Часть I. Специальные функции математической физики

Гл. 9. Замкнутые и полные системы функций

§ 1. Вспомогательные положения анализа

1. Пространство Лебега $\mathbf{L}_2(\mathbf{D})$. Интеграл Лебега

Последовательность $\{\varphi_n\}\subset E$ называется **фундаментальной**, если для любого $\varepsilon>0$ найдется номер $N=N(\varepsilon)$ такой, что для всех номеров $n>N$ и всех натуральных p выполняется неравенство $\|\varphi_{n+p}-\varphi_n\|<\varepsilon$. .

Множество E называется **вещественной (комплексной) линейной** системой, если для каждых двух его элементов x и y определена их **сумма** $x+y$, являющаяся элементом того же множества, и для любого элемента x и вещественного (комплексного) числа λ определено **произведение** λx, являющееся также элементом множества E, причем эти операции удовлетворяют следующим условиям (аксиомам):

1) $(x+y)+z=x+(y+z)$;
2) $x+y=y+x$;
3) $\exists\theta\in E\Rightarrow\forall x\in E, 0x=\theta$;
4) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$;
5) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$;
6) $(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x)$;
7) $1x=x$.

В геометрии, анализе, а также в ряде других разделов математики, кроме понятия алгебраических операций, большое значение имеет понятие «длины» или нормы вектора.

Линейная система E называется **линейным нормированным пространством**, если каждому элементу $x \in E$ поставлено в соответствие вещественное число $\|x\| \geq 0$, называемое нормой элемента x, причем соблюдены следующие условия (**аксиомы линейного нормированного пространства**):

1) $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (**однородность нормы**);

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (**неравенство треугольника**).

Пусть H- линейная система с умножением на комплексные числа, каждой паре элементов которой поставлено в соответствие комплексное число (x,y), обладающее следующими свойствами:

1) $(x, y) = (y, x)^*$, в частности, (x, x) вещественно;

2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;

3) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$ для любого комплексного числа λ;

4) $(x, y) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ только при $x = \theta$.

Число (x, y) называется **скалярным произведением**.

Если H-линейная система, допускающая умножение лишь на вещественные числа, то скалярное произведение предполагается вещественным.

Из аксиом 1)-4) вытекают следствия:

1) $\left(x, y_1 + y_2\right) = \left(x, y_1\right) + \left(x, y_2\right)$;

2) $\left(x, \lambda y\right) = \lambda^* \left(x, y\right)$;

3) неравенство Коши-Буняковского -Шварца

$$\left|\left(x, y\right)\right| \leq \sqrt{\left(x, x\right)} \sqrt{\left(y, y\right)} .$$

По скалярному произведению можно ввести норму $\|x\| = \sqrt{\left(x, x\right)}$, которая называется **нормой, порожденной скалярным произведением.**

Пусть E_n – линейная система , состоящая из всевозможных n- мерных векторов $x = \left\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\right\}$. В E_n можно ввести норму по формуле

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2} .$$

Линейная система с так введенной нормой называется **евклидовым пространством.**

Нормированное пространство называется полным, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится к элементу этого пространства. Полное нормированное пространство называется **банаховым**.

Пространство со скалярным произведением называется **гильбертовым**, если оно полно в норме, порожденной скалярным произведением.

Множество L, лежащее в линейном пространстве E : $L \subset E$, называется **линейным многообразием (линейным множеством),** если для любых $f, g \in L$ и любых скалярах $\lambda,\ \mu$ $\lambda f + \mu g \in L.$

Линейное многообразие, L лежащее E: $L \subset E$, называется **плотным в** E, если для любого $f \in E$ и любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $g \in L$ такой, что $\| f - g \| < \varepsilon$.

Пусть D - ограниченная область E^m, то есть ограниченное, связное, открытое множество. Предположим также, что область D - **кубируема**, то есть, определен m- кратный интеграл Римана по $\bar{D}$.

Совокупность всех непрерывных на $\bar{D}$ функций, квадратично интегрируемых по области $\bar{D}$, то есть для которых существует интеграл $\int\limits_{\bar{D}} |f(M)|^2 dV$, обозначим через $\hat{L}_2(\bar{D})$.

Множество $\hat{L}_2(\bar{D})$ - линейное, то есть, если $f,\ g \in \hat{L}_2(\bar{D})$, то тогда и $\lambda f + \mu g \in \hat{L}_2(\bar{D})$, где λ и μ - константы. Это утверждение вытекает из неравенства $|\lambda f + \mu g|^2 \le 2|\lambda|^2 |f|^2 + 2|\mu|^2 |g|^2$.

