кафедре оптики акцент делался на экспериментальную реализацию разрабатываемых методов совершенствования многослойных устройств. В этой связи следует отметить вклад с.н.с. Клементьевой А.Ю., на протяжении многих лет возглавлявшей лабораторию диэлектрических покрытий. Ориентируясь на полученные теоретические зависимости, она разработала технологию изготовления интерференционных фильтров и зеркал с уникальными характеристиками. Изготовленные ее лабораторией оптические элементы нашли применение в прецизионных астрономических приборах и спутниковых системах. На кафедре оптики была выполнена серия работ по аperiодическим многослойным покрытиям, чередование которых подчиняется последовательности Фибоначчи и правилу Золотого сечения (см., например, [3]). Масштабная инвариантность их характеристик обеспечивает высокую устойчивость их свойств и расширяет область применений.

Следует отметить еще одно направление параллельно проводимых научных разработок. Оно относится к изучению волноводных режимов работы оптических устройств. Внимание специалистов привлекла работа, опубликованная на эту тему, А.Г. Свешниковым и А.Н. Боголюбовым в 1974 г. [4]. На кафедре оптики волноводное распространение излучения экспериментально изучалось применительно к газовым

лазерам [5]. Часть исследований проводилось совместно с лабораторией оптики низкотемпературной плазмы ФИАН РАН.

Доказали перспективность межкафедральные работы по разработке экспертных систем в области лазерной физики (Короленко П.В., Сенаторов П.К.). Полученные результаты позволили оптимизировать процесс создания мощных быстропроточных лазеров.

Сотрудники кафедр принимали участие в совместном решении дифракционных задач прикладного характера [6]. В частности, были выполнены расчеты характеристик так называемых “мягких” диафрагм, используемых в мощных многокаскадных лазерах.

Наконец, следует сказать о проводимых исследованиях в области фрактальной оптики. Ряд требований к постановочной части таких исследований изложены в обзоре [7], подготовленном сотрудниками кафедры математики под руководством Н.Н. Боголюбова. Что касается работ, выполненных в этом направлении на кафедре оптики, значительная их часть посвящена изучению процессов распространения волн с фрактальной структурой в свободном пространстве и турбулентных средах. Полученные результаты систематизированы в обширной публикации [8].

Заключение

Представленный в данном сообщении материал свидетельствует о том, что творческое сотрудничество научных школ кафедр математики и оптики позволило обеспечить решение целого ряда актуальных задач электродинамики и физической оптики. Одновременно, приобщая к научным исследованиям студентов и аспирантов, сотрудники кафедр подготовили целую когорту высококвалифицированных специалистов успешно работающих в различных вузах и научных учреждениях. Многие полученные в ходе исследований научные результаты нашли отражение в материале учебников и учебных пособий, подготовленных на кафедрах.

Литература

1. Тихонов А. Н., Королев Ф. А., Гласко В. Б., Клементьева А. Ю., Тихонравов А. В. // О синтезе многослойных систем. в сборнике. Труды У1 Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн. 1974.
2. Свешников А. Г., Тихонравов А. В., Яншин С. А. Синтез оптических покрытий при наклонном падении света // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1983. – Т. 23, № 4. – С. 929–936.
3. Короленко П. В., Грушина Н. В., Зотов А. М., Мишин А. Ю. Отражающие свойства многослойных систем Фибоначчи на основе наноструктурированного кремния // Нанотехнологии: разработка, применение. – 2010. – № 2. – С. 10–16.
4. Боголюбов А. Н., Свешников А. Г. Обоснование конечно-разностного метода расчета оптических волноводов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1979. – Т. 19, - № 6, - С. 1496-1505.
5. Kozurev D., Korolenko P. Some peculiarities of waveguide working of a gas-laser // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. – 1979. – Vol. 20, - No. 1. – P. 75–78.
6. Короленко П. В., Маркова С. Н., Хапаев А. М. О расчете поля дифракции лазерного излучения в ближней и дальней зонах // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. – 1978. – Т. 21, № 11. – С. 1644–1647.
7. Боголюбов А. Н., Петухов А. А., Шапкина Н. Е. Оптическая дифракция на фрактальных решетках // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. – 2008. – № 2. – С. 11–14.
8. Korolenko P. V. Wave beams with a fractal structure, their properties and applications: a literature review // Physics of Wave Phenomena. – 2020. – Vol. 28, no. 4. – P. 313–325.

Теория измерительно-вычислительных систем: современное состояние

Theory of Computer-Aided Measuring Systems: Current State

Чуличков А.И.

1)Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ.
achulichkov@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается развитие и применение теории измерительно-вычислительных систем, начало которой было положено в восьмидесятые годы XX в. на кафедре математики, руководимой в то время профессором А.Г. Свешниковым.

Введение

Математическая теория измерительно-вычислительных систем как средств измерений в научных исследованиях и промышленности начала формироваться на кафедре математики физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова в 80-е годы прошлого века в работах профессора кафедры Юрия Петровича Пытьева. В самом начале ее формирования заведующий кафедрой А.Г. Свешников поддерживал эти работы и выступал соавтором ряда публикаций на ту тему [1], [2]. За прошедшие почти полвека эта теория получила развитие и широкое применение.

Развитие теории измерительно-вычислительных систем

Методы теории измерительно-вычислительных систем вначале создавались для анализа и интерпретации измерений, полученных в эксперименте, проводимого по схеме

$$\xi = Af + \nu \quad (1)$$

В этой схеме ξ интерпретируется как искаженный шумом ν результат измерения выходного сигнала Af измерителя A , на вход которого подан сигнал f от измеряемого объекта, и требуется максимально точно оценивать сигнал

$$u = Uf \quad (2)$$

на основе моделей, описывающих схемы (1) и (2). Здесь Uf интерпретируется как сигнал, характеризующий поведение изучаемого объекта, причем при $U \neq I$ изучаемый и измеряемый объекты могут не совпадать. Например, сигнал f характеризует свойство реального измеряемого объекта, а Uf – прогноз состояния этого объекта при некоторых измененных (еще не наблюдаемых) условиях. Основное отличие методов теории измерительно-вычислительных систем от методов наименьших квадратов и его регуляризованных вариантов состоит в том, что главным принципом оценивания сигнала Uf является его точность, что накладывает определенные требования на математические модели, описывающие схемы (1) и (2). Наиболее полное развитие получили методы линейного оценивания, применимые для ситуаций, когда математические модели измерителей A в (1) и U в (2) даются линейными операторами.

Результатом анализа и интерпретации является оценка $U\tilde{f}_M$ сигнала Uf и ее погрешность $H(M)$, вычисленные на основе заданной модели измерения M . Однако истинная модель \tilde{M} отличается от заданной M , то погрешность $H(\tilde{M}, M)$ оценки $U\tilde{f}_M$, полученной при заданной модели, но вычисленной при условии, что верна модель \tilde{M} , для разных моделей \tilde{M} может быть как больше, так и не больше предсказанной погрешности $H(M)$. В первом случае, т.е. когда $H(\tilde{M}, M) > H(M)$, оценка $U\tilde{f}_M$ с погрешностью $H(M)$ введет исследователя в заблуждение, т.к. погрешность ошибки будет занижена. Во втором же случае, когда $H(\tilde{M}, M) \leq H(M)$, оценкой $U\tilde{f}_M$ можно пользоваться, т.к. $H(M)$ дает оценку истинной погрешности сверху.

Для проверки предположения $H(\tilde{M}, M) \leq H(M)$ против альтернативы $H(\tilde{M}, M) > H(M)$ теория оптимального оценивания была дополнена теорией надежности результата интерпретации. В основе этой теории лежат методы проверки статистических гипотез и

понятие надежности статистической гипотезы как минимального уровня наиболее мощного критерия, отвергающего гипотезу на основании измерения ξ .

Дальнейшее развитие теории измерительно-вычислительных систем связано с уточнением математических моделей как измеряемого объекта (он характеризуется сигналом f), так и изучаемого объекта (характеризующегося сигналом Uf). Сужение класса решений зачастую приводит к нелинейным оценкам, методы построения которых также развивались в последние годы. Другое направление развития методов теории измерительно-вычислительных систем связано с разработкой математической теории возможностей как альтернативы теории вероятностей. Теория возможностей позволяет эффективно моделировать многие аспекты нечеткости, свойственной сложным физическим, техническим и социальным системам, решать задачи анализа и интерпретации измерений, прогнозирования и т.п. Для наиболее полного учета знаний исследователя о моделях измерения теория измерительно-вычислительных систем была дополнена методами математического моделирования субъективных знаний об объектах исследования. Эти методы формулируются как теория измеримых пространств с двумя мерами, правдоподобия и доверия, даются методы интегрирования по этим мерам, позволившие сформулировать и решить ряд задач принятия оптимальных решений в условиях неопределенности.

Применение теории для нелинейных схем и моделей измерения (1), (2) используют также подходы технологий искусственных нейронных сетей.

Приложения теории измерительно-вычислительных систем

Развитие теории измерительно-вычислительных систем привело к тому, что методы этой теории находят широкое применение в научных исследованиях. В докладе приводятся примеры прикладных задач дистанционного зондирования, задач анализа динамики нелинейных систем, морфологического анализа и интерпретации изображений и др., в том числе методы, использующие технологии искусственных нейронных сетей.

Заключение

Методы теории измерительно-вычислительных систем в настоящее время успешно развиваются и находят широкое применение на практике.

Литература

1. Николаев В.И., Пытьев Ю.П., Русаков В.С., Свешников А.Г., Терентьев Е.Н. Новый принцип организации комплекса "Спектрометру- ЭВМ" в мессбауэровской спектроскопии // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 260, № 4. – С. 848–852.
2. Пытьев Ю.П., Свешников А.Г., Толмачев В.В. Планирование, обработка и анализ автоматизированного эксперимента многочастотного радиолокационного зондирования облаков // Планирование и автоматизация эксперимента в научных исследованиях. Тезисы докладов на 7-й Всесоюзной конференции. – 1983. – С. 1903–65.

Современные и классические методы расчета оптических световодов и волноводов с импедансной границей

Modern and Classical Methods for Eigenwaves Computation for the Fiber and Impedance Waveguides

Быков А. А.

- 1) *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ.*

abykovmsu@mail.ru

Аннотация. Дан обзор и сравнение основных классических (ВКБ, прогонка, характеристическое уравнение, Галеркина) и современных (неполный метод Галеркина, гомотопии) методов для расчета собственных волн цилиндрического волновода и

волновода с импедансной границей. Проведено сравнение методов по критерию общности, точности, скорости сходимости.

1. Собственные моды аксиально симметричного оптического световода

Сформулируем метод ВКБ расчета собственных функций краевой задачи для обобщенного уравнения Гельмгольца. Пусть декартовы координаты (ξ, η, ζ) , $r^2 = \xi^2 + \eta^2$, $\xi = r \cos \varphi$, $\eta = r \sin \varphi$. Пусть плотность среды задана функцией $\rho = \rho(r)$. Найдем все (или некоторые) значения параметра γ , при которых уравнение $\Delta_{\xi\eta} u + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \lambda^2 \rho^2 u = 0$, или, что то же самое, $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \lambda^2 \rho^2 u = 0$, имеет нетривиальное решение вида $u(\xi, \eta, \zeta) = y(r) e^{i\nu\varphi} e^{i\gamma\lambda\zeta}$. Далее используем обозначение x вместо r . Из обобщенного уравнения Бесселя $\frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x \frac{dy}{dx}) - \frac{\nu^2}{x^2} y + \lambda^2 (\rho^2 - \gamma^2) y = 0$ получим $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + (-\frac{\nu^2}{x^2} + \lambda^2 (\rho^2 - \gamma^2)) y = 0$. Предполагаем, что $\gamma \in (\rho_{\min}, \rho_{\max})$. Приведем обобщенное уравнения Бесселя к каноническому виду: $\frac{d^2 y}{dx^2} + \tilde{p}(x) \frac{dy}{dx} + \tilde{q}(x) y = 0$. Выполним замену $y = \exp(-\frac{1}{2} \int_{x_0}^x \tilde{p}(t) dt) \cdot z$, где $\frac{d^2 z}{dx^2} + (\tilde{q} - \frac{\tilde{p}^2}{4} - \frac{1}{2} \tilde{p}'_x) z = 0$, $\tilde{p}(x) = \frac{1}{x}$, $\tilde{q}(x) = -\frac{\nu^2}{x^2} + \lambda^2 (\rho^2 - \gamma^2)$, и тогда $y(x) = \frac{z(x)}{\sqrt{x}}$, $\frac{d^2 z}{dx^2} + (-\frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} + \lambda^2 (\rho^2 - \gamma^2)) z = 0$.

2. Случай большого азимутального числа

Рассмотрим уравнение собственных волн аксиально симметричного оптического световода при большом значении $\nu^2 - \frac{1}{4} = \lambda^2 \beta_n^2$, тогда $\frac{d^2 z}{dx^2} + \lambda^2 (-\frac{\beta^2}{x^2} + (\rho^2 - \gamma^2)) z = 0$. Точки поворота найдем из уравнения $\rho^2 - \gamma^2 = \frac{\beta^2}{x^2}$, равносильного $\frac{\lambda_m}{\pi} \left(\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\rho^2(x) - \gamma^2 - \frac{\nu^2 - 1/4}{\lambda_m^2 x^2}} dx + \frac{\pi}{2} \right) = m$. Пусть $\rho(x) = \sqrt{\frac{a-x^2}{b+x^2}} + c$. Тогда дисперсионное уравнение $\frac{a-x^2}{b+x^2} + c - \gamma^2 - \frac{\nu^2 - 1/4}{\lambda^2 x^2} = 0$ примет вид $s^2 \lambda^2 [1 - c + \gamma^2] + s[-\lambda^2(a + bc - \gamma^2 b) + (\nu^2 - \frac{1}{4})] + (\nu^2 - \frac{1}{4})b = 0$. Пусть $A = \lambda^2 [1 - c + \gamma^2]$, $B = \lambda^2 (a + bc - \gamma^2 b) - (\nu^2 - \frac{1}{4})$, $C = (\nu^2 - \frac{1}{4})b$, тогда точки поворота найдем в явном виде: $x_{1;2}^2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$. Поставим граничные условия излучения в центральной области. В центральном однородном цилиндрическом объеме $\frac{d^2 z}{dx^2} + \lambda^2 \left[(\rho^2 - \gamma^2) - \frac{\nu^2 - 1/4}{\lambda^2 x^2} \right] z = 0$. Точку поворота найдем из равенства $q(x)|_{x_a} = \left[(\rho^2 - \gamma^2) - \frac{\nu^2 - 1/4}{\lambda^2 x^2} \right] \Big|_{x=x_a} = 0$. Сопутствующее уравнение имеет вид $\frac{d^2 z}{dx^2} + \lambda^2 q'_x(x_a) z = 0$, где $q'_x|_{x_a} = (\rho^2)'_x + 2 \frac{\nu^2 - 1/4}{\lambda^2 x^3} > 0$. В окрестности внутренней точки поворота x_a будет $z(x) = \text{Ai}(- (x - x_a) \lambda^{2/3} \sqrt[3]{q'_x(x_a)})$.

На рисунке 1 показан профиль одной из собственных мод, найденный из решения дисперсионного уравнения. В центральной области поле стремится к нулю по степенно-экспоненциальному закону. Во внешней области мы специально оставили иллюстрацию эффекту накопления погрешности численного решения задачи Коши. Правее внешней точки поворота решение обобщенного уравнения Бесселя экспоненциально возрастает, это отражается в численном счете.

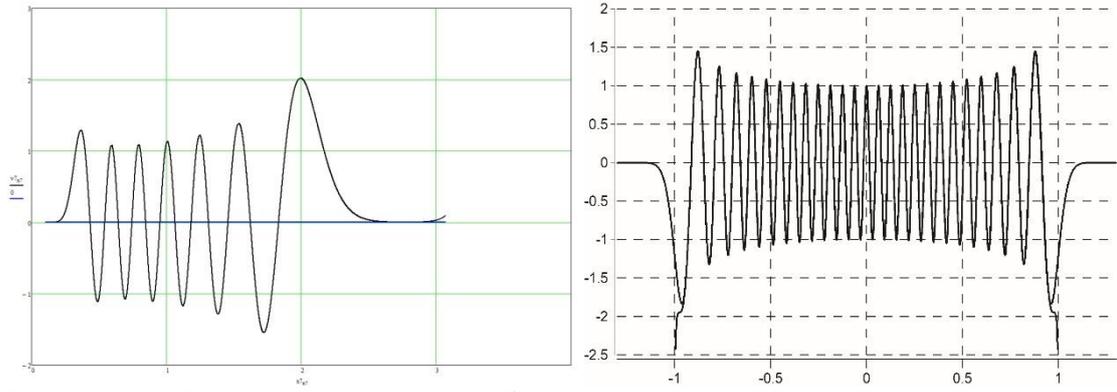


Рисунок 1. Решение задачи на собственные значения для осесимметрического световода с двумя точками поворота (а) методом ВКБ, (б) прогонки.

3. Метод прогонки

Найдем решение уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(-\frac{v^2}{x^2} + \lambda^2(\rho^2 - \gamma^2)\right)y = 0$ на сетке $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $x \in [x_{n-1}, x_n]$. На каждой ячейке сетки в области положительного младшего коэффициента $-\frac{v^2}{x^2} + \lambda^2(\rho^2 - \gamma^2)$ найдем решение в виде $y(x) = u_n Y_v^{(1)}(\lambda p_n x) + v_n Y_v^{(2)}(\lambda p_n x)$, где $p_n = \sqrt{\rho_n^2 - \gamma^2} > 0$. В области отрицательного младшего коэффициента получим уравнение $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(-\frac{v^2}{x^2} - \lambda^2(-\rho^2 + \gamma^2)\right)y = 0$ и решение $y(x) = u_n Z_v^{(1)}(\lambda q_n x) + v_n Z_v^{(2)}(\lambda q_n x)$, $q_n = \sqrt{-\rho_n^2 + \gamma^2} > 0$. Условия сопряжения $u_n Z_n^{(1)}(\lambda q_n x_n) + v_n Z_n^{(2)}(\lambda q_n x_n) = u_{n+1} Z_{n+1}^{(1)}(\lambda q_{n+1} x_n) + v_{n+1} Z_{n+1}^{(2)}(\lambda q_{n+1} x_n)$, $u_n q_n (Z_n^{(1)})'(\lambda q_n x_n) + v_n q_n (Z_n^{(2)})'(\lambda q_n x_n) = u_{n+1} q_{n+1} (Z_{n+1}^{(1)})'(\lambda q_{n+1} x_n) + v_{n+1} q_{n+1} (Z_{n+1}^{(2)})'(\lambda q_{n+1} x_n)$, дают парциальное условие сшивания: $P \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$,

$$P = \begin{pmatrix} Z_n^{(1)}(\lambda q_n x_n) & Z_n^{(2)}(\lambda q_n x_n) \\ q_n (Z_n^{(1)})'(\lambda q_n x_n) & q_n (Z_n^{(2)})'(\lambda q_n x_n) \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} Z_{n+1}^{(1)}(\lambda q_{n+1} x_n) & Z_{n+1}^{(2)}(\lambda q_{n+1} x_n) \\ q_{n+1} (Z_{n+1}^{(1)})'(\lambda q_{n+1} x_n) & q_{n+1} (Z_{n+1}^{(2)})'(\lambda q_{n+1} x_n) \end{pmatrix}.$$

Пусть $Y_n = (u_n, v_n)^T$, тогда в узле сетки $A_n Y_n = B_{n+1} Y_{n+1}$, $n \in \{0, \dots, N-1\}$. Запишем условия сшивания в виде $Y_{n+1} = D_n Y_n$, граничные условия $\gamma_0^T Y_0 = 0$, $\gamma_N^T Y_N = 0$.

Метод прогонки можно сформулировать следующим образом. Пусть $U_{n+1} = D_n U_n$ для $n \in \{0; \dots; N-1\}$. Решим задачу на собственные значения $D_n E_n = E_n \Lambda_n$, $D_n = E_n \Lambda_n E_n^{-1}$, и пусть $\hat{U}_n = U_n H_n$, $U_n = E_n P_n$, $P_n = E_n^{-1} U_n$, причем $\hat{U}_n = E_n$. Тогда $U_n H_n = E_n$, $H_n = U_n^{-1} E_n = (E_n P_n)^{-1} E_n = P_n^{-1} E_n^{-1} E_n = P_n^{-1}$, $U_{n+1} = D_n \hat{U}_n = D_n E_n = E_n \Lambda_n$, $U_{n+1} = E_{n+1} P_{n+1}$, и наконец $P_{n+1} = E_{n+1}^{-1} U_{n+1} = E_{n+1}^{-1} E_n \Lambda_n$. Для коэффициентов суммирования получим $Y_n = U_n C_n = \hat{U}_n \hat{C}_n$, $U_n C_n = U_n H_n \hat{C}_n$, $C_n = H_n \hat{C}_n$. Начальные условия: $U_0 = E_0$, $Y_0 = U_0 C_0$, $\gamma_0^T U_0 C_0 = 0$.

В задаче о собственных волнах следует положить $Y_0 = E_0^{(+)}$, $U_0 = (E_0^{(+)}, E_0^{(-)})$, $\gamma_0^T Y_0 = \gamma_0^T (E_0^{(+)}, E_0^{(-)}) C_0 = 0$. Пусть $(E_0^{(+)}, E_0^{(-)}) C_0 = E_0^{(+)}$, $C_0 = (1; 0)^T$, и наконец найдем матрицы граничных условий: $\gamma_0 = E_0^{(-)}$, $\gamma_N = E_N^{(+)}$.

4. Неполный метод Галеркина

Для волноводов, не обладающих осевой симметрией, можно применить неполный метод Галеркина [1]. Задача решения системы уравнений Максвелла с условиями излучения приведет к краевой задаче на собственные значения для системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, причем спектральный

параметр будет входить как в уравнение, так и в граничные условия. Применить сведение к задаче на собственные значения для квадратной матрицы не удастся, поэтому мы используем метод гомотопии. В задачу вводится новый параметр, описывающий деформацию осесимметричного волновода в заданный неосесимметричный. Далее получается задача Коши для операторного уравнения, которое получается дифференцированием краевой задачи по параметру гомотопии. Этот метод наиболее эффективен в случае применения условий излучения, в том числе при постановке импедансных граничных условий на металлических поверхностях.

Заключение

Применение новых подходов, основанных на комбинировании нескольких методов решения задач на собственные значения, в том числе проекционных методов, метода приведения в обыкновенным дифференциальным уравнениям (неполного метода Галеркина), метода гомотопии (называемого также методом инвариантного погружения) позволяет создать комплекс алгоритмов и программ, позволяющий решать актуальные задачи расчета волноведущих систем на основе оптических световодов и волноводов с импедансными границами.

Литература

1. *Свешников А. Г.* К обоснованию метода расчета распространения электромагнитных колебаний в нерегулярных волноводах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963. Т.3. N2. С.314-326.

Построение вейвлетов на основе атомарных функций

Atomic Functions Based Wavelet Construction

Коновалов Я.Ю.¹, Будунова К.А.², Чуриков Д.В.^{1,3}, Юрин А.В.⁴, Кравченко О.В.^{2,5}, Кравченко В.Ф.¹⁻³

1) *Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, РФ;* 2) *Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва, РФ;* 3) *Научно-технологический центр уникального приборостроения РАН, Москва, РФ;* 4) *СК РФ, Москва, РФ;* 5) *ФИЦ ИУ РАН, Москва, РФ;*

kon20002000@mail.ru, kvf-ok@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается два варианта конструкция вейвлетов на основе атомарных функций. Полученные вейвлеты близки по свойствам к вейвлетам Мейера, но обладают лучшими характеристиками.

Введение

Вейвлеты нашли широкое применение в различных областях науки техники. В частности, широко известна конструкция вейвлетов Мейера, в которой спектр масштабирующей функции строится на основе тригонометрической функции от многочлена специального вида. В данной работе предлагается строить вейвлеты аналогично вейвлетам Мейера, используя в качестве спектра масштабирующей функции корни из сумм сдвигов и сверток с прямоугольным импульсом атомарных функций – бесконечно гладких финитных решений дифференциальных уравнений специального вида. Благодаря сочетанию бесконечной гладкости атомарных функций с финитностью удается получить вейвлеты с лучшими характеристиками, чем характеристики вейвлетов Мейера. Преимущества новых вейвлетов подтверждаются примерами.

Описание работы

Атомарные функции. Согласно [1-3] атомарные функции – финитные решения функционально-дифференциальных уравнений вида

$$y^{(n)} + \alpha_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + \alpha_1y' = \sum_{k=1}^K c_k y(ax - b_k), \quad (1)$$

В общем случае коэффициенты $a, \alpha_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}$, однако, для каждого конкретного семейства атомарных функций на коэффициенты добавляются дополнительные условия. Вместе с этим, полиномиальные атомарные функции представимы в виде бесконечных сверток прямоугольных импульсов, суммы их сдвигов обеспечивают разложение единицы и точное представление многочленов. К этому классу можно отнести атомарную функцию $ip(x)$, семейства $fip_n(x), ip_m(x), \pi_m(x), h_a(x), ch_{a,n}(x)$. К экспоненциальным относят $eip_a(x), hip_a(x)$, сумма сдвигов которых обеспечивает точное выражение экспоненты. Гармонические атомарные функции представлены семействами $tup_b(x), scup_b(x), g_k(x)$, чья сумма сдвигов точно выражает элементарные тригонометрические функции.

Вейвлеты Мейера. Рассмотрим известную [4], [5] конструкцию вейвлетов Мейера. На первом этапе выбирается преобразование Фурье масштабирующей функции $\hat{\varphi}(\omega)$, удовлетворяющее следующим требованиям

1. $\hat{\varphi}(\omega)$ четная неотрицательная функция, с носителем $\left[\frac{4\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$,
2. $\hat{\varphi}(\omega) \equiv 1$ на отрезке $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$,
3. $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi n)|^2 = 1$.

Затем строится сопряженный зеркальный фильтр $H_0(\omega) = \frac{\hat{\varphi}(2\omega)}{\hat{\varphi}(\omega)} = \hat{\varphi}(2\omega)$. Далее функция $H_0(\omega)$ периодически продолжается с периодом 2π для выполнения условия обеспечивающего ортогональность базиса. После этого преобразование Фурье вейвлета может быть найдено в виде

$$\hat{\psi}(\omega) = e^{\frac{i\omega}{2}} H_0\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (1)$$

Таким образом, вейвлет Мейера полностью определяется выбором $\hat{\varphi}(\omega)$. При построении вейвлетов Мейера [4], [5] в качестве $\hat{\varphi}(\omega)$ используются тригонометрические функции от многочленов специального вида.

Вейвлеты на основе сумм сдвигов атомарных функций. В работах [1-3] было предложено рассмотреть $\hat{\varphi}(\omega) = \sqrt{\chi(\omega)}$, где $\chi(\omega)$ – должным образом масштабированная сумма сдвигов атомарных функций. Далее построение вейвлета осуществляется аналогично процедуре построения вейвлета Мейера. При этом, для соблюдения второго требования применяется свойство разложения единицы, что накладывает на конструкцию серьезные ограничения. Для такого способа подходят только полиномиальные атомарные функции. При этом из непрерывных семейств $h_a(x), ch_{a,n}(x)$ можно выбрать только функции с определенными значениями параметров. Поскольку определяющее свойство атомарных функций – наличие уравнения (1) никак не используется, для построения таких вейвлетов, в принципе подходят любые гладкие финитные функции, образующие разложение единицы, например $fip_{a,n}(x)$ [6].

Вейвлеты на основе свёртки с прямоугольным импульсом. В [7], [8] в качестве $\chi(\omega)$ рассматривалась свертка гладкой четной финитной функции с прямоугольным импульсом $\chi(\omega) = \phi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) * g(\omega)$. Использование в качестве $g(\omega)$ атомарных функций позволяет получить бесконечно гладкую $\hat{\varphi}(\omega)$ что положительно сказывается на характеристиках полученных вейвлетов. При этом никаких ограничений на значения параметров используемых функций нет, и семейства $h_a(x), ch_{a,n}(x), fip_{a,n}(x)$ порождают непрерывные семейства вейвлет-базисов. Кроме того, для построения вейвлетов по этой методике могут быть использованы не только полиномиальные, но и четные экспоненциальные и вещественные гармонические функции, в частности $hip_a(x), scup_b(x), g_k(x)$, а также семейства функций, представленные в [9]. Сочетание

бесконечной гладкости атомарных функций с финитностью позволяет сконструировать вейвлеты с лучшими характеристиками, чем характеристики вейвлетов Мейера.

Заключение

Рассмотрено два способа построения вейвлетов на основе атомарных функций, близких по свойствам к вейвлетам Мейера. Оба подхода основаны на явном построении квадрата спектра масштабирующей функции в виде суммы сдвигов атомарной функции либо ее свертки с прямоугольным импульсом.

Литература

1. *Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В.* Атомарные функции $h_a(x)$ и новые ортогональные вейвлеты на их основе // *Успехи современной радиоэлектроники*. – 2008 – № 6, – С. 67-85.
2. *Кравченко В.Ф., Юрин А.В.* Новый класс вейвлет-функций в цифровой обработке сигналов и изображений. // *Успехи современной радиоэлектроники*. – 2008 – № 5, – С. 3-64.
3. *Кравченко В.Ф., Кравченко О.В.* Конструктивные методы алгебры логики, атомарных функций, вейвлетов, фракталов в задачах физики и техники. М.: ТЕХНОСФЕРА, 2018.
4. *Малла С.* Вэйвлеты в обработке сигналов. Пер. с англ. М.: Мир, 2005.
5. *Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А.* Теория всплесков. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
6. *Коновалов Я.Ю.* Новое семейство бесконечно гладких функций с компактным носителем // *Физические основы приборостроения*. – 2020 – Т. 9, №2(36). – С. 48-59.
7. *Коновалов Я.Ю., Кравченко В.Ф.* Новая конструкция вейвлетов, на основе свертки финитных функций с прямоугольным импульсом // *Радиотехника и электроника*, – 2022. – Т. 67, № 8, – С. 761-733.
8. *Кравченко В. Ф., Коновалов Я. Ю.* Построение вейвлетов на основе экспоненциальных атомарных функций $h_{ip_a}(x)$ и гармонических $sc_{ip_b}(x)$ и $g_k(x)$ // *Радиотехника и электроника*, – 2023, – Т. 68, № 10, – С. 954-964.
9. *Кравченко В.Ф., Коновалов Я.Ю.* Построение новых дупараметрических семейств экспоненциальных и гармонических атомарных функций // *Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации: Труды XVI Международной научно-технической конференции, Суздаль, 9-12 октября 2023.*

Математическое моделирование

Задача трансмиссии в круглом и прямоугольном волноводах. Вычислительный эксперимент

Transmission Problem in Circular and Rectangular Waveguides. Computational Experiment

Александрова И. Л.

Казанский федеральный университет, институт вычислительной математики и информационных технологий, г. Казань, РФ.

iralexand@mail.ru

Аннотация. Пусть в поперечном сечении волноводной структуры имеется неоднородность. Задача трансмиссии состоит в следующем: задано электромагнитное поле с одной стороны от сечения, нужно найти поле с другой его стороны. В работе предложены алгоритмы приближенного решения задачи трансмиссии в круглом и прямоугольном волноводах, проведены вычислительные эксперименты. Получены условия на размер экрана и длину волны, при которых решение устойчиво к небольшим возмущениям исходных данных.

Введение

Задача трансмиссии рассматривалась в [1] как вспомогательный инструмент для решения ряда обратных задач теории дифракции. В работах [2], [3] дана постановка такой задачи и предложен метод ее решения в случае плоского и цилиндрического волноводов. Этот метод построен на основе бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, к которым сводятся методом переопределенной граничной задачи, задачи дифракции электромагнитной волны на поперечной перегородке в волноводе с металлическими стенками.

Рассмотрим круглый и прямоугольный волноводы, в поперечном сечении S которых находится идеально проводящий тонкий экран M . Волноводы заполнены однородной изотропной средой. Задача трансмиссии в определенном смысле является обратной к задаче дифракции. В задаче дифракции по падающему на экран полю необходимо найти поле, уходящее от экрана на бесконечность в обеих половинах волновода. В задаче трансмиссии наоборот: задано падающее на экран поле и уходящее от экрана поле в одной половине волновода, требуется найти поле уходящее и набегающее на экран в другой половине волновода.

В настоящей работе построены алгоритмы приближенного решения задачи трансмиссии в круглом и прямоугольных волноводах. Проведен вычислительный эксперимент, в результате которого получены условия на размер экрана и длину волны, при которых задача имеет устойчивое решение к небольшим возмущениям входных данных.

Круглый волновод

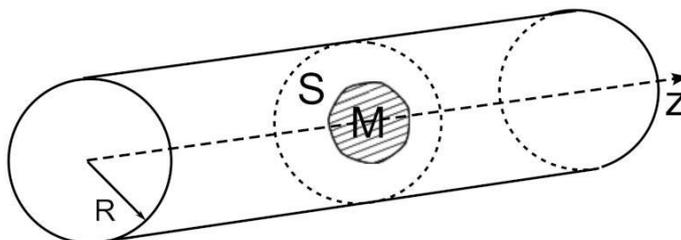


Рисунок 1. Круглый волновод

Рассмотрим круглый волновод (рисунок 1) с направляющей вдоль оси z , ограниченный металлическими стенками. В поперечном сечении волновода плоскостью $z = 0$ находится круглый металлический экран. Будем рассматривать только ТЕ-волны, зависимость от времени гармоническая. Предположим, что в цилиндрической системе координат электромагнитное поле не зависит от координаты α .

Будем решать упрощенную задачу трансмиссии, в которой по уходящему от экрана полю в одной половине волновода требуется восстановить поле в другой половине волновода. Пусть $A_q, q = 0, 1, 2, \dots$ – коэффициенты разложения искомой волны, уходящей от экрана на бесконечность, по собственным волнам круглого волновода. Тогда задача трансмиссии сводится к БСЛАУ относительно A_q

$$-A_q + \sum_{l=0}^{+\infty} A_l \gamma_l \sum_{v=0}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_v} I_{l,v} J_{v,q} + \sum_{l=0}^{+\infty} A_l I_{l,q} = f_q, q = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

где γ_l – продольные постоянные распространения, а величины $I_{l,v}, J_{v,q}$ вычисляются по некоторым формулам.

Приближенное решение БСЛАУ (1) находится методом усечения: в системе оставляем N уравнений, оставляем N неизвестных (остальные полагаем равными 0), во внутренних суммах оставляем M слагаемых. Параметры N и M связаны условием $M > N$. Конечномерная СЛАУ решается методом Гаусса.

