Глава 6. Уравнения гиперболического типа

1. Постановка начально-краевой задачи

$$\begin{cases} \rho(M)u_{tt}(M,t) = div\big(k(M)\,grad\,u(M,t)\big) + f(M,t), (M,t)\in Q_\infty, & (1) \\ u(M,0) = \varphi(M), M \in \bar{D}, & (2a) \\ u_e(M,0) = \psi(M), M \in \bar{D}, & (2b) \\ \alpha(P)\dfrac{\partial u(P,t)}{\partial n_P} + \beta(P)u(P,t) = \mu(P,t), P\in S, t\in[0,\infty), & (3) \end{cases}$$

где $\rho(M) > 0, k(M) > 0, \alpha(P) \geq 0, \beta(P) \geq 0, \alpha(P) + \beta(P) > 0,$

$$Q_\infty = D\times(0,\infty) = \{(M,t) : M\in D, t\in(0,\infty)\},$$

$$\bar{Q}_\infty = \bar{D}\times[0,\infty) = \{(M,t) : M\in \bar{D}, t\in[0,\infty)\}.$$

Определение. Функция $u(M,t)$ называется классическим решением начально-краевой задачи (1)-(3), если она обладает следующими свойствами :

1) $u(M,t) \in C^{(2)}(Q_\infty) \cap C^{(1)}(\bar{Q}_\infty)$,

2) удовлетворяет уравнению (1) в классическом смысле,

3) непрерывно примыкает к начальным (2*a*), (2*b*) и граничному (3) условиям.

Необходимым условием существования классического решения является выполнение условия сопряжения

$$\alpha(P)\frac{\partial\varphi(P)}{\partial n_P} + \beta(P)\varphi(P) = \mu(P,0), P \in S,$$

$$\alpha(P)\frac{\partial\psi(P)}{\partial n_P} + \beta(P)\psi(P) = \mu_t(P,0), P \in S.$$

2. Единственность решения

Теорема 1. Пусть $\rho(M)>0, k(M)>0, \alpha(P)\geq 0, \beta(P)\geq 0, \alpha(P)+\beta(P)>0.$

Тогда классическое решение задачи (1)-(3) единственно.

Доказательство (от противного). Предположим, что существуют два решения задачи (1)-(3) $u_1(M,t)\neq u_2(M,t)$. Рассмотрим их разность $v(M,t)=u_1(M,t)-u_2(M,t)$. Для функции $v(M,t)$ получаем задачу:

$$\begin{cases} \rho(M)v_t(M,t)=div\left(k(M)\,gradv(M,t)\right), \ (M,t)\in Q_\infty, & (4)\\ v(M,0)=0, M\in\bar{D}, & (5a)\\ u_t(M,0)=0, M\in\bar{D}, & (5b)\\ \alpha(P)\dfrac{\partial v(P,t)}{\partial n_P}+\beta(P)v(P,t)=0, \ P\in S, t\in[0,\infty), & (6)\end{cases}$$

Составим функцию

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_D\left(\rho(M)v_t^2(M,t)+k(M)grad^2v(M,t)\right)dV_M \qquad (7)$$

и вычислим ее производную

$$\frac{dE(t)}{dt}=\int_D\left(\rho(M)v_t v_{tt}+k(M)gradv\cdot gradv_t\right)dV_M. \qquad (8)$$

В силу первой формулы Грина

$$\int_D k(M)gradv\cdot gradv_t dV_M =$$

$$=\int_S k(P)v_t\frac{\partial v}{\partial n_P}d\sigma_P-\int_D v_t div\left(k(M)gradv\right)dV_M. \qquad (9)$$

Предположим, что $\alpha(P) > 0,\ \beta(P) > 0, P \in S.$ Подставим (9) в (8) и учтем (4):

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_D \Big(\rho(M) v_t v_{tt} - v_t \, div\big(k(M)\, grad v\big)\Big) dV_M + \int_S k(P) v_t \frac{\partial v}{\partial n_P} d\sigma_P =$$

$$\int_D v_t \Big(\rho(M) v_{tt} - div\big(k(M)\, grad v\big)\Big) dV_M - \int_S k(P) v_t v \frac{\beta(P)}{\alpha(P)} d\sigma_P =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_S k(P) v^2 \frac{\beta(P)}{\alpha(P)} d\sigma_P,$$

откуда

$$E(t) + \frac{1}{2}\int_S k(P) v^2 \frac{\beta(P)}{\alpha(P)} d\sigma_P = C = const.$$