На множестве функций $\hat{L}_2(\bar{D})$ введем скалярное произведение и норму по следующим формулам (черта означает комплексное сопряжение):

$$(f, g) = \int\limits_{\bar{D}} f(M)\bar{g}(M) dV_M \quad \text{и} \quad \|f\|^2 = (f, f) = \int\limits_{\bar{D}} |f(M)|^2 dV_M,$$

превращая тем самым множество $\hat{L}_2(\bar{D})$ в линейное нормированное пространство со скалярным произведением. Сходимость по норме в пространстве $\hat{L}_2(\bar{D})$ будет сходимостью в среднем.

Однако построенное пространство $\hat{L}_2\left(\bar{D}\right)$ **не будет полным**. Его можно **пополнить**, опираясь на теорему о пополнении нормированного пространства:

Теорема. Всякое нормированное пространство E можно рассматривать как линейное многообразие, плотное в некотором банаховом пространстве $\tilde{E}$. Пространство $\tilde{E}$ при этом называется **пополнением пространства** E.

Пополнение пространство со скалярным произведением является гильбертовым пространством.

Пополняя пространство $\hat{L}_2\left(\bar{D}\right)$, мы получаем гильбертовое пространство $L_2\left(D\right)$, которое называется **пространством Лебега.**

Справка. Лебег Анри Леон (Lebesgue Henri Leon) , 28.06.1875-26.07.1941, великий французский математик.

Всюду в дальнейшем под нормой мы будем понимать норму в пространстве Лебега.

Две фундаментальные последовательности $\{\varphi_n(M)\}$ и $\{\psi_n(M)\}$ называются **эквивалентными в среднем**, если $\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n-\psi_n\|=0.$

Скалярное произведение в пространстве $L_2\left(D\right)$ определим как предел

$$\left(f,g\right)=\lim_{n\to\infty}\left(f_n,g_n\right)=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\bar{D}} f_n\left(M\right)\bar{g}_n\left(M\right)dV_M,$$

где $\left\{f_n\right\}$ и $\left\{g_n\right\}$ - фундаментальные в среднем последовательности функций из $\hat{L}_2\left(\bar{D}\right)$, сходящиеся в среднем к элементам f и g пространства $L_2\left(D\right)$ соответственно. При этом можно брать любую из фундаментальных последовательностей $\left\{f_n\right\}$ сходящихся к $f\left(M\right)$, и любую из фундаментальных последовательностей $\{g_n\}$ сходящихся к $g(M)$, то есть любую из эквивалентных последовательностей.

Норма в пространстве $L_2(D)$ определяется как предел:

$$\|f\|^2 = \lim_{n\to\infty}(f_n, f_n) = \lim_{n\to\infty}\int_D |f_n|^2 dV_M .$$

Последовательность функций $\{\varphi_k\}$ из $L_2(D)$ называется сходящейся к функции $\varphi \in L_2(D)$ в пространстве $L_2(D)$, если $\|\varphi_k - \varphi\| \to 0,\ k \to \infty;$ при этом пишут $\varphi_k \to \varphi,\ k \to \infty$ в $L_2(D)$.

Множество $M \subset E^m$ имеет меру нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ оно может быть покрыто конечной или счетной системой шаров, суммарный объем которых меньше ε .

Примеры множеств меры нуль.

1) Конечное число точек отрезка $[a,b]$.
2) Множество рациональных чисел.
3) Любое счетное множество точек (обратное неверно: существуют множества меры нуль, которые не являются счетными).

Говорят, что некоторое свойство выполняется **почти всюду,** если оно выполняется с точностью до значений на множестве меры нуль.

Если функции $f_1(M)$ и $f_2(M)$ равны почти всюду, то они называются **эквивалентными**: $f_1(M) \sim f_2(M)$.

Пример. Рассмотрим функцию Дирихле $D(x)$:

$D(x)$=1, если *x* рациональное; $D(x)$=0, если *x* иррациональное.

Она эквивалентна функции тождественно равной нулю.

Два элемента f и g пространства $L_2(D)$: $f, g \in L_2(D)$ **тождественно равны в** $L_2(D)$, если они **равны почти всюду на** *D,* то есть с точностью до значений на множестве меры нуль.