Выберем в качестве исходных данных в задаче трансмиссии решение соответствующей задачи дифракции. Вычислительный эксперимент показал, что решение задачи трансмиссии является достаточно близким к ожидаемым значениям, а также устойчиво к небольшим возмущениям исходных данных при следующих соотношениях: $R_1 < R/4$ и $\lambda < R$, здесь R – радиус волновода, R_1 – радиус экрана, λ – длина волны. В случае, если размер экрана находится в диапазоне $R/4 < R_1 < R/3$, то решение задачи трансмиссии будет устойчивым к небольшим возмущениям правой части в случае, когда $\lambda < R_1$.

Прямоугольный волновод

Рассмотрим прямоугольный волновод (рисунок 2) с направляющей вдоль оси z , ограниченный металлическими стенками $x = 0, x = a, y = 0, y = b$. Пусть экран имеет прямоугольную форму со сторонами, параллельными сторонам волновода, и расположен в плоскости $z = 0$. Пусть $A_{mn}, B_{mn}, m, n = 0, 1, 2, \dots$ – коэффициенты разложения искомой волны по собственным волнам.

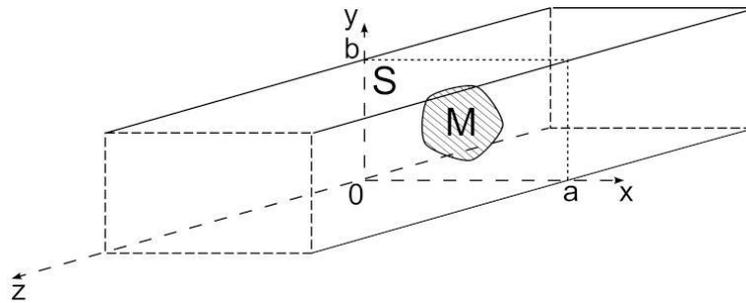


Рисунок 2. Прямоугольный волновод

Задача трансмиссии в прямоугольном волноводе сводится к БСЛАУ относительно коэффициентов $u_{mn} = \left(\frac{A_{mn}}{B_{mn}}\right)$ разложения искомого поля по собственным волнам

$$u_{pq} - \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_{mn} R_{mnpq} u_{mn} - \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} S_{mnpq} u_{mn} = f_{pq}, p, q = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

где γ_{mn} – продольная постоянная распространения, R_{mnpq} , S_{mnpq} – матрицы размером 2×2 , элементы которых вычисляются по заданным формулам.

От БСЛАУ (2) перейдем к соответствующей конечномерной системе, в которой индексы p, q меняются от 0 до N , а во внутренних суммах, которые содержатся в матрицах R_{mnpq} , S_{mnpq} , остается по M слагаемых, причем $M > N$. Полученная СЛАУ решается методом Гаусса.

Вычислительный эксперимент показал, что если в качестве исходных данных в задаче трансмиссии брать приближенное решение задачи дифракции, то элементы u_{mn} восстанавливаются с достаточной точностью. Чем меньше размер экрана и меньше длина волны, тем результат лучше. Кроме того, при малых размерах экрана, когда отношение площади экрана к площади поперечного сечения меньше 0.5, и малой длине волны, решение задачи трансмиссии получилось устойчивым к небольшим возмущениям входных данных.

Заключение

Построен алгоритм численного решения задачи трансмиссии, проведен вычислительный эксперимент. Вычислительный эксперимент показал, что для рассмотренных волноводных структур задача трансмиссии имеет устойчивое решение к небольшим возмущениям исходных данных при относительно малом размере экрана и малой длине волны.

Литература

1. *Александрова И.Л., Плещинский Н.Б.* О восстановлении информации о неоднородности в плоском волноводе // Исследования по прикладной математике и информатике – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2011. – Вып. 27 – С. 8-13.
2. *Александрова И.Л., Плещинский Н. Б.* Проводящий тонкий экран в волноводной структуре: задача дифракции и задача трансмиссии // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013 – № 1 (25). – С.45-60
3. *Alexandrova I.L.* Electromagnetic wave transmission issue in cylindrical waveguide // International Journal of Applied Engineering Research. – 2015 – 10 (12) – P. 31349-31362

Математическое моделирование работы магнитного компрессора с электродинамическим разгоном лайнера

Mathematical Modeling of the Operation of a Magnetic Compressor with Electrodynamic Acceleration of the Liner

Галанин М.П.¹, А.П. Лотоцкий², Родин А.С.¹

1) *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, РФ;*

2) *АО ГНЦ РФ ТРИНИТИ, Москва, Троицк, РФ.*

galan@keldysh.ru, lototsky@triniti.ru, rals@bk.ru

Аннотация. Выполнено математическое моделирование работы магнитного компрессора, в котором плоский алюминиевый лайнер ускоряется электромагнитными силами до скорости порядка 1 км/с. Рассмотрены различные двумерные приближения, соответствующие продольному и поперечному сечениям устройства. Построено семейство двумерных моделей, в рамках которых для описания движения лайнера применены приближения упругого тела, упругопластического тела и вязкой несжимаемой жидкости. Для построения численной модели использованы метод возможных перемещений и метод Галеркина-Петрова. Результаты серии вычислительных экспериментов показали, что характеристики движения жидкого и упругопластического лайнера хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными данными.

Введение

Выполнено моделирование электромагнитного ускорения и торможения металлического лайнера в устройстве обострения мощности. Исследования проведены в сотрудничестве с ГНЦ РФ ТРИНИТИ, в котором созданы экспериментальные макеты магнитных компрессоров (МК). Основными деталями компрессора являются стальной индуктор и ленточный лайнер из алюминия (см. рис. 1.а), по которым течет ток величиной в несколько МА [1]. Работа компрессора основана на сжатии магнитного потока лентами лайнера, которые ускорены электродинамическими силами до скорости 1 км/с и двигаются навстречу друг к другу. Построенный МК планировалось использовать в качестве усилительного каскада мощности в установке «МОЛ» («Магнитный Обостритель Лайнер»), которая предназначена для генерации электрического импульса мегаджоульного уровня. МК пластинчатого типа является оригинальным предложением российских ученых. Несмотря на схожие принципы генерации выходного импульса тока (сжатие магнитного потока) с известными взрывомагнитными генераторами, МК имеет принципиальные отличия, обусловленные электрической схемой ускорения лайнера и использованием захвата рассеянного магнитного потока в зоне обжатия.

Актуальность работы определяется тем, что математическое моделирование является единственным инструментом получения подробной информации о движении лайнера, поскольку из экспериментов удается получить весьма ограниченную информацию о протекающих процессах. Во время экспериментальных запусков магнитного компрессора время работы устройства составляло 100 - 120 мкс, а рабочие участки ленты лайнера полностью разрушались.

Описание работы

Построено семейство двумерных моделей, соответствующих продольному и поперечному сечениям компрессора (расчетная область соответствовала одной четвертой части сечения), в рамках которых лайнер рассмотрен в приближениях упругого тела, упругопластического тела (для случая произвольных деформаций) и вязкой несжимаемой жидкости [2]. Модель для электромагнитной задачи основана на системе уравнений Максвелла в МГД приближении, причем построенные для обоих сечений модели обеспечивают протекание через проводники заданных значений полных токов [2].

Для численного моделирования разработаны и программно реализованы вычислительные алгоритмы, основанные на методе возможных перемещений и методе Галеркина-Петрова.

Проведен цикл вычислительных экспериментов для различных моделей. Показано, что характеристики движения жидкого и упругопластического лайнера качественно согласуются с имеющимися экспериментальными данными. В частности, кадры теневой съемки лайнера показывают, что центральная часть ленты совершает практически плоскопараллельное движение и не претерпевает больших продольных изгибов. Результаты модели упругого лайнера не соответствуют экспериментальным данным. В целом модель упругопластического лайнера наиболее адекватно описывает движение лайнера в МК. Использование данной модели для прогнозирования движения лайнера в поперечном сечении компрессора позволило получить значения ключевых параметров системы (ширина ленты лайнера в различные моменты времени, скорость центра масс лайнера, амплитуда импульса тока в цепи лайнера и т.д.), которые отличаются от экспериментальных значений на 5-10% [1].

На рис. 1.б показаны положения ленты лайнера в расчете с упругопластической моделью в различные моменты времени (моделируется половина одной ленты, движение происходит сверху вниз). Оттенками серого показана вертикальная скорость, нормированная на 100 м/с, координаты нормированы на величину 10 см.

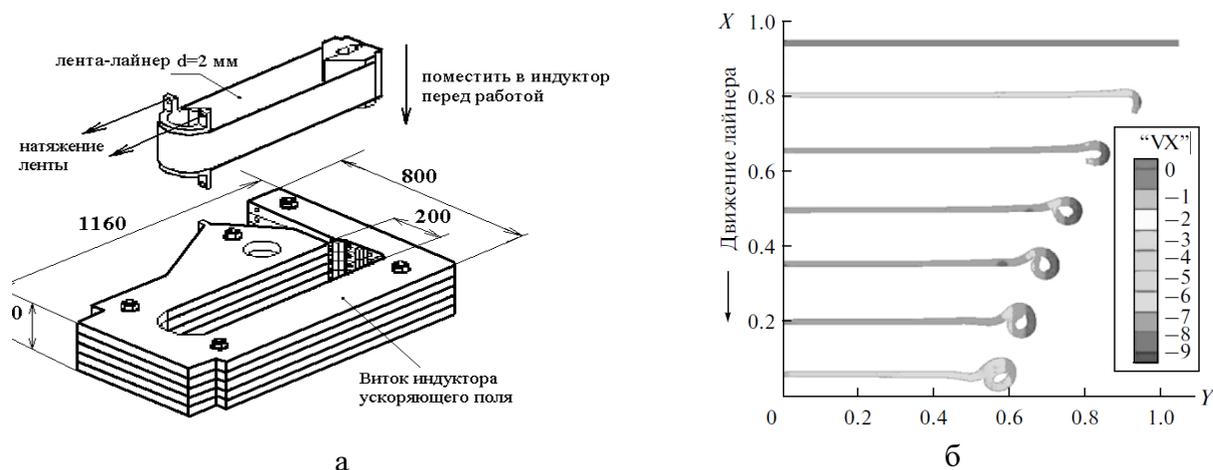


Рисунок 1. а – конструкция МК; б - положения лайнера в различные моменты времени

Результаты расчетов показали, что в процессе движения ленты почти весь ток, протекающий через лайнер, сосредоточен на его краях. Под действием силы Ампера края ленты загибаются вниз и закручиваются, поэтому ширина лайнера уменьшается с 21 до 12.5 см, что соответствует экспериментальным данным [1].

Проведена серия расчетов для полномасштабного МК установки МОЛ, в котором входной электрический импульс генерируется не с помощью емкостного накопителя энергии, а с помощью индуктивного накопителя (ИН). Показано, что апериодическая форма тока ИН дает более широкие возможности по оптимизации параметров выходного импульса. В частности, длительность фронта выходного импульса может быть сокращена до величины 8-10 мкс [3].

При моделировании движения лайнера в продольном сечении особый интерес представляет взаимодействие ленты с наклонными стальными опорами, которые расположены в торцах устройства (см. рис. 1). Призмы нужны для предотвращения преждевременного обрыва лайнера и сохранения параллельности движущихся участков ленты. Решена отдельная задача о контактном взаимодействии металлической пластины, разогнанной до скорости около 0.5 км/с за интервал времени порядка 100 мкс, со стальной опорой, расположенной под углом 25 градусов к плоскости движения лайнера [4]. Для учета граничных условий на контактных поверхностях использован метод Нейман-Дирихле. Проведена серия расчетов, результаты которых свидетельствуют о том, что максимальное пластическое деформирование тел и максимальные контактные силы сосредоточены в узкой области, примыкающей к движущейся границе контакта лайнера с опорой. Под действием контактных сил на поверхности опоры возникают волны смещения в направлении нормали, близкие к гармоническим. Проведен анализ аналитических решений ряда одномерных тестовых задач, позволяющих качественно оценить особенности полученных численных решений двумерной задачи.

Для проведения дальнейших экспериментов на тонких ленточных лайнерах в ГНЦ РФ ТРИНИТИ создана установка с малыми по сравнению со стандартным МК размерами и простой геометрией ускорителя [5] и увеличенной относительно ширины ленты длиной разгона. В данной установке проводилось ускорение ленты лайнера без сжатия магнитного потока, при этом достигалась большая плотность тока на краях ленты и большая скорость лайнера. Проведенные для поперечного сечения расчеты показали, что в процессе движения сечение лайнера приобретает П-образную конфигурацию, при этом его ширина уменьшается с 20 до 6 мм, что хорошо согласуется с полученными экспериментальными данными. В форсированных режимах экспериментально наблюдалось расщепление ленты на 2 группы фрагментов, что являлось следствием перегрева материала пластин в угловых точках конфигурации.

Заключение

Исследованы различные варианты магнитного компрессора, в котором происходит электромагнитное ускорение плоской металлической пластины (лайнера) до скорости порядка 1 км/с. Выполнено численное моделирование работы устройства в различных двумерных приближениях. Показано, что результаты расчетов близки к данным, полученным в натурных экспериментах.

Литература

1. *Е. В. Грабовский, В. П. Бахтин, Н. М. Ефремов, М. К. Крылов, А. П. Лотоцкий, Н. М. Умрихин, Г. Н. Хомутильников, М. П. Галанин, А. С. Родин, А. Е. Новожилов* Экспериментальные и расчетные исследования магнитного компрессора потока с лайнером полоскового типа от емкостного накопителя // *Ядерная физика и инжиниринг.* – 2013. – Т. 4, № 2. – С. 136–145.
2. *М. П. Галанин, А. П. Лотоцкий, А. С. Родин* Математическое моделирование движения лайнера в различных сечениях магнитного компрессора // *Математическое моделирование.* – 2010. – Т. 22, № 10. – С. 35–55.
3. *М. П. Галанин, М. К. Крылов, А. П. Лотоцкий, А. С. Родин* Моделирование динамики лайнера в магнитном компрессоре установки МОЛ при питании ускорителя от индуктивного накопителя энергии // *Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.* – 2013. – № 77. – 18 с.
4. *М. П. Галанин, А. С. Родин* Задача о падении ленты лайнера на наклонную опору. – Дифференциальные уравнения. – 2024. – Т. 60, № 7. – С. 897–910.
5. *Е. В. Грабовский, В. П. Бахтин, А. М. Житлухин, В. Ф. Левашов, А. П. Лотоцкий, Д. А. Топорков, Н. М. Умрихин, Н. М. Ефремов, М. К. Крылов, Г. Н. Хомутильников, Ю. Н. Сулимин, М. П. Галанин, А. С. Родин* Электродинамическое ускорение тонких пластин при высоких плотностях тока // *Ядерная физика и инжиниринг.* – 2017. – Т. 62, № 10. – С. 937–944.

Оптическая диагностика фрактальных биосистем

Optical Diagnostics of Fractal Biosystems

Рыжикова Ю. В.¹, Рыжиков С. Б.¹

1) Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ

ryzhikovaju@physics.msu.ru

Аннотация. В работе рассматривается актуальная задача фрактальной физики. Рассмотрены общие подходы к решению фундаментальной научной задачи, направленной на установление закономерностей, определяющих количественную связь между особенностями структуры фрактальных биосистем и их картинами дифракции. На основе численного моделирования определены особенности скейлинга фрактальных биосистем. Проводится выявление трансформации формы фурье спектров и их связи с элементами самоподобия освещаемых биосистем. Выполненный расчет дифракции света на биообъектах указывает на возможность использования паттерного и скейлингового анализа для их идентификации. Полученные результаты моделирования позволяют усовершенствовать фрактальные методы оптической диагностики анализируемых биосистем.

Введение

Фрактальные биообъекты (биоморфы, дендритные биосистемы и др.) широко используются в различных междисциплинарных приложениях [1-3]. Общетеоретические аспекты исследований фрактальных биосистем имеют отношение к важной фундаментальной проблеме фрактальной оптики, направленной на установление закономерностей, определяющих связь между особенностями структуры изучаемых объектов и их спектральными и скейлинговыми характеристиками. Ее решение позволит

усовершенствовать фрактальные методы оптической диагностики фрактальных структур.

Несмотря на значительное количество работ, например [2-5], выполненных в указанном направлении, недостаточно изученными оказались скейлинговые, спектральные и фрактальные особенности рассматриваемых биосистем.

Цель данной работы состоит в анализе скейлинга разных биосистем и их оптических спектров с выделением в них самоподобных элементов – паттернов. Проведенный анализ опирается на поиск инвариантов (скейлинговые коэффициенты, фрактальная размерность) для анализируемых объектов и их фурье-образов, что позволяет выработать общие критерии идентификации фрактальных биосистем.

Анализ фрактальных биосистем

Особенности фрактальных биосистем можно учесть на основе анализа их свойств. Для нахождения соответствия между структурой и оптическими характеристиками (картины дифракции) различных фракталов используется структурный и скейлинговый анализ, фурье анализ и вейвлет анализ. Для стохастических дендритов этот стандартный набор инструментов дополняется корреляционным анализом [4], [6], [7]. Расчет распределений амплитуд дифракционных картин биообъектов производился нахождением фурье-образов их структуры. Так, поле дифракции в дальней зоне характеризуется амплитудой A_q или A_{q_x, q_y} для одномерных или двумерных объектов, соответственно:

$$A_q = \sum_{j=1}^J P^o(j) \omega_j^{(j-1)(q-1)} = F(P^o); A_{q_x, q_y} = F(F(P^o)^T)^T, \quad (1)$$

где $\omega_j = \exp \{ -2\pi i s / J \}$, q, q_x, q_y – нормированные пространственные частоты, $i = \sqrt{-1}$, J – число элементов, s – масштабирующий множитель, P^o – бинарная функция пропуска фрактального объекта, T – неспрягаемое матричное транспонирование. Время расчетов по формуле (1) зависит от длины преобразования, что достигается быстрее всего при числе элементов, выраженных через степени двойки.

Биоморфы. Формирование биоморфов осуществлялось с помощью простого алгоритма многократного возведения в степень комплексного числа. Наибольший интерес представляет ситуация, когда комплексные числа начинают группироваться вокруг области, внешне похожей на микроорганизм. Каждый биоморф строится путем многочисленных итераций заданной функции. Нас интересовало получение фрактальных биоморфов с выраженными скейлинговыми свойствами как в структуре, так и в их спектральных характеристиках. Были проанализированы различные семейства биоморфов, полученные по итерационным формулам: $Z_{n+1} = Z_n^m + C$, где $m \geq 2$ и C – комплексная константа. Здесь $Z_1 = (I - x_c) \cdot \Delta s - 1 + i \cdot (J - y_c) \cdot \Delta s$ – исходное значение комплексной переменной. Расчетная область задавалась как $1 \leq I, J \leq 6000$, $\Delta s = 0.001$ – масштабный коэффициент, $x_c = y_c = 3000$ – координаты ее центра. Затем те же арифметические действия применяются к сумме Z_2 , получается значение Z_3 и т.д. Полученные таким образом комплексные числа строим в системе координат на комплексной плоскости (x, y) , где $x = Z_n, y = Z_n$.

В случае произвольно заданных комплексных C возможно создание различных фрактальных биоморфов. В качестве примера на рисунке 1, а приведен биоморф, полученный на основе итерационных вычислений: $Z_{n+1} = Z_n^3 + C$, где $C = 0.5555i - 0.5883$.

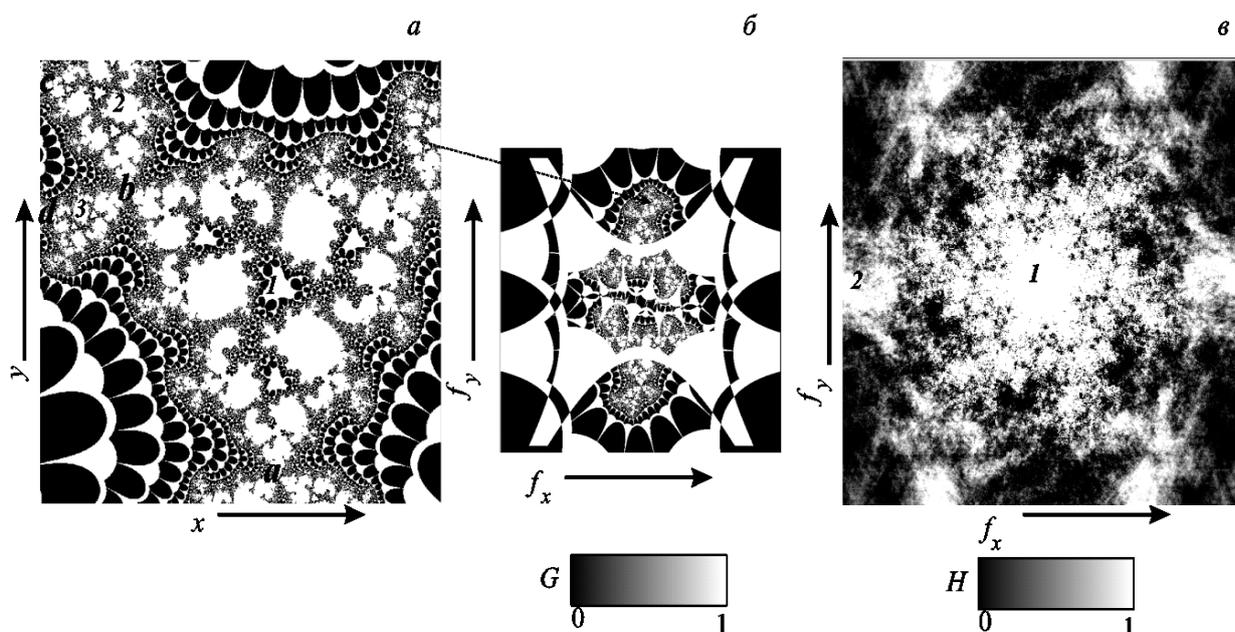


Рисунок 1. Пример моделирования биосистем: фрагмент биоморфа на комплексной плоскости – *a*, фрагмент спектра двукратного фурье-преобразования биоморфа $G(f_x, f_y)$ (мнимая часть) – *б*, фрагмент спектра двукратного фурье-преобразования биоморфа $H(f_x, f_y)$ (модуль) – *в*, f_x, f_y – нормированные пространственные частоты. Цифрами показаны наиболее крупные самоподобные структурные элементы объекта – *a* и элементы паттерных образований в спектре – *в*. Стрелкой показаны идентичные области по форме (пунктир)

Сформированный биоморф фрактален, его наиболее крупные самоподобные элементы – паттерны обозначены цифрами. Коэффициенты скейлинга биоморфа определяются как: $\zeta_{12} = ab/bc \approx 2.35$ и $\zeta_{23} = bc/bd \approx 1.51$. Здесь индексы 1, 2 и 3 соответствуют выделенным самоподобным паттернам.

При проведении над рассматриваемыми структурами двумерного фурье-преобразования (1): $A = fft2(Z)$, самоподобные элементы в пространственном спектре не различимы. Здесь $fft2$ – двумерное Фурье-преобразование, вычисленное с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье. Мнимая и действительная части такого преобразования имеют не фрактальный растровый вид.

Если применить двумерное фурье-преобразование к полученному спектру A еще раз, то самоподобные элементы появляются вновь: $G = \ln fft2(\text{Im}(A))$ (рисунок 1, *б*). Аналогичные результаты по форме спектров получаются и для спектра $G = \ln fft2(\text{Re}(A))$. При этом коэффициенты скейлинга спектров имеют те же значения, что и соответствующие им структуры биоморфов (рисунок 1, *a*). Модуль спектра двукратного фурье-преобразования биоморфа $H(f_x, f_y)$ имеет фрактальные признаки. На рисунке 1, *в* наиболее крупные самоподобные элементы – паттерны обозначены цифрами 1 и 2. Коэффициент скейлинга равен отношению большего радиуса паттерна к меньшему: $\zeta_{12} \approx 3.54$.

Заключение

Полученные результаты моделирования показали, что самоподобные структуры биоморфов и соответствующие им спектры характеризуются различными значениями коэффициентов скейлинга. Таким образом, применение процедуры двукратного фурье-преобразования позволяет выявить новые самоподобные элементы биоморфов, которые могут быть потеряны в оптических характеристиках в классическом приближении (однократное фурье-преобразование). Выполненные расчеты дополняют разработанную ранее нами классификацию фракталов по поведению их идентификаторов –

коэффициентов скейлинга [5].

Литература

1. *Боголюбов А.Н., Петухов А.А., Шапкина Н.Е.* Математическое моделирование волноводов, содержащих локальные вставки с фрактальной структурой. // Вестник Моск. Ун-та. Серия 3. Физика, астрон. – 2011. – Т. 66, №2. – С. 20-23.
2. *Ryzhikova Yu., Mukhartova Iu., Ryzhikov S.* Scaling properties of fractal-like structures. // J. Phys. Conf. Ser. – 2018. – P. 012059.
3. *Вохник О.М., Короленко П.В., Мохов В.В.* Свойства фрактальных спеклоподобных структур. // Известия РАН. Серия физическая. – 2024. – Т. 88, № 1. – С. 13-16.
4. *Рыжикова Ю.В., Рыжиков С.Б.* Особенности преподавания курса оптики фрактальных объектов. // Ученые записки физического факультета МГУ. – 2023. – №6. – С. 2351001.
5. *Рыжикова Ю.В., Рыжиков С.Б.* Паттерный анализ фракталоподобных систем. // Вестник Моск. Ун-та. Серия 3. Физика, астрон. – 2023. – Т. 78, №4. – С. 2340406.
6. *Ильинский А.С., Свешников А.Г.* Численные методы в теории дифракции (Курс лекций). – М.: Издательство Московского университета, 1975. – 90 с.
7. *Goodman J.W.* Statistical Optics. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 2015. – 544 p.

Реконструкция магнитных полей струй из Активных Ядер Галактик путем анализа синхротронного излучения релятивистских электронов

Reconstruction of the AGN jet's Magnetic Fields by Analyzing the Synchrotron Emission of Relativistic Electrons

Пащенко И. Н.¹, Юшков Е. В.², Соколов Д.Д.²

1) *Астрокосмический центр физического института им. П.Н. Лебедева РАН, Москва, РФ;* 2) *Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, РФ.*
yushkov.msu@mail.ru, in4pashchenko@gmail.com, sokoloff.dd@gmail.com

Аннотация. В основе задачи реконструкции магнитных полей струй из Активных Ядер Галактик, называемых иногда джетами, лежит эффект поворота плоскости линейной поляризации электромагнитного излучения, проходящего через магнитоактивную среду, также хорошо известный под названием эффекта Фарадея (или Фарадеевского вращения). Причиной этого эффекта является разница коэффициентов преломления право- и лево- поляризованных волн, распространяющихся через магнитное поле струи, вследствие чего исходно поляризованное синхротронное излучение релятивистских электронов деполаризуется из-за набега разности фаз. Углы и степени поляризации такого излучения, фиксируемые на современных радиоинтерферометрах, гипотетически могут помочь в оценке продольной и азимутальной компонент магнитного поля струй, а восстановленная таким образом структура поля в свою очередь может подсказать гипотезы об их формировании. Текущая работа посвящена теоретическому осмыслению этого вопроса, постановке обратной задачи реконструкции и ее решению.

Постановка задачи

Идея о возможности реконструкции магнитных полей астрофизических тел по анализу поляризации синхротронного излучения релятивистских электронов была предложена Гинзбургом и Сыроватским еще в 70-ых годах прошлого века [1]. В основу практической реализации легла формула Бёрна [2], учитывающая что каждая точка объекта отвечает не только за поворот плоскости поляризации, как, например, в случае внешнего Фарадеевского экрана, но и за формирование новых источников поляризованного излучения, другими словами и деполаризация, и излучение непрерывно происходят вдоль всего луча наблюдения, проходящего через астрофизический объект. Несмотря на сложность формулировки Бёрн показал, что для

плоского астрофизического источника с однородным полем, моделирующим, например, плоскую галактику, угол наблюдаемой поляризации зависит линейно, а степень поляризации по закону синка от квадрата длины волны излучения. Простота и красота формулы Бёрна позволили оценить и восстановить магнитные поля различных галактик, используя данные современных телескопов, имеющих возможность измерять наклон и вытянутость эллипса поляризации излучения на разных длинах волн [3]. Несмотря на то, что были попытки применить формулу Бёрна и для других астрофизических объектов, в том числе, и струй (джетов) из Активных Ядер Галактик, было очевидно, что структура магнитного поля цилиндрической струи уж очень далека от галактического плоского слоя с однородным полем. Поэтому вопрос о механизме деполяризации для цилиндрических структур встал как-никогда актуально. Наша работа делает попытку закрыть этот вопрос и открыть новую область приложения идей Гинзбурга и Сыроватского.

Основная идея работы

Формирующиеся в процессе синхротронного излучения электронов лево- и право-поляризованные электромагнитные волны имеют разные скорости, или на более привычном языке, разные коэффициенты преломления n_L и n_R . Как следствие, при распространении в среде с магнитным полем, например в галактике или галактическом джете, наблюдается набег фазы волны, что может приводить к деполяризации исходно поляризованного излучения [1]. В итоге, конечный поворот плоскости поляризации $\psi(r)$ определяется начальным поляризационным углом $\psi_0(r)$, разностью коэффициентов преломления $(n_R - n_L)$, частотой волн ω и путем L , на котором и происходит деполяризация:

$$\psi(r) = \psi_0(r) + \left(\frac{\omega}{2c}\right) (n_R - n_L)L. \quad (1)$$

Подставляя выражения для коэффициентов преломления лево- и право- поляризованной волны, зависящие среди прочего от компоненты магнитного поля направленной вдоль проходящего через магнитоактивную среду луча наблюдения, можно переписать выражение для угла поляризации в виде

$$\psi(r) = \psi_0(r) + R(r)\lambda^2, \text{ где функция } R(r) = Kn \int (\mathbf{B}, d\mathbf{r}) \quad (2)$$

зависит от различных входящих в Kn констант, таких как, например, концентрации релятивистских электронов, их массы и заряда, а также от интеграла магнитного поля вдоль вышеупомянутого луча, направленного на наблюдателя [4]. Если теперь учесть, что источник излучения находится не в какой-то выделенной точке, а источником является каждая точка астрофизического тела, находящаяся на луче наблюдения, то изменение поляризации следует записать в виде суммы комплексных поляризаций (интеграла) от каждой точки со своей “внутренней” интенсивностью излучения $\varepsilon(r)$:

$$P/P_0 = \int \varepsilon(r) \exp(2i(\psi_0(r) + R(r)\lambda^2))dr / \int \varepsilon(r)dr. \quad (3)$$

Здесь константа P_0 – это исходная степень поляризация, которая предполагается равной 75%, см. [1], функция $\varepsilon(r)$ – это внутренняя интенсивность излучения, которая предполагается пропорциональной квадрату перпендикулярной компоненты магнитного поля, см. [4], а $\psi_0(r)$, начальный угол поляризации, отсчитываемый от выбранного направления до вектора электрического поля пропорционального векторному произведению $[\mathbf{B}, d\mathbf{r}]$. Таким образом, для оценки деполяризации необходимо задать геометрию магнитного поля джета и вычислить выписанные интегралы.

Мы рассматриваем цилиндрический джет с осью вращения, совпадающей с осью Oz и предполагаем, что наблюдатель видит его под углом θ к оси джета так, что луч наблюдения проходит параллельно плоскости Ozy на расстоянии x от оси. Это расстояние x далее называется прицельным расстоянием. Предположим теперь, что магнитное поле джета является азимутально-симметричным геликоидальным полем $\mathbf{B} = (B_\varphi \sin \varphi; -B_\varphi \cos \varphi; -B_z)$, и опустив арифметические выкладки выразим комплексную

поляризацию через её модуль Π (степень поляризации) и половину её аргумента Ψ (угол поляризации):

$$\Pi = \int \varepsilon(y) \cos(2\psi_0(y) + 2\phi(y)\lambda^2) dy / \int \varepsilon(y) dy \quad (4)$$

где функция $\phi(y)$ это так называемая фарадеевская глубина, а l это полуширина проекции сечения цилиндра лучом наблюдения на ось Oy . Фарадеевская глубина $\phi(y)$ при этом оказывается равной интегралу

$$\phi(y) = \int_0^y \left(\frac{B_\phi x}{y} + B_z \cot \theta \right) dy, \quad (5)$$

состоящему из двух частей: нечетной по x части, определяемой азимутальным полем, и четной, определяемой полем продольным. При этом заметим, что коэффициент пропорциональности между углом поляризации и квадратом длины волны, называемый мерой фарадеевского вращения, это с одной стороны параметр, удобно измеряемый в наблюдениях, а с другой стороны это фарадеевская глубина $\phi(l)$ взятая в точке l . В предположении азимутальной симметрии джета – его “цилиндричности” – геометрические параметры джета такие как, например, прицельное расстояние или параметр l известны из наблюдений. Соответственно, может быть поставлена обратная задача восстановления магнитного поля по измеренному профилю меры фарадеевского вращения поперек джета, см. Рисунок 1. Данная обратная задача может быть сведена к уравнению Абеля и решена, о чем и пойдет речь в докладе.

Таким образом, несмотря на то что на первый взгляд задача реконструкции магнитного поля джета, выглядит существенно сложнее, чем задача реконструкции магнитного поля галактики, наличие азимутальной симметрии, известных размеров джета и измеряемых профилей фарадеевской меры поперек джета позволяют успешно применять идеи Гинзбурга и Сыроватского и к галактическим джетам. Конечно, последнее слово о пользе полученных результатов остается за экспериментаторами, однако нам кажется интересным уж и то, что сама теоретическая постановка такого вопроса имеет явное и четкое решение.

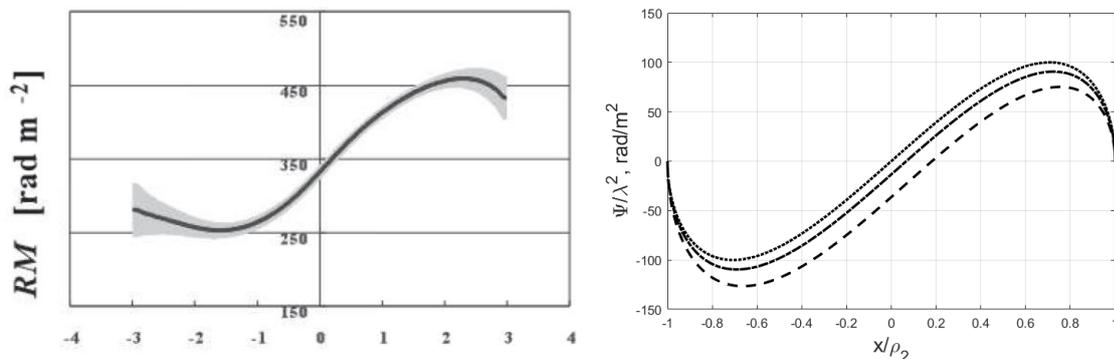


Рисунок 1. Профиль меры фарадеевского вращения поперек струи квазара 3C 273 в наблюдениях на радиоинтерферометре со сверхдлинной базой (слева) и аналитических расчетах (справа).