Так как

$$v(M,0) = 0, v_t(M,0) = 0,$$

$$grad v(M,0) = v_x(M,0)\mathbf{i} + v_y(M,0)\mathbf{j} + v_z(M,0)\mathbf{k} = 0,$$

то $C=0$ и

$$E(t)+\frac{1}{2}\int_S k(P)v^2\frac{\beta(P)}{\alpha(P)}d\sigma_P=0,\quad t\in[0,\infty).$$

Поскольку каждое слагаемое является неотрицательным, то каждое слагаемое равно нулю. Из равенства нулю первого слагаемого $E(t)=0$, следует, что

$$v_t(M,t)=0,\ gradv(M,t)=0,\ (M,t)\in Q_\infty,$$

откуда по непрерывности

$$v(M,t)=C=const,\ (M,t)\in\bar{Q}_\infty.$$

Из начального условия (5*a*) следует, что $C=0$, откуда $v(M,t)=0,\ u_1(M,t)=u_2(M,t)$ - противоречие. **Ч.т.д.**

Замечание 1. Совершенно аналогично доказывается теорема для случая граничных условий Дирихле $\left(\alpha(P)\equiv 0\right)$ или граничных условий Неймана $\left(\beta(P)\equiv 0\right)$, когда интеграл по поверхности S обращается в ноль:

$$\int_S k(P)v_t \frac{\partial v}{\partial n_P} d\sigma_P = 0.$$

Замечание 2. Доказательство теоремы не зависит от размерности пространственной области.

Замечание 3. Интеграл $E(t)$ имеет физический смысл энергии колебаний системы и упругих связей, определяющих граничные условия. Поэтому использованный метод доказательства носит название энергетического метода.

3. Устойчивость решения

С помощью интеграла энергии можно доказать теорему устойчивости классического решения в L_2 по начальным данным и правой части. Доказательство устойчивости проведем для простой одномерной задачи:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t), \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,\mathrm{T}], \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,l], \\ u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in [0,l], \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \end{cases}$$

Введем скалярное произведение в L_2 $\qquad (f,g) = \int\limits_0^l f(x) g(x)\,dx$

в и порожденную им норму $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$.

Теорема 2. Классическое решение начально-краевой задачи для уравнения колебаний на отрезке $[0,l]$ устойчиво по правой части и начальным данным.

Доказательство

Составим интеграл энергии

$$J^2(t)=\frac{1}{2}\int_0^l\left(u_t^2+a^2u_x^2\right)dx.$$

Продифференцируем интеграл

$$2JJ'=\int_0^l\left(u_tu_{tt}+a^2u_xu_{xt}\right)dx.$$

Второе слагаемое под интегралом преобразуем с помощью формулы интегрирования по частям, учитывая граничные условия:

$$\int_0^l a^2 u_x u_{xt} dx = a^2 u_x u_t \Big|_0^l - a^2 \int_0^l u_t u_{xx} dx = -a^2 \int_0^l u_t u_{xx} dx.$$

Отсюда получаем

$$2JJ' = \int_0^l \left(u_t u_{tt} - a^2 u_t u_{xx} \right) dx = \int_0^l u_t \left(u_{tt} - a^2 u_{xx} \right) dx = \int_0^l u_t f\left(x,t\right) dx.$$

Имеет место неравенство Коши-Буняковского

$$\left(f,g\right) = \int_0^l f\left(x\right) g\left(x\right) dx \le \left(\int_0^l f^2\left(x\right) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^l g^2\left(x\right) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$2JJ' \le \left(\int_0^l u_t^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^l f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|u_t\| \|f\|.$$

Поскольку

$$\|u_t\|^2 = \int_0^l u_t^2 dx \le \int_0^l \left(u_t^2 + a^2 u_x^2 \right) dx = 2J^2,$$

то

$$\|u_t\| \le \sqrt{2} J.$$

Отсюда получаем

$$J' \le \frac{1}{\sqrt{2}} \|f\|.$$

Проинтегрируем последнее неравенство

$$J(t) \le J(0) + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \| f(\tau) \| d\tau,$$

откуда получаем

$$\|u_t\| \le \sqrt{2} J(0) + \int_0^t \| f(\tau) \| d\tau.$$

Рассмотрим квадрат нормы

$$\|u\|^2 = \int_0^l u^2(x,t)\, dx.$$

Продифференцируем последнюю формулу по t и используем неравенство Коши-Буняковского:

$$\|u\|\frac{d}{dt}\|u\| = \int_0^l u u_t dx \le \left(\int_0^l u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^l u_t^{\,2} dx\right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|\|u_t\|.$$