Нулевым элементом пространства $L_2(D)$ называется функция равная нулю почти всюду на D.

В результате пополнения пространства $\hat{L}_2(\bar{D})$ до пространства Лебега $L_2(D)$ мы присоединяем к пространству $\hat{L}_2(\bar{D})$ некоторые предельные идеальные элементы (мы не будем рассматривать сам процесс пополнения). Заметим, что интеграл от предельных элементов $\hat{f} \in L_2(D)$, понимаемый в смысле Римана, может уже не существовать.

Напомним **необходимое и достаточное условие интегрируемости по Риману** [2]:

Для того, чтобы ограниченная на отрезке $[0,\ 1]$ функции $f(x)$ была интегрируема по Риману на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была непрерывна почти всюду на отрезке $[0,\ 1]$.

Интеграл от предельных элементов понимается в смысле Лебега.

Примем по определению: для элементов $f, g \in L_2(D)$ назовем введенное скалярное произведение (f, g) **m- кратным интегралом Лебега от произведения $f\bar{g}$ по области D**, то есть

$$(L)\int\limits_{D} f(M)\bar{g}(M)dV_M = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\bar{D}} f_n(M)\bar{g}_n(M)dV_M.$$

Выбирая, в частности, $g(M)=1$, получим для $f \in L_2(D)$

$$(L)\int\limits_{D} f(M)dV_M = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\bar{D}} f_n(M)dV_M.$$

Знаком (L) в левых частях двух последних равенств помечен интеграл в смысле Лебега. В правых частях стоят интегралы в смысле Римана.

Определение интеграла Лебега не зависит от выбора конкретной последовательности $\{f_n(M)\}$ из класса эквивалентных последовательностей сходящихся к функции $f(M)$: для всех эквивалентных последовательностей, сходящихся к $f(M)$, интеграл Лебега от функции $f(M)$ будет иметь одно и то же значение.

Пространство Лебега можно определить как пространство функций квадратично интегрируемых (суммируемых) по Лебегу на D.

Аналогично вводится пространство $L_{2,\rho}(D)$ квадратично интегрируемых по Лебегу на D с весом $\rho(M)>0$, то есть тех, для которых существует интеграл $(L)\int\limits_{D}\left|f(M)\right|^2\rho(M)dV_M$.

Скалярное произведение и норма в пространстве $L_{2,\rho}(D)$ вводятся следующим образом:

$$\left(f,g\right)_{L_{2,\rho}}=\int\limits_{\bar{D}} f(M)\bar{g}(M)dV_M \quad \text{и} \quad \left\|f\right\|_{L_{2,\rho}}^2=\left(f,f\right)=\int\limits_{\bar{D}}\left|f(M)\right|^2 dV_M,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Замечание. Мы ввели понятие интеграла Лебега, используя так называемую схему Даниеля, в которой не требуется предварительной разработки теории меры [1]. Такой подход был предложен английским математиком Перси Джоном Даниелем в 1918 году. Введение интеграла Лебега, основанное на предварительной разработке теории меры, изложено в книгах [2] и [3].

2. Замкнутые и полные системы функций в пространстве $\mathbf{L}_2(\mathbf{D})$

Функции $f,g\in L_2(D)$ называются ортогональными в пространстве $L_2(D)$, если $\left(f,g\right)=0$.

Пусть задана бесконечная система ортогональных функций из $L_2(D)$:

$\{\varphi_n\} \subset L_2(D),\ (\varphi_n, \varphi_k) = 0,\ n \neq k.$

Определение. Ортогональная система функций $\{\varphi_n\}$ называется **полной** в $L_2(D)$, если не существует функции $f(M) \in L_2(D)$, отличной от нуля на D почти всюду и ортогональной ко всем функциям данной системы.

То есть, если

$$(f, \varphi_n) = \int_D f(M)\bar{\varphi}_n(M)\,dV_M = 0,\ n = 1, 2, ...,$$

то $f(M) = 0$ почти всюду на D.

Определение. Ортогональная система функций $\{\varphi_n\}$ называется **замкнутой** в $L_2(D)$, если для любой функции $f(M) \in L_2(D)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N = N(\varepsilon) > 0$ и набор коэффициентов $\{C_n\},\ n = 1, 2, .., N,$ что $\left\| f(M) - \sum_{n=1}^{N(\varepsilon)} C_n \varphi_n \right\|_{L_2(D)} < \varepsilon.$

Это означает, что любая функция $f(M) \in L_2(D)$ может быть с любой наперед заданной точностью аппроксимирована в среднем конечной линейной комбинацией функций данной системы.