Наблюдательные данные на левой панели, полученные в работе [5], обнаруживают вариацию фарадеевской меры 200 рад/м^2 на поперечных размерах струи в 6 миллисекунд дуги. Аналитические расчеты на правой панели получены в рамках используемой модели геликоидального магнитного поля джета с параметрами, подобранных таким образом, чтобы вариация меры также была 200 рад/м^2 , при этом расстояние до оси джета измеряется в относительных величинах. Три линии на правой панели: точки, точки со штрихами и штрихи соответствуют различным углам наклона джета 90, 105, 125 градусов соответственно. Четко прослеживается нарушение симметричной структуры

профиля, за четность которого отвечает продольное, а за нечетной азимутальное магнитное поле.

Литература

1. В. Л. Гинзбург, С. И. Сыроватский Космическое магнитотормозное (синхротронное) излучение // Успехи физических наук – 1965. – 87(9) – С. 65-111.
2. В. J. Burn On the depolarization of discrete radio sources by Faraday dispersion // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society – 1966 – 133(1) – P. 67-83.
3. Д. Д. Соколов Как измеряют магнитные поля галактик: от книги В. Л. Гинзбурга до фарадеевского синтеза // Природа – 2017 – Т. 10 – С. 30-36.
4. D. Sokoloff, A. Bykov, A. Shukurov, E. Berkhuijsen, R. Beck, A. Poezd Depolarization and Faraday effects in galaxies // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society – 1998 – 299(1) – P. 189-206.
5. K. Asada, M. Inoue, Y. Uchida, S. Kameno, K. Fujisawa, S. Iguchi, M. Mutoh A helical magnetic field in the jet of 3C 273 // Publications of the Astronomical Society of Japan – 2002 – 54(3) – P. 39-43.

Условия адекватности безызлучательного предела в самосогласованном описании разреженной плазмы

Conditions for the Adequacy of the Nonradiative Limit in the Self-Consistent Description of a Rarefied Plasma

Бородачев Л.В.

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ.
borodach2000@mail.ru*

Аннотация. В работе рассмотрены характерные черты Дарвиновского (безызлучательного) описания электромагнитных полей. Получены критерии физической адекватности формализма в рамках самосогласованного подхода к модельному представлению разреженной плазмы. Показана реализация предложенных оценок адекватности на базе численных исследований неустойчивости Вайбеля.

Введение

Активное использование самосогласованного подхода [1], учитывающего взаимозависимое влияние фазового распределения заряженных частиц и внутренних электромагнитных полей, во многих фундаментальных и прикладных задачах нелинейной плазмифики, обусловлено, как известно, его высокой эффективностью при изучении неравновесных состояний горячей разреженной плазмы.

Математически он представлялся системой кинетических уравнений Власова, детально описывающих эволюцию каждой из плазменных компонент, и уравнений Максвелла, наиболее полно отражающих динамику внутренних электромагнитных полей различной природы.

Однако для низкочастотных и, как правило, слабoreлятивистских систем свободные электромагнитные поля играют второстепенную роль, поскольку малы в сравнении с самосогласованными и характеризуются существенно меньшими пространственно-временными масштабами. Очевидно, что численный анализ таких плазменных систем в рамках формализма Максвелла оказывается излишне подробным и, как следствие, весьма дорогостоящим.

В этой связи целесообразно обратиться к редуцированным полевым описаниям, из которых аппроксимация Дарвина (безызлучательный предел) [2] представляется наиболее интересной как в физическом, так и в численном аспектах.

Приближение Дарвина

В системе СГСЕ уравнения Дарвиновского представления электромагнитного поля имеют следующий вид:

$$\nabla \vec{E} = 4\pi\rho, \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_p}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\nabla \vec{B} = 0, \quad (4)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_p + \vec{E}_v : \nabla \times \vec{E}_p = 0, \nabla \vec{E}_v = 0. \quad (5)$$

Здесь \vec{E}_p, \vec{E}_v – соответственно потенциальная (продольная) и вихревая (поперечная) составляющие электрического поля.

При этом уравнение непрерывности заряда имеет модифицированный вид:

$$\nabla \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi} (\nabla \vec{E}_p) \right) = 0. \quad (6)$$

Физическая нетривиальность приближения состоит в том, что, исходно пренебрегая запаздыванием, оно сохраняет ряд индукционных эффектов, в частности, связанных с законом Фарадея.

Вместе с тем внутренние электромагнитные поля определяются лишь текущими значениями плотностей тока и заряда (первыми моментами функции распределения частиц), что обуславливает высокую численную экономичность полевого расчета.

Как легко видеть, данное описание активно использует разложение Гельмгольца для векторных полей и отличается от полного (Максвелловского) лишь опущенной поперечной составляющей тока смещения, отвечающей за присутствие свободных электромагнитных волн в системе.

Этот момент весьма важен в контексте настоящей работы, поскольку представляется естественным искать условие корректности Дарвиновского формализма в задачах кинетики разреженной плазмы, оценивая возможное влияние указанной редукции на модельное развитие того или иного плазменного процесса.

Критерии физической адекватности

Требуемую оценку влияния можно получить, рассматривая вклады опущенной и оставшейся частей тока смещения в генерацию внутреннего электромагнитного поля. Для этого воспользуемся размерностным (точнее масштабным) анализом, в рамках которого будем полагать, что значимые изменения базовых величин Дарвиновской системы уравнений происходят в характерных масштабах (L, T) некоторого гипотетического процесса. При этом усредненные значения $|\nabla \times \vec{u}|$ или $|\nabla \vec{u}|$ можно представить как (u/L) , а усредненное значение $|\partial \vec{u} / \partial t|$ – как (u/T) .

Тогда, сопоставляя в рамках этого подхода различные члены уравнений (1) – (6), удастся оценить отношение величин поперечной и продольной составляющих тока смещения:

$$\frac{|\partial \vec{E}_v / \partial t|}{|\partial \vec{E}_p / \partial t|} \sim \left(\frac{L}{cT} \right)^2. \quad (7)$$

Представленная оценка, по сути, определяет критерий физической адекватности Дарвиновского приближения полей в задачах кинетики разреженной плазмы:

$$\left(\frac{L}{cT} \right)^2 \ll 1. \quad (8)$$

Действительно, в этом случае вклад поперечной составляющей тока смещения в развитие исследуемого процесса на фоне вклада его продольной составляющей

исчезающе мал и результаты, полученные в рамках модели Власова - Дарвина, физически достоверны.

Подчеркнем, что анализ отношения (7) корректен лишь при безусловном удовлетворении неравенства

$$\frac{v_T}{c} \ll 1, \quad (9)$$

которое в настоящем контексте можно назвать условием (критерием) слабого релятивизма. Оно естественно вытекает из исходных физических предпосылок построения как можно более точной функции Лагранжа для системы частиц и полей с мгновенным дальнодействием (основная цель, поставленная Дарвиным). Как оказалось, при сравнительной малости отношения тепловой скорости (v) к скорости света (c), такую систему удастся описать через незапаздывающие потенциалы Дарвиновским (безызлучательным) лагранжианом взаимодействия, точным до величин порядка $(v/c)^2$ в разложении по параметру $(v/c) \ll 1$ полной Лагранжевой функции [4].

Заметим, что возможна следующая, так сказать, волновая интерпретация найденного критерия (8).

Пусть линейный размер модельной области (l_{sys}) имеет порядок пространственного масштаба (L) процесса, а его характерное время (T) определяет некоторую, назовем ее характерной, частоту ω_{ch} .

Тогда выражение $(L/(cT))$ можно рассматривать как отношение длины области моделирования к длине волны (λ) с частотой (ω_{ch}) в вакууме:

$$\left(\frac{L}{cT}\right) \sim \left(\frac{l_{sys}}{\lambda_{ch}}\right) \quad (10)$$

Следовательно, использование Дарвиновского приближения (безызлучательного предела) в рамках самосогласованного подхода корректно, если линейный размер модельной системы существенно меньше длины волны с характерной частотой ($\simeq 2\pi/T$) в вакууме.

Подобная трактовка полученного критерия особенно предметна в случае численного анализа различного рода неустойчивостей, что в работе наглядно продемонстрировано на примере реального математического моделирования электромагнитной неустойчивости Вайбеля [5].

Заключение

Предложенный подход позволяет еще на стадии аналитического прогноза основных параметров исследуемого явления разреженной магнитоактивной плазмы получить априорную информацию о возможности использования Дарвиновского представления электромагнитных полей в рамках самосогласованного формализма. Учитывая существенную численную эффективность безызлучательного предела в сравнении с Максвелловским описанием, по-видимому, целесообразно включение рассмотренной методики в общую постановку компьютерных экспериментов, особенно при изучении крупномасштабных процессов нелинейной плазмифики.

Литература

6. А. А. Власов Теория многих частиц – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. –348 с.
7. C. G. Darwin // Philosophical Magazine. – 1920. – V. 39. – P. 537-551.
8. Л. В. Бородачев, И. В. Мингалев, О. В. Мингалев // Математическое Моделирование. – 2006. – Т. 18. № 11. – С. 117-125.
9. Дж. Джексон Классическая электродинамика. – М.: Мир, 1965. –618 с.
10. L. V. Borodachev, D. O. Kolomiets // Journal of Plasma Physics. – 2011. . – V. 77. – P. 277-288.

Схемы QAM-модуляции высокого порядка в методе ортогонального частотного мультиплексирования с фильтрацией

High-Order QAM-Modulation Schemes in Filtered Orthogonal Frequency-Division Multiplexing Method

Будунова К.А.¹, Кравченко В.Ф.¹⁻³

1) *Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН, Москва, РФ;*

2) *Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, РФ;* 3) *Научно-технологический центр уникального приборостроения РАН, Москва, РФ.*

1917schw@mail.ru, kvf-ok@mail.ru

Аннотация. В работе рассмотрен алгоритм ортогонального частотного мультиплексирования с фильтрацией, применяющийся для передачи сигналов, спектры которых расположены в соседних субполосах частот. Дано описание возникающей при применении алгоритма погрешности восстановления символов квадратурной амплитудной модуляции. Для снижения погрешности предложен модифицированный алгоритм, основанный на свойствах циклической свертки.

Введение

Применение метода ортогонального частотного мультиплексирования (OFDM) с фильтрацией [1] предлагается для повышения эффективности передачи данных с помощью технологий беспроводной связи. Частотно-избирательные фильтры позволяют снизить влияние внеполосного излучения, которое отрицательно влияет на восстановление данных при использовании схемы OFDM со множеством пользователей [2].

Метод ортогонального частотного мультиплексирования с фильтрацией

При применении метода OFDM с фильтрацией в частотной области выделяется P субполос $[\omega_{p,1}, \omega_{p,2}]$, $p = 1, \dots, P$, каждой из которых соответствует свой OFDM-сигнал $x_l^{(p)}$. Последовательность $x_l^{(p)}$ образована отсчетами K OFDM-символов $\{u_l^{(p,q)}\}_{l=n}^{n+N-1}$ длиной N с циклическими префиксами (ЦП) $\{u_l^{(p,q)}\}_{l=0}^{n-1}$ длиной n , $q = 1, \dots, K$. На отрезках $[\omega_{p,1}, \omega_{p,2}]$ расположены центры спектров поднесущих символов $\{u_l^{(p,q)}\}_{l=n}^{n+N-1}$, $q = 1, \dots, K$, а интервалы вида $(\omega_{p,2}, \omega_{p+1,1})$ содержат защитные частоты. Сигналы $\{u_l^{(p,q)}\}_{l=n}^{n+N-1}$ – обратные дискретные преобразования Фурье (ОДПФ) последовательностей символов квадратурной амплитудной модуляции (QAM)

$$\{d_k^{(p,q)}\}_{k=0}^{N-1} : u_{n+l}^{(p,q)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} d_k^{(p,q)} e^{j2\pi kl/N}, l = 0, \dots, N-1.$$

Блок-схема алгоритма OFDM с фильтрацией показана на рисунке 1. В передатчиках выполняется свертка каждого из сигналов $x_l^{(p)}$ с субполосным фильтром $h_l^{(p)} : y_l^{(p)} = h_l^{(p)} * x_l^{(p)}$, $p = 1, \dots, P$. На вход приемника поступает сигнал r_l , образованный суммой аддитивного белого гауссовского шума (АБГШ) и прошедших через канал сигналов $y_l^{(p)}$. Полученный сигнал r_l подается на вход субполосных фильтров $f_l^{(p)} : r_l^{(p)} = f_l^{(p)} * r_l$, $p = 1, \dots, P$.

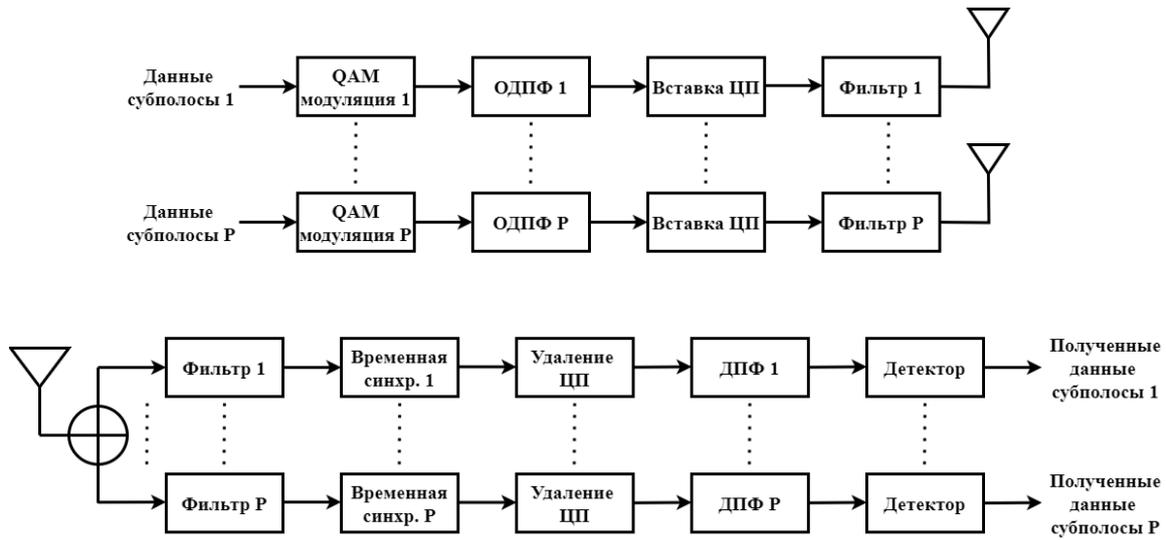


Рисунок 1. Блок-схема метода OFDM с фильтрацией

Коэффициенты фильтров $h_l^{(p)}$ и $f_l^{(p)}$ при $l = 0, \dots, 2L$ связаны формулой $f_l^{(p)} = \overline{h_{2L-l}^{(p)}}$. После фильтрации для каждой из последовательностей $r_l^{(p)}$ проводится временная синхронизация с p -м передатчиком [1]. Символы QAM-модуляции $\{d_k^{(p,q)}\}_{k=0}^{N-1}$ восстанавливаются с помощью дискретного преобразования Фурье (ДПФ).

Погрешности, возникающие при применении метода ортогонального частотного мультиплексирования с фильтрацией

Даже при отсутствии в канале помех после применения метода OFDM с фильтрацией QAM-символы восстанавливаются неточно. Результат восстановления $\tilde{d}_k^{(p,q)}$ символа $d_k^{(p,q)}$, соответствующего поднесущей с номером k , определяется выражением

$$\tilde{d}_k^{(p,q)} = (1 + \delta_k^{(p)}) d_k^{(p,q)} + \varepsilon_{1,k}^{(p,q)} + \varepsilon_{2,k}^{(p,q)} + \varepsilon_{3,k}^{(p,q)}. \quad (1)$$

В формуле (1) $\delta_k^{(p)}$ – неравномерность в полосе пропускания квадрата амплитудно-частотной характеристики $|H_p(e^{j\omega})|^2$ фильтра $h_l^{(p)}$ в точке $\omega = 2\pi k/N$. В левой части равенства (1) присутствуют также погрешности трех различных видов:

- 1) погрешность $\varepsilon_{1,k}^{(p,q)}$, вызываемая фильтрацией OFDM-символа с циклическим префиксом и усечением полученной последовательности;
- 2) погрешность $\varepsilon_{2,k}^{(p,q)}$ из-за фильтрации соседних по времени символов;
- 3) погрешность $\varepsilon_{3,k}^{(p,q)}$, появляющаяся при применении субполосного фильтра к сигналам из других субполос.

Модифицированный метод OFDM с фильтрацией

Можно показать, что для фильтра длиной $2L+1$ при дополнении каждого из символов $\{u_l^{(p,q)}\}_{l=n}^{n+N-1}$ расширенным ЦП из $2L$ отсчетов слева и циклическим продолжением из $2L$ отсчетов справа формула (1) для восстановленных символов $\tilde{d}_k^{(p,q)}$ принимает вид

$$\tilde{d}_k^{(p,q)} = (1 + \delta_k^{(p)}) d_k^{(p,q)} + \varepsilon_{3,k}^{(p,q)}. \quad (2)$$

Равенство (2) можно получить, учитывая свойства циклической свертки. При добавлении префикса и продолжения длиной $n < 2L$ погрешности $\varepsilon_{1,k}^{(p,q)}$, $\varepsilon_{2,k}^{(p,q)}$ подавляются частично.

Численный эксперимент

В численном эксперименте рассматривалась передача данных с использованием стандартного и модифицированного методов OFDM с фильтрацией при наличии в канале АБГШ. Использована схема передачи данных со следующими параметрами: ширина канала 5 МГц, расстояние между поднесущими 15 кГц, размер ОДПФ 512, количество субполос $P = 3$. Каждой субполосе соответствуют 72 поднесущие, между субполосами выделено 8 защитных частот. Выполнялось моделирование асинхронной передачи данных – принято, что сигнал, соответствующий субполосе 2, запаздывает на $n + 10$ отсчетов относительно субполосных сигналов 1 и 3, где $n = 36$ – длина ЦП. В стандартном и модифицированном алгоритмах использовались цифровые фильтры, полученные умножением идеальной характеристики на весовую функцию Хэмминга [3]. Длина фильтров $2L + 1 = 301$.

Для полученных после работы модифицированного и стандартного алгоритмов данных вычислялось количество ошибочно восстановленных бит. Зависимости коэффициента ошибок на бит (BER) от отношения энергии бита к спектральной плотности шума E_b/N_0 для схем модуляции QAM 1024 и QAM 4096 показаны на рисунке 2.

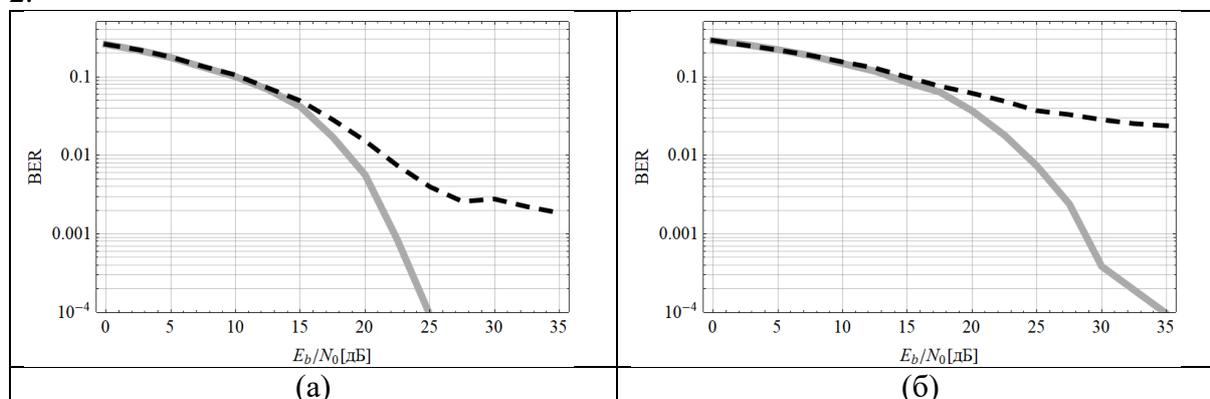


Рисунок 2. Зависимости величины BER от отношения E_b/N_0 для схем модуляции QAM 1024 (а), QAM 4096 (б), полученные при использовании стандартного (пунктирная линия) и модифицированного (светлая линия) алгоритмов OFDM с фильтрацией

Заключение

При применении метода OFDM с фильтрацией даже при отсутствии помех символы QAM-модуляции восстанавливаются с погрешностью. Для снижения погрешности предложен модифицированный алгоритм, основанный на свойствах циклической свертки. В проведенном численном эксперименте новый метод оказался эффективным в сочетании со схемами модуляции высокого порядка QAM 1024 и QAM 4096, где применение стандартного алгоритма не обеспечило возможности качественного восстановления данных.

Литература

1. *J. Abdoli, M. Jia, J. Ma.* Filtered OFDM: A new waveform for future wireless systems. // Proc. of 2015 IEEE 16th International Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC), Stockholm, Sweden. – 2015. – P. 66-70.
2. *Бакулин М.Г., Крейнделин В.Б., Шлома А.М., Шумов А.П.* Технология OFDM. – М.: Горячая линия – Телеком, 2017. – 351 с.
3. *Айфичер Э.С., Джервис Б.У.* Цифровая обработка сигналов. – М.: ИД «Вильямс», 2008. – 989 с.

Методы цифровой обработки сигналов в задаче спектрального анализа органических объектов

Digital signal processing methods for the task of organic objects spectral analysis

Орлов С. А.^{1,2}, Чуриков Д. В.¹

1) Научно-технологический центр уникального приборостроения РАН, Москва, РФ;

2) Институт стратегий развития, Москва, РФ.

sorloff0@gmail.com, cdv@ntcup.ru

Аннотация. В работе рассматривается применение методов цифровой обработки сигналов с целью анализа спектральных характеристик объектов, имеющих органическое происхождения. К таким объектам, характеризующимся содержанием тех или иных веществ (хлорофил, каротиноиды и т.д.), относятся растения. Полученные результаты имеют теоретическое и прикладное значение для развития бесконтактных методов диагностики и мониторинга состояния растений. Одним из важных направлений является выявление связей параметров растений и их оптических характеристик.

Введение

В растениеводстве получили распространение бесконтактные методы диагностики, позволяющие выявлять стрессовые состояния растений на ранней стадии. Актуальной задачей является разработка методов, объединяющих в себе несколько подходов к мониторингу растений, а также выделение показателей, наиболее тонко реагирующих на изменение процессов, влияющих на состояние растительного организма. Наиболее востребованными методами получения данных для анализа состояния растительности является видеоспектрометрия и изображающая флуориметрия. В качестве математического описания работы спектральных методов используют радиационные модели растительного листа. С их помощью разрабатывают способы интерпретации спектральных данных (например, определение вегетационных индексов). Данная работа посвящена применению методов цифровой обработки [1-3] сигналов радиационной модели растительного листа *PROSPECT* [4], применяемой для исследования свойств объектов на основе мультимодальных оптических данных.

Описание работы

Произведено моделирование спектральных характеристик листьев пшеницы по фактическому содержанию хлорофилла, а также их обработка [2] с помощью фильтрации и выявления информативных признаков. К таким признакам можно отнести области характерных изменений и относительного уровня значений спектров.

Материалы и методы. В качестве образцов была выбрана пшеница (*Triticum aestivum*). Для моделирования спектральных характеристик растения взята радиационная модель растительного листа *PROSPECT-5* [5].

Входные данные базовой модели *PROSPECT* следующие:

N – параметр структуры мезофилла листа;

C_{ab} – концентрация хлорофилла $a+b$ ($\text{мкг}\cdot\text{см}^{-2}$);

C_{bp} – концентрация коричневого пигмента ($\text{мкг}\cdot\text{см}^{-2}$);

C_w – эквивалентная толщина воды (см);

C_m – содержание сухого вещества ($\text{г}\cdot\text{см}^{-2}$).

Выходные данные базовой модели *PROSPECT*:

$K\lambda$ – коэффициент поглощения;

$R(\lambda)$ – коэффициент отражения листа;

$T(\lambda)$ – коэффициент пропускания листа.

Использованы данные по суммарному содержанию хлорофилла [6], а в качестве примера было взято измеренное его значение на уровне $7.41 \text{ мкг}\cdot\text{см}^{-2}$. Следует отметить, что для достоверности результатов в модельном примере необходимо контролировать, чтобы значение этого параметр не выходило за границы типичного содержания хлорофилла в пшенице.

В модели *PROSPECT-5* относительно базовой *PROSPECT* в исходные данные добавлено содержание каротиноидов. Т.к. содержание каротиноидов в указанной выше статье не рассчитывалось, для его расчета относительно содержания хлорофилла был взят средний коэффициент 0.2845 из аналогичных исследований по пшенице [7-9].

Остальные входные параметры были заданы следующим образом:

- параметр структуры мезофилла листа – 1.6;
- концентрация коричневого пигмента – 0 мкг·см⁻²;
- эквивалентная толщина воды – 0.012 см;
- содержание сухого вещества – 0.005 г·см⁻².

Вышеуказанные входные параметры были приняты исходя из аналогичных исследований [8-9], а также данных эксперимента *LOPEX-93* [10].

Построенный модельный спектр представлен на рис. 1, а результат его обработки на рис. 2. Как можно заметить, применение модели *PROSPECT-5* позволяет получать достаточно достоверные результаты [11-12], а математическая обработка [1-3] анализировать спектральную структуру и выделять информативные признаки.

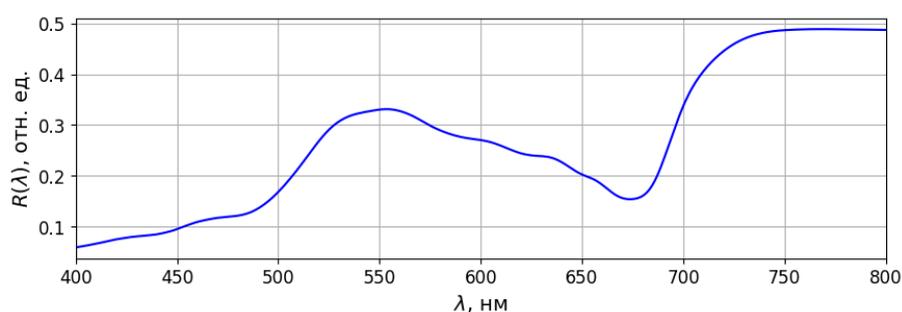
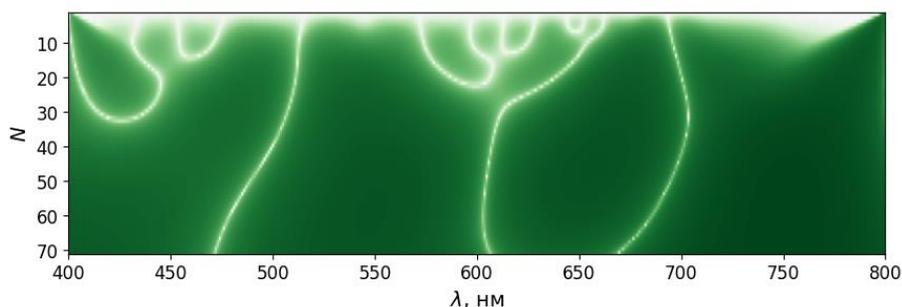
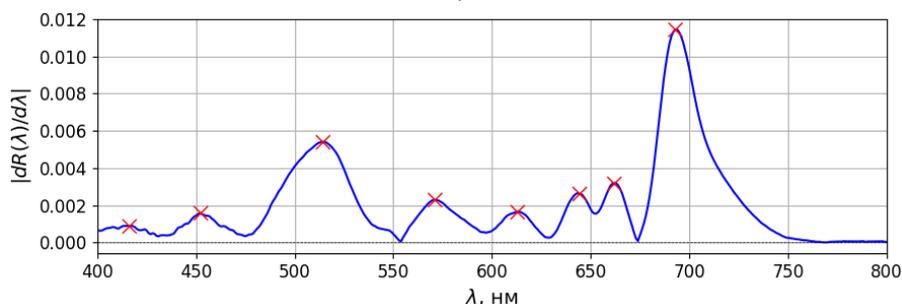


Рисунок 2. Коэффициент отражения $R(\lambda)$ листа пшеницы в зависимости от длины волны в соответствии с моделью *PROSPECT-5*



а)



б)

Рисунок 2. Вейвлет-разложение $R(\lambda)$ с логарифмическим контрастированием (а), определение точек наибольшей скорости изменения $R(\lambda)$

Заключение

Таким образом, применение модели *PROSPECT-5* для анализа спектральных характеристик листьев пшеницы подтвердило применимость данного метода в задаче моделирования характеристик растительных объектов по заданному содержанию хлорофилла и каротиноидов. Дополнение к базовой модели позволило улучшить точность интерпретации результатов. Использование данной модели для отработки методов спектрального анализа может быть эффективным для анализа физиологического состояния растений, особенно в контексте бесконтактной диагностики и раннего выявления стрессовых состояний.

Обработка получаемых данных с помощью методов цифровой обработки сигналов предоставляет дополнительные инструменты для оценки характеристик. Математическая обработка, включающая фильтрацию и выявление ключевых признаков, позволила выделить спектральные области интереса, что, в свою очередь, способствует повышению скорости, точности и, как следствие, эффективности мониторинга растений. Дальнейшие исследования и разработка новых подходов к анализу спектральных данных необходимы для улучшения и оптимизации методов диагностики в агротехнологиях.

Литература

1. *Kravchenko, V.F., Churikov, D.V.* Digital Signal Processing by Atomic Functions and Wavelets // *Journal of Communications Technology and Electronics*. 2023. 68 (Suppl 1). S1–S110. <https://doi.org/10.1134/S1064226923130016>.
2. *Кравченко В.Ф., Кравченко О.В.* Конструктивные методы алгебры логики, атомарных функций, вейвлетов, фракталов в задачах физики и техники. М.: Техносфера, 2018. 696с. ISBN 978-5-94836-518-3.
3. *Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В.* Цифровая обработка сигналов атомарными функциями и вейвлетами. М.: Техносфера, 2019. Дополнительный тираж. 182с. ISBN 978-5-94836-506-0.
4. *Jacquemoud S., Baret F.* PROSPECT: A model of leaf optical properties spectra // *Remote Sensing of Environment*. 1990. V. 34, № 2, P. 75.
5. *Feret J.-B., et al.* PROSPECT-4 and 5: Advances in the leaf optical properties model separating photosynthetic pigments // *Remote Sensing of Environment*. 2008. V. 112, № 6, P. 3030.
6. *Федулов, Ю. П.* Содержание и соотношение хлорофиллов в листьях озимой пшеницы в зависимости от агротехнических приемов ее выращивания / Ю. П. Федулов, Ю. В. Подушин // *Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета*, 2009. - № 51(7). Электронный ресурс.
7. *Dong T., et al.* Assessment of Portable Chlorophyll Meters for Measuring Crop Leaf Chlorophyll Concentration // *Remote Sensing*. 2019. V. 11, № 22, P. 2706.
8. *Zhang C., et al.* Advancing the PROSPECT-5 Model to Simulate the Spectral Reflectance of Copper-Stressed Leaves // *Remote Sensing*. 2017. V. 9, № 11, P. 1191.
9. *Jiang, J., et al.* Estimation of leaf traits from reflectance measurements: comparison between methods based on vegetation indices and several versions of the PROSPECT model // *Plant Methods*. 2018. V. 14, № 1, P. 23.
10. *Hosgood B., Jacquemoud S., Andreeoli G., Verdebout J., Pedrini A., Schmuck G.* Leaf Optical Properties Experiment 93 (LOPEX93) // *European Commission*. 1994.
11. *Li, P. and Q. Wang* Retrieval of chlorophyll for assimilating branches of a typical desert plant through inversed radiative transfer models // *International journal of remote sensing*. 2018. V. 34, № 7, P. 2402.
12. *Jacquemoud S., Bacour C., Poilve H., Frangi J.-P.* Comparison of four radiative transfer models to simulate plant canopies reflectance – Direct and inverse mode // *Remote Sens. Environ.* 2000. V. 74. P. 471.

Теория R-функций в задаче регистрации задержек сигнала в системе акустических сенсоров

Theory of R-functions in the problem of signal delays in an acoustic sensor system

Чуриков Д. В.^{1,2}, Кравченко О. В.^{2,3}, Кравченко В. Ф.^{1,2}

- 1) Научно-технологический центр уникального приборостроения РАН, Москва, РФ;
- 2) Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва, РФ;
- 3) ФИЦ Информатика и управление РАН, Москва, РФ.

churikov.d@gmail.com

Аннотация. На основе конструктивной теории R-функций [1, 2] предложен способ описания задержек фронта звуковой волны на поле акустических сенсоров [3] для задачи акустической локации [4]. Показано, что относительные задержки регистрации полезного сигнала в разных точках пространства зависят от свойств среды, скорости распространения звуковой волны в пространстве, положений сенсоров и могут быть представлены в виде значений некоторой поверхности в координатах сенсоров.

Как известно [1, 2], конструктивные средства метода R-функций (RFM) позволяют строить уравнения для описания объектов произвольной геометрии Ω_i в виде функции ω , положительна внутри описываемой области $\omega_i > 0$, равна нулю $\omega_i = 0$ на его границе, а вне объекта $\omega_i < 0$ в любом n -мерном пространстве. Необходимая геометрия описывается логической формулой, связывающей примитивы. Таким образом, если при построении ω ввести ограничение на градиент поверхности от вершины в любом направлении, а именно сопоставить его скорости распространения волны, то в стационарном случае получаем конус. При нахождении источника звука в его вершине, задержка в регистрации сигнала в произвольной точке пространства может быть легко вычислена через разницу значений ω в координатах источника и приемника. И наоборот, зная относительные задержки приема сигнала, можно найти наилучшим образом размещённую функцию ω , а затем координату её максимума.

Наличие хорошо разработанного [2] логического аппарата предполагает учитывать погрешности и необходимые допуски в виде функций. Это означает, что появляется возможность в аналитическом виде построить модель скорости распространения звуковой волны, а затем на основе логических R-операций осуществлять утонение фактических параметров и возмущений самой среды. Численный эксперимент и анализ результатов показывает, что предложенный подход обеспечивает достаточную точность, обладает гибкостью и наглядностью.