Отсюда получим:

$$\frac{d}{dt}\|u\| \le \|u_t\| \le \sqrt{2}J(0) + \int_0^t \|f(\tau)\| d\tau$$

и после интегрирования

$$\|u(t)\| \le \|u(0)\| + \sqrt{2}J(0)t + \int_0^t \int_0^{t_1} \|f(\tau)\| d\tau dt_1.$$

Интеграл в последней формуле можно оценить так:

$$\int_0^t \int_0^{t_1} \left\| f(\tau) \right\| d\tau dt_1 \le \max \| f \| \int_0^t \int_0^{t_1} d\tau dt_1 = \max \| f \| \frac{t^2}{2} \le \max \| f \| \frac{T^2}{2},$$

$$\max \| f \| = \max \left\| f(\tau) \right\|, \quad \tau \in [0, T].$$

Оценим величину $J(0)$:

$$J^2(0) = \frac{1}{2} \int_0^l \left(u_t^2(x,0) + a^2 u_x^2(x,0) \right) dx = \frac{1}{2} \left\| u_t(x,0) \right\|^2 + \frac{a^2}{2} \left\| u_x(x,0) \right\|^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left\| \psi(x) \right\|^2 + \frac{a^2}{2} \left\| \varphi'(x) \right\|^2 \le \frac{1}{2} \left(\left\| \psi(x) \right\| + a \left\| \varphi'(x) \right\| \right)^2.$$

Итак, $$J(0) \le \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\|\psi(x)\| + a\|\varphi'(x)\|\right).$$

Пусть $t \in [0,T]$. Тогда окончательная оценка будет иметь следующий вид:

$$\|u(x,t)\| \le \|\varphi(x)\| + \left(\|\psi(x)\| + a\|\varphi'(x)\|\right)T + \frac{T^2}{2}\max\|f\|.$$

Последняя оценка доказывает теорему, поскольку из этой оценки следует, что малому изменению входных данных – функций $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\psi(x)$, $f(x,t)$ - соответствует малое изменение решения. **Ч.т.д.**

4. Существование решения

1) Формальное построение решения методом Фурье

Рассмотрим начально-краевую задачу на отрезке, моделирующую малые продольные колебания упругого свободного стержня, концы которого закреплены.

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t), \quad x\in(0,l), \quad t\in(0,\infty), \\ u(x,0)=\varphi(x), \quad x\in[0,l], \\ u_t(x,0)=\psi(x), \quad x\in[0,l], \\ u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0, \quad t\in[0,)). \end{cases}$$

Построим формально решение этой задачи, используя метод разделения переменных Фурье

Предположим, что решение поставленной задачи существует. Будем искать его в виде суперпозиции решений $w(x,t)$ вспомогательных задач:

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx}, \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,\infty), \\ w(0,t) = 0, \quad w(l,t) = 0, \quad t \in [0,\infty), \\ w(x,t) = X(x)T(t), \\ w(x,t) \neq 0, \quad x \in [0,l], \quad t \in [0,\infty). \end{cases}$$

Заметим, что в полученной постановке нет начальных условий, но решения имеют специальный вид:

$$w(x,t) = X(x)T(t).$$

Подставим решения $w(x,t)$ в исходное уравнение и разделим переменные:

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \Rightarrow$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad x \in (0,l), \\ X(0) = 0, X(l) = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Для функции $X(x)$ мы получили задачу на собственные значения или задачу Штурма-Лиувилля.

Задача штурма-Лиувилля. Найти те значения параметра λ, при которых существует нетривиальные решения поставленной задачи, и сами эти решения.

Решение уравнения имеет вид:

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x,$$

где $A,\ B-$ произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий:

$$X(0) = A = 0,\ \ X(l) = B\sin\sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}l = \pi n \Rightarrow \lambda = \left(\tfrac{\pi n}{l}\right)^2.$$

Мы получили дискретный набор собственных значений λ_n и собственных функций $X_n(x)$:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2,\quad n = 1,2,\ldots \qquad X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l},$$

Для временной функции получим уравнение:

$$T_n''(t) + a^2 \lambda_n T_n(t) = 0,$$

решение которого имеет вид:

$$T_n(t) = a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t, \quad \omega_n = \frac{\pi a n}{l}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

где $a_n, \ b_n -$ произвольные постоянные.

Частные решения имеют вид:

$$w_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) = \left(a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t\right) \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Решение исходной задачи записываем в виде:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\omega_n t+b_n\sin\omega_n t\right)\sin\frac{\pi nx}{l}.$$

Построенная таким образом функция $u(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям и при условии сходимости соответствующих рядов однородному уравнению колебаний.