Будем в дальнейшем считать, что ортогональная система функций $\{\varphi_n\}$ **ортонормированная**, то есть $(\varphi_n, \varphi_k) = \delta_{n,k};\ n, k = 1, 2, ...$

Для ортонормированной в $L_2(D)$ системы функций **необходимым и достаточным условием замкнутости является выполнение равенства**

Парсеваля-Ляпунова- Стеклова: для любой функции $f(M) \in L_2(D)$ квадрат нормы равен сумме квадратов коэффициентов Фурье в разложении функции $f(M)$ по ортонормированной системе функций $\{\varphi_n\}$:

$$\|f\|^2 = \int_D |f|^2 dV = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2,$$

где $f_n = (f, \varphi_n) = \int_D f(M)\bar{\varphi}_n(M)dV_M$.

Нетрудно показать, что **полнота системы есть следствие ее замкнутости.** В самом деле, пусть функция $f(M) \in L_2(D)$ ортогональна всем функциям системы $\{\varphi_n(M)\}$. Тогда $f_n = (f, \varphi_n) = 0,\ n = 1, 2, \ldots$. Но если система $\{\varphi_n(M)\}$ замкнутая, то для нее выполняется равенство Парсеваля-Ляпунова-Стеклова и $\int_D |f|^2 dV = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 = 0$, откуда следует, что $f(M) = 0$ почти всюду на D, то есть система $\{\varphi_n(M)\}$ является полной.

Можно также показать, **что замкнутость системы есть следствие ее полноты.**

Таким образом, **в пространстве $L_2(D)$ понятия полноты и замкнутости ортонормированной системы функций являются эквивалентными.**

Для любой функции $f(M) \in L_2(D)$ ряд Фурье по замкнутой ортонормированной системе сходится к этой функции в норме $L_2(D)$, то есть в среднем.

Множество функций $\mathbf{M} \in L_2(D)$ называется плотным в $L_2(D)$, если для любой функции $f(M) \in L_2(D)$ существует последовательность функций из $\mathbf{M}: \{\varphi_n\} \subset \mathbf{M}$, сходящихся к $f(M)$ в пространстве $L_2(D)$.

Например, множество функций $f(M) \in C(\bar{D})$, непрерывных на $\bar{D}$ плотно в пространстве $L_2(D)$, откуда, в силу теоремы Вейерштрасса и ограниченности области D (теорема Вейерштрасса справедлива только для ограниченных множеств), следует, что множество полиномов является плотным в пространстве $L_2(D)$.

3. Пространства Соболева $\mathrm{W}_2^1(D)$ и $\hat{\mathrm{W}}_2^1(D)$

Пусть $D \subset E^3$ - односвязная область с достаточно гладкой границей S: $\bar{D} = D \cup S$.

В области $\bar{D}$ рассмотрим линейное пространство всевозможных непрерывно дифференцируемых функций u, v со скалярным произведением

$$(u,v) = \int_{\bar{D}} u\bar{v}dV + \int_{\bar{D}} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right\} dV$$

и нормой

$$\|u\|^2 = (u,u) = \int_{\bar{D}} |u|^2 dV + \int_{\bar{D}} \left\{ \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|^2 \right\} dV.$$

Получим пространство со скалярным произведением $\hat{W}_2^1\left(\bar{D}\right)$., пополняя которое по введенным нормам, получим **пространство Соболева** $W_2^1\left(D\right)$.

Пусть $\left\{u_n\left(M\right)\right\}$ - фундаментальная последовательность в $\hat{W}_2^1\left(\bar{D}\right)$, то есть $\left\|u_n - u_m\right\|_{W_2^1} \to 0$ при $n,m \to \infty$. Тогда в $L_2\left(D\right)$ будут фундаментальными последовательности $\left\{u_n\left(M\right)\right\}$, $\left\{\frac{\partial u_n}{\partial x}\right\}$, $\left\{\frac{\partial u_n}{\partial y}\right\}$, $\left\{\frac{\partial u_n}{\partial z}\right\}$ и в силу полноты пространства $L_2\left(D\right)$ эти последовательности сходятся в среднем к элементам u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, принадлежащим пространству $L_2\left(D\right)$. **Элементы $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ называются обобщенными частными производными элемента u.**

Скалярное произведение и норма в пространстве $W_2^1\left(D\right)$ задаются теми же формулами, что и в случае пространства $\hat{W}_2^1\left(\bar{D}\right)$, в которых теперь производные являются обобщенными производными, а интегрирование понимается в смысле Лебега.