Литература

1. *Kravchenko, V.F., Churikov, D.V.* Digital Signal Processing by Atomic Functions and Wavelets // Journal of Communications Technology and Electronics. 2023. 68 (Suppl 1). S1–S110. <https://doi.org/10.1134/S1064226923130016>.
2. *Кравченко В.Ф., Кравченко О.В.* Конструктивные методы алгебры логики, атомарных функций, вейвлетов, фракталов в задачах физики и техники. М.: Техносфера, 2018. 696с. ISBN 978-5-94836-518-3.
3. *Churikov, D.V.* Constructive Approach to Multi-position Passive Acoustic Localization in Information-Measurement Systems // Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2023. 2024. Communications in Computer and Information Science, vol 2129. Book Chapter. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-61835-2_6
4. *Churikov, D.* Experimental Study of the Multi-Position Acoustic Localization Method for Impulse Sound Source // 2024 26th International Conference on Digital Signal Processing and its Applications (DSPA), Moscow, Russian Federation, 2024. P. 1-4. <https://doi.org/10.1109/DSPA60853.2024.10510027>

Пакетное вейвлет-разложение в задаче анализа вибрационных сигналов механических систем

Packet wavelet decomposition in the problem of analyzing vibration signals of mechanical systems

Труфанов Н.Н.¹, Скворцов Д.Ф.², Кравченко О.В.^{3,4}, Чуриков Д.В.^{1,4}

1) Научно-технологический центр уникального приборостроения РАН, Москва, РФ;
2) Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, РФ; 3) ФИЦ ИУ РАН, Москва, РФ; 4) Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва, РФ.

tru17v@gmail.com

Аннотация. Вследствие больших контактных напряжений подшипники качения являются наиболее нагруженными деталями любого механизма, при этом надежность их работы напрямую сказывается на работе всего агрегата и его сроке службы. Анализ вибрационных сигналов является хорошим инструментом в задаче построения автоматизированной системы контроля и диагностики подшипниковых узлов [1], [2].

В работе рассматривается задача анализа технического состояния подшипника качения. При решении подобных задач на практике, как правило, рассматривают не сами сигналы, а их спектры, полученные с помощью преобразования Фурье. Однако в нашем случае, вследствие наличия в сигнале вибрационных компонент от других узлов механизма, в обычном спектре интересующая нас частота проявления дефекта не видна, для её выделения предложен простой метод, основывающийся на пакетном вейвлет-разложении исходного сигнала. Рассматриваемые в применяемом подходе вейвлет-системы построены на основе атомарных функций, что оправдано лучшей локализацией этих систем как во временной, так и в частотной областях [3], [4]. Выявление частоты проявления дефекта реализуется разложением исходного сигнала на аппроксимирующие и детализирующие компоненты, и последующим выделением амплитудной огибающей этих компонент с помощью преобразования Гильберта.

Литература

1. Барков А.В., Баркова Н.А., Вибрационная диагностика машин и оборудования. Анализ вибрации: Учебное пособие. – СПб.: Изд. центр СПбГМТУ, 2004. – 152 с.
2. Генкин М.Д., Соколова А.Г., Виброакустическая диагностика машин и механизмов. – М.: Машиностроение, 1978. – 288 с.
3. Kravchenko, V.F., Churikov, D.V. Digital Signal Processing by Atomic Functions and Wavelets // Journal of Communications Technology and Electronics. 2023. 68 (Suppl 1). S1–S110. <https://doi.org/10.1134/S1064226923130016>.
4. Кравченко В.Ф., Кравченко О.В. Конструктивные методы алгебры логики, атомарных функций, вейвлетов, фракталов в задачах физики и техники. М.: Техносфера, 2018. 696с. ISBN 978-5-94836-518-3.

Применение комплекснозначных нейронных сетей для анализа гиперспектральных данных

Application of Complex-Valued Neural Networks for Hyperspectral Data Analysis

Труфанов Н.Н.¹, Чуриков Д. В.^{1,2}, Кравченко О. В.^{2,3}

1) Научно-технологический центр уникального приборостроения РАН, Москва, РФ;
2) Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва, РФ;
3) ФИЦ ИУ РАН, Москва, РФ.

tru17v@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается применение комплекснозначных нейронных сетей (CVNN) для анализа гиперспектральных изображений из открытого набора данных Indian Pines. Гиперспектральные изображения обладают высокой разрешающей

способностью и используются в различных областях, включая сельское хозяйство, экологический мониторинг, охрану окружающей среды, медицинскую диагностику и т.д. [1].

Рассмотрены методы предварительной обработки данных, а также подходы к построению и обучению модели для решения задачи классификации на основе операции свёртки с трёхмерным ядром. Это позволяет учитывать как пространственную, так и спектральную информацию, что обеспечивает более полный учет различных характеристик объекта исследования. Применение комплекснозначной модели обусловлено более высокой выразительной способностью CVNN по сравнению с вещественнозначными аналогами [2], [3] и может предоставить эффективные инструменты анализа гиперспектральных данных.

Литература

1. *S. Li, W. Song, L. Fang, Y. Chen, P. Ghamisi and J. A. Benediktsson*, Deep Learning for Hyperspectral Image Classification: An Overview, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 57, no. 9, pp. 6690-6709, Sept. 2019, doi: 10.1109/TGRS.2019.2907932
2. *Voigtlaender F.* The universal approximation theorem for complex-valued neural networks // *Applied and computational harmonic analysis*. – 2023. – Т. 64. – С. 33-61.
3. *Hirose A.* Complex-valued neural networks // *IEEE Transactions on Electronics, Information and Systems*. – 2011. – Т. 131. – №. 1. – С. 2-8.

Построение новых семейств атомарных функций

New Atomic Functions Families Construction

Коновалов Я.Ю.,¹ Кравченко В.Ф.^{1,2}

1) *Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, РФ*; 2) *Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова Москва, РФ.*

kon20002000@mail.ru, kvf-ok@mail.ru

Аннотация. Описаны методы построения новых семейств атомарных функций при помощи операции свертки. Построены новые семейства четных экспоненциальных функций, и два семейства гармонических функций: комплексных и четных вещественных.

Введение

Атомарные функции являются финитными решениями дифференциальных уравнений специального вида. Они представляются в виде бесконечных сверток подобных импульсов убывающей длины и единичной площади. Благодаря сочетанию бесконечной гладкости и финитности атомарные функции оказываются эффективным базисом для методов интерполяции и коллокации. Также они оказываются полезны в цифровой обработке сигналов и изображений, при построении вейвлетов и других задачах.

Описание работы

Наиболее простые атомарные функции [1], [2] представляются бесконечными свертками прямоугольных импульсов или их линейных комбинаций. Суммы их сдвигов образуют разложение единицы и обеспечивают точное представление многочленов.

Также существуют атомарные функции [3], являющиеся свертками экспоненциальных и или тригонометрических импульсов (в том числе комплексных), обеспечивающие точное представление экспонент и тригонометрических функций соответственно.

Теорема о свертке атомарных функций [2], [3] позволяет получать новые функции в виде сверток уже известных друг с другом, а также с импульсами и сплайнами.

В данной работе осуществлено непосредственное построение семейства несимметричных экспоненциальных атомарных функций. На его основе построено семейство четных экспоненциальных функций и два семейства гармонических функций: комплексных и четных вещественных.

Заключение

Описаны некоторые методы построения атомарных функций. Построено четыре новых параметрических семейства атомарных функций.

Литература

1. *Кравченко В.Ф., Кравченко О.В.* Конструктивные методы алгебры логики, атомарных функций, вейвлетов, фракталов в задачах физики и техники. М.: ТЕХНОСФЕРА, 2018.
2. *Коновалов Я.Ю.* Новое семейство бесконечно гладких функций с компактным носителем // Физические основы приборостроения. – 2020 – Т. 9, №2(36). – С. 48-59.
3. *Кравченко В.Ф., Коновалов Я.Ю.* Построение новых двухпараметрических семейств экспоненциальных и гармонических атомарных функций // Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации: Труды XVI Международной научно-технической конференции, Суздаль, 9-12 октября 2023.

Теоретическая электродинамика

Обобщенные решения координатных задач дифракции электромагнитных волн Generalized Solution of Coordinate Problems of Electromagnetic Wave Diffraction

Плецинский Н.Б.¹

1) Казанский федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий, Казань, РФ.

pnb@kpfu.ru

Аннотация. Для обоснования техники сведения к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) задач дифракции электромагнитных волн на проводящих тонких экранах построены специальные классы обобщенных функций – линейных непрерывных функционалов, определенных на пространствах линейных комбинаций основных функций. Обобщенные решения представляют собой отображения, переводящие значения продольной координаты волноводной структуры в обобщенные функции.

Введение

Постановка задачи дифракции. Пусть в поперечном сечении Ω волноводной структуры расположен тонкий проводящий экран M и N – его дополнение до Ω . На экран набегают электромагнитная волна. Нужно найти дифрагированное поле. Такая задача ставится как задача сопряжения для уравнений Максвелла (уравнения Гельмгольца). В каждой части волновода нужно найти уходящие на бесконечность решения уравнений, удовлетворяющие граничным условиям на M и условиям сопряжения на N . Задача сопряжения сводится к односторонней граничной задаче. В двумерном случае нужно найти в одной из частичных областей решение $u(x, z)$ уравнения Гельмгольца, нулевой след которого $u_0(x) = u(x, 0)$ задан на M , а первый след $u_1(x) = \partial u / \partial z(x, 0) = 0$ на N . Эти условия преобразуются в БСЛАУ относительно коэффициентов разложения поля по собственным волнам (или к интегральному уравнению).

Чтобы обосновать переход к БСЛАУ, будем искать обобщенные решения уравнений Максвелла (уравнения Гельмгольца).

Задачи дифракции и эквивалентные им БСЛАУ

Обобщенные функции. Пусть $\varphi_n(\cdot), n = 1, 2, \dots$ – ортонормированная система основных функций на области Ω . Обобщенная функция (о.ф.) $f[\cdot]$ – линейный непрерывный функционал на множестве линейных комбинаций $\varphi_n(\cdot)$ – отождествляется с последовательностью чисел $f_n = f[\varphi_n(\cdot)]$. Операции в линейном пространстве о.ф. вводятся так, что значения новых о.ф. вычисляются как значения старых о.ф. на преобразованных основных функциях.

Пусть Ω состоит из двух частей: M и N . Обозначим

$$I_{nm} = \int_M \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx, J_{nm} = \int_N \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx. \quad (1)$$

По определению [1] о.ф. $f[\cdot] = 0$ на N , если

$$\sum_{m=0}^{+\infty} J_{nm} f_m = 0 \quad \forall n \text{ или, что одно и то же, } f_n = \sum_{m=0}^{+\infty} I_{nm} f_m \quad \forall n. \quad (2)$$

Обобщенная функция $f[\cdot] = 0[\cdot]$, если $f_n = 0 \quad \forall n$ и $f[\cdot] = g[\cdot]$, если $f_n = g_n \quad \forall n$. Последовательность о.ф. $f_j[\cdot]$ сходится к о.ф. $f[\cdot]$, если последовательности чисел $f_{j,n}$ сходятся к числам $f_n \quad \forall n$.

Перегородка в плоском волноводе. Будем искать решения $u(x, z)$ уравнения Гельмгольца в полосе $0 < x < a, -\infty < z < +\infty, u(0, z) = u(a, z) = 0$, как отображения, переводящие z в о.ф. $u[\cdot](z)$. Пусть $\varphi_n(\cdot) = \sqrt{2/a} \sin \sin \pi n x / a$. Обобщенное решение представляет собой последовательность функций $u_n(z)$ – значений о.ф. на $\varphi_n(\cdot)$.

Дифференцирование два раза по x сводится к умножению этих значений на $-(\pi n/a)^2$ (производные нечетного порядка не существуют), а при дифференцировании по z берутся производные от $u_n(z)$. Поэтому на языке о.ф. уравнение Гельмгольца записывается как система уравнений $u_n''(z) + [k^2 - (\pi n/a)^2]u_n(z) = 0, n = 1, 2, \dots$

Условия односторонней задачи $u_0[\cdot] = u_0^0[\cdot]$ на M и $u_1[\cdot] = 0$ на N равносильны в силу формул (2) уравнениям

$$u_{0,k} - \sum_{m=1}^{+\infty} J_{km} u_{0,m} + u_{0,k}^0 = 0, u_{1,m} - \sum_{n=1}^{+\infty} I_{mn} u_{1,n} = 0, k, m = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Значения следов решения уравнения Гельмгольца связаны друг с другом так: $u_{1,m} = \gamma_m u_{0,m}$, где $\gamma_m = \sqrt{k^2 - (\pi m/a)^2}$. В итоге задача дифракции свелась к эквивалентной БСЛАУ [1]

$$-u_{0,k} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{0,n} \gamma_n \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} I_{mn} J_{km} = u_{0,k}^0, k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Перегородка в прямоугольном волноводе. При сведении к БСЛАУ задачи дифракции электромагнитной волны на поперечной перегородке в прямоугольном волноводе нужно использовать четыре класса обобщенных функций SS, CS, SC и CC [1], [2]. Основными функциями являются произведения синусов и косинусов. Например, $\varphi_{mn}^{cs}(x, y) = \sqrt{2/a} \cos \cos (\pi m x/a) \sqrt{2/b} \sin \sin (\pi n y/b)$. В этом случае производные о.ф. из одного класса являются о.ф. из другого класса.

Условия односторонней граничной задачи для уравнений Максвелла на языке о.ф. (следов касательных составляющих электрического и магнитного векторов) имеют вид $E_{x,0}[\cdot] = -E_{x,0}^0[\cdot], E_{y,0}[\cdot] = -E_{y,0}^0[\cdot]$ на M и $H_{x,0}[\cdot] = 0, H_{y,0}[\cdot] = 0$ на N . Задача дифракции эквивалентна БСЛАУ, состоящей из четырех групп уравнений, аналогичных уравнениям (3).

Подобным же образом сводится к БСЛАУ задача дифракции на перегородке в волноводе произвольного сечения с металлическими стенками [2].

Дифракция на тонкой ленте. При сведении к БСЛАУ двумерной задачи дифракции электромагнитной волны на тонкой ленте нужно использовать функции Эрмита $h_m(x) = e^{-x^2/2} H_m(x), m = 0, 1, \dots$ в качестве основных функций. Операция умножения о.ф. на x и первая производная о.ф. в этом случае определяются с помощью формул $h'_m(x) = m h_{m-1}(x) - 1/2 h_{m+1}(x)$ и $x h_m(x) = m h_{m-1}(x) + 1/2 h_{m+1}(x)$.

Функции Эрмита являются собственными функциями интегрального преобразования Фурье: $(F h_m)(\xi) = i^m h_m(\xi)$. Поэтому при преобразовании Фурье о.ф. ее значения f_m просто умножаются на i^m . Умножение о.ф. на обычную функцию (когда это возможно) производится по правилу

$$\gamma(\cdot) f[\cdot]: h_m(\cdot) \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_{mn} f_n, \gamma_{mn} = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(x) h_m(x) \tilde{h}_n(x) dx, n = 0, 1, \dots, \quad (5)$$

здесь $\tilde{h}_n(x)$ – функции Эрмита, образующие биортонормированную систему с функциями $h_m(x)$, $\gamma(x) = \sqrt{k^2 - x^2}$.

Условия односторонней задачи $u_0[\cdot] = u_0^0[\cdot]$ на M и $u_1[\cdot] = 0$ на N и зависимость между образами Фурье о.ф. $u_1[\cdot] - i\gamma(\xi)u_0[\cdot] = 0$ образуют БСЛАУ вида [3]

$$\sum_{m=0}^{+\infty} I_{mn} u_{0,m} + u_{0,m}^0 = 0, \sum_{m=0}^{+\infty} J_{mn} u_{1,m} = 0, u_{1,n} + \sum_{m=0}^{+\infty} i^{m-n-1} \gamma_{mn} u_{0,m} = 0. \quad (6)$$

При численном решении БСЛАУ (6) методом усечения важно выбрать, сколько уравнений нужно оставить в каждой группе. Наиболее точный результат достигается,

если одно и то же количество. Также имеет смысл сократить количество неизвестных в СЛАУ, исключив, например, $u_{1,n}$.

Дифракция на экране в пространстве. В трехмерном случае, например в задаче дифракции на прямоугольной пластине [2], в качестве основных функций удобно взять произведения функций Эрмита $h_m(x)h_n(y)$. Две группы уравнений в итоговой БСЛАУ, как и раньше, выводятся из условий односторонней граничной задачи. Более сложный вид имеет связь между образами Фурье следов на плоскости $z = 0$ касательных составляющих электрического и магнитного векторов. Вектор-функции $e(x, y), h(x, y)$ являются следами касательных составляющих волны, уходящей в полупространство $z > 0$, тогда и только тогда, когда их образы Фурье удовлетворяют условию

$$\omega \varepsilon_0 \varepsilon \gamma(\xi, \eta) e(\xi, \eta) - P(\xi, \eta) h(\xi, \eta) = 0, P(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \xi \eta & k^2 - \xi^2 \\ \eta^2 - k^2 & -\xi \eta \end{pmatrix}, \quad (7)$$

здесь $\gamma(\xi, \eta) = \sqrt{k^2 - \xi^2 - \eta^2}$. Из условия (7) следует третья группа уравнений в БСЛАУ по аналогии с двумерной задачей.

В [2], [3] рассмотрена задача дифракции электромагнитной волны на круглом тонком проводящем диске. Если перейти к цилиндрическим координатам (r, α, z) , то в качестве обобщенных решений уравнений Максвелла нужно рассматривать отображения, которые значениям z ставят в соответствие о.ф., которые являются функционалами на линейных комбинациях функций в виде произведений экспонент $e^{im\alpha}$ и функций $\varphi_n(r) = r^\lambda e^{-r^2/2} L_n^{(\lambda)}(r^2)$, $L_n^{(\lambda)}(\cdot)$ – полиномы Лагерра. Умножение о.ф. на r^2 и преобразование с помощью оператора Бесселя производится на основе рекуррентных формул. Кроме того, функции $\varphi_n(r)$ являются собственными функциями преобразования Ханкеля.

Заключение

Переход к обобщенным решениям уравнений электродинамики в задачах дифракции волн на проводящих тонких экранах позволяет записать граничные условия и условия сопряжения задачи дифракции непосредственно как БСЛАУ и доказать эквивалентность исходной задачи дифракции, ПСФУ, интегрального уравнения и БСЛАУ [4]. Вычислительный эксперимент показал, что приближенные решения БСЛАУ (4), (6) и других БСЛАУ находятся методом усечения. Интегралы (1) и (5) вычисляются по формулам Гаусса, а в некоторых простых случаях – аналитически.

Литература

1. *Pleshchinskii N. B.* On generalized solutions of problems of electromagnetic wave diffraction by screens in the closed cylindrical waveguides // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – Vol. 40, no. 2. – P.201–209.
2. *Плещинский Н. Б.* Обобщенные решения координатных задач дифракции электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. – Казань: Казанский федеральный университет, 2022. – 106 с.
3. *Pleshchinskii N. B.* On generalized solutions of the problems of electromagnetic wave diffraction in the open space // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – Vol. 42, no. 6. – P. 1391–1401.
4. *Pleshchinskii N.B.* On equivalence of mathematical models in problems of diffraction of waves by thin screens // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2023. – Vol. 44, no. 9. – P. 4043–4053.

Учет кулоновского взаимодействия в редких распадах В-мезонов

Coulomb Interaction in Rare B-Meson Decays

Манухов С.И.¹, Никитин Н. В.^{1,2,3}

1) Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ; 2) Научно-исследовательский институт ядерной физики

Аннотация. В работе представлен метод учета кулоновского взаимодействия в редких лептонных и полулептонных распадах В-мезонов. Рассчитана поправка к распадам В-мезона на лептонную пару, а также к распаду на псевдоскалярный мезон и лептонную пару (рассмотрен 21 распад). Ключевая идея метода состоит в изменении процедуры вторичного квантования - вместо разложения по плоским волнам используется решение уравнения Дирака во внешнем поле. Обоснование метода производится на скалярных частицах, где была посчитана точная релятивистская поправка

Описание работы

В настоящее время редкие полулептонные и сверхредкие лептонные распады В-мезонов активно изучаются на установках LHCb [1], CMS [2] и ATLAS [3] Большого адронного коллайдера и на установке Belle-II в японском ускорительном центре KEK [4]. В частности, установки LHCb и CMS измерили парциальные ширины редких распадов $B_{s,d}^0 \rightarrow \mu^+\mu^-$, $B_{s,d}^0 \rightarrow h^0\Gamma^+$ (h^0 – нейтральный адрон). В настоящее время эти распады достаточно хорошо изучены теоретически в рамках Стандартной модели и ее расширений [5].

Однако известно существование расхождений между экспериментальными и теоретическими результатами. Прежде всего, это касается дифференциальных распределений таких распадов, как $B^0 \rightarrow K^0 \mu^+\mu^-$ [6], а также парциальной ширины распада $B_s^0 \rightarrow \mu^+\mu^-$ [1–3]. Именно благодаря этим расхождениям, изучение редких распадов В-мезонов считается чувствительным к «новой физике». Однако перед тем, как объявлять о выходе за пределы Стандартной Модели необходимо убедиться, что все возможные поправки к распадам в рамках СМ учтены верно.

Ключевая идея данной работы – учет кулоновского взаимодействия между заряженными лептонами в конечном состоянии при помощи изменения процедуры вторичного квантования. Обычно в квантовой теории поля используется разложение по плоским волнам. Однако плоские волны – это решения свободного волнового уравнения, то есть решения, предполагающие отсутствие взаимодействия между частицами. В тоже время, в рассматриваемых распадах В-мезонов в конечном состоянии присутствуют заряженные лептоны. Их нельзя считать свободными, потому что каждый из лептонов находится в поле другого лептона. Они взаимодействуют друг с другом кулоновским образом. Именно поэтому в работе используется модифицированная процедура вторичного квантования - разложение по точным решениям волнового уравнения с внешним потенциалом:

$$l(x) = \sum_{\lambda=\pm 1/2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(a_{E,p,p} \Psi_{E,p,p}^{(+)}(x) e^{-iE^{(+)}t} + b_{E,p,p}^\dagger \Psi_{E,p,p}^{(-)}(x) e^{+iE^{(-)}t} \right) \quad (1)$$

Этот метод хорошо известен из атомной физики и носит название картины или представления Фарри [7]. Обоснование применимости метода Фарри было выполнено на примере распада гипотетической нейтральной псевдоскалярной частицы на два заряженных скаляра $B^0(M) \rightarrow S^+(m)S^-(m)$. Необходимость проверки обусловлена тем, что метод Фарри обычно применяется для атомных систем, в которых имеется связанное состояние электрона и ядра. Априори не ясно, на сколько адекватным является рассмотрение Фарри в случае системы взаимодействующих релятивистских несвязанных в конечном состоянии частиц. Для проверки метода Фарри необходимо провести сравнение с другими способами учета кулоновского взаимодействия. В данной работе производится сравнение трех подходов:

- 1) нерелятивистского метода Гамова [8], Зоммерфельда [9] и Сахарова [10];
- 2) точного релятивистского метода, основанного на построении двухчастичных релятивистских уравнений, формализм которых был развит Кратером (Crater) [11] и Сазджаном (Sazdjian) [12];

3) релятивистского метода Фарри [7].

Сравнение трех методов изображено на рисунке 1. Видно, что метод Фарри дает аналогичные предсказания, что и остальные методы, практически на всем интервале допустимых значений. Только возле границы $m \rightarrow M/2$ (нерелятивистский предел) наблюдается расхождение между методами. Это сигнализирует о том, что в таких распадах метод Фарри не работает. Однако в релятивистском случае картина Фарри работает также, как и остальные подходы. Именно этот факт позволяет сделать предположение, что картина Фарри хорошо применима к описанию распадов с участием пар заряженных лептонов.

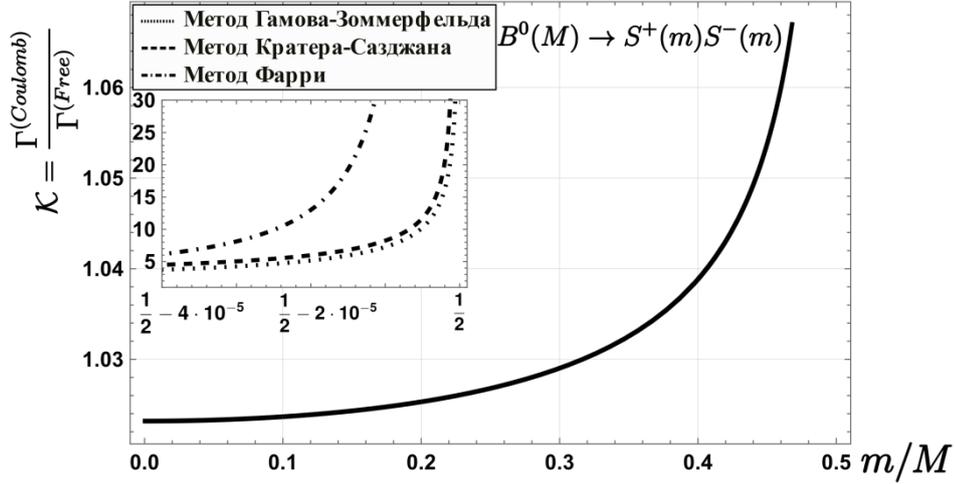


Рис. 1. График зависимости кулоновского фактора от соотношения масс m/M в распаде $B^0(M) \rightarrow S^+(m)S^-(m)$.

Применение метода Фарри к распадам В-мезонов позволило рассчитать поправки в распадах $B_{d,s}^0 \rightarrow l^+l^-$ и $B_{d,s}^0 \rightarrow h^0l^+l^-$ (где $h^0 = \{K, \pi^0, \eta, \eta'\}$ – псевдоскалярный мезон, $l = \{e, \mu, \tau\}$ – лептон). Учет кулоновского взаимодействия в распаде $B_s^0 \rightarrow \mu^+\mu^-$ уменьшает расхождение между теорией и экспериментом более, чем вдвое (оставляя 2% отклонения на фоне 11%-й экспериментальной погрешности). Всего найдено кулоновские поправки к 21 распаду.

Наконец, разработан универсальный рецепт, позволяющий учитывать кулоновское взаимодействие в любом распаде, в конечном (или начальном) состоянии которого есть пара заряженных лептонов:

$$\langle l^+l^- | \underline{l}(x) O l(x) | 0 \rangle \xrightarrow{\text{Coulomb}} \frac{\left| \Gamma \left(\sqrt{\frac{1}{4} - \alpha_{em}^2} + \frac{1}{2} + i \frac{\alpha_{em}}{v} \right) \right|}{\left| \Gamma \left(2\sqrt{\frac{1}{4} - \alpha_{em}^2} + 1 \right) \right|} \exp \left(\frac{\pi \alpha_{em} \varepsilon_l}{2 p_l} \right), \quad (2)$$

где O – оператор, представляющий из себя произвольную комбинацию γ -матриц, импульсов, а также кварковых и лептонных полей, ε_l, p_l – энергия и импульс заряженного лептона в системе покоя l^+l^- пары, $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера. По результатам работы подготовлена статья.

Литература

1. *Aaij R.* [et al.]. Measurement of the $B_s^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ branching fraction and effective lifetime and search for $B_s^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ decays. // *Phys. Rev. Lett.* 2017. V. 118(19):191801.
2. *Tumasyan A.* [et al.]. Measurement of the $B_s^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ decay properties and search for the $B_s^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ decay in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV // *Phys. Lett. B.* 2023. V. 842:137955.

3. *Aaboud M.* [et al.]. Study of the rare decays of B_s^0 and B^0 mesons into muon pairs using data collected during 2015 and 2016 with the ATLAS detector // *JHEP*. 2019. V. 04:098.
4. *de Marino G.* [et al.]. Status and prospects for rare B decays at Belle and Belle II // *PoS*. 2023. FPCP2023:8.
5. *Buras A.J.* Theoretical review of B physics // *Nucl. Instrum. Meth. A*. 1995. V. 368. P. 1–20.
6. *Aaij R.* [et al.]. Differential branching fractions and isospin asymmetries of $B \rightarrow K^{(*)} \mu^+ \mu^-$ decays // *JHEP*. 2014. V. 06:133. DOI: 10.1007/JHEP06(2014)133
7. *Furry W.H.* On bound states and scattering in positron theory // *Phys. Rev.* 1951. V. 81. P. 115–124.
8. *Gamow G.* Zur Quantentheorie des Atomkernes // *Zeitschrift fur Physik*. 1928. V. 51. P. 204–212.
9. *Sommerfeld A.* *Atombau und Spektrallinien*. V. 2 – Los Angeles: F. Vieweg & Sohn, 1921.
10. *Сахаров А.Д.* Взаимодействие электрона и позитрона при рождении пар // *ЖЭТФ*. 1948. Т. 18. Вып. 7. С. 631–635.
11. *Crater H., Alstine P.V.* Two-body dirac equations // *Annals Phys.* 1983. V. 148(1). P. 57–94.
12. *Sazdjian H.* Relativistic wave equations for the dynamics of two interacting particles. // *Phys. Rev. D*. 1986. V. 33 P. 3401–3424.

Реализация теории рассеяния Ми для решения задач мезоскопической электродинамики

Mie Theory Implementation to Solve Problems of Mesoscopic Electrodynamics

Лопушенко И. В.

*Университет Оулу, факультет информационных технологий и электротехники,
г. Оулу, Финляндия*

lopushenko.ivan@yandex.ru

Аннотация. В работе рассматривается реализация теории рассеяния Ми, учитывающая модифицированные граничные условия, которые возникают в различных задачах мезоскопической электродинамики. Основное внимание уделяется вычислительному алгоритму для поиска коэффициентов разложения решения в ряд по сферическим гармоникам, построенному на основе методов компьютерной алгебры. Обсуждается влияние модифицированных граничных условий на характеристики плазмонного резонанса в металлических наночастицах.

Описание работы

Теория рассеяния электромагнитных волн проникаемым шаром является одной из фундаментальных и наиболее широко распространенных классических граничных задач математической физики для уравнений Максвелла, допускающей решение методом разделения переменных. В современных исследованиях речь зачастую идёт об изучении свойств наноразмерных структур с характерными масштабами порядка размера атома. В этом случае классическая постановка задачи для рассеяния Ми, включающая уравнения Максвелла с граничными условиями на тангенциальные компоненты полей и условиями излучения на бесконечности, перестаёт соответствовать физическим процессам, протекающим в структуре. Тем не менее, в последних работах показано, что теория Максвелла может быть расширена для описания возникающих эффектов за счёт модификации постановки задачи [1-3]. Как правило, в постановке задачи изменяются граничные условия, однако в ряде случаев могут быть модифицированы и уравнения Максвелла для установившихся колебаний.

В зависимости от эффекта, граничные условия выбираются различными: это может быть, например, как дополнительное граничное условие на нормальную компоненту вектора электрической индукции (нелокальное экранирование, теория обобщенного нелокального отклика), так и модификация граничных условий для тангенциальных компонент с использованием параметров Фейбельмана. Решения в виде модифицированных коэффициентов Ми для данных задач были получены в работах зарубежных авторов [4,5]. Поскольку любое существенное изменение вида граничных условий означает новую математическую постановку задачи дифракции, то для каждого учтённого эффекта коэффициенты Ми принимают новую форму.

В данной работе предлагается общий способ решения таких задач на основе методов компьютерной алгебры. Суть предлагаемого решения сводится к реализации символьного алгоритма для поиска неизвестных коэффициентов разложения в ряд по сферическим гармоникам. Такой алгоритм позволяет получить искомое решение для заданной пользователем постановки задачи как в виде аналитических формул для коэффициентов Ми, так и в числовой форме с произвольной степенью точности. Текущая реализация алгоритма в среде MATLAB допускает обобщение на более сложные случаи, такие как рассеяние слоистым шаром. Планируется, что данный алгоритм может быть использован как источник для получения достоверных аналитических решений в самых различных задачах современной электродинамики.

В качестве примера использования алгоритма в данной работе проводится анализ зависимости сечений рассеяния, поглощения и экстинкции от вида граничных условий, от размера шара, и от материала, из которого он изготовлен. В частности, на рис. 1 приводятся сечения экстинкции для серебряного шара диаметром от 4 до 70 нм, показывающие сходимость решения в рамках теории обобщенного нелокального оптического отклика (Generalized Nonlocal Optical Response, GNOR) [4] к решению в рамках классической теории Ми [6] при увеличении размера шара. На персональном компьютере с центральным процессором Intel Core i9-13900K и средой MATLAB R2021b время, потраченное на вычисление классических коэффициентов Ми в аналитическом виде, составило 10.03 с, в то время как на вычисление коэффициентов Ми в рамках теории обобщенного нелокального оптического отклика было потрачено 31.82 с. Данное время включает в себя упрощение полученного символьного выражения встроенными средствами MATLAB (функция `simplify`) на вычисление всех спектров (классических и «нелокальных») в диапазоне от 300 нм до 420 нм с шагом 0.1 нм было потрачено 1.35 с при использовании вычисленных символьных коэффициентов, и 0.45 с при использовании заранее запрограммированных коэффициентов из литературы.

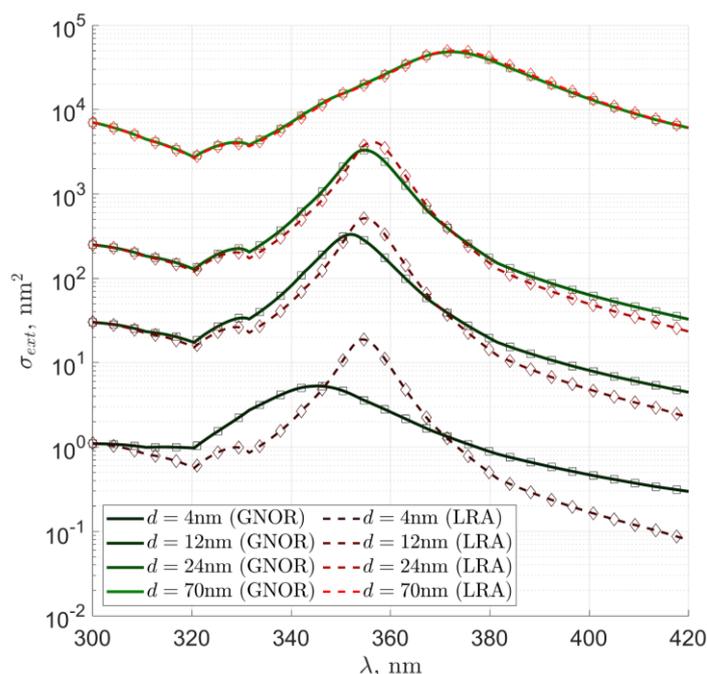


Рисунок 1. Сечение экстинкции σ_{ext} для однородного Ag шара с варьируемым диаметром d в зависимости от длины волны λ . Все линии – решения, полученные с использованием методов компьютерной алгебры. Сплошные линии – решение в рамках теории обобщенного нелокального оптического отклика (GNOR). Пунктирные линии – решение в рамках классической теории Ми (локальное приближение, LRA). Все символы – решения, полученные при использовании заранее запрограммированных коэффициентов.