Рассмотрим пространство $\hat{W}_2^1(D)$, которое является пополнением по введенной норме линейного пространства функций, непрерывно дифференцируемых на $\bar{D}$ и таких, что $u\left(P\right) = 0, P \in S$.

Пространства $W_2^1\left(D\right)$ и $\hat{W}_2^1(D)$, являются гильбертовыми пространствами.

Литература к § 1

1) В.А.Треногин. Функциональный анализ. М.: «Наука», 1980. 496 с.
2) В.А.Ильин, Э.Г.Позняк. Основы математического анализа. Ч. 2. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 464 с.

3) А.Н. Колмогоров, С.В.Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 572 с.

§2. Примеры замкнутых и полных систем функций

1. Система полиномов Лежандра

Для системы полиномов Лежандра $\{P_n(x)\}$ имеет место следующая теорема [1]:

Теорема. Система полиномов Лежандра замкнута в пространстве $L_2(-1,1)$.

Доказательство

Рассмотрим любую функцию $f(x)\in L_2(-1,1)$. Так как множество $C[-1,1]$ плотно в пространстве $L_2(-1,1)$, то для любого $\varepsilon'>0$ найдется функция $g(x)\in C[-1,1]$ такая, что $\|f(x)-g(x)\|<\varepsilon'$ (здесь и в дальнейшем применяются нормы в пространстве $L_2(-1,1)$).

По теореме Вейерштрасса, для функции $g(x)\in C[-1,1]$ и любого $\varepsilon''>0$ найдется такая система коэффициентов $\{\tilde{C}_n\}$ и такая система полиномов $\{Q_n(x)\}$, где $Q_n(x)$- полином степени *n*, а также такое $N=N(\varepsilon'')$, что

$$\max_{x\in[-1,1]}\left|g(x)-\sum_{n=0}^{N(\varepsilon'')}\tilde{C}_nQ_n(x)\right|<\varepsilon''$$

и, следовательно,

$$\left\|g(x)-\sum_{n=0}^{N(\varepsilon'')}\tilde{C}_nQ_n(x)\right\|^2=\int_{-1}^{1}\left|g(x)-\sum_{n=0}^{N(\varepsilon'')}\tilde{C}_nQ_n(x)\right|^2dx<2(\varepsilon'')^2.$$

Из равенства $\sum_{n=0}^{N(\varepsilon'')}C_nP_n(x)=\sum_{n=0}^{N(\varepsilon'')}\tilde{C}_nQ_n(x)$, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, можно определить коэффициенты $\{C_n\}$ через коэффициенты $\{\tilde{C}_n\}$. В результате получим, что для любого $\varepsilon''>0$ найдется такая система коэффициентов $\{C_n\}$ и такой номер $N=N(\varepsilon'')$, что

$$\left\| g(x)-\sum_{n=0}^{N(\varepsilon'')} C_n P_n(x) \right\| < \sqrt{2}\varepsilon''.$$

Применяя неравенство треугольника, получим для любой функции $f(x)\in L_2(-1,1)$ и любого $\varepsilon>0$ неравенство

$$\left\| f(x)-\sum_{n=0}^{N(\varepsilon'')} C_n P_n(x) \right\| \le \left\| f(x)-g(x) \right\| + \left\| g(x)-\sum_{n=0}^{N(\varepsilon'')} C_n P_n(x) \right\| < \varepsilon' + \sqrt{2}\varepsilon'' < \varepsilon,$$

которое и доказывает теорему.

Следствия

Из замкнутости системы полиномов Лежандра $\{P_n(x)\}$ в пространстве $L_2(-1,1)$ следует ее полнота в пространстве $L_2(-1,1)$, так как система $\{P_n(x)\}$ ортогональная.