Литература

1. *Gonçalves P. A. D., García de Abajo F. J.* Interrogating Quantum Nonlocal Effects in Nanoplasmonics through Electron-Beam Spectroscopy // *Nano Letters*. – 2023. – Vol. 23, no. 10. – P. 4242–4249.
2. *Mortensen N. A.* Mesoscopic Electrodynamics – the interplay of nanoscale morphology with the quantum and nonlocal plasmon response of metals. – University of Copenhagen, 2019. – 123 p.
3. *Еремин Ю. А., Свеишиков А. Г.* Квазиклассические модели квантовой наноплазмоники на основе метода Дискретных источников (обзор) // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 2021. – Т. 61, № 4. – С. 34–62.
4. *Tserkezis C., Stefanou N., Wubs M., Mortensen N. A.* Molecular fluorescence enhancement in plasmonic environments: exploring the role of nonlocal effects // *Nanoscale*. – 2016. – Vol. 8, no. 40. – P. 17532–17541.
5. *Gonçalves P. A. D., Christensen T., Rivera N. et al.* Plasmon–emitter interactions at the nanoscale // *Nature Communications*. – 2020. – Vol. 11. – P. 366.
6. *Борен К., Хафмен Д.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами. – М.: Мир, 1986. – 664 с.

Приближённые граничные условия в окрестности ребра на телах с высокой проводимостью

Approximate Boundary Conditions in the Vicinity of the Edge on Bodies with High Conductivity

Шушарин М. М., Могилевский И. Е., Боголюбов А. Н.

Аннотация. В работе исследуются приближённые граничные условия для задач дифракции электромагнитных волн на высокопроводящих телах с рёбрами. С помощью метода, близкого к методу получения старших порядков в условиях Щукина-Леонтовича, описанному в работах О. И. Паньча, выводятся приближённые граничные условия для случая задачи дифракции на клине с высокой проводимостью. Рассматривается задача дифракции вертикально-поляризованной волны на клине с магнитной проницаемостью $\mu=1$ – в такой постановке поле не имеет особенности на ребре, что существенно упрощает рассмотрение задачи. Для соответствующей задачи диффузии, где справедлив принцип максимума, сделана оценка порядка аппроксимации решения во внешней области.

Введение

Приближённые граничные условия Щукина-Леонтовича, также называемые импедансными, используются в задачах, где приближение идеального проводника оказывается недостаточно точным, но желательно избежать расчёта поля во внутренней области. Изначально эти условия были выведены для плоских границ, или границ с пренебрежимо малой кривизной [1]. Результаты работ Щукина и Леонтовича были развиты в диссертации О. И. Паньча [2], где приближённые граничные условия старших порядков аппроксимации зависят от кривизны границы. Помимо вывода старших порядков аппроксимации, О. И. Паньч обозначил условия применимости импедансных условий: одним из основных условий является требование малости толщины скин-слоя по сравнению с радиусом кривизны границы. Наличие рёбер на границе раздела сред нарушает это условие.

В работе рассматривается частный случай задачи дифракции на цилиндре с ребром, где электромагнитное поле не имеет сингулярности вблизи ребра. Такой случай реализуется, когда продольная компонента магнитного поля $H_z = 0$, а магнитная проницаемость во внутренней области совпадает с проницаемостью во внешней. Для этой задачи, путём модификации метода, предложенного О. И. Паньчем, выведены приближённые граничные условия для задачи дифракции на проводящем объекте, содержащем ребро.

Описание работы

Для построения приближённых граничных условий используется метод, близкий к описанному в диссертации О. И. Паньча. Основная его особенность заключается в том, что решение по малому параметру раскладывается только на границе раздела сред S , а построение приближённого решения в областях избегается.

Рассматривается задача дифракции для вертикальной поляризации при $\mu = 1$:

$$\begin{aligned} \{ \Delta E^i(M) + k_i^2 E^i(M) = f(M), M \in \Omega_i, \Delta E^e(M) + k_e^2 E^e(M) = 0, M \in \Omega_e, E^e|_S \\ = E^i|_S, \frac{\partial E^e}{\partial n}|_S = \frac{\partial E^i}{\partial n}|_S, \frac{\partial E^e}{\partial r} - ik_e E^e = \underline{0} \left(\frac{1}{\sqrt{r}} \right), r \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (1)$$

где волновые числа $k_e = \frac{\omega}{c}$, $k_i^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon'$, диэлектрическая проницаемость: $\varepsilon' = \varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$, источники заданы на конечном носителе: $supp f \in \{M \in \Omega: R_M < K\}$. Предполагаем, что проводимость во внутренней области Ω_i высока: $\sigma \rightarrow \infty$.

Решение во внутренней области строим в виде потенциала простого слоя, а во внешней области – через функцию Грина G задачи Дирихле:

$$\begin{aligned}
E^i(M) &= \iint_S \mu(Q) \psi_i(M, Q) dS_Q, M \in \Omega_i, E^e(M) \\
&= E_0(M) + \iint_S \frac{\partial G}{\partial n}(M, Q') \iint_S \mu(Q) \psi_i(Q', Q) dS_Q dS_Q, M \in \Omega_e,
\end{aligned}
\tag{2}$$

где $\psi_i = \frac{e^{ik_i R_{MQ}}}{R_{MQ}}$, $E_0(M)$ – решение однородной задачи Дирихле.

Так, по построению, выполняются [3] все условия задачи, кроме условия на непрерывность нормальной производной. Из условия на нормальную производную получаем задачу на плотность потенциала $\mu(Q)$, которую, в свою очередь, решаем приближённо, раскладывая по степеням малого параметра $\frac{1}{ik_i}$ входящие в уравнение потенциалы простого и двойного слоя. Таким образом, задача сводится от интегро-дифференциального уравнения к алгебраическому, из которого можно выразить зависимость значения поля на границе от нормальной производной. Разница с классическими импедансными условиями заключается в наличии в условиях связи между значениями в точках границы по разные стороны от ребра.

Для соответствующей задачи диффузии, где справедлив принцип максимума, можно произвести оценку на порядок аппроксимации решения во внешней области.

Заключение

В работе рассмотрена задача дифракции на теле с ребром для частного случая, где решение не имеет сингулярности в окрестности ребра. Путём модификации метода из работ О. И. Паньча, выведены приближённые граничные условия для задачи дифракции, а для аналогичной задачи диффузии сделана оценка на порядок аппроксимации решения во внешней области. Полученный результат может быть использован для получения приближённого решения в задачах дифракции на высокопроводящих телах сложной формы.

Литература

1. А. Г. Свешников, И. Е. Могилевский Избранные математические задачи теории дифракции // Физический Факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2012.
2. О. И. Паньч О приближённых краевых условиях в задачах дифракции // Диссертация на соискание учёной степени кандидата ф.-м. наук, кафедра математики, Москва, 1951.
3. А. Г. Свешников, А. Н. Боголюбов, В. В. Кравцов Лекции по математической физике // Физический Факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 1993.

Измерение продольного распределения поля в компактном полигоне с помощью линзы Лüneбурга

Measuring the Longitudinal Field Distribution in a Compact Range using a Luneburg Lens

*Балабуха Н. П.¹, Булычев Е. В.¹, Камышанов И. В.¹, Королев Д. П.^{1,2},
Меньших Н. Л.¹, Солосин В. С.¹*

1) *Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН, Москва, РФ;*

2) *Московский физико-технический институт, Москва, РФ.*

*n_bala@mail.ru, egor-itae@mail.ru, ikamyshanov@mail.ru, dpkorolev@gmail.com,
nl_menshikh@itae.ru, sv515105@yandex.ru*

Аннотация. В работе рассматривается оценка влияния продольного изменения поля на результаты измерения ЭПР эталонного объекта. В качестве эталонного объекта использован отражатель на основе линзы Лüneбурга, который не требует точного позиционирования, но при этом имеет достаточно высокий уровень ЭПР. Линза,

изготовленная в ИТПЭ РАН, с помощью тали устанавливалась в дискретные точки рабочей зоны АИК-КП, где проводилось измерение ее частотных характеристик.

Введение

Компактный полигон с зеркальным коллиматором является дорогостоящим и технически сложным комплексом для измерения характеристик рассеяния объектов и параметров излучения антенных систем [1]. При создании компактного полигона важно достичь наименьшей неравномерности распределения поля в рабочей зоне, т.к. это наиболее значимый фактор, влияющий на точность проводимых измерений [1, 2].

Неравномерность распределения поля обычно измеряется с помощью сканера. Для этого сканер размещается или на поворотном устройстве в центре рабочей зоны, или на отдельной платформе, расположенной на краю рабочей зоной. При этом распределение поля измеряется в поперечном сечении компактного полигона. Однако, рабочей зоной измерительного стенда является некоторый объем, в котором сформированную коллиматором волну можно считать квазиплоской. Измерить поля в каждом поперечном сечении полигона невозможно, поэтому как правило, измерение распределения поля ограничивается только одним поперечным сечением.

Для оценки длины рабочей зоны можно использовать эталонный объект. Устанавливая объект в разных местах рабочей зоны и, измеряя его эффективную площадь рассеяния (ЭПР), можно оценить границы рабочей зоны комплекса. Выбор объекта будет в данном случае иметь огромное значение, потому что позиционирование объекта может заметно влиять на точность измерения его характеристик.

В автоматизированном измерительном комплексе – компактном полигоне (АИК-КП) квазиплоская волна формируется параболическим зеркалом коллиматора МАРК-12, в фокусе которого размещается облучатель. Фокусное расстояние зеркала составляет 12 м, центр рабочей зоны находится на расстоянии 24 м и на высоте 6,5 м от уровня чистого пола (без радиопоглощающего материала (РПМ)). Рабочая зона АИК-КП представляет собой горизонтально расположенный цилиндр диаметром 6 м и длиной 8 м.

Измерение распределения поля происходит с помощью сканера, передвигающегося по рельсам на стационарно установленной платформе, которая расположена в конце рабочей зоны. Таким образом, в АИК-КП происходит контроль распределения поля лишь в одном, самом крайнем срезе поля.

Целью настоящей работы является оценка продольного размера (длины) рабочей зоны АИК-КП и неравномерности распределения поля вдоль оси коллиматора.

Описание и методика эксперимента

Непосредственно над фокальной осью коллиматора в АИК-КП проходит монорельс тали, с помощью которого происходит установка позиционеров и объектов измерения. Для измерения поля вдоль оси коллиматора было решено использовать монорельс сдвигающейся по нему талью.

Как отмечено выше, выбор объекта измерения имеет большое значение. Проста в позиционировании металлическая сфера. Однако, сфера хорошо рассеивает сигнал, в силу чего взаимодействует с конструкциями и частями безэховой камеры (БЭК). Располагаясь над позиционером, сфера будет с ним сильно взаимодействовать [3], что внесет дополнительный фактор, не связанный с полем, формируемым коллиматором.

В качестве объекта был выбран отражатель на основе линзы Люнебурга, рассчитанный и изготовленный в ИТПЭ РАН [4]. Линза напечатана на 3D принтере, изготовлена из PLA пластика. Благодаря наличию плотного наружного слоя пластика, отражатель работает при любом направлении падающей на него волны. Диаметр линзы 200 мм. Такой объект идеален для измерения качества распределения поля, т.к. слабо взаимодействует с окружающим пространством БЭК.

Линза помещалась в целлофановый пакет (рисунок 1), который привязывался на капроновые нитки к монорельсовой тележке с РПМ. Высота подвеса линзы над пилоном составляла около 1 м. Тележку с РПМ перемещала таль. Линза устанавливалась в

дискретные точки вдоль оси камеры с помощью лазерного нивелира, точки были отмерены от центра рабочей зоны с шагом 1 м, положительные координаты соответствуют направлению от коллиматора.

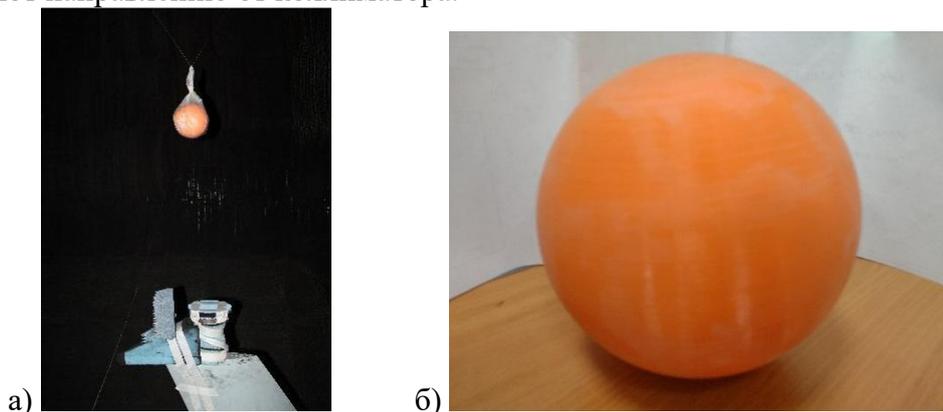


Рисунок 1. Линза Люнебурга а) над центром вращения пилона и б) крупным планом

Калибровки проведены при отсутствии линзы на подвесе.

Для калибровки на позиционер устанавливалась пенопластовая коническая опора суммарной высотой примерно 1 м. Таким образом, центр калибровочного цилиндра, устанавливаемого на данную опору, примерно совпадал с положением линзы, соответствующему центру рабочей зоны. В положении центра рабочей зоны (0 м) измерение ЭПР линзы имеет минимальную погрешность.

Измерение фона БЭК проводилось без опоры. Верхняя часть позиционера укрыта РПМ, как показано на рисунке 1.

Измерения проводились в диапазонах частот С1 (от 3,95 до 5,85 ГГц) и Х (от 8,2 до 12,4 ГГц) при обеих линейных поляризациях падающей волны.

Результаты экспериментальных исследований

ЭПР линзы измерена вдоль оси коллиматора при координатах от -6 м до +8 м. На рисунке 2 представлены измеренные частотные зависимости ЭПР линзы, установленной в центре и на краях рабочей зоны АИК-КП в исследуемых диапазонах частот.

Каждый рисунок содержит три очень похожие кривые: измеренные зависимости ЭПР линзы от частоты имеют одинаковый характер. Графики ЭПР линзы для разных положений в БЭК смещены по вертикали друг относительно друга, что определяется в первую очередь неравномерностью распределения поля. В Х диапазоне частот линза имеет размер порядка 6-7 длин волн, поэтому колебания поля на таком размере уже хорошо усредняются: разброс значений измеренных ЭПР линзы менее 1 дБ для всех положений внутри рабочей зоны. В С1 диапазоне частот линза имеет размер порядка трех длин волн, усреднение тут происходит несколько хуже, а ЭПР линзы в этом диапазоне меньше. Разброс значений измеренных ЭПР линзы составил примерно 1,5 дБ.

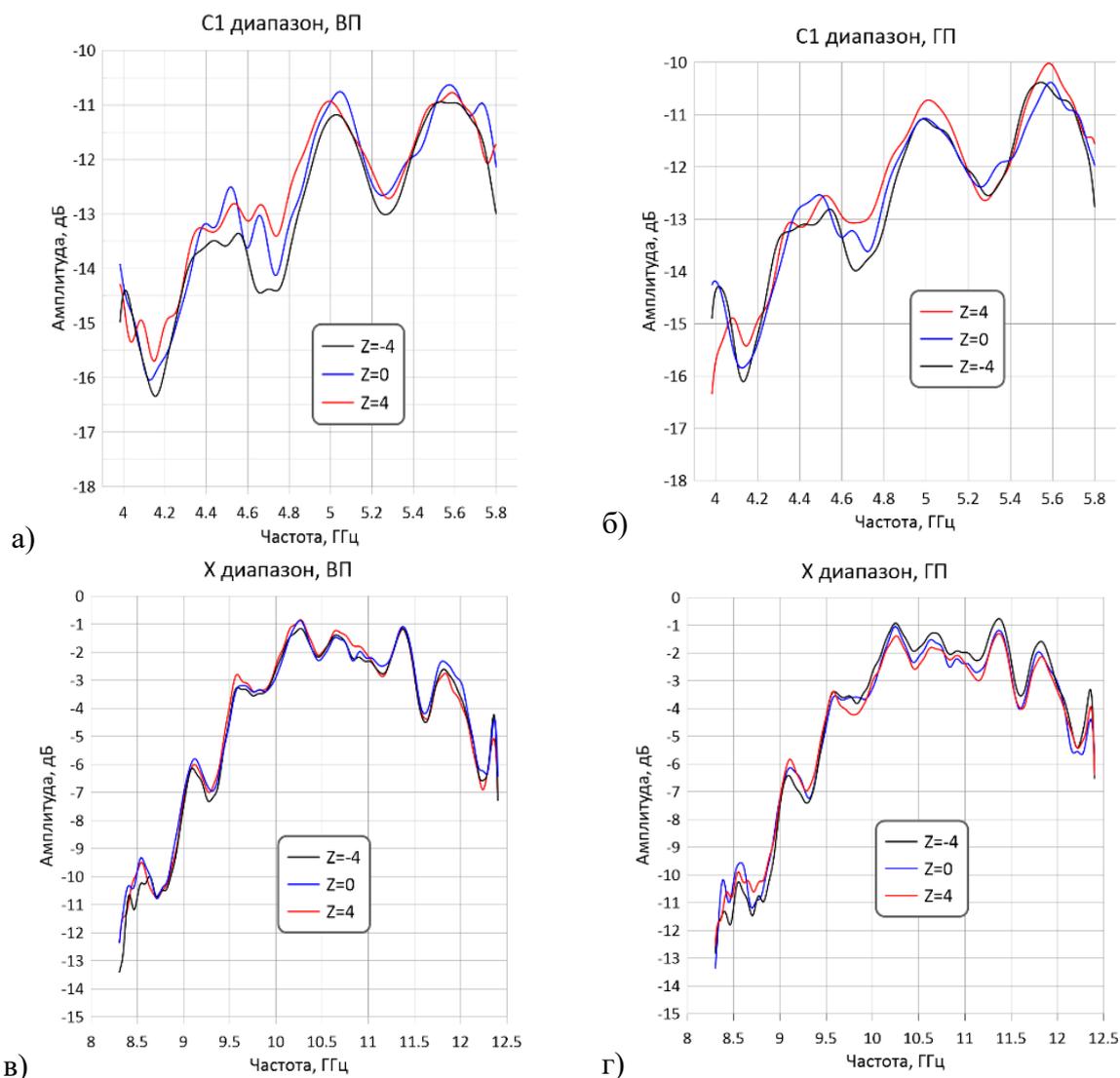


Рисунок 2. Измеренные частотные зависимости ЭПР линзы в трех положениях в АИК-КП

Заключение

Данные исследования показали, что длина рабочей зоны АИК-КП составляет 8 м. Неравномерность распределения поля в центре рабочей зоны вдоль оси коллиматора не превосходит 1,5 дБ.

Использование отражателя на основе линзы Лüneбурга позволяет оценить качество распределения поля в рабочей зоне компактного полигона в тех точках, где невозможно установить сканер и провести прямые измерения.

Литература

1. *Н.П. Балабуха, А.С. Зубов, В.С. Солосин.* Компактные полигоны для измерения характеристик рассеяния объектов. – М.: Издательство «Наука», 2007 – 266 с.
2. *Knott E.F., Shaeffer J.F., Tuley M.T.* Radar cross section. – 1993 Boston: SciTech Publishing, 1993, second edition. – 477 p.
3. *N.P. Balabukha, N.L. Menshikh, N.E. Shapkina.* Influence of the Interaction of an Object with a Support on the Accuracy of RCS Measurement of Reference Reflectors // 2021 Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW), 2021, pp. 35-38. DOI: 10.1109/RSEMW52378.2021.9494071.
4. *К. М. Басков, В. Н. Семенов, С. Я. Бобровский, Д. Я. Поддубний, В. В. Яценко и Т. А. Фурманова.* Creating a Luneburg Lens by 3D Printing // 2023 Radiation and Scattering

Непертурбативные эффекты магнитной поляризации КЭД-вакуума в существенно закритической области

Non-Perturbative Effects of the Magnetic QED-Vacuum Polarization in the Supercriticality Region

Польшикова Е.С.¹

1) *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ
polshikovaes@gmail.com*

Аннотация. В работе рассматриваются непертурбативные эффекты поляризации вакуума по магнитной компоненте. Получено численное решение задачи Дирака-Максвелла при заряде Кулоновского источника, существенно превышающем критическое, свидетельствующее о том, что в рамках рассматриваемой модели сферически симметричного конгломерата из 9 ионов урана-92 в присутствии аксиального магнитного поля имеет место перестройка вакуумной структуры энергетических уровней, понижающая энергию ионного кластера до значений (по модулю) порядка десятков ГэВ.

Введение

В настоящее время поведение КЭД-вакуума под воздействием сверхзаряженного электромагнитного источника является предметом активного исследования. Основной интерес представляет эффект перестройки вакуумной структуры, обусловленный погружением дискретной части энергетического спектра уравнения Дирака в нижний континуум и проводящий к спонтанной позитронной эмиссии в сочетании с формированием заряженных вакуумных оболочек [1,2]. Фактическая регистрация последних позволила бы утвердить существование новой физики в области сильных электромагнитных полей, однако вопрос о том, как достичь области закритических зарядов и сформировать соответствующий наблюдаемый кулоновский источник, существенно нетривиален. В рамках освещаемого исследования предоставлен способ получить вышеупомянутую конфигурацию с помощью непертурбативных методов КЭД при наличии спонтанной магнитной компоненты поля источника, на определенных достижимых масштабах результирующей в погружении уровней энергии в нижнюю часть моря Дирака настолько значительном, что кулоновское взаимодействие, препятствующее формированию подобных систем, оказывается полностью скомпенсированным. Более того, выживает не скомпенсированная компонента вакуумной поляризации, свидетельствующая о возможности формирования связанного состояния.

Описание работы

В исследовании [1] детально обсуждается методология перенормировки вакуумной энергии $\varepsilon_{VP}(R, Z)$ при наличии магнитного потенциала кулоновского источника $\vec{A}(\vec{r}, t)$. Сам подход изложен для произвольного значения заряда источника Z , и потому является универсальным. Численные результаты получены для конкретной конфигурации, о которой будет сказано ниже.

Постановка задачи. Рассматривается уравнение Дирака вида:

$$i\partial_t\psi(\vec{r}, t) = \left[\vec{\alpha} \left(\vec{p} - e\vec{A}(\vec{r}, t) \right) + V(r) \right] \psi(\vec{r}, t), \quad (1)$$

собственные векторы которой – дираковские биспиноры, связанные с плотностью тока вакуумной поляризации как прямое следствие Швингеровского подхода

$$j^\mu(\vec{r}, t) = -\frac{|e|}{2}[\psi(\vec{r}, t), \gamma^\mu \psi(\vec{r}, t)]. \quad (2)$$

Однако при в отсутствие спонтанной генерации позитронов, а также в приближении адиабатически медленного сближения ионов (составляющих единый сверхтяжелый кулоновский источник с зарядом Z) эволюционная задача (1) сводится к набору стационарных задач, каждая из которых решается для фиксированного эффективного размера источника R (о самом источнике – см. далее), следующего вида

$$\epsilon_n \psi_n(\vec{r}) = \left[\vec{\alpha} (\vec{p} - e\vec{A}(\vec{r})) + V(r) \right] \psi_n(\vec{r}), [\vec{A}(\vec{r}, t), \psi(\vec{r}, t)] = 0. \quad (3)$$

Сам кулоновский источник представляет собой толстый сферический равномерно заряженный слой с внутренним R_1 и внешним радиусами R_2 (R – эффективный радиус), параметризованными размерами иона урана-92, которые в количестве 9 штук, эквидистантно размещенных на сфере, и представляют собой кулоновский источник, как показано ниже

$$R_1 = R + R_U, R_2 = R - R_U, R_U = 7.62 \text{ Фм} \quad (4)$$

В свою очередь, магнитный потенциал $\vec{A}(\vec{r})$ является аксиально симметричным и представляется в виде мультипольного разложения до 9-й компоненты (от четных компонент вклады нулевые ввиду их симметрии, потому эффективных вкладов, взаимодействующих с вакуумом только 5). Эффекты вакуумной поляризации проявляются явно лишь на расстояниях порядка комптоновской длины волны от источника поля, потому при достаточно больших R становятся пренебрежимо малыми.

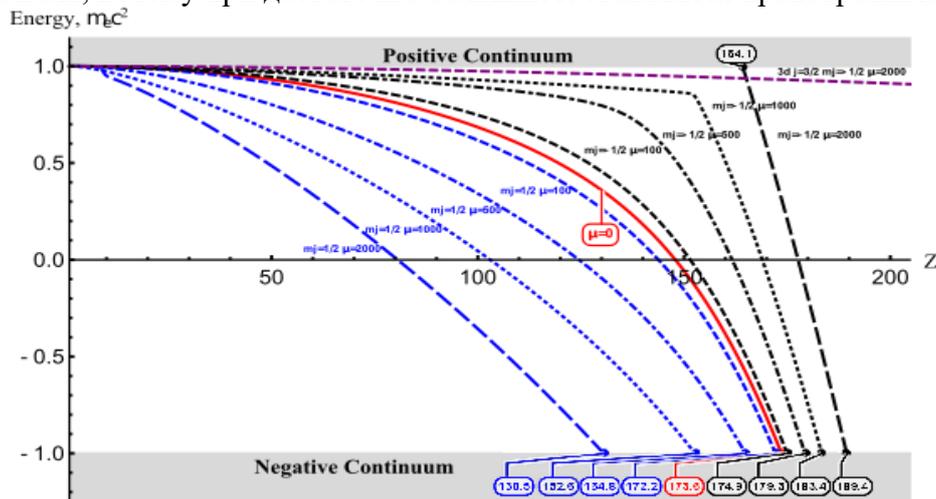


Рисунок 1. Иллюстрация падения энергетических уровней в нижний континуум.

Аналитическая методология и численный подход. [3-5] С помощью техники Вихмана-Кролла вакуумные токи (2) представимы в виде результата интегрирования по первому листу поверхности Римана с особыми точками – значениями энергии, лежащими на вещественной оси, – содержащего, след соответствующих функций Грина. Пользуясь парциальным разложением (ввиду сферической симметрии кулоновского источника) для компонент дираковского биспинора, для каждой из них получается система дифференциальных уравнений, содержащая бесконечные ряды, найти точное аналитическое решение которых не представляется возможным. Потому после процедуры перенормировки отдельно вкладов чисто кулоновского взаимодействия (в однопетлевом приближении) и варьирования оставшегося энергетического (магнитного) вклада по амплитуде A с применением метода $R_U \ln \ln |Wronskian|$, детально изложенного в [1], вводится параметр обрезания бесконечных рядов по орбитальному моменту. Это оправдано тем фактом, что глубоко в нижний континуум погружается только нижняя (дискретная) часть спектра уравнения Дирака, а потому эффективно можно обрезать верхние уровни. С помощью метода Аиткена [6] осуществляется экстраполяция при стремлении параметра обрезания к бесконечности. Такая процедура

проводится для каждого значения R при фиксированном заряде источника $Z=828$. Результаты численных расчетов представлены на рис.2 (некоторые характерные значения приведены в таблице 1).

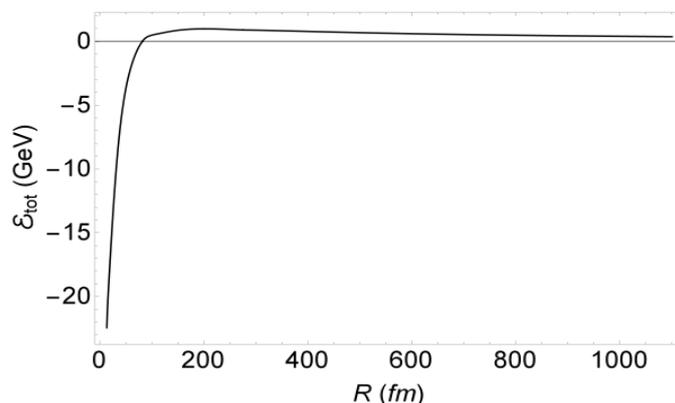


Рисунок 2. Суммарная энергия ионного кластера с $Z=828$ (результат точной экстраполяции).

Таблица 1. Важные и нужные данные

Эффективный радиус, $R=13.76 \text{ Фм}$	Энергия кулоновского отталкивания, МэВ	Перенормированная энергия поляризации вакуума, МэВ	Суммарная энергия $\epsilon_{tot}(R)$, МэВ
1	-48900	27400	-22400
2.15	-26200	15000	-11200
5.98	-5800	5800	0
8	-3800	4400	600
14.63	-1400	2400	1000
73	-100	500	400

Заключение

Экстраполяция дала картину, сходящуюся к существенно нетривиальному результату, свидетельствуя о том, что эффект от поляризации вакуума по магнитной составляющей действительно есть. Более того, полученные значения (порядка единиц и десятков ГэВ) энергии погруженной в нижний континуум части спектра позволяют скомпенсировать кулоновское отталкивание и создать устойчивый сверхтяжелый ион, свойства которого являются предметом дальнейшего исследования [7].

Необходимо отметить, что число возможных вакуумных позитронов, которые гипотетически могут быть обнаружены в данном процессе в ходе экспериментального исследования, настолько велико, что непременно будет детектировано. В противном случае, подтвердится альтернативная гипотеза о нарушении закона сохранения лептонного заряда. В любом случае, изучение конструкции, представленной в исследовании, несомненно является оправданным и приоткрывает завесу над физикой критической КЭД [2-3,7].

Литература

1. *Sveshnikov K.A., Polshikova E.S., Artiukova S.A., Boitsov M.A., Grashin P.A.* Magnetic vacuum polarization effects in the supercritical QED: spontaneous generation of a stable highly magnetized phase of the vacuum state. – 2024. – *to be published*.
2. *A. Krasnov and K. Sveshnikov*, *arXiv.org* (2022), *arXiv:2201.04829 [physics.atom-ph]*.
3. *G. Plunien, B. Müller, and W. Greiner*, *Phys. Rep.* 134, 87 (1986).
4. *W. Greiner and J. Reinhardt*, *Quantum Electrodynamics*, 4th ed. (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009).

5. *T. Melnyk, O. Knop, and W. Smith, Canadian Journal of Chemistry 55, 1745 (1977)..*
6. *A. Sidi, Practical Extrapolation Methods, Mathematics, Computational Science, Numerical Analysis and Computational Science (Cambridge University Press, 2003).*
7. *J. Rafelski, J. Kirsch, B. Müller, J. Reinhardt, and W. Greiner, "Probing QED Vacuum with Heavy Ions," in New Horizons in Fundamental Physics, FIAS Interdisciplinary Science Series (Springer, 2017) pp. 211–251.*

Аналитическое решение задачи электростатики о силе взаимодействия половинок однородно поляризованного диэлектрика эллипсоидальной формы.

Analytical Solution of the Problem of Electrostatics on the Interaction Force of Halves of the Uniformly Polarized Ellipsoidal Dielectric.

Поляков О.П., Поляков П.А.

МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва. Российская Федерация.

o_polyakov@physics.msu.ru

Аннотация. В работе найдено аналитическое решение для поперечной силы взаимодействия половинок однородно поляризованного диэлектрика, имеющего форму эллипсоида вращения.

В электродинамике сплошных сред известно ограниченное количество точных аналитических решений нетривиальных задач электростатики диэлектриков. Эти решения представляют большой интерес для теоретических и математических методов исследования электродинамики диэлектрических сред, так как могут служить критерием эффективности развиваемых приближенных и численных решений. В данной работе найдено точное аналитическое решение задачи электростатики о силе взаимодействия половинок однородно поляризованного диэлектрика, имеющего форму эллипсоида вращения. На рисунке 1 изображено центральное сечение этого эллипсоида. Полуоси эллипсоида вдоль координатных осей X, Y, Z равны a, b, c , где $a = b$. Нижняя половина эллипсоида изображена пунктирной линией. Между половинами эллипсоида изображена щель исчезающе малой толщины $2h \rightarrow 0$. Диэлектрический эллипсоид однородно поляризован вдоль оси Z , величина вектора поляризации P .

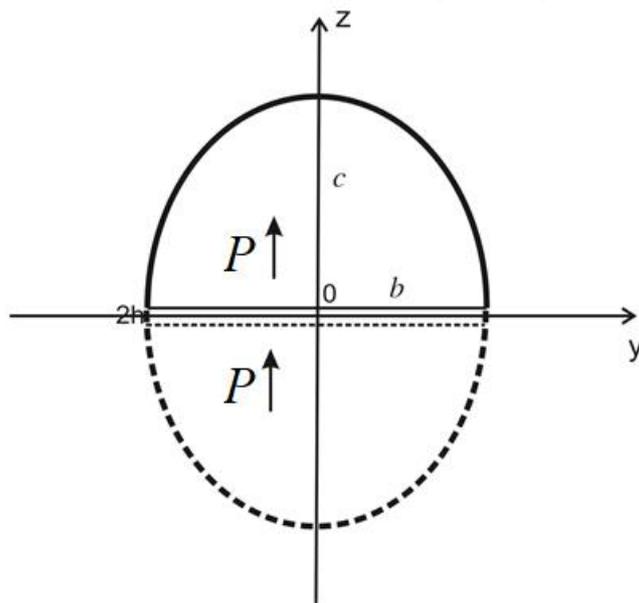


Рис. 1.

Силу взаимодействия половинок эллипсоида в рассматриваемом случае удобно вычислить, используя тензор натяжения Максвелла [1]

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left\{ E_{\alpha} E_{\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} E^2 \right\}. \quad (1)$$

Натяжение электрического поля в области щели притягивает половинки эллипсоида, а на внешней поверхности растягивает (отталкивает) эти половинки. Сложнее всего найти эту силу растяжения. Однако задачу можно значительно упростить если заметить, что результирующая сила растяжения на внешней половинке эллипсоида будет равна результирующей силе натяжения тензора Максвелла, действующей в плоскости X0Y вне эллипсоида. В этой плоскости напряженность электрического поля можно рассчитать, если воспользоваться эллипсоидальными координатами и известной формулой для напряженности электрического поля однородно поляризованного эллипсоида [2]. В результате для напряженности электрического поля в плоскости X0Y вне эллипсоида можно найти следующую аналитическую формулу

$$E_z = 4\pi P b^2 c \left[\frac{1}{(c^2 - b^2)u_0} - \frac{1}{2(c^2 - b^2)^{3/2}} \ln \ln \left| \frac{u_0 + \sqrt{c^2 - b^2}}{u_0 - \sqrt{c^2 - b^2}} \right| \right], \quad (2)$$

где

$$u_0 = \sqrt{c^2 - b^2 + y^2}. \quad (3)$$

Результирующая сила растяжения будет соответственно равна

$$F_z^2 = \int_b^{\infty} w(y) 2\pi y dy, \quad (4)$$

где

$$w(y) = \frac{E_z^2}{8\pi}. \quad (5)$$

Проводя интегрирование, для силы (4) можно получить следующее выражение

$$F_z^2 = \frac{(4\pi P b^2 c)^2}{4(c^2 - b^2)^2} I(x). \quad (6)$$

Здесь

$$I(x) = -\frac{1}{2} - \ln \ln \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{x}{2} \ln \ln \frac{x - 1}{x + 1} - \frac{x^2 - 1}{8} \left(\ln \ln \frac{x - 1}{x + 1} \right)^2, \quad (7)$$

где

$$x = \frac{c}{\sqrt{c^2 - b^2}}. \quad (8)$$

Электрическое поле внутри щели (рис. 1) однородно и определяется выражением

$$E_z = 4\pi P (1 - n^{(z)}), \quad (9)$$

где $n^{(z)}$ - коэффициент деполяризации, определяемый выражением [3]

$$n^{(z)} = \frac{1 - e^2}{e^3} (e - e), \quad (10)$$

а e - эксцентриситет эллипса

$$= \sqrt{1 - \frac{b^2}{c^2}}. \quad (11)$$

Тогда результирующая сила притяжения половинок эллипсоида, обусловленная электрическим полем внутри щели будет равна

$$F_z^1 = \frac{(4\pi P b (1 - n^{(z)}))^2}{8}. \quad (12)$$

В результате для результирующей силе взаимодействия половинок однородно поляризованного диэлектрика, имеющего форму эллипсоида вращения, получаем аналитическое выражение, содержащее только элементарные функции

$$F_z = F_z^1 - F_z^2 \quad (13)$$

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.2. Теория поля. М.:Наука, 1988.512с.
2. Стрэттон Дж. Теория электромагнетизма. М.–Л.:ГИТТЛ, 1948. 539 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика. Т.8. М.: Наука, 1982. 620 с.