1) **Утверждение.** Система полиномов Лежандра $\{P_n(x)\}$ исчерпывает все собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\dfrac{dy}{dx}\right)+\lambda y(x)=0, \quad x\in(-1,1), \\ \left|y(\pm 1)\right| < \infty. \end{cases}$$

Доказательство

В силу общих свойств собственных функций, система полиномов Лежандра $\{P_n(x)\}$ ортогональна с весом $\rho=1$ (это также следует из того, что система полиномов Лежандра есть частный случай системы классических ортогональных полиномов). Предположим, что существует собственная функция $\tilde{y}(x) \neq P_n(x)$ и существует собственное значение $\tilde{\lambda} \neq \lambda_n = n(n+1)$. В силу общих свойств собственных функций функция $\tilde{y}(x)$ должна быть ортогональной ко всем полиномам Лежандра: $(\tilde{y}, P_n) = 0, n = 0,1,\dots$. Но в силу полноты системы полиномов Лежандра отсюда вытекает, что функция $\tilde{y}(x) = 0$ почти всюду на отрезке $[-1,1]$ и, следовательно, не является собственной функцией.

2) Имеет место теорема Стеклова [1].

Теорема. Всякая дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[-1,1]$ функция разложима в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по системе полиномов Лежандра $\{P_n(x)\}$.

Если $f(x) \in C^{(2)}[-1,1]$, то

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(x), \text{ где } \quad f_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx.$$

Справка. Стеклов Владимир Андреевич (1864-1926). Племянник Н.А.Добролюбова, непосредственный ученик Александра Михайловича Ляпунова (1857-1918) по Харьковскому университету, а впоследствии – его коллега по Академии наук. Участвовал в реорганизации Императорской Академии наук в Академию наук Советского Союза, был ее первый вице-президент.

2. Система присоединенных функций Лежандра

Поскольку при нечетных значениях m присоединенные функции Лежандра $P_n^{(m)}(x)$ не являются полиномами, то непосредственное применение теоремы Вейерштрасса, как это было сделано в предыдущем пункте, затруднено и поэтому теореме мы предпошлем следующую лемму [1]:

Лемма. Для любой функции $f(x)\in C[-1,1]$ можно построить такую функцию $\varphi(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\tilde{\varphi}(x)$, где $\tilde{\varphi}(x)\in C[-1,1]$, которая приближает на отрезке $[-1,1]$ функцию $f(x)$ в среднем.

Доказательство

Мы докажем существование функции $\varphi(x)$ конструктивным способом, предъявив ее. В качестве функции $\varphi(x)$ можно взять функцию следующего вида:

$$\varphi(x)=\begin{cases} A_1\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}, \ x\in[-1,\ -1+\delta], \\ f(x),\ x\in[-1+\delta,\ 1-\delta], \\ A_2\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}, \ x\in[1-\delta,\ 1], \end{cases}$$

где постоянные A_1 и A_2 определяются из условия непрерывности на отрезке $[-1,1]$ функции $\tilde{\varphi}(x)=\left(1-x^2\right)^{-\frac{m}{2}}\varphi(x)$.

Действительно,

$$\left\|f(x)-\varphi(x)\right\|^2=\int_{-1}^{1}\left|f(x)-\varphi(x)\right|^2dx=\int_{-1}^{-1+\delta}\left|f(x)-\varphi(x)\right|^2dx+\int_{1-\delta}^{1}\left|f(x)-\varphi(x)\right|^2dx.$$

Так как $f(x)\in C[-1,1]$ и $\varphi(x)\in C[-1,1]$ то $|f(x)|<M$ и $|\varphi(x)|<M$ при $x\in[-1,1]$. Таким образом получаем, что

$$\left|f(x)-g(x)\right|^2\le 2\left|f(x)\right|^2+2\left|g(x)\right|^2<4M^2.$$

Отсюда следует оценка

$$\left\|f(x)-g(x)\right\|^2\le 4M^2\left(-1+\delta-(-1)\right)+4M^2\left(1-(1-\delta)\right)=8M^2\delta<\varepsilon,$$

при $\delta<\dfrac{\varepsilon}{8M^2}$ и любом $\varepsilon>0$ и любой функции $f(x)\in C[-1,1]$, что и доказывает лемму.

Теперь можно перейти к доказательству следующей теоремы [1]:

Теорема. Система присоединенных функций Лежандра замкнута в пространстве $L_2(-1,1)$.

Доказательство

Рассмотрим любую функцию $f(x) \in L_2(-1,1)$. Так как множество $C[-1,1]$ плотно в пространстве $L_2(-1,1)$, то для любого $\varepsilon' > 0$ найдется функция $g(x) \in C[-1,1]$ такая, что $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon'$.

По доказанной лемме, для функции $g(x) \in C[-1,1]$ и любого $\varepsilon'' > 0$ найдется такая функция $\varphi(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\varphi}(x) \in C[-1,1]$, что $\|g(x) - \varphi(x)\| < \varepsilon''$.

По теореме Вейерштрасса, для функции $\tilde{\varphi}(x) \in C[-1,1]$ и любого $\varepsilon''' > 0$ найдется такая система коэффициентов $\{\tilde{C}_n\}$ и такая система полиномов $\{Q_n(x)\}$, где $Q_n(x)$- полином степени *n*, а также такое $N = N(\varepsilon''')$, что

$$\max_{x \in [-1,1]} \left| \tilde{\varphi}(x) - \sum_{n=0}^{N(\varepsilon''')} \tilde{C}_n Q_n(x) \right| < \varepsilon'''.$$

Так как $0 \le (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \le 1$ при $x \in [-1,1]$, то, умножая последнее неравенство слева на $(1-x^2)^{\frac{m}{2}}$, мы его только усилим. Поэтому, определяя коэффициенты $\{C_n\}$ через коэффициенты $\{\tilde{C}_n\}$ по формуле

$$\sum_{n=m}^{N(\varepsilon''')+m} C_n \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) = \sum_{n=0}^{N(\varepsilon''')} \tilde{C}_n Q_n(x),$$

мы получаем неравенство

$$\max_{x \in [-1,1]} \left| \varphi(x) - \sum_{n=m}^{N(\varepsilon''')+m} C_n P_n^{(m)}(x) \right| < \varepsilon''',$$

из которого следует оценка квадрата нормы

$$\left\| \varphi(x) - \sum_{n=m}^{N(\varepsilon''')+m} C_n P_n^{(m)}(x) \right\|^2 = \int_{-1}^{1} \left| \varphi(x) - \sum_{n=m}^{N(\varepsilon''')+m} C_n P_n^{(m)}(x) \right|^2 dx < 2\left(\varepsilon'''\right)^2,$$

откуда следует оценка нормы:

$$\left\| \varphi(x) - \sum_{n=m}^{N(\varepsilon''')+m} C_n P_n^{(m)}(x) \right\| < \sqrt{2}\varepsilon'''.$$

Применяя неравенство треугольника, для любой функции $f(x) \in L_2(-1,1)$ и любого $\varepsilon > 0$ получим оценку

$$\left\| f(x) - \sum_{n=m}^{N(\varepsilon''')+m} C_n P_n^{(m)}(x) \right\| \le \left\| f(x) - g(x) \right\| + \left\| g(x) - \varphi(x) \right\| +$$

$$+ \left\| \varphi(x) - \sum_{n=m}^{N(\varepsilon''')+m} C_n P_n^{(m)}(x) \right\| < \varepsilon' + \varepsilon'' + \sqrt{2}\varepsilon''' < \varepsilon,$$

которая и доказывает теорему.

Следствия

1) Из замкнутости системы присоединенных функций Лежандра $\left\{P_n^{(m)}(x)\right\}$ следует её полнота, так как в силу общих свойств собственных функций система присоединенных функций Лежандра $\left\{P_n^{(m)}(x)\right\}$ ортогональная.
2) Система присоединенных функций Лежандра $\left\{P_n^{(m)}(x)\right\}$ исчерпывает все собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\dfrac{dy}{dx}\right) + \left(\lambda - \dfrac{m^2}{1-x^2}\right) y(x) = 0, x \in (-1,1), \\ \left|y(\pm 1)\right| < \infty. \end{cases}$$

В самом деле, пусть существует собственная функция рассматриваемой задачи $\tilde{y}(x) \ne P_n^{(m)}(x)$ $\tilde{\lambda} \ne \lambda_n = n(n+1)$. Тогда, в силу общих свойств собственных функций, $\left(\tilde{y}, P_n^{(m)}\right)=0$ при каждом m и n=0,1,… и из полноты системы $\left\{P_n^{(m)}(x)\right\}$ следует, что $\tilde{y}(x)$=0 почти всюду на $[-1,1]$ и, следовательно, $\tilde{y}(x)$ не является собственной функцией.