Дифракция электромагнитных волн на фрактальных металлических экранах

Diffraction of Electromagnetic Waves by Fractal Metal Screens

Тумаков М. Д.^{1,2}

1) Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», отделение суперкомпьютерных систем и параллельных вычислений, лаборатория суперкомпьютерного моделирования, Москва, РФ; 2) Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий, Казань, РФ.

makdtumakov@kpfu.ru

Аннотация. Двумерные задачи дифракции электромагнитных волн на фрактальных металлических экранах сведены к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения искомой волны в ряд. Использован метод интегрально-сумматорного тождества. В качестве примеров рассмотрены задача дифракции на поперечных перегородках в плоском волноводе и задача дифракции на периодической решетке из тонких проводящих лент, образующих фрактальную структуру. Проведен вычислительный эксперимент.

Введение

Задачи дифракции электромагнитных волн на проводящих тонких экранах относятся к классическим задачам электродинамики [1], [2]. При исследовании таких задач наиболее часто применяется метод интегральных уравнений. Если поле в волноводной структуре может быть разложено в ряд по собственным волнам, то при сшивании полей в частичных областях возникают парные сумматорные функциональные уравнения (ПСФУ), которые затем преобразуются в бесконечные системы линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ). В [3] используется метод задачи Римана-Гильберта, в [4] – метод интегрально-сумматорного тождества (ИСТ).

В последнее время большой интерес вызывают задачи дифракции волн на фрактальных телах [5]. В настоящей работе сведены к БСЛАУ методом ИСТ задача дифракции на поперечных перегородках в плоском волноводе и задача дифракции на фрактальной периодической решетке из тонких проводящих лент

Фрактальная перегородка в плоском волноводе

Задача дифракции электромагнитной волны на тонкой проводящей перегородке в плоском волноводе толщиной a в случае ТЕ-поляризации поля сведена методом ИСТ к БСЛАУ вида

$$-\frac{a}{2}a_k + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \gamma_n \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} I_{nm} J_{mk} = a_l^0 I_{lk}, k = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $I_{nm} = \int_M \sin \frac{\pi n}{a} x \sin \frac{\pi k}{a} x dx$, $J_{nk} = \int_N \sin \frac{\pi n}{a} x \sin \frac{\pi k}{a} x dx$, $\gamma_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2}$, a_n – искомые коэффициенты разложения поля по собственным волнам, M – часть сечения волновода, занятая перегородкой, N – свободная часть сечения.

Исследован случай, когда M – предфрактал канторова фрактала. Фрактал состоит из множества отрезков, он строится следующим образом. Предфрактал нулевого порядка – половина сечения волновода. На каждой следующей итерации каждый отрезок предфрактала делится на три части, центральная часть отсекается, а боковые части остаются. Предфрактал первого порядка состоит из двух отрезков, предфрактал второго порядка – из четырех, и так далее.

Приближенное решение БСЛАУ (1) вычислялось методом усечения. На рис. 1 показаны зависимости нормированных потоков энергии прошедшего и отраженного поля от волнового числа k (или от частоты) для предфракталов 1, 2, 5 и 10 порядков соответственно. Сплошная линия – доля отраженной энергии, пунктирная линия – доля прошедшей энергии, а контрольная линия сверху – их сумма (показывает, насколько точно выполняется закон сохранения энергии).

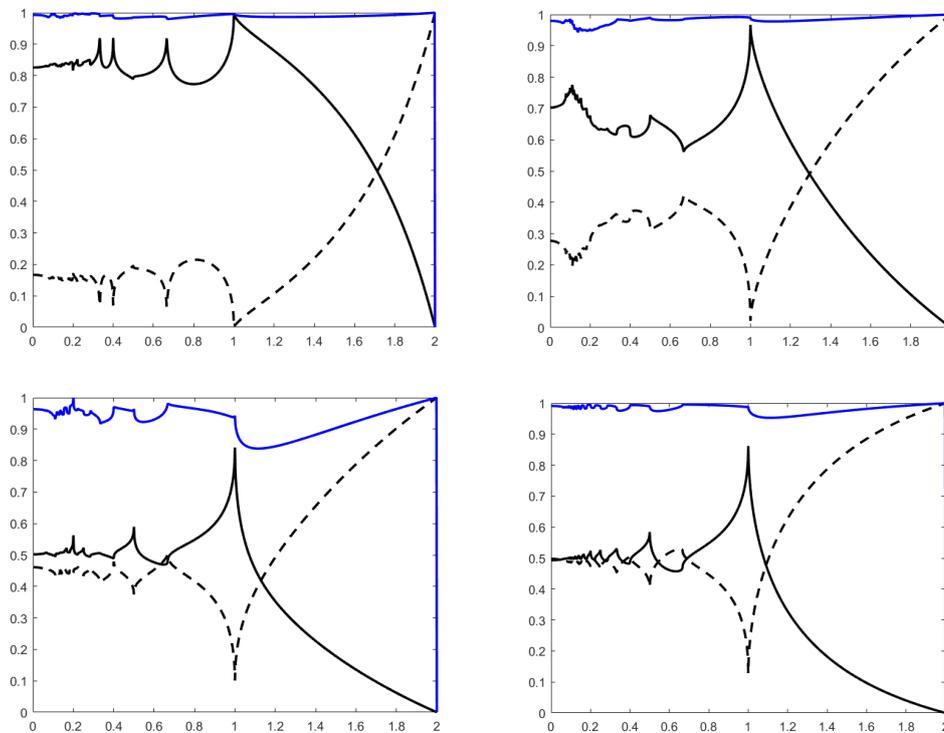


Рисунок 1. Потоки энергии отраженной и прошедшей волны.

Аналогичные результаты получены в случае ТМ-поляризации поля, а также при исследовании задачи дифракции плоской электромагнитной волны на бесконечной периодической фрактальной решетке, когда ленты в каждой полосе периода представляют собой фрактальную структуру.

Заключение

Вычислительный эксперимент показал, что предфрактальные экраны начиная с определенной итерации ведут себя как сплошной экран.

Литература

1. Хёнл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. – М.: Мир, 1964. – 428 с.
2. Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. – М.: ИПРЖР, 1996. – 176 с.

3. *Шестопалов В.П.* Метод задачи Римана-Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. – Харьков: Издательство Харьковского университета, 2022. – 400 с.
4. *Плецинский Н.Б.* Распространение и дифракция электромагнитных волн. Учебное пособие – Казань: Казанский федеральный университет, 2022. – 80 с.
5. *Ghosh B., Sinha S.N., Kartikeyan M.V.* Fractal apertures in waveguides, conducting screens and cavities. Analysis and design. – Springer International Publishing Switzerland, 2014. – 202 p.

Электромагнитная маскировка диэлектрических цилиндров золотыми наноцилиндрами

Electromagnetic Cloaking of Dielectric Cylinders with Gold Nanocylinders

Боголюбов А.Н., Никитченко А.Д.

*Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, кафедра математики, Москва, РФ
nikitchenko.ad15@physics.msu.ru*

Аннотация. В работе предложен алгоритм для синтеза маскирующих оболочек, состоящих из металлических наночастиц. Маскирующие свойства полученных конфигураций были подтверждены численными расчетами. Показано, что порядка 90% рассеянной энергии может быть подавлено. Обсуждаются преимущества и недостатки такого подхода к маскировке.

Введение

Маскирующая оболочка - это устройство, которое делает маскируемый объект «невидимым» для внешнего электромагнитного излучения в определенном диапазоне частот. Объект считается невидим, если он не отражает волны обратно к источнику и, кроме того, не рассеивает волны в других направлениях, и, кроме того, не создает никакой тени, т.е. должен не поглощать и переизлучать никакой мощности.

Содержание работы

Существует множество подходов к синтезу маскирующей оболочки [1-3]. В этой работе цилиндр с относительной диэлектрической проницаемостью большей, чем 1, был покрыт диэлектрической оболочкой, имеющей относительную диэлектрическую проницаемость меньшую, чем 1. Диаметр оболочки можно выбрать таким образом, чтобы рассеяние от маскируемого объекта и от оболочки компенсировало друг друга, поскольку в них индуцируются дипольные моменты противоположного знака, тем самым скрывая объект от внешнего наблюдателя.

В основе этого метода маскировки лежит использование материалов с диэлектрической проницаемостью меньше единицы очень специфическими и часто весьма экзотическими свойствами. Поскольку в природе не встречаются легкодоступных материалов с такими свойствами, единственный выход – использование метаматериалов.

Особенностью метаматериалов является наличие в них микроструктуры, характерный размер которой обычно много меньше характерной длины волны излучения. Из-за этого прямое численное моделирование, учитывающее структуру метаматериала, все его локальные вставки и включения, становится крайне тяжелым, требующим больших объемов компьютерной памяти и вычислительных мощностей. В связи с этим обстоятельством крайне привлекательным становится использование различных теорий электромагнитного усреднения.

В работе предложен двухэтапный подход к синтезу маскирующей оболочки. На первом этапе подбираются параметры маскирующего слоя (толщина и относительная диэлектрическая проницаемость) таким образом, чтобы минимизировать рассеянную энергию. Затем подбираются параметры ячейки маскирующего слоя (радиус металлической вставки) таким образом, чтобы эффективная диэлектрическая проницаемость [4] была максимально близка к полученной на первом этапе

диэлектрическая проницаемости. Полученная конфигурация проверялась полученными расчетами.

Заключение

Был предложен алгоритм синтеза маскирующих оболочек, составленных из золотых цилиндров. Показано, что такой подход позволяет снизить рассеянную энергию на 90-95%. Были обсуждены преимущества и недостатки такого подхода к маскировке.

Литература

1. J.B. Pendry, D. Schurig, and D.R. Smith, *Science* 312, 1780-2 (2006).
2. D.Schurig, J.J. Mock, J.B. Justice, S.A. Cummer, J.B. Pendry J B, A.F. Starr, and D.R. Smith, *Science* 314, 977-80 (2006).
3. W. Cai, U.K. Chettiar, A.V. Kildiev, and V.M. Shalaev, *Nat. Photon.* 1, 224- 227 (2007).
4. Silveirinha, M.G. Metamaterial homogenization approach with application to the characterization of microstructured composites with negative parameters // *Phys. Rev. B.* 2007. Vol. 75. Iss. 11. P. 115104. DOI: 10.1103/PhysRevB.75.115104

Численные методы

О численном решении краевых задач электродинамики с импедансными граничными условиями методом граничных интегральных уравнений

On the Numerical Solution of Boundary Value Problems of Electrodynamics with Impedance Boundary Conditions by the Method of Boundary Integral Equations

Сетуха А.В.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, НИИЦ, Москва, РФ.

setuhaav@rambler.ru

Аннотация. Рассматриваются краевые задачи для уравнений Максвелла в монохроматическом случае, в которых рассматриваются некоторые объекты, помещенные в однородную внешнюю среду, на границах которых ставятся условия импедансного типа. Под условиями импедансного типа понимаются условия, устанавливающие связь между касательными компонентами электрического и магнитного поля. Такие условия использованы в задачах о рассеянии заданного первичного поля на идеально проводящей поверхности, покрытой тонким слоем диэлектрика, и в задаче моделирования излучения антенн, запитываемых от волноводов, при задании так называемого волноводного порта. Рассматриваемые задачи решаются численно с применением метода граничных интегральных уравнений.

Рассматриваются краевые задачи для напряженностей электрического и магнитного полей вида $\vec{E}(x) e^{-i\omega t}$ и $\vec{H}(x) e^{-i\omega t}$ соответственно, где t – время, $x = (x_1, x_2, x_3)$ – точки пространства, ω – частота поля, которые подчинены уравнениями Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = i\omega\mu\vec{H}, \operatorname{rot} \vec{H} = -i\omega\varepsilon\vec{E}, \quad (1)$$

ε и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости окружающей среды.

Поля \vec{E} и \vec{H} ищутся в области, вне системы тел и экранов. Предполагается, что суммарная граничная поверхность рассматриваемых объектов Σ может состоять из замкнутых (поверхность некоторого тела) и разомкнутых (поверхность экрана) компонент. На замкнутых компонентах поверхности и на одной из сторон каждого экрана ставится условие

$$\vec{n} \times [\vec{n} \times \vec{E}^+] = z[\vec{n} \times \vec{H}^+], \quad (2)$$

где \vec{E}^+ и \vec{H}^+ – краевые значения электрического и магнитных полей на положительной стороне граничной поверхности (в случае замкнутой компоненты положительной считается внешняя сторона), \vec{n} – вектор нормали к поверхности, z – коэффициент импеданса, который предполагается заданной комплексной функцией на поверхности. Возможен случай, когда на части поверхности выполнено условие $z = 0$, что соответствует случаю идеально проводящей поверхности. На противоположной стороне разомкнутых компонент поверхности Σ (на поверхностях экранов) ставится так же условие:

$$\vec{n} \times \vec{E}^- = 0. \quad (3)$$

Такая задача, в частности, возникает при решении задачи о рассеянии заданного первичного поля на системе идеально проводящих тел и экранов, которые полностью или частично покрыты тонким слоем диэлектрика. При этом в случае экрана покрытие предполагается нанесенным только с одной стороны. Ищется полное поле вида $\vec{E} = \vec{E}_{inc} + \vec{E}_{sc}$, $\vec{H} = \vec{H}_{inc} + \vec{H}_{sc}$, где \vec{E}_{inc} , \vec{H}_{inc} – заданное первичное поле (incident field), неизвестное вторичное поле, \vec{E}_{sc} , \vec{H}_{sc} – неизвестное рассеянное поле (scattered field). При этом рассеянное поле ищется всюду вне идеально проводящих тел и экранов, как поле, удовлетворяющее уравнениям (1) и условию излучения на бесконечности, а наличие

покрытия приближенно учитывается заданием граничных условий (2)-(3) для полного поля. При этом параметры покрытия (относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости и его толщина) учитываются соответствующим заданием коэффициента импеданса z [1].

Другой класс задач, в которых возникают такая постановка задачи – это моделирование излучения антенн, запитываемых от волноводов. Например, рассмотрим рупорную антенну, к которой подведен прямоугольный волновод (Рисунок 1).

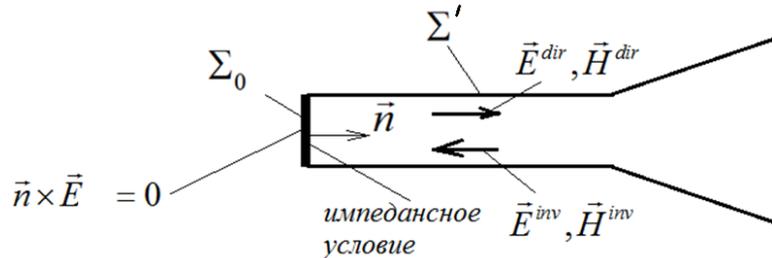


Рисунок 1. Схема рупорной антенны.

Рассматривается рефлектор антенны и часть волновода, ограниченные разомкнутой поверхностью Σ' и пусть Σ_0 - сечение волновода. Ищется полное поле \vec{E} , \vec{H} вне поверхности $\Sigma = \Sigma' \cup \Sigma_0$, которая предполагается разомкнутой. При этом на поверхности Σ' с обеих сторон, а также на поверхности Σ_0 с внешней стороны ставится условие (3), что соответствует гипотезе об отсутствии излучения поля со стороны заднего торца волновода. А с внутренней стороны ставится условие, которое должно имитировать приход волны из волновода. Здесь мы предполагаем, что для волновода имеется одна основная мода, которая состоит из двух независимых решений: $\vec{E}^{dir}, \vec{H}^{dir}$ – прямая волна, и $\vec{E}^{inv}, \vec{H}^{inv}$ – обратная волна. Мы предполагаем, что для этих волн справедливы соотношения: $\vec{n} \times [\vec{n} \times \vec{E}^{dir}] = -z[\vec{n} \times \vec{H}^{dir}]$, $\vec{n} \times [\vec{n} \times \vec{E}^{inv}] = z[\vec{n} \times \vec{H}^{inv}]$, где z – некоторый заданный коэффициент. Именно такую структуру имеют основные моды в типичных волноводах – прямоугольном, круглом, коаксиальном. Тогда для полного поля $\vec{E} = \vec{E}^{dir} + \vec{E}^{inv}, \vec{H} = \vec{H}^{dir} + \vec{H}^{inv}$ на поверхности Σ_0 имеем условие $\vec{n} \times [\vec{n} \times \vec{E}^+] = -z[\vec{n} \times \vec{H}^+] + 2\vec{n} \times [\vec{n} \times \vec{E}^{dir}]$, (4)

где поле \vec{E}^{dir} в сечении Σ_0 считается заданным. Тогда мы имеем краевую задачу для поля \vec{E}, \vec{H} , состоящую из уравнений (2), условия (3) на обеих сторонах поверхности Σ' и внешней стороне поверхности Σ_0 и условия (4) на внутренней стороне поверхности Σ_0 . При этом на полное поле ставятся так же условия излучения на бесконечности.

Для решения рассматриваемых задач применен метод граничных интегральных уравнений, в котором электромагнитное поле ищется как поле, индуцируемое поверхностными токами, размещенными на поверхности, причем здесь вводится система из двух неизвестных поверхностных токов [1]. В результате задача сводится к системе поверхностных интегральных уравнений для этих токов. Полученные уравнения решаются численно с применением методов коллокаций и кусочно-постоянных аппроксимаций. Проведено тестирование численного метода, при котором проводилось сравнение получаемых на основе расчетов характеристик электромагнитных полей с полуаналитическими данными (известные решения модельных задач, представляемые через ряды) и результатами расчетов с применением других методов.

Литература

1. Setukha A., Stavtsev S. Numerical method for problem of scattering by a small thickness dielectric layer on a perfectly conductive substrate // Springer Proceedings in

Квантовые алгоритмы в задачах электродинамики

Quantum Algorithms in Electrodynamics Problems

Минаев Д.В.

*МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, ЦКТ МГУ
minaevdv@physics.msu.ru*

Аннотация. В последнее время с развитием квантовых технологий все большую популярность и значимость приобретает разработка принципиально новых алгоритмов решения задач электродинамики – квантовых алгоритмов. Эти алгоритмы показывают превосходство («квантовое превосходство») во многих практических задачах. При этом их широкое применение, в частности, в задачах электродинамики весьма затруднено. В этом докладе я хотел бы остановиться на современном состоянии квантовых компьютеров, квантовых алгоритмов для решения задач электродинамики и рассказать об одном интересном алгоритме, предложенном в 2023 году. В завершении я приведу сводный анализ существующих квантовых алгоритмов.

Идеи использовать принципы квантовой механики для различных вычислений, можно считать, начинаются с идеи, высказанной Р. Фейнманом [1] в 1982 году. Речь шла о создании квантовых компьютеров, вычислительных устройствах, в основе действия которых лежат законы квантовой физики. На сегодняшний день уже представлено множество доказательств «квантового» превосходства, когда такого типа вычислители решают некоторые задачи существенно быстрее любых существующих классических устройств. Давно издан «букварь» квантовых вычислений [2].

Хочется остановиться на основных развивающихся типах квантовых вычислительных устройств. Их 2: адиабатические квантовые вычислители (AQC) и гейтовые вычислители. В основе AQC лежит адиабатическая теорема, которая гарантирует, что система, изначально находящаяся в основном состоянии H_0 , будет стремиться оставаться в состоянии с наименьшей энергией, если гамильтониан системы будет изменяться достаточно медленно. AQC особенно полезен для задач оптимизации. Был разработан алгоритм квантового отжига QA (Quantum Annealing) для решения задач комбинаторной оптимизации. Этот алгоритм, помимо адиабатической теоремы, основан на явлении квантового туннелирования. Важным классом задач, решаемым с помощью QA, являются задачи бинарной оптимизации без ограничений (задача QUBO). QUBO позволяет математически формулировать широкий спектр задач оптимизации, включая двоичное целочисленное программирование, квадратичное программирование и комбинаторную оптимизацию. Для решения задачи QUBO с квантовым отжигом обычно выполняется преобразование в модель Изинга. Преобразование из QUBO в Изинг является простым. Широко известна в области квантового отжига компания D-Wave Systems. Она выпустила серию процессоров квантового отжига для решения задач оптимизации. Эти процессоры работают с использованием сети сверхпроводящих квантовых битов.

Перейдем к гейтовой модели вычислений. Эта модель из-за своей очевидности возникла первой. В основе принципов этой модели лежит уравнение Шредингера. В квантовых вычислениях кубит (вектор в Гильбертовом пространстве) может находиться в состоянии 0 или 1, или в любой комбинации этих двух. Это свойство возникает из того факта, что уравнение Шредингера является линейным дифференциальным уравнением

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\varphi\rangle = H|\varphi\rangle, \quad (1)$$

где $|\varphi\rangle$ – волновая функция системы, H – фиксированный эрмитов оператор, известный как гамильтониан замкнутой системы. Собственные значения оператора H определяют

энергетические уровни системы, причем самое низкое энергетическое состояние называется основным состоянием. В отличие от классических вентилях, квантовые вентили являются унитарными операторами, они обратимы и являются частью оператора эволюции. На сегодняшний день основными проблемами гейтовых моделей является декогеренция и зашумленность операторов. Даже введено понятие NISQ (Noisy intermediate-scale quantum) устройств. При этом много компаний, например IBM, Google, Intel, USTC представили свои квантовые вычислители на основе гейтовой модели. В большинстве случаев это опять сверхпроводящие кубиты, но есть реализация на фотонах. Для борьбы с шумами, помимо явных методов коррекции ошибок, разработаны и продолжают развиваться вариационные квантовые алгоритмы (VQA) – это класс квантовых алгоритмов, которые используют концепцию вариационной оптимизации для решения вычислительных задач. Центральная идея VQA – выразить квантовую задачу как задачу оптимизации. Цель – найти минимум целевой функции, обычно называемой функцией стоимости или энергии, путем изменения набора параметров в квантовой схеме. Схема называется анзацем. Поэтому окончательный алгоритм представляет собой гибрид классической и квантовой частей. Такая идея алгоритмов похожа на машинное обучение. Уже известны многие вариационные алгоритмы [3].

Как же можно использовать такие алгоритмы для решения задач электродинамики? Рассмотрим следующую задачу о распространении ЕМ-волны (аналогично можно рассмотреть и магнитную составляющую). Тогда уравнение поля в области без источников можно записать в виде:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \vec{E} \quad (2)$$

Далее конечную область моделируемого пространства дискретизируем на кубической решетчатой сетке с некоторым шагом a . Сетка затем представляется как граф с набором точек и ребер, описывающих отношение соседства между точками сетки. Матрица Лапласа такого графа определяется как $L = D - A$, где D – это матрица степеней вершин графа, A – это матрица смежности. Полезность матрицы Лапласа заключается в ее свойстве, что в предельном случае, когда шаг решетки a приближается к 0, $-L/a^2$ хорошо аппроксимирует оператор ∇^2 . Дискретизированное волновое уравнение тогда имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{c^2}{a^2} L \varphi \quad (3)$$

С заданными начальными условиями: $\varphi(\vec{x}, 0)$; $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\vec{x}, 0)$ и граничными условиями.

В работе [4] предложен алгоритм для решения задачи рассеяния электромагнитных волн со сложной геометрией. Для этого случая начальным условием в нулевой момент времени будет являться локализованный волновой пакет и его производная по времени, а конечным результатом алгоритма моделирования является оценка интенсивности волны в некоторой области пространства, занимаемой детектором. После дискретизации пространства рассеиватель можно смоделировать как отверстие в решетке, где некоторые точки были удалены. На границе этого отверстия можно наложить граничные условия Дирихле или Неймана.

Для этого рассмотрим гамильтониан следующей блочной формы, который по построению является эрмитовым независимо от конкретного выбора матрицы B :

$$H = \frac{c}{a} \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\dagger & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Гильбертово пространство, связанное с квантовой системой, представим в виде прямой сумме вершинных и реберных пространств $\mathcal{H} = \mathcal{H}_V \oplus \mathcal{H}_E$. Подбираем матрицу B так, чтобы $BB^\dagger = L$.

Тогда уравнение Шредингера принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \varphi_V \\ \varphi_V \end{bmatrix} = -i \frac{c}{a} \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_V \\ \varphi_V \end{bmatrix} \quad (5)$$

Отсюда очевидно, что

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{bmatrix} \varphi_V \\ \varphi_V \end{bmatrix} = -\frac{c^2}{a^2} \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\dagger & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{bmatrix} \varphi_V \\ \varphi_V \end{bmatrix} = -\frac{c^2}{a^2} \begin{pmatrix} BB^\dagger & 0 \\ 0 & B^\dagger B \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_V \\ \varphi_V \end{bmatrix} \quad (6)$$

Динамика в пространстве вершин подчиняется дискретизированному волновому уравнению. Амплитуды, связанные с ребрами, являются дополнительными переменными, которые обязательно возникают при преобразовании дифференциальных уравнений второго порядка в дифференциальные уравнения первого порядка.

Нам необходимо включить в вычислительный алгоритм различные граничные условия. Обычно используются граничные условия Дирихле и Неймана. При моделировании волнового уравнения для удовлетворения этих двух условий требуются только изменения в графовом лапласиане. Удаляя вершины внутри области рассеяния, реализуется граничное условие Неймана. С другой стороны, для реализации граничного условия Дирихле к граничным вершинам следует добавлять взвешенные петли, где веса – это количество недостающих ребер к удаленным внутренним вершинам:

И у нас должен быть квантовая схема, которая эффективно готовит начальные состояния

$$|\varphi_{0V}\rangle = \sum_{\vec{x}} \varphi(\vec{x}, 0) |\vec{x}\rangle \text{ и } |\varphi_{0E}\rangle = \sum_{\vec{x}} \left. \frac{\partial \varphi(\vec{x}, t)}{\partial t} \right|_{t=0} |\vec{x}\rangle.$$

Конечное квантовое состояние кодирует интенсивность волны в виде значений поля решетки и значения, связанные с краями. В работе [4] приведены численные реализации алгоритма для различных геометрий, которые хорошо соотносятся с известными решениями.

На текущий момент выделим основные квантовые алгоритмы для решения задач электродинамики

1. Гейтовая модель – QTLM (Quantum Transmission Line Matrix), QWE (Quantum Wave Equation), QRT (Quantum Ray Tracing) – в основе алгоритм Гровера, QFEM (Quantum Finite-Element Method) и QMoM (Quantum Method of Moments) – в основе алгоритм ННЛ, Недостатки - вычисленное электромагнитное поле остается неизвестным и требует дорогостоящего этапа проверки с помощью неквантового алгоритма.
2. VQAWM (VQA for Waveguide Modes) – это вариационный квантовый алгоритм, поддерживает шумные квантовые архитектуры, Недостатки - нет доказательства сходимости к глобальному минимуму.
3. QSPR (Quantum Shortest Ray-Path) – основан на алгоритме квантового отжига, формулирует задачу как QUBO. Недостатки - игнорирует закон Снеллиуса.

Какой же вывод можно сделать? Квантовые алгоритмы активно развиваются и находят все более широкое применение в задачах электродинамики. Выбор архитектуры зависит от характера проблемы, доступных квантовых ресурсов и конкретных вычислительных требований. Квантовые системы могут иметь огромное количество базисных состояний относительно количества входных кубитов, которые даже не могут быть сохранены классическими компьютерами, за исключением небольших задач.

Развитие области квантовых вычислений идет огромными темпами. Кажется, что спор о необходимости применения квантовых алгоритмов для решения практических задач сможет решиться только при доступности реального квантового вычислительного устройства. Но то, что эти алгоритмы являются интересными и весьма специфическими – это видно уже сейчас.

Литература

1. R. P. Feynman, “Simulating physics with computers,” *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 21, no. 6, pp. 467–488, 1982. doi: 10.1007/BF02650179
2. M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, 10th ed. Cambridge University Press, 2010.
3. R. Novak, «Quantum Algorithms in Electromagnetic Propagation Modelling for Telecommunications» january 2023 IEEE Access PP(99):1-1 DOI:10.1109/ACCESS.2023.3322446
4. Pedro C.S. Costa, Stephen Jordan, and Aaron Ostrander Quantum Algorithm for Simulating the Wave Equation arXiv:1711.05394v4 [quant-ph] 20 Dec 2019

Перспективы квантовых вычислений для распространения электромагнитных волн в холодной намагниченной плазме

Quantum Computing Perspective for Electromagnetic Wave Propagation in Cold Magnetized Plasmas

Минаев А.Д.

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ
minaeartem@yandex.ru,*

Аннотация. Электромагнитные волны являются неотъемлемой частью любой плазмы — будь то лабораторная термоядерная плазма или астрофизическая плазма.

Традиционные методы изучения свойств электромагнитных волн основаны на дискретизации уравнений Максвелла, подходящей для реализации на современных классических компьютерах. Традиционная методология становится малоэффективной в случае больших областей. Нам могут помочь квантовые компьютеры — вычислительные устройства, предлагающие заманчивую возможность значительного ускорения и сокращения затрат на вычисления. В этом докладе я хотел бы рассказать об одном из способов реализации подобного подхода.

Введение

Распространение электромагнитных волн в плазме при термоядерном синтезе является важной областью исследований в области магнитного синтеза. Электромагнитные волны играют решающую роль в регулировании температуры плазмы, обеспечении локального неиндукционного тока, нагреве и контроле неустойчивости плазмы в экспериментах по магнитному удержанию. Поэтому важно понимать физику и механику распространения и рассеяния волн в неоднородной намагниченной плазме, чтобы оптимизировать применение термоядерного синтеза.

Несмотря на то, что теоретические и аналитические основы для изучения распространения волн в плазме были хорошо разработаны [1], сложные процессы, происходящие в плазме, требуют вычислительного подхода для их полного понимания. С этой целью, учитывая важность распространения электромагнитных волн в плазме, о которой говорилось выше, были разработаны различные вычислительные инструменты. К ним относятся, среди прочего, методы трассировки лучей и полноволнового моделирования, имеющие различные приложения. Однако решение математических и физических задач распространения волн в реальном термоядерном устройстве сопряжено с трудностями даже для самых современных суперкомпьютеров. Поскольку классические компьютеры в конечном счете достигают своих пределов, а исследования в области термоядерного синтеза в значительной степени опираются на результаты вычислений, в данном докладе будет рассмотрен переход к использованию современных и перспективных квантовых технологий, в частности квантовых вычислений. Квантовые вычисления предлагают многообещающий способ ускорения вычислений по сравнению

с классическими компьютерами, известный как "квантовое преимущество", чем вызвали значительный интерес в сообществе физиков плазмы.

Описание работы

Для недисперсионной, тензорной и неоднородной среды уравнения Максвелла можно записать в виде уравнения Шрёдингера с унитарной эволюцией [2]

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{D}_\rho \psi, \quad \hat{D}_\rho = \hat{D}_\rho^\dagger, \quad \psi(\mathbf{r}, 0) = \psi_0 \quad (1)$$

где,

$$\hat{D}_\rho = \hat{\rho} \hat{D} \hat{\rho}^{-1} = \hat{\rho} \hat{W}^{-1}(\mathbf{r}) \hat{M} \hat{\rho}^{-1}, \quad \hat{M} = i \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & \nabla \times \\ -\nabla \times & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad \hat{W} = \begin{bmatrix} \epsilon(\mathbf{r}) & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & \mu(\mathbf{r}) \end{bmatrix}.$$

В данном уравнении оператор M является оператором свёртки Максвелла, а эрмитова положительно определённая матрица W представляет соотношения, определяющие свойства среды. Явная форма отображения Дайсона зависит от структуры материальной матрицы W .

С другой стороны, холодная намагниченная плазма как диэлектрическая среда характеризуется дисперсией. Это приводит к зависимости матрицы диэлектрической проницаемости от частоты $\epsilon(\omega)$.

$$\bar{\epsilon}(\omega) = \begin{bmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} \quad (2)$$

где

$$S = \epsilon_0 \left(1 - \sum_{j=i,e} \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2 - \omega_{cj}^2} \right); \quad D = \epsilon_0 \sum_{j=i,e} \frac{\omega_{cj} \omega_{pj}^2}{\omega(\omega^2 - \omega_{cj}^2)}; \quad P = \epsilon_0 \left(1 - \sum_{j=i,e} \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2} \right).$$

Представление Шрёдингера. Возвращаясь к $\epsilon(\omega)$, отметим, что его эрмитова структура гарантирует, что ток проводимости не вызывает диссипации внутри плазмы, то есть холодная намагниченная плазма является дисперсионным диэлектриком без потерь. Следовательно, можно построить шрёдингерово представление уравнений Максвелла, допускающее унитарную эволюцию, соответствующую сохранению электромагнитной энергии.