3) Имеет место теорема Стеклова [1]:

Теорема. Всякая функция, дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[-1,1]$ и обращающаяся нуль на концах отрезка, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по системе присоединенных функций Лежандра $\left\{P_n^{(m)}(x)\right\}$, $m\neq 0.$

Итак, если $f(x)\in C^{(2)}[-1,1]$ и $f(\pm 1)=0,$ то

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n^{(m)}(x), \quad \text{где} \qquad f_n=\frac{2n+1}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_{-1}^{1} f(x)P_n^{(m)}(x)dx.$$

3. Система сферических функций

Имеет место следующая лемма [2]:

Лемма. Пусть области $G\subset E^n$ и $D\subset E^m$, где E^n и E^m m и n – мерные вещественные пространства, ограничены, система функций $\Psi_l(P),\ l=1,2,...$ замкнута и ортонормированна в области G и при каждом $l=1,2,...$ система функций $\Phi_{kl}(M), k=1,2,...$ замкнута и ортонормированна в области D.

Тогда система функций

$$\mathrm{X}_{kl}(M,P)=\Phi_{kl}(M)\Psi_l(P),\ \ k,l=1,2,...$$

замкнута и ортонормированна в области $G\times D\equiv\left\{(M,P): M\in D,\ P\in G\right\}.$

Система сферических функций n – го порядка может быть записана:

а) в тригонометрической форме:

$$Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)=P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\varphi,$$

$$Y_n^{(-m)}(\theta,\varphi)=P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi, \qquad m=0,1,...,n$$

б) в экспоненциальной форме:

$$Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)=P_n^{(|m|)}(\cos\theta)e^{im\varphi}, |m|=0,1,\ldots,n.$$

Замкнутость системы сферических функций, в силу леммы, является следствием замкнутости системы присоединенных функций Лежандра и системы тригонометрических функций.

Ортогональность системы сферических функций является следствием общих свойств собственных функций.

Полнота системы сферических функций есть следствие ортогональности и замкнутости.

Система сферических функций исчерпывает все собственные функции краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta_{\theta\varphi}Y+\lambda Y=0, M\in\Omega, \\ Y(\theta,\varphi)=Y(\theta,\varphi+2\pi), \\ |Y(\theta,\varphi)|<\infty, M\in\Omega, \end{cases}$$

на единичной сфере Ω.

Собственные значения $\lambda_n=n(n+1)$ являются $2n+1$ - кратно вырожденными.

Для системы сферических функций $\{Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)\}$ имеет место теорема Стеклова:

Теорема. Всякая функция $f(\theta,\varphi)$, дважды непрерывно дифференцируемая на единичной сфере, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по сферическим функциям.

Замечание. Теорема Стеклова будет доказана в общем виде в § 3 главы VI части II.

4. Системы полиномов Лагерра и Эрмита

Для системы полиномов Эрмита $\{H_n(x)\}$ можно доказать следующую теорему [1]:

Теорема. Система полиномов Эрмита полна в пространстве непрерывных функций, заданных и квадратично интегрируемых с весом e^{-x^2} на всей бесконечной прямой.

Это означает, что если функция $f(x)$, заданная на всей бесконечной прямой и квадратично интегрируемая на ней с весом e^{-x^2}, ортогональна ко всем полиномам Эрмита с весом e^{-x^2}, то она тождественно равна нулю.

Отсюда вытекает, что система полиномов Эрмита $\{H_n(x)\}$ исчерпывает все собственные функции соответствующей задачи на собственные значения и собственные функции.

Аналогичную теорему можно доказать для системы полиномов Лагерра $\{L_n(x)\}$.

Замечание. Вопрос о замкнутости общих ортогональных систем функций был поставлен и подробно исследован академиком Владимиром Андреевичем Стекловым. Если отрезок, на котором задана ортогональная система функций конечен, то эта система замкнута при любом весе. В.А.Стекловым был указан ряд достаточных условий на весовую функцию системы классических ортогональных полиномов, заданных на бесконечном интервале, при выполнений которых система соответствующих полиномов будет замкнутой. Им была доказана замкнутость систем полиномов Эрмита и Лагерра (см. Стеклов В.А.. Записки Академии наук, физ.-матем. серия; 1911. Т. 30, №4. С. 1-86; 1914. Т. 33, №8. С.1-59). Полное решение задачи об условиях замкнутости системы полиномов в пространстве $L_n(x)$ дал венгерский и шведский математик Марсель Рисс (1886-1969).

Литература к §2

1. А.Г. Свешников, А.Н.Боголюбов, В.В.Кравцов. Лекции по математической физике. Серия «Классический университетский учебник». М: Изд-во МГУ; Наука, 2004. 416 с.

2. В.С.Владимиров. Уравнения математической физики. М.: «Наука», 1988.