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{i}{\epsilon_0} \nabla \times \mathbf{H} - \frac{i}{\epsilon_0} \mathbf{J}_c \\ i \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= -\frac{i}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{E} \\ i \frac{\partial \mathbf{J}_{cj}}{\partial t} &= i \epsilon_0 \omega_{pj}^2(\mathbf{r}) \mathbf{E} + \omega_{cj} \hat{S}_z \mathbf{J}_{cj}, \quad j = i, e \end{aligned} \quad (3)$$

Данный набор уравнений представляет собой расширенную систему Максвелла, которая самосогласованно описывает поведение электромагнитных полей внутри холодной магнитоплазмы [3]. Чтобы получить явное представление Шрёдингера для данной системы, применим преобразование Дайсона, и получим

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \epsilon_0^{1/2} \mathbf{E} \\ \mu_0^{1/2} \mathbf{H} \\ \frac{1}{\epsilon_0^{1/2} \omega_{pi}} \mathbf{J}_{ci} \\ \frac{1}{\epsilon_0^{1/2} \omega_{pe}} \mathbf{J}_{ce} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & ic \nabla \times & -i \omega_{pi} & -i \omega_{pe} \\ -ic \nabla \times & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ i \omega_{pi} & 0_{3 \times 3} & \omega_{pe} \hat{S}_z & 0_{3 \times 3} \\ i \omega_{pe} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & \omega_{ce} \hat{S}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_0^{1/2} \mathbf{E} \\ \mu_0^{1/2} \mathbf{H} \\ \frac{1}{\epsilon_0^{1/2} \omega_{pi}} \mathbf{J}_{ci} \\ \frac{1}{\epsilon_0^{1/2} \omega_{pe}} \mathbf{J}_{ce} \end{bmatrix} \Leftrightarrow i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{D} \psi \quad (4)$$

Квантовое кодирование. Реализация формулы Троттера для унитарного произведения в цифровом квантовом компьютере требует пространственной дискретизации. Будем использовать алгоритм решётки кубитов (QLA) для дискретизации, при которой эволюция преобразуется в чередующуюся последовательность некомутирующих операторов QLA столкновения C и потока S ,

которые восстанавливают уравнение Шрёдингера-Максвелла в виде диффузионной схемы второго порядка. Преимущество этого описания заключается в том, что оператор адвекции S рассматривается с помощью потоковых операторов S , что позволяет эффективно реализовать квантовую модель. Остальные операторы, участвующие в данном уравнении, будут операторами столкновений. В результате всех преобразований получим итоговую формулу

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, \delta t) = & \hat{C}_{vac} \hat{S} \hat{C}_{vac} \hat{C}_{\omega_{pt}} \left(\hat{\mathcal{R}}_z^{(p)} \otimes I_{3 \times 3} \right) \hat{C}_{\omega_{pt}} \hat{C}_{\omega_{pa}}^{(1)} \left(\hat{\mathcal{R}}_z^{(pe)} \otimes I_{3 \times 3} \right) \hat{C}_{\omega_{pa}}^{(1)} \hat{C}_{\omega_{pa}}^{(2)} \left(\hat{\mathcal{R}}_z^{(pe)} \otimes I_{3 \times 3} \right) \times \\ & \times \hat{C}_{\omega_{pa}}^{(2)} \hat{C}_{\omega_{at}} \left[I_{4 \times 4} \otimes \hat{R}_z^{(z)} \left(\frac{\theta_{ci}}{2} \right) \right] \left[I_{2 \times 2} \otimes \hat{R}_z \left(\frac{\hat{\sigma}_z^{(z)} \theta_{ci}}{2} \right) \right] \hat{\mathcal{R}}_z^{(1),(ci)\dagger} \hat{\mathcal{R}}_z^{(2),(ci)\dagger} \hat{C}_{\omega_{ct}} \hat{C}_{\omega_{cz}} \times \\ & \times \left[I_{4 \times 4} \otimes \hat{R}_z^{(z)} \left(\theta_{cc}/2 \right) \right] \left[I_{2 \times 2} \otimes \hat{R}_z^\dagger \left(\hat{\sigma}_z^{(z)} \theta_{ce}/2 \right) \right] \hat{\mathcal{R}}_z^{(1),(ce)\dagger} \hat{\mathcal{R}}_z^{(2),(ce)\dagger} \hat{C}_{\omega_{ct}} \psi_0 \end{aligned}$$

Заключение

Таким образом, благодаря вышеописанному методу, возможно трансформировать классическую систему уравнений Максвелла в уравнение Шрёдингера, что позволяет существенно расширить возможности по моделированию процессов распространения электромагнитных волн в плазме. Также, благодаря данной постановке задачи, становится возможным использование квантовых компьютеров, что, в перспективе, позволит значительно ускорить вычисления. Подобный метод уже был реализован для некоторых задач с цилиндрическими и коническими диэлектриками [4], а также для некоторых трёхмерных вихревых солитонов [5].

Литература

1. *T. H. Stix*, *Waves in plasmas* (American Institute of Physics, 1992)
2. *E. Koukoutsis, K. Hizanidis, A. K. Ram, and G. Vahala*, “Dyson maps and unitary evolution for Maxwell equations in tensor dielectric media,” *Phys. Rev. A* 107, 042215 (2023)
3. *H. Lee and D. K. Kalluri*, “Three-dimensional fdtd simulation of electromagnetic wave transformation in a dynamic inhomogeneous magnetized plasma,” *IEEE Trans. Antennas Propag.* 47, 1146–1151 (1999).
4. *G. Vahala, L. Vahala, M. Soe, and A. K. Ram*, “One- and twodimensional quantum lattice algorithms for Maxwell equations in inhomogeneous scalar dielectric media I: theory,” *Radiat. Eff. Defects Solids* 176, 49–63 (2021).
5. *L. Vahala, G. Vahala, M. Soe, A. Ram, and J. Yopez*, “Unitary qubit lattice algorithm for three-dimensional vortex solitons in hyperbolic self-defocusing media,” *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 75, 152–159 (2019).

Алгоритм гибридного проекционного метода для анализа фокусировки волн линзой Микаэляна в двумерном случае

Algorithm of the Hybrid Projection Method for Analysis Wave Focusing by Mikaelian Lens in Two-Dimensional Case

Кушнерёв М. М.

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, РФ

kushneryov.mm@phystech.edu

Аннотация. Рассмотрена двумерная задача рассеяния плоской электромагнитной волны на диэлектрической и магнитно-диэлектрической линзе Микаэляна. Разработан новый алгоритм гибридного проекционного метода для ее решения с возможностью учета не только переменного профиля диэлектрической проницаемости линзы, но и переменного профиля магнитной проницаемости. Приведены численные результаты, характеризующие эффективность разработанного алгоритма, а также сравнительные особенности

фокусировки волны чисто диэлектрической линзой и магнитно-диэлектрической линзой с одинаковыми профилями диэлектрической и магнитной проницаемости.

Введение

Анализ характеристик линзы Микаэляна [1] в рамках геометрической оптики описан в [2]. В строгой постановке задача решается различными численными методами, включая гибридный проекционный метод (ГПМ) [3]. Результаты, полученные в [3] для диэлектрической линзы Микаэляна, показывают, что фокусировка падающей плоской волны в них сопровождается частичным отражением последней от освещаемой плоской поверхности линзы и существенными колебаниями поля внутри линзы. Указанные эффекты вызваны рассогласованием поверхностей линзы со свободным пространством, приводящим к снижению качества фокусировки. Один из возможных путей, ведущих к уменьшению отражений от поверхности линзы, состоит в использовании магнитно-диэлектрических материалов с волновым сопротивлением, равным волновому сопротивлению свободного пространства.

Целью работы является разработка нового алгоритма ГПМ для анализа линзы Микаэляна с возможностью учета не только переменного профиля диэлектрической проницаемости линзы, но и переменного профиля магнитной проницаемости.

Описание алгоритма

Геометрия двумерной задачи, включая поперечное сечение линзы, показана на рис. 1. Предполагается, что линза облучается E -поляризованной плоской волной с электрическим полем

$$E_y^i(\rho, \varphi) = e^{-ik(x\cos\theta + z\sin\theta)} = e^{-ik\rho\cos(\varphi - \theta)} \quad (1)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число и λ – длина волны в свободном пространстве, и требуется определить поле, рассеянное линзой, а также поле внутри линзы. Зависимость от времени принята в виде $e^{-i\omega t}$.

Введем в рассмотрение окружность радиуса a с центром в начале координат, охватывающую сечение цилиндра, как показано на рис. 1. Тогда напряженность полного электрического поля в свободном пространстве вне области, ограниченной указанной окружностью $\rho \geq a$, может быть представлена в виде разложения

$$E_y(\rho, \varphi) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} [A_q J_q(k\rho) + R_q H_q^{(1)}(k\rho)] e^{iq\varphi} \quad (2)$$

где $A_q = (-i)^q e^{-iq\theta}$ – коэффициенты разложения поля падающей волны (1) по цилиндрическим волнам, R_q – постоянные коэффициенты разложения рассеянного поля, которые требуется определить, $J_q(\cdot)$ – функции Бесселя, и $H_q^{(1)}(\cdot)$ – функции Ханкеля первого рода порядка q .

Искомое электрическое поле в области $0 \leq \rho \leq a$ представляется в виде разложения в ряд Фурье

$$E_y(\rho, \varphi) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} E_q(\rho) e^{iq\varphi} \quad (3)$$

где $E_q(\rho)$ – неизвестные коэффициенты, зависящие от радиальной координаты.

Электрические поля (2) и (3), а также поперечные составляющие напряженности соответствующих магнитных полей, определяемых из уравнений Максвелла, должны быть непрерывны на цилиндрической поверхности при $\rho = a$. Указанные граничные условия дают следующие соотношения для коэффициентов разложения

$$E_p(a) - R_p H_p^{(1)}(ka) = A_p J_p(ka), \quad (4)$$

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} \tilde{\mu}_{pq}(a) E_p'(a) = A_p k J_p'(ka) + R_p k [H_p^{(1)}(ka)]', \quad (5)$$

где $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

$$\tilde{\mu}_{pq}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(q-p)\varphi}}{\hat{\mu}(\rho, \varphi)} d\varphi \quad (6)$$

и $\hat{\mu}(\rho, \varphi) = \mu(\rho, \varphi)$ для точек наблюдения внутри цилиндра и $\hat{\mu}(\rho, \varphi) = 1$ для точек наблюдения вне сечения цилиндра.

Электрическое поле (3) в области $0 \leq \rho \leq a$ должно удовлетворять уравнению

$$\frac{d}{d\rho} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[\rho \frac{dE_q}{d\rho} \tilde{\mu}_{pq}(\rho) \right] - \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{pq}{\rho} E_q \tilde{\mu}_{pq}(\rho) + k^2 \rho \sum_{q=-\infty}^{\infty} E_q \varepsilon_{pq}(\rho) = 0, \quad (7)$$

следующему из уравнений Максвелла, где $\hat{\varepsilon}(\rho, \varphi) = \varepsilon(\rho, \varphi)$ для точек наблюдения внутри цилиндра и $\hat{\varepsilon}(\rho, \varphi) = 1$ для точек наблюдения вне цилиндра. Подставляя (3) в (7) и проецируя (7) на функции $e^{-ip\varphi} / (2\pi)$, получим систему связанных обыкновенных дифференциальных уравнений для переменных коэффициентов разложения $E_q(\rho)$

$$\frac{d}{d\rho} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[\rho \frac{dE_q}{d\rho} \tilde{\mu}_{pq}(\rho) \right] - \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{pq}{\rho} E_q \tilde{\mu}_{pq}(\rho) + k^2 \rho \sum_{q=-\infty}^{\infty} E_q \varepsilon_{pq}(\rho) = 0, \quad (8)$$

где $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и

$$\varepsilon_{pq}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{\varepsilon}(\rho, \varphi) e^{i(q-p)\varphi} d\varphi \quad (9)$$

Система уравнений (8) далее решается с использованием одномерного метода конечных элементов [9]. Неизвестные переменные коэффициенты в (3) представляются в виде разложений по конечному числу N треугольных функций $f_n(\rho)$

$$E_q(\rho) = \sum_{n=1}^N E_{nq} f_n(\rho), \quad (10)$$

где E_{nq} – неизвестные, но уже постоянные коэффициенты разложения. Проецирование (8) на треугольные функции $f_m(\rho)$ и учет (5) приводит к алгебраическим уравнениям

$$\sum_{n=1}^N \sum_{q=-\infty}^{\infty} Z_{mn}^{pq} E_{nq} + ka [H_p^{(1)}(ka)]'^{R_p \delta_{mN}} = -ka J_p'(ka) A_p \delta_{mN}, \quad (11)$$

с матричными элементами $Z_{mn}^{pq} = I_{mn}^{(1)} - pq I_{mn}^{(2)} - I_{mn}^{(3)}$, определяемыми интегралами

$$I_{mn}^{(1)} = k^2 \int_0^a f_m f_n \varepsilon_{pq} \rho d\rho, I_{mn}^{(2)} = \int_0^a \frac{f_m f_n}{\rho} \tilde{\mu}_{pq} d\rho \text{ и } I_{mn}^{(3)} = \int_0^a \frac{df_m}{d\rho} \frac{df_n}{d\rho} \tilde{\mu}_{pq} \rho d\rho \quad (12)$$

Уравнения (11), и уравнения (4), в которых $E_p(a)$ следует заменить на E_{Np} , составляют полную алгебраическую систему, порядок которой после усечения оказывается равным $1 + NP$, где $P = 1 + 2P_1$ – количество учитываемых азимутальных гармоник 0-го, ± 1 -го, ± 2 -го, ... и $\pm P_1$ -го порядков. Решение усеченной системы позволяет далее рассчитать поле в неоднородной цилиндрической области и рассеянное поле в свободном пространстве.

Пример расчетов

Алгоритм, описанный выше, был реализован в программе на языке МАТЛАБ. Пример расчета распределения поля для магнитно-диэлектрической линзы Микаэляна с

$\varepsilon(z) = \mu(z) = n(z) = n_0 / \cosh(\pi z / 4a_x)$, где $n_0 = \cosh(\pi b_z / 4a_x)$ – значение коэффициента преломления на оси, и $a_x = b_z = 2\lambda$, возбуждаемой волной (1), падающей под углом $\theta = 180^\circ, 195^\circ$ и 210° , приведен на рис. 2.

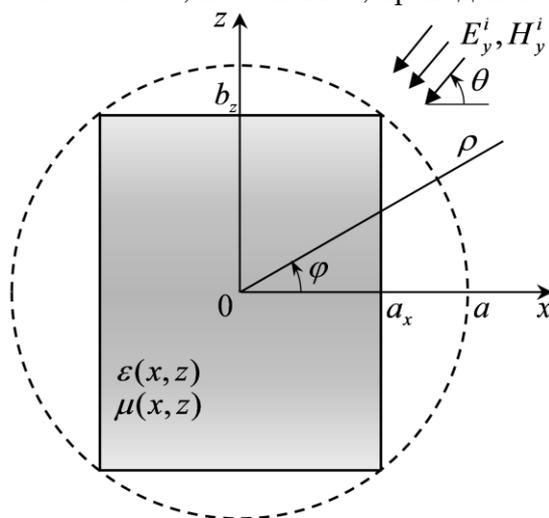


Рисунок 1

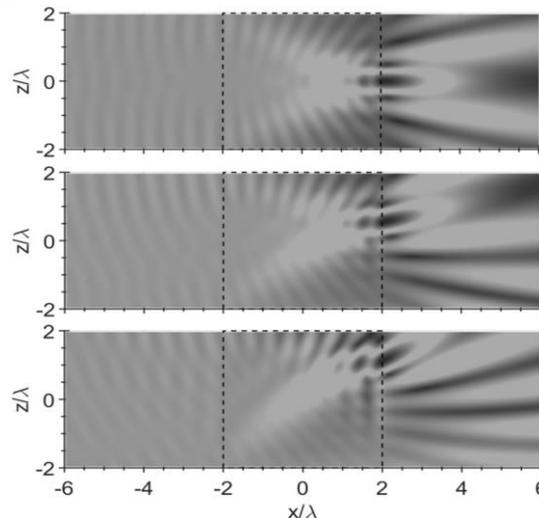


Рисунок 2

Заключение

Представленная работа посвящена решению двумерной задачи рассеяния плоской электромагнитной волны на диэлектрических и магнитно-диэлектрических линзах Микаэляна. Решение проведено с использованием гибридного проекционного метода. Новый алгоритм на его основе разработан здесь для обеспечения возможности учета не только переменного профиля диэлектрической проницаемости линзы, как это имело место в ранее разработанном алгоритме, но и переменного профиля магнитной проницаемости. Алгоритм ГПМ, разработанный выше, предназначен для анализа магнитно-диэлектрической линзы в случае E -поляризации. Однако хорошо известный принцип перестановочной двойственности позволяет использовать его также и для анализа линзы в случае H -поляризации.

Литература

1. Микаэлян А.Л. Использование слоистой среды для фокусировки волн // Доклады АН СССР. - 1951. - Т. 81. №4. - С. 569-571.
2. Зелкин Е.Г., Петрова Р.А. Линзовые антенны. М.: Советское радио, 1974. – 280 с.
3. Кушнерёв М.М., Скобелев С.П. Двумерная задача электромагнитного рассеяния на линзе Микаэляна, два метода решения и особенности фокусировки // Физические основы приборостроения. - 2020. - Т. 9. №4(38). - С. 38-47.

Метод на основе дискретных источников для нахождения двухпозиционной диаграммы ЭПР объекта при помощи значений рассеянного поля в ближней зоне, заданных на прямоугольнике

The Method Bbased on Discrete Sources for Obtaining a Bistatic Radar Cross-Section of an Object Using Values of a Near-Field on a Rectangle

Балабуха Н. П.¹, Коняев Д. А.^{1,2}, Лопушенко И.В.³, Шапкина Н. Е.^{1,2}

- 1) Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН, Москва, РФ;
- 2) Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ;
- 3) независимый исследователь

n_bala@mail.ru, konyaev@physics.msu.ru, lopushenko.ivan@yandex.ru, neshapkina@mail.ru

Аннотация. В работе предлагается и численно исследуется основанный на идеях дискретных источников метод определения двухпозиционных диаграмм ЭПР объектов по значениям комплексной амплитуды напряжённости электрического поля, заданного на прямоугольном участке плоскости, расположенном в ближней зоне.

Введение

Задача нахождения двухпозиционной диаграммы эффективной площади рассеяния (ЭПР) различного рода тел является актуальной теоретической, а также и практической задачей в связи с проблемами радиолокации [1, 2].

Типичные на сегодняшний день измерительные стенды (компактные полигоны) позволяют находить однопозиционные ЭПР [1]. В связи с этим стоит вопрос о модернизации существующих компактных полигонов для осуществления измерения двухпозиционных ЭПР. Как правило, прямое измерение ЭПР при помощи компактного полигона не реализуемо в силу невозможности размещения дополнительной приёмной антенны на достаточном расстоянии от рассеивателя (либо размещения дополнительного коллиматора). Эту проблему обычно решают, измеряя рассеянное поле в ближней зоне, затем рассчитывая поле в дальней зоне на основании полученных значений. Измерения электромагнитного поля в ближней зоне исследуемого объекта в компактных полигонах осуществляют при помощи планарных, цилиндрических или сферических сканеров [2]. Сканирование на плоскости неизбежно осуществляется по усечённой поверхности – прямоугольнику. Это обстоятельство приводит к необходимости исследования и разработки методов сканирования на усечённых поверхностях.

Постановка задачи

Пусть E – напряжённость электрического поля рассеянной объектом волны, значения тангенциальной составляющей которой известны в прямоугольнике на плоскости xOy . Конфигурация рассматриваемой задачи пересчёта поля в дальнюю зону представлена на рисунке 1.

Сформулируем задачу: по известным значениям компонент электромагнитного поля E_x и E_y , заданным на прямоугольнике, лежащем в плоскости xOy : $\{M(x, y, z) | x \in [-L_x; L_x], y \in [-L_y; L_y], z = 0\}$, найти сечение объёмной диаграммы ЭПР рассеивателя плоскостью xOz в диапазоне бистатических углов, соответствующих углам $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$. Для вычисления ЭПР необходимо рассчитать рассеянное поле в дальней зоне (рисунок 1).

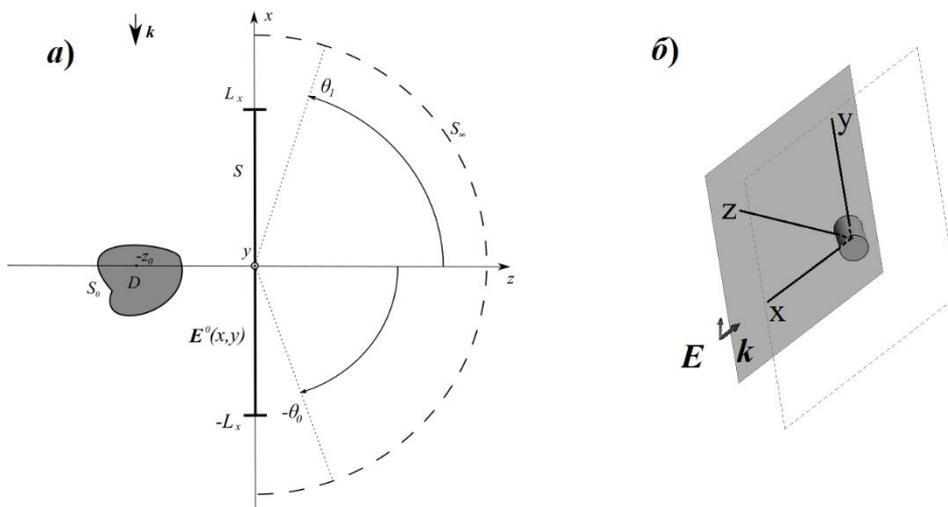


Рисунок 1. а) конфигурация задачи (вид сверху): S_0 – поверхность рассеивателя, S – поверхность сканирования, $[-\theta_0; \theta_1]$ – сектор, в котором требуется восстановить ЭПР, k – направление распространения падающей волны, S_∞ – условное обозначение

сферы, радиус которой r_∞ стремится к бесконечности; б) пример конфигурации, рассматриваемый при численном эксперименте

Метод нахождения значений рассеянного поля в дальней зоне, основанный на идеях дискретных источников

Идея метода, как и при решении задач дифракции [3], состоит в приближении рассеянного поля линейной комбинацией точных решений уравнений Максвелла – набором полей дискретных источников (ДИ). В данной работе в качестве ДИ рассматриваются несколько наборов ~~полей~~ электрических диполей, расположенных на сфере минимального радиуса с центром в начале координат, целиком охватывающей рассеиватель. В частности, выбираются электрические диполи, ориентированные вдоль ортогональных друг к другу касательных векторов к поверхности сферы, т.е. один из источников в точке ориентирован вдоль орта e_θ , второй – вдоль орта e_φ сферической системы координат.

Поля излучающих единичных электрических диполей хорошо известны, и для моделирования рассеянного поля вне сканирующей поверхности могут быть записаны в аналитическом виде [3, 4]:

$$E^\tau(M, M_n) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{e^{ikR}}{R} \left\{ e_R(\tau, e_R) 2 \left[\frac{ik}{R} + \frac{2}{R^2} \right] + (e_R(\tau, e_R) - \tau) \left[\frac{1}{R^2} + \frac{ik}{R} - k^2 \right] \right\}, \quad (2)$$

где M_n – точка, в которой находится источник, τ – вектор, касательный к вспомогательной поверхности в точке M_n , M – точка, в которой производится вычисление поля, R – расстояние между M и M_n , e_R – единичный вектор, направленный из M_n в M . Асимптотическое представление поля на бесконечности для идеального диполя с единичной амплитудой, расположенного в точке M_n , можно записать в следующем виде:

$$E(M, M_n) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{e^{ikr}}{r} (-k^2) e^{ik(e_r, \tau)} (e_r(\tau, e_r) - \tau), \quad \text{при } r \rightarrow +\infty, \quad (3)$$

где e_r – орт сферической системы координат, r – длина радиус-вектора точки M .

Для поиска амплитуд источников наиболее эффективным подходом является обобщенный метод коллокаций [3]. В качестве точек коллокаций выбираются те точки на поверхности сканирования, в которых нам известны значения поля. Полученная СЛАУ решается методом наименьших квадратов с использованием метода сопряженных градиентов. Определив амплитуды дискретных источников, получаем возможность приближённо рассчитать рассеянное поле в дальней зоне и построить соответствующую двухпозиционную ЭПР.

Численные результаты

Рассмотрим падающую волну частотой 1 ГГц. Выберем в качестве поверхности сканирования квадрат: $L_x = L_y = 2.5$ м. Тангенциальная компонента электрического поля рассеянной волны задаётся в точках, принадлежащих этому квадрату, расстояние между которыми выбрано равным четверти длины волны (всего 4624 точки, по 68 вдоль каждой координатной оси). В качестве сферы, на которой располагаются дискретные источники выберем сферу радиуса 54 см с центром в точке (0 м; 0 м; –1.499 м).

Так как дискретные источники располагались на сфере на координатных линиях сферической системы координат, то расстояние между ними удобно указывать в градусах. Рассмотрим две конфигурации дискретных источников.

1. С угловым расстоянием в 14° . Сетка по θ : $\{6^\circ; 20^\circ; \dots; 174^\circ\}$, сетка по φ : $\{0^\circ; 14^\circ; \dots; 336^\circ; 350^\circ\}$.
2. С угловым расстоянием в 10° . Сетка по θ : $\{10^\circ; 20^\circ; \dots; 170^\circ\}$, сетка по φ : $\{0^\circ; 10^\circ; \dots; 340^\circ; 350^\circ\}$.

Численно решать задачу дифракции, а также находить значения полей в ближней зоне и опорные значения двухпозиционной ЭПР, будем при помощи программного комплекса FEKO.

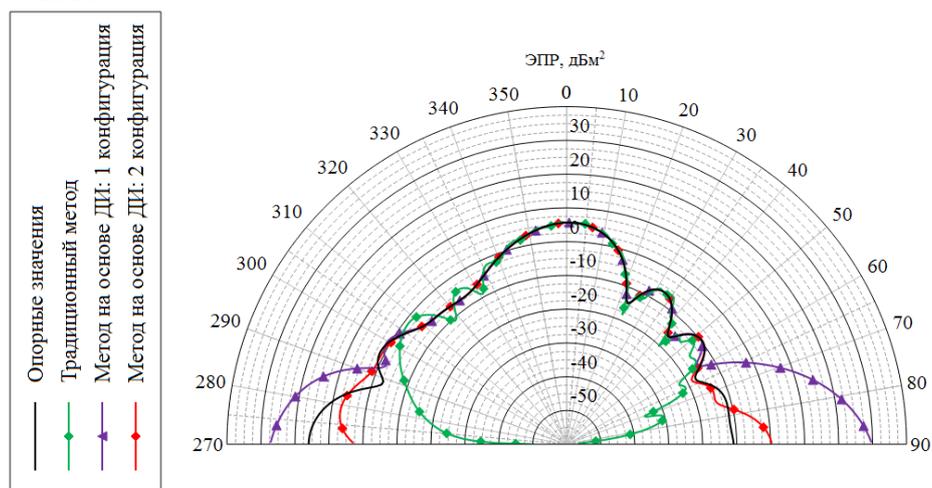


Рисунок 2. Сравнение результатов расчёта ЭПР при сканировании в ближней зоне

Заключение

Предложен метод пересчёта поля из ближней зоны в дальнюю с целью получения двухпозиционной ЭПР при сканировании на плоскости, основанный на идеях дискретных источников. Метод апробирован посредством численного эксперимента. Расчёты показали, что результаты полученные предложенным методом дают лучшее приближение двухпозиционной ЭПР, чем полученные традиционным методом.

Литература

1. Балабуха Н.П., Зубов А.С., Солосин В.С. Компактные полигоны для измерения характеристик рассеяния объектов. – М.: Наука, 2007 – 266 с.
2. Бахрах Л. Д. Методы измерений параметров излучающих систем в ближней зоне, Издательство "Наука", Ленинградское отделение – 1985 – 272 с.
3. Еремин Ю.А. Свешников А.Г. Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции. М.: МГУ, 1992.
4. Никольский В. В., Никольская Т. И. Электродинамика и распространение радиоволн. – «Наука», М. 1973

Решение задач анализа и синтеза многослойных дифракционных решеток с применением гибридных численных методов

Solving Problems of Multilayer Diffraction Gratings Analysis and Synthesis Using Hybrid Numerical Methods

Петухов А.А.

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ
petukhov@physics.msu.ru*

Аннотация. Доклад посвящен решению задач анализа и синтеза многослойных дифракционных решеток с применением гибридных численных методов, основанных на комбинации неполного метода Галеркина и метода матриц рассеяния. Рассматривается применение этого подхода для решения прямой задачи моделирования двумерных многослойных дифракционных решеток, а также описывается его применение для решения задач синтеза таких решеток. Приводятся результаты решения задач синтеза отражательных многослойных дифракционных решеток для применения в качестве зеркала внешнего резонатора полупроводникового лазера, а также решеток,

обеспечивающих спектральное сложение лазерных пучков с различной длиной волны в заданном дифракционном порядке. Для решения задачи синтеза используются методы нулевого порядка (метод Нелдера-Мида), а также градиентные методы.

Введение

В современной лазерной технике, системах коммуникации, космических исследованиях и многих других областях науки и техники для управления электромагнитным излучением широко применяются многослойные дифракционные решетки. Многослойная дифракционная решетка представляет собой, как правило, комбинированную структуру, состоящую непосредственно из периодической дифракционной решетки, имеющей определенную форму профиля штриха, и многослойного покрытия из однородных слоев. При взаимодействии падающей волны с решеткой происходит дифракция волны по дискретным дифракционным порядкам. При этом форма профиля штриха решетки может быть в значительной степени произвольной (прямоугольная, треугольная, синусоидальная, трапециевидная и т.д.), и в первую очередь именно она определяет, какие доли энергии падающей волны при дифракции направляются в каждый дифракционный порядок, т.е. дифракционные эффективности решетки в этих порядках.

При моделировании многослойных дифракционных решеток традиционно рассматривается два типа задач – прямые задачи анализа дифракционных решеток и обратные задачи синтеза дифракционных решеток с заданными характеристиками (например, решетка должна иметь заданный спектр пропускания и/или отражения, заданные значения дифракционных эффективностей в различных порядках дифракции и т.д.). Наибольший практический интерес представляет решение задач синтеза, однако и для их эффективного решения, в первую очередь, требуется наличие эффективного и надежного метода решения соответствующей прямой задачи.

Описание работы

В данной работе рассматривается двумерная задача дифракции плоской электромагнитной волны на многослойной дифракционной решетке. Математическая постановка этой задачи сводится к уравнению Гельмгольца для одной из компонент электромагнитного поля волны, дополненному граничными условиями Флоке в поперечном направлении, а также парциальными условиями излучения на границах решетки в продольном направлении. Для получения численного решения поставленной математической задачи используется разработанный автором гибридный численный метод, основанный на совместном применении неполного метода Галеркина и матричных методов [1], [2]. Этот метод позволяет рассчитать дифракционную эффективность в различных порядках дифракции, эффективно учитывая многослойное строение рассматриваемой дифракционной решетки.

В работе рассматриваются задачи синтеза многослойных отражательных дифракционных решеток для применения в качестве зеркала внешнего резонатора полупроводникового лазера [3], [4], а также решеток, обеспечивающих спектральное сложение лазерных пучков с различной длиной волны в заданном дифракционном порядке [5]. Такие решетки должны обладать высокой дифракционной эффективностью, т.е. обеспечивать высокий коэффициент отражения или пропускания падающего излучения в нужный дифракционный порядок, а также иметь высокий порог разрушения под воздействием лазерного излучения. Уменьшить возможное воздействие лазерного излучения на решетку можно за счет использования диэлектрических материалов для ее изготовления. При этом при использовании отражательных диэлектрических дифракционных решеток требуется дополнительно между самим профилем решетки и подложкой размещать многослойное покрытие, которое обеспечивало бы эффективное отражение падающего излучения, в то время как сама решетка обеспечивала бы направление волновой энергии в нужный дифракционный порядок.

Математическая постановка задачи синтеза многослойных дифракционных решеток формулируется как задача минимизации целевого функционала, зависящего от параметров дифракционной решетки и представляющего собой ее интегральную характеристику в заданном диапазоне длин волн – квадратичного отклонения дифракционной эффективности в выбранном дифракционном порядке от желаемого значения (единицы, или 100%). Для минимизации целевого функционала используются методы нулевого порядка (метод Нелдера-Мида), а также градиентные методы.

Литература

1. *Петухов А.А.* Совместное применение неполного метода Галеркина и метода матриц рассеяния для моделирования многослойных дифракционных решеток // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25, №6. – С. 41-53.
2. *Артемьева М.В., Боголюбов А.Н., Петухов А.А.* Метод матриц переноса для решения задачи дифракции плоской волны с ТЕ-поляризацией на одномерной бинарной дифракционной решетке // Физические основы приборостроения. – 2022. – Т.11, №2. – С. 40-48.
3. *Боголюбов А.Н., Петухов А.А., Трубецков М.К.* Математическое моделирование многослойных дифракционных решеток. // Физические основы приборостроения. – 2014. – Т.3, №4. – С. 20-27.
4. *Артемьева М.В., Боголюбов А.Н., Петухов А.А.* Решение задач синтеза дифракционных решеток для практических приложений // Физические основы приборостроения. – 2020. – Т.9, №3. – С. 4-13.
5. *Петухов А.А.* Синтез высокоэффективных многослойных диэлектрических дифракционных решеток для спектрального сложения лазерных пучков // Вычислительные методы и программирование. – 2021. – №22 (3). – С. 201-210.

Быстрое проектирование антенн методами машинного обучения

Fast Antenna Design Using Machine Learning Methods

Тумаков Д. Н.¹

1) Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий, Казань, РФ.

dtumakov@kpfu.ru

Аннотация. В работе рассматривается задача проектирования антенн под заданные электродинамические характеристики. Для проектирования сначала выбираются основные характеристики, которым должна удовлетворять антенна, а также тип самой антенны. Далее строятся регрессионные модели для каждой выбранной характеристики антенны. На последнем этапе проектирования оптимизируется функционал, учитывающий значения для электродинамических характеристик за счёт подбора весов у заданных слагаемых. Решение задачи оптимизации даёт приближенные значения для геометрии антенны. Если необходимо, происходит итерационное (не более 5-6 итераций) уточнение геометрии для достижения лучшего соответствия заданным характеристикам. На примере проектирования проволочных и микрополосковых антенн показываются этапы проектирования. Приводятся примеры практического построения антенн.

Введение

Как проволочные, так и микрополосковые антенны находят широкое применение в беспроводных системах. Такие антенны имеют компактные размеры, легкий вес, простую технологию изготовления и поддерживают широкий диапазон частот для различных приложений, в том числе и в Wi-Fi приложениях.

Излучатель антенны обычно представляет собой изогнутую проволоку или плоскую металлическую пластину определенной формы, и с помощью изменения геометрии излучателя в таких антеннах достигают нужные электродинамические характеристики. Для достижения компактности проволочных антенн, например, часто

используют антенн, имеющие самоподобные структуры. Для микрополосковых антенн используют прямоугольные излучатели с различными формами и вырезами.

Инженерам зачастую неизвестно с какой формы излучателя начать проектирование антенны и как в дальнейшем изменять его форму, чтобы получить антенну с оптимальными желаемыми электродинамическими характеристиками. Поэтому проектирование хорошо согласованной антенны представляет собой довольно длительный и трудоемкий процесс.

В настоящей работе предложен алгоритм проектирования антенны, основанный на элементах машинного обучения, и состоящий из нескольких этапов. Основой рассмотренного подхода является использование регрессионных моделей, которые описывают связь характеристик антенны с её геометрическими параметрами [1], [2]. Сначала проводится исследование некоторого семейства антенн, например, антенн гребенчатой формы [3]. Затем устанавливается связь между электродинамическими характеристиками антенны и геометрией излучателя в виде математических моделей, и формулируется задача оптимизации по этим характеристикам антенны [4]-[7]. В случае необходимости проводится уточнение геометрии антенны итерационным процессом, содержащим не более 5-6 шагов.

Описание работы

Рассмотрим проектирование однодиапазонной микрополосковой антенны для Wi-Fi приложений, как решение задач оптимизации по основным электродинамическим характеристикам антенны.

В качестве электродинамических характеристик выберем основную рабочую частоту $f=2.44$ ГГц, ширину полосы пропускания BW и коэффициента отражения S_{11} . В качестве рабочих антенн рассмотрим семейство шести-гребенчатых антенн, излучатель которых может быть получен из прямоугольного излучателя добавлением вырезов. Такая антенна зависит от ширины a_R и длины b_R излучателя (прямоугольника), а также от глубины шести симметричных прямоугольных вырезов d_R .

Регрессионная модель для коэффициента отражения S_{11} может быть представлена в следующем виде:

$$S_{11}(a_R, b_R, d_R) = c_1 \left(\frac{a_R}{b_R}\right)^{c_2 \frac{b_R}{a_R}} b_R + \frac{c_3 d \sqrt{a_R - d_R}}{a_R^5} + c_4 \frac{c_4 (a_R - 2 d_R)^2}{b_R} + c_5 \frac{a_R}{a_R - d_R} + c_6 a_R. \quad (1)$$

Методом наименьших квадратов определим неизвестные коэффициенты в (1) и получим $c_1 = 16.59$, $c_2 = 0.21$, $c_3 = 5486.03$, $c_4 = -0.248$, $c_5 = -19.7$, $c_6 = 0.243$. Модель имеет среднеквадратичную ошибку $\epsilon \approx 2.85$ dB и относительную абсолютную ошибку $\sigma \approx 10.6\%$.

Можно максимизировать выражение (1) для S_{11} с ограничениями на a_R, b_R, d_R , получив таким образом максимально согласованную антенну. Однако такой подход не всегда даёт «хорошие» результаты.

Рассмотрим другой способ проектирования антенны. Построим регрессионные модели для двух оставшихся характеристик f и BW . Регрессионные модели соответствуют антеннам с минимальными потерями (коэффициентами отражения). Например, для ширины полосы пропускания получим

$$BW(a_R, b_R, d_R) = -0.1217 a_R + 0.0022 a_R^2 + 1.8781 \frac{a_R - d_R}{b_R} - 0.155 \frac{(a_R - d_R)^2}{b_R} + 0.7726 \ln \ln (a_R - d_R). \quad (2)$$

$$\alpha (BW(a_R, b_R, d_R) - 1)^2 + \beta (f(a_R, b_R, d_R) - 2.44)^2 \rightarrow \min \quad (3)$$

с ограничениями на a_R, b_R, d_R и выбранными коэффициентами α и β . Такой алгоритм позволяет получить антенну на частоте 2.43 ГГц с коэффициентом отражения -20.5 dB. Дальнейшим итерационным процессом можно «подкорректировать» частоту.

Зачастую возникают задачи построения миниатюрной антенны. Рассмотрим проектирование проволочной фрактальной антенны. Используя регрессионные модели для выбранных электродинамических характеристик, можно также получить хорошо согласованную антенну на заданных частотах. Например, в работе [8] получена фрактальная антенна с минимальными размерами под заданные частоты

Заключение

В работе предложен алгоритм на основе машинного обучения для быстрого проектирования антенн. На примерах проектирования микрополосковых и проволочных антенн описаны алгоритмы проектирования.

Литература

1. Abgaryan G.V., Markina A.G., Tumakov D.N. Application of correlation and regression analysis to designing antennas // Revista Publicando. – 2017. – Vol. 4, No. 13 (2). – P. Pr1 – Pr13.
2. Tumakov D.N., Abgaryan G.V., Chickrin D.E., Kokunin P.A. Modeling of the Koch-type wire dipole // Applied Mathematical Modelling. – 2017. – Vol. 51. – P. 341-360.
3. Markina A.G., Pleshchinskii N.B., Tumakov D.N. On electrical characteristics of comb-shaped microstrip antennas // Proc. of Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIconRus), 2017 IEEE Conference of Russian, IEEE. – 2017. – P. 179-183.
4. Markina A., Tumakov D. Using Wolfram Mathematica computing tools for designing a dual-band tooth-shaped microstrip antenna // AIP Conference Proceedings. – AIP Publishing LLC, 2022. – Vol. 2383, No. 1. – C. 020011.
5. Markina A.G., Tumakov D.N. Designing a dual-band printed monopole symmetric tooth-shaped antenna // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. Vol. 41, No. 7. – P. 1354-1362.
6. Tumakov D.N., Markina A.G., Badriev I.B. Fast method for designing a well-matched symmetrical four-tooth-shaped microstrip antenna for Wi-Fi applications // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1158, No. 4, ID 042029, P. 1-7.
7. Markina A., Tumakov D., Pleshchinskii N. Designing a symmetrical eight-teeth-shaped microstrip antenna for Wi-Fi applications // Proceedings of 16th IEEE East-West Design and Test Symposium. – 2018. – P. 491-495.
8. Tumakov D., Chikrin D., Kokunin P. Miniaturization of a Koch-type fractal antenna for Wi-Fi applications // Fractal and Fractional. – 2020. – Vol. 4. – P. 1-25.

Метод базовых компонентов и его отличия от традиционных эвристических методов в теории дифракции электромагнитных волн

Method of Fundamental Components and its Differences from Traditional Heuristic Methods in the Theory of Diffraction of Electromagnetic Waves

Вестник М.В.

Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН, Москва, РФ.

vesnik@cplire.ru

Аннотация. Изложены основы нового эвристического подхода в теории дифракции – метода базовых компонентов. В отличие от традиционных эвристических методов, этот подход свободен от заложенной методической погрешности. На примере задачи дифракции на полуплоскости с двухсторонними импедансными граничными условиями показано, что применение метода базовых компонентов позволяет увеличить точность эвристического решения на два порядка.

Введение

Эвристические подходы, основанные на физике процесса дифракции, являются альтернативой численным и строгим аналитическим подходам. К традиционным эвристическим подходам относят методы геометрической и физической оптики (ГО) [1] и (ФО) [1], геометрическую теорию дифракции (ГТД) [2] и метод краевых волн (МКВ) [3]. Данные подходы основаны на определенных постулатах (т.е. алгоритмах нахождения приближенных значений поля в точке наблюдения). Все эвристические подходы на стадии разработки нуждаются в верификации, т.е. проверке их применимости при помощи надежного решения (как правило, численного).

В традиционных эвристических подходах используют приближенные значения поля на поверхности рассеивателя, что, в свою очередь, приводит к наличию заложенной методической погрешности при нахождении поля в точке наблюдения.

Весьма важной задачей является получение эвристических аналитических формул повышенной точности. С этой целью недавно был разработан метод базовых компонентов (МБК) [4]. Применяя МБК, можно получить уточненные эвристические формулы при помощи верификационного решения (как правило – численного). На первом этапе применения МБК получают верификационное решение (ВР) и сравнивают результаты расчета с первичной эвристической формулой (ПЭФ), построенной на основе строгих аналитических решений простейших задач. Затем на основе этого сравнения, формализуя различия между ВР и ПЭФ, получают настроенную формулу, в которую входят настроенные параметры. Затем, подбирают такие значения настроенных элементов, которые обеспечивают минимальную разницу между ВР и ПЭФ. В результате получают окончательную эвристическую формулу (ОЭФ). Как будет показано далее, эта «минимальная разница» может быть практически нулевой, поскольку МБК, в отличие от традиционных эвристических подходов, свободен от заложенной методической погрешности.

Построение и верификация эвристических формул

Рассмотрим применение МБК к решению задачи дифракции рассеяния ТН-поляризованной электромагнитной волны на «полупрозрачной» полуплоскости с двухсторонними импедансными граничными условиями [5, 6].

$$\begin{cases} H_{x+} - H_{x-} = -Z^{-1}E_z, \\ E_{z+} = E_{z-} = E_z \text{ при } y = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где E и H – компоненты электромагнитного поля, импеданс $Z = iX$ (X – изменяемый параметр, характеризующий граничные условия на поверхности полуплоскости, i – мнимая единица), знаки «+» и «-» соответствуют областям $y > 0$ и $y < 0$ (Рисунок 1)

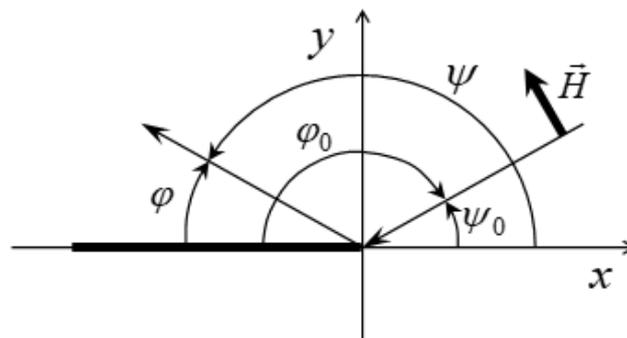


Рисунок 1. Геометрия задачи дифракции ТН-поляризованной электромагнитной волны на полуплоскости с двухсторонними импедансными граничными условиями

Верификационное решение $fr(X, \varphi, \varphi_0)$ [7], [8] для импедансной полуплоскости с граничными условиями (1) получено методом Винера-Хопфа, будем называть его «решение МВХ». Здесь φ_0 – угол падения, φ – угол рассеяния.

Для случая падения ТН-поляризованной волны на безграничную поверхность с двухсторонними импедансными граничными условиями (1) коэффициенты отражения $R_{ТН}$ и прохождения $T_{ТН}$ равны [5]

$$R_{ТН}(X, \varphi_0) = \frac{-W_0}{W_0 + 2i\sin(\varphi_0)X}, W_0 = 120\pi, \quad (2)$$

$$T_{ТН} = 1 + R_{ТН}. \quad (3)$$

Подставляя выражения $R_{ТН}$ и $T_{ТН}$ в выражение для дифракционного коэффициента идеально проводящей полуплоскости [3], получим выражение для соответствующего обобщенного дифракционного коэффициента [4 – 8]

$$fg(R_{ТН}, T_{ТН}, \varphi, \varphi_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - T_{ТН}}{-\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} + \frac{R_{ТН}}{-\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \right). \quad (4)$$

Введем обозначения для углов в точках сингулярностей $\varphi_{s1} = \pi + \varphi_0$, $\varphi_s = \pi - \varphi_0$. Откуда следует $\varphi_{s1} - \varphi_0 = \pi$, $\varphi_s + \varphi_0 = \pi$. Когда угол точки наблюдения равен одному из углов точек сингулярностей, знаменатель первого или второго слагаемого в выражении (4) обнуляется, а соответствующее слагаемое становится сингулярным.

Сравнение эвристического выражения (4) с решением МВХ показывает, что точного соответствия между ними нет, и нужна коррекция (в рамках МБК называемая нами процессом «настройки»). Процесс настройки позволил получить более точное выражение

$$fh(m_{ТН}, R_{ТН}, T_{ТН}, \varphi, \varphi_0) = fg(R_{ТН}, T_{ТН}, \varphi, \varphi_0) \frac{cx_{ТН}(m_{ТН}, X, \varphi)}{cx_{ТН}(m_{ТН}, X, \varphi_s)}, \quad (5)$$

где применена настроечная функция $cx_{ТН}$ с настроечным коэффициентом $m_{ТН}$

$$cx_{ТН}(m_{ТН}, X, \varphi) = R_{ТН} \left(2X \cdot m_{ТН}, \frac{\varphi}{2} \right). \quad (6)$$

В первом приближении можно считать, что $m_{ТН}=1$. Введем формулу количественной оценки точности в виде интеграла по области значений угла φ

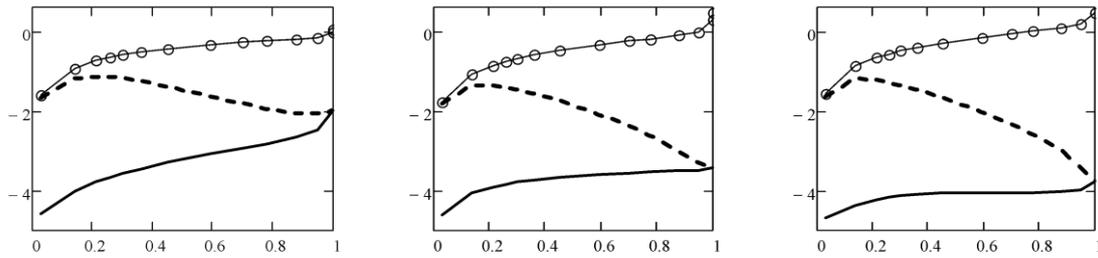
$$Lfh(m_{ТН}, R_{ТН}, T_{ТН}, \varphi, \varphi_0) = \lg \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left| \frac{fr(X, \varphi, \varphi_0)}{fh(m_{ТН}, R_{ТН}, T_{ТН}, \varphi, \varphi_0)} \right| - 1 \right) d\varphi. \quad (7)$$

Наложив на (5) требование выполнения принципа взаимности и проведя необходимые выкладки [8], можно получить аналитическое выражение для функции $m_{ТН}(X)$

$$m_{ТН}(X) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4} (W_0/X)^2} \right]}. \quad (8)$$

На рис. 2 показаны графики количественной оценки (7) в зависимости от параметра X . Поскольку $0 < X < \infty$, для удобства представления результатов введем новую функцию

$x(X)$ следующим образом: $x(X) = 1 - \exp(-X/W_0)$, и тогда $0 < x(X) < 1$.



(a) $\varphi_0 = 160^\circ$

(b) $\varphi_0 = 90^\circ$

(c) $\varphi_0 = 20^\circ$

Рисунок 2. Графики количественной оценки для эвристических формул при разных φ_0 .

По горизонтали отложены величины $x(X)$, по вертикали отложены параметры количественной оценки (ПКО), полученные по методике (7) для формул (4) и (5). Графики с кружочками соответствуют ПКО для формулы (4). Пунктирная линия соответствует ПКО для формулы (5) при $m_{TH} = 1$. Сплошная линия соответствует ПКО для формулы (5) для величин m_{TH} , рассчитанных по формуле (8).

Заключение

В данной работе показано, что применение МБК позволяет увеличить точность первичной эвристической формулы (4) на два порядка. Этот результат применения МБК получен благодаря удачному выбору ПЭФ, а также настроечной функции и места расположения настроечного параметра.

Подход МБК можно применять как в других задачах теории дифракции, так и в других областях физики. Для этого нужно иметь верификационное решение, а также первичную эвристическую формулу, представляющее собой физически обоснованную комбинацию аналитических решений простейших задачи. В данной работе ПЭФ (4) представляет собой комбинацию формул (2) и (3) для безграничной поверхности и дифракционного коэффициента для идеально проводящей полуплоскости.

Литература

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики, М.: Наука, 1973.
2. Keller, J.V. Geometrical theory of diffraction. J Opt Soc Am. 1962;52(2):116–130
3. Уфимцев П.Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции. М.: Сов. радио, 1962. - 243с..
4. Vesnik, M.V. The Method of the Generalized Eikonal: New Approaches in the Diffraction Theory. Berlin: Walter de Gruyter; 2015
5. М.В. Весник, «Применение метода базовых компонентов для получения эвристического решения задачи дифракции на полуплоскости с неидеальными граничными условиями», Радиотехника и электроника, 2019, том 64, № 11, с. 1103–1109, DOI: 10.1134/S0033849419111024X
6. С.Е. Банков, М.В. Весник, В.Ф. Кравченко, «Эвристическое решение задачи дифракции на сверхпроводящей полуплоскости», Радиотехника и электроника, 2020, том 65, № 4, с. 363–371, DOI: 10.31857/S0033849420040014
7. M. Vesnik "Physical Interpretation of the Solution to the Problem of Diffraction on a Half-plane with Non-Ideal Boundary Conditions", Journal of Engineering Research and Sciences, vol. 1, no. 3, pp. 52-58 (2022). DOI: 10.55708/js0103006
8. Michael V. Vesnik (2022) "A technique for obtaining analytical heuristic solutions in problems of diffraction on two-dimensional semi-infinite objects with non-ideal boundary conditions", Waves in Random and Complex Media, Aug 2022, DOI: 10.1080/17455030.2022.2108160

Влияние поглощения в слоях на свойства π -структур

The Effect of Absorption in Layers on the Properties of π -Structures

Жителев А. Е.¹, Козарь А. В.¹

1) *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ;*

ae.zhitelev@physics.msu.ru, avk@phys.msu.ru

Аннотация. В работе рассматривается методика оценки уровня поглощения электромагнитного излучения в π -структурах. Эта проблема является актуальной при синтезе такого рода структур, при предварительной оценке их свойств.

Введение

На сегодняшний день разработано большое количество теоретических и численных методов анализа и синтеза многослойных периодических структур [1,2]. Особый интерес представляют аналитические методы, по той причине, что такие методы позволяют находить оптимальные по различным критериям решения, способны показать полное множество всех решений заданной условием задачи синтеза многослойной интерференционной структуры, позволяют быстро выполнять обобщённый анализ получаемых решений. Одним из основных факторов, влияющих на качество синтезируемой многослойной интерференционной структуры, является уровень поглощения энергии электромагнитного излучения в её слоях. В данной работе рассматривается метод оценки поглощения энергии электромагнитного излучения для одного из классов многослойных интерференционных структур - π -структур.

Описание работы

В работе [3] был предложен метод и на его основе построен универсальный аналитический алгоритм синтеза нового класса многослойных периодических структур. Особенностью алгоритма, является возможность синтеза структур, амплитудные характеристики которых зависят не только от числа слоев, но и от соотношения их волновых (оптических) толщин, и обеспечение значения фазы коэффициента отражения от такой структуры равной π . Данная особенность определила название этого класса структур – « π -структуры».

В работе рассматриваются структуры с двухслойным периодом и показателями преломления слоев n_1 и n_2 (n_2 – слой, прилегающий к среде с показателем преломления n_S) (N – число слоёв, K – число периодов), которая расположена между средами с действительными показателями преломления n_L (среда, из которой распространяется волна) и n_S (просветляемая среда).

Система связанных уравнений, содержащая все структурные решения для просветляющей двухкомпонентной периодической структуры, имеет вид [3]:

$$n_S = \left| \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 T_2 + n_2 T_1} \right| \frac{n_1 n_2}{n_L} \quad (1)$$

$$1 - \Psi T_2^2 = \frac{U_{K-2}(x)}{U_{K-1}(x)} \sqrt{(1 + (AT_2)^2)(1 + T_2^2)} \quad (2)$$

где: $\Psi = \{P, \text{если } N = 2K, B, \text{если } N = 2K + 1\}$; $T_i \equiv \text{tg}(2\pi n_i d_i / \lambda)$, ($i = 1, 2$); $d_{1,2}$ – физическая толщина слоёв; $U_{K-1}(x)$, $U_{K-2}(x)$ – полиномы Чебышева второго рода. Соотношение (1) можно переписать в виде:

$$T_1 = AT_2 \quad (3)$$

где:

$$A = \frac{n_1(n_2^2 - n_L n_S)}{n_2(n_L n_S - n_1^2)} \quad (4)$$

Таким образом, в соответствии с (3), условие связи волновых толщин имеет вид: $D_1 = \frac{\lambda}{2\pi} (\arctg(A \cdot \text{tg} \frac{2\pi}{\lambda} D_2) + \pi k)$, ($k = 0, 1, 2, \dots$), где $D_2 = \frac{\lambda}{2\pi} (\arctg T_2 + \pi k)$, ($k =$

0,1,2 ...); $D_1 = d_1 n_1$, $D_2 = d_2 n_2$ – волновые (оптические) толщины слоев в периоде многослойной структуры.

Поскольку π -структуры, которые рассматриваются в данной работе, и структуры, волновые толщины которых равны $\frac{\lambda_\varepsilon}{4}$ (где λ_ε – длина волны в материале), имеют схожую амплитудно-фазовую характеристику на заданной длине волны, то в ряде случаев возможно их рассматривать как эквивалентные конструкции. Для многослойных четвертьволновых структур были получены выражения для оценки поглощения при наличии малых потерь в слоях структуры:

$$n_s n_2 < n_1 A = \frac{\pi n_1 n_2}{n_1^2 - n_2^2} \left[\frac{k_1}{n_1} \left(\frac{n_L}{n_2} + \frac{n_s}{n_2} \right) + \frac{k_2}{n_2} \left(\frac{n_L}{n_1} + \frac{n_s}{n_1} \right) \right] \quad (5)$$

$$n_s n_1 < n_2 A = \frac{\pi n_1 n_2}{n_2^2 - n_1^2} \left[\frac{k_1}{n_1} \left(\frac{n_s}{n_2} + \frac{n_2}{n_L} \right) + \frac{k_2}{n_2} \left(\frac{n_1}{n_L} + \frac{n_s}{n_1} \right) \right] \quad (6)$$

Рассмотрим варианты использования этих выражений (рассчитаем уровень поглощения интерференционной структуры) для оценки поглощения в π -структурах при варьировании различных параметров интерференционной системы и просветляемой среды.

Определим численным аналитическим и расчетным методом зависимости коэффициента поглощения интерференционной структуры от показателя преломления n_s , от числа слоёв структуры и о мнимой части показателя преломления среды слоёв структуры.

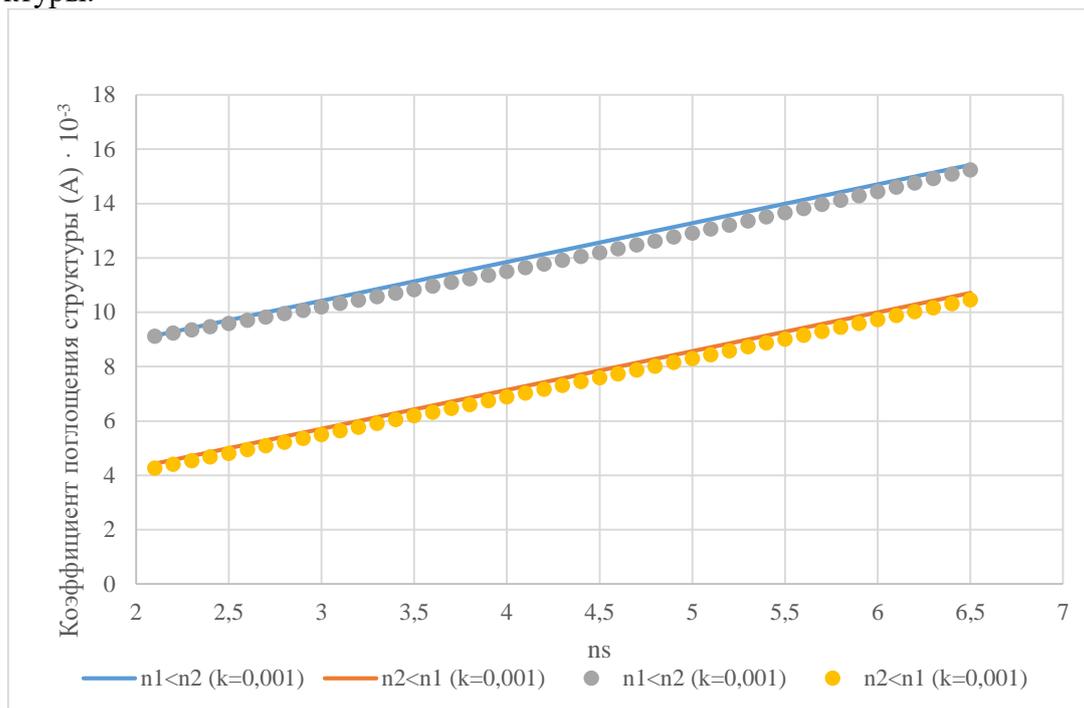


Рисунок 1. Зависимость коэффициента поглощения структуры (A) от показателя преломления (n_s)

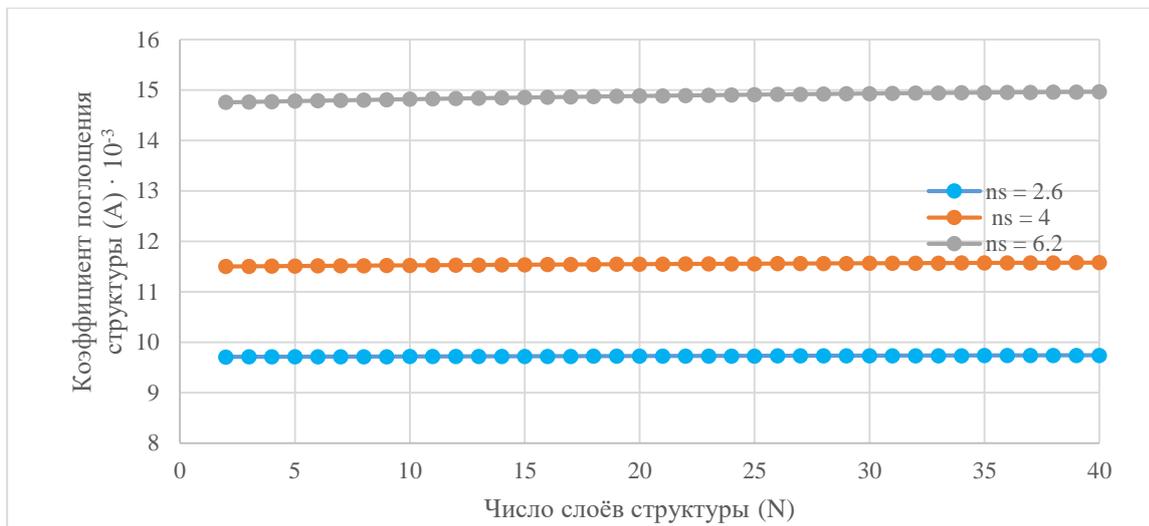


Рисунок 2. Зависимость коэффициента поглощения структуры (A) от числа слоёв структуры (N) для различных n_s

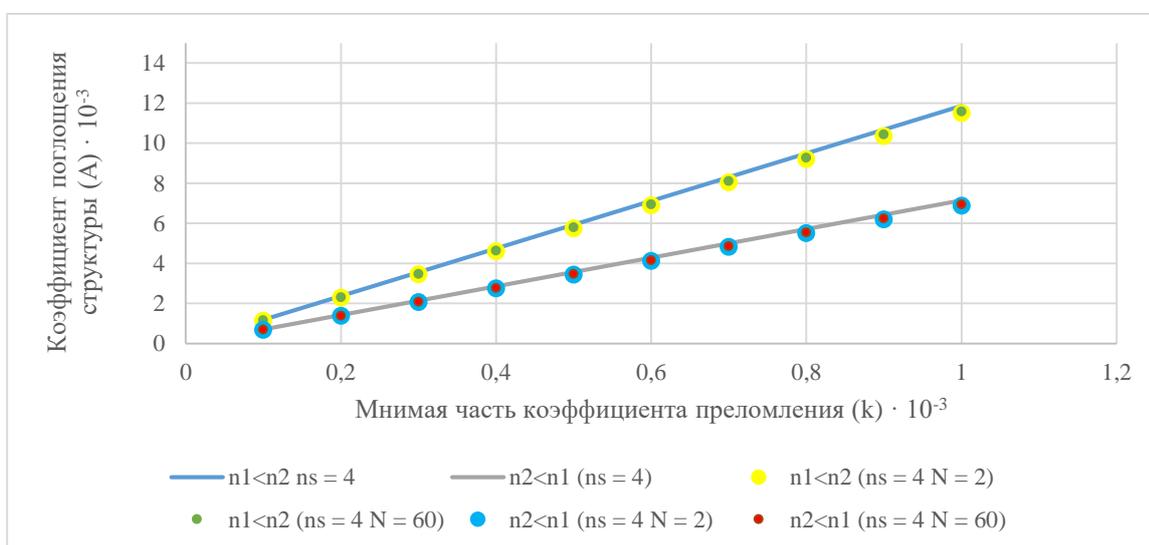


Рисунок 3. Сравнение результатов численного моделирования и теоретической зависимости, данной выражением 10 и 11 ($n_s = 4$), для $A(k)$ при $n_2 < n_1$, $n_1 < n_2$

Заключение

Представленные результаты позволяют сделать вывод о том, что указанные в настоящей работе выражения для многослойных четвертьволновых структур можно использовать для предварительной оценки коэффициента поглощения π -структур. Полученные данные говорят о том, что точный расчёт значения коэффициента поглощения в различных ситуациях даёт результат, не превышающий значение аналогичного параметра, полученного с помощью теоретической зависимости.

Литература

1. Кард П. // Анализ и синтез многослойных интерференционных покрытий. Таллин: Валгус, 1971.
2. MacLeod A. H. // Thin-Film Optical Filters, 4 ed. CRC Press, 2010.
3. А. В. Козарь. // Метод связанных волновых толщин – универсальный метод синтеза интерференционных антиотражающих покрытий (π - структуры). ВМУ. Серия 3. Физика. Астрономия. 2020. № 6. С. 92-98.

Оглавление

Пленарные доклады	2
К 50-летию совместной научной работы с проф. А.Г.Свешниковым	
Еремин Ю. А.	2
О взаимодействии научных школ кафедр математики и оптики	
Короленко П. В. ^{1,2}	5
Теория измерительно-вычислительных систем: современное состояние	
Чуличков А.И.	7
Современные и классические методы расчета оптических световодов и волноводов с импедансной границей	
Быков А. А.	8
Построение вейвлетов на основе атомарных функций	
Коновалов Я.Ю. ¹ , Будунова К.А. ² , Чуриков Д.В. ^{1,3} , Юрин А.В. ⁴ , Кравченко О.В. ^{2,5} , Кравченко В.Ф. ¹⁻³	11
Математическое моделирование.....	14
Задача трансмиссии в круглом и прямоугольном волноводах. Вычислительный эксперимент	
Александрова И. Л.	14
Математическое моделирование работы магнитного компрессора с электродинамическим разгоном лайнера	
Галанин М.П. ¹ , А.П. Лотоцкий ² , Родин А.С. ¹	16
Оптическая диагностика фрактальных биосистем	
Рыжикова Ю. В. ¹ , Рыжиков С. Б. ¹	19
Реконструкция магнитных полей струй из Активных Ядер Галактик путем анализа синхротронного излучения релятивистских электронов	
Пащенко И. Н. ¹ , Юшков Е. В. ² , Соколов Д.Д. ²	22
Условия адекватности безызлучательного предела в самосогласованном описании разреженной плазмы	
Бородачев Л.В.	25
Схемы QAM-модуляции высокого порядка в методе ортогонального частотного мультиплексирования с фильтрацией	
Будунова К.А. ¹ , Кравченко В.Ф. ¹⁻³	28
Методы цифровой обработки сигналов в задаче спектрального анализа органических объектов	
Орлов С. А. ^{1,2} , Чуриков Д. В. ¹	31
Теория R-функций в задаче регистрации задержек сигнала в системе акустических сенсоров	
Чуриков Д. В. ^{1,2} , Кравченко О. В. ^{2,3} , Кравченко В. Ф. ^{1,2}	34
Пакетное вейвлет-разложение в задаче анализа вибрационных сигналов механических систем	

Труфанов Н.Н. ¹ , Скворцов Д.Ф. ² , Кравченко О.В. ^{3,4} , Чуриков Д.В. ^{1,4}	35
Применение комплекснозначных нейронных сетей для анализа гиперспектральных данных	
Труфанов Н.Н. ¹ , Чуриков Д. В. ^{1,2} , Кравченко О. В. ^{2,3}	35
Построение новых семейств атомарных функций	
Коновалов Я.Ю., ¹ Кравченко В.Ф. ^{1,2}	36
Теоретическая электродинамика.....	38
Обобщенные решения координатных задач дифракции электромагнитных волн	
Плещинский Н.Б. ¹	38
Учет кулоновского взаимодействия в редких распадах В-мезонов	
Манухов С.И. ¹ , Никитин Н. В. ^{1,2,3}	40
Реализация теории рассеяния Ми для решения задач мезоскопической электродинамики	
Лопушенко И. В.	43
Приближённые граничные условия в окрестности ребра на телах с высокой проводимостью	
Шушарин М. М, Могилевский И. Е., Боголюбов А. Н.	45
Измерение продольного распределения поля в компактном полигоне с помощью линзы Люнебурга	
Балабуха Н. П. ¹ , Булычев Е. В. ¹ , Камышанов И. В. ¹ , Королев Д. П. ^{1,2} , Меньших Н. Л. ¹ , Солосин В. С. ¹	47
Непертурбативные эффекты магнитной поляризации КЭД-вакуума в существенно закритической области	
Польшикова Е.С.. ¹	51
Аналитическое решение задачи электростатики о силе взаимодействия половинок однородно поляризованного диэлектрика эллипсоидальной формы.	
Поляков О.П., Поляков П.А.....	54
Дифракция электромагнитных волн на фрактальных металлических экранах	
Тумаков М. Д. ^{1,2}	56
Электромагнитная маскировка диэлектрических цилиндров золотыми наноцилиндрами	
Боголюбов А.Н., Никитченко А.Д.	58
Численные методы.....	60
О численном решении краевых задач электродинамики с импедансными граничными условиями методом граничных интегральных уравнений	
Сетуха А.В.	60
Квантовые алгоритмы в задачах электродинамики	
Минаев Д.В.	62
Перспективы квантовых вычислений для распространения электромагнитных волн в холодной намагниченной плазме	

Минаев А.Д.....	65
Алгоритм гибридного проекционного метода для анализа фокусировки волн линзой Микаэляна в двумерном случае	
Кушнерёв М. М.	67
Метод на основе дискретных источников для нахождения двухпозиционной диаграммы ЭПР объекта при помощи значений рассеянного поля в ближней зоне, заданных на прямоугольнике	
Балабуха Н. П. ¹ , Коняев Д. А. ^{1,2} , Лопушенко И.В. ³ , Шапкина Н. Е. ^{1,2}	70
Решение задач анализа и синтеза многослойных дифракционных решеток с применением гибридных численных методов	
Петухов А.А.	73
Быстрое проектирование антенн методами машинного обучения	
Тумаков Д. Н. ¹	75
Метод базовых компонентов и его отличия от традиционных эвристических методов в теории дифракции электромагнитных волн	
Весник М.В.	77
Влияние поглощения в слоях на свойства π -структур	
Жителев А. Е. ¹ , Козарь А. В. ¹	80
Оглавление	84