Постоянные a_n, b_n определим из начальных условий:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{\pi nx}{l}=\varphi(x).$$

Умножим обе части этого равенства на $\sin\frac{\pi kx}{l}$, $n=1,2,\ldots$ и проинтегрируем по x от 0 до l:

Учтем, что

$$\int_0^l \sin\frac{\pi n x}{l}\sin\frac{\pi k x}{l}\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \dfrac{l}{2}, & n = k. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi k x}{l}dx = \varphi_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

где φ_k – коэффициент Фурье в разложении функции $\varphi(x)$ на
l
отрезке от 0 до l по системе синусов:

$$\left\{\sin\frac{\pi k x}{l}\right\}_{k=1,2\ldots}$$

Предположим, что ряд для функции $u(x,t)$ можно почленно дифференцировать один раз по времени. Продифференцировав ряд один раз по t и положив t=0, получим:

$$b_k = \frac{2}{l\omega_k}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx = \frac{1}{\omega_k}\psi_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, мы формально построили решение исходной задачи. Далее будет доказана теорема существования классического решения исходной задачи, то есть показано, при каких условиях, налагаемых на входные данные – функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, построенное методом Фурье решение будет являться классическим решением исходной задачи.

2) Теорема существования

Мы построили решение начально-краевой задачи для уравнения колебаний на отрезке методом разделения переменных (методом Фурье). Для доказательства существования классического решения надо установить, что полученное формальное решение в виде ряда Фурье с коэффициентами, определенными через начальные условия, при соответствующих условиях, накладываемых на начальные данные, действительно представляет собой классическое решение.

Для исследования этой проблемы весьма полезен **обобщенный принцип суперпозиции**, который по существу очень компактно выражает основное содержание метода разделения переменных

Обобщенный принцип суперпозиции. Если $w_n(x,t)$ – частные решения линейного однородного дифференциального уравнения и все дифференциальные операции, входящие в это уравнение, над функцией $u(x,t)$ можно вычислять путем почленного дифференцирования ряда, то $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} w_n(x,t)$ является решением этого уравнения.

Таким образом, необходимо проверить, позволяют ли условия, накладываемые на входные данные задачи, применить обобщенный принцип суперпозиции. Этот вопрос связан с изучением систем собственных функций, полученных как решение задачи Штурма-Лиувилля, по которым раскладывается решение исходной задачи. Поскольку в нашем случае при решении задачи на отрезке разложение происходит по тригонометрической системе функций $\left\{\sin\frac{\pi n x}{l}\right\}$, то необходимо использовать свойства рядов Фурье.

Если периодическая с периодом $2l$ функция $F(x)$, заданная на отрезке [-*l*,*l*], имеет k непрерывных производных, а $(k+1)$– я производная кусочно-непрерывная, то числовой ряд,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k \left(|a_n| + |b_n|\right),$$

где a_n и b_n - коэффициенты Фурье функции *F*(*x*), сходится.

Если речь идет о разложении в ряд по системе $\left\{\sin\frac{\pi n x}{l}\right\}$ функции $f(x)$, заданной только на отрезке [0,*l*] , то надо, чтобы изложенные требования были выполнены для функции $F(x)$, получающейся при нечетном продолжении $f(x)$ на отрезок [-*l*,0].

В частности, для непрерывности необходимо, чтобы $f(0)=0,$ а для периодичности с периодом $2l$ необходимо, чтобы $f(l)=0.$

Непрерывность первой (как и любой нечетной производной) при $x=0$ и $x=l$ при нечетном продолжении получается автоматически. Для непрерывности четных производных продолженной функции нужно потребовать, чтобы $f^{(k)}(0)=f^{(k)}(l)=0 \quad (k=0,2,4,\ldots,2n)$.

Теорема 3. Если начальные функции начально-краевой задачи для уравнения колебаний на отрезке $[0,l]$ удовлетворяют условиям: $\varphi(x)\in C^{(2)}[0,l]$ и $\varphi'''(x)$ – кусочно-непрерывная на отрезке $[0,l]$; $\psi(x)\in C^{(1)}[0,l]$ и $\psi''(x)$ – кусочно-непрерывна на отрезке $[0,l]$; при этом $\varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)=$ $=\varphi''(l)=\psi(0)=\psi(l)=0,$ то существует классическое решение начально-краевой задачи для уравнения колебаний на отрезке $[0,l]$, представляемое формулой

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos\omega_n t+b_n\sin\omega_n t)\sin\frac{\pi nx}{l},\quad \omega_n=\frac{\pi na}{l}$$

с коэффициентами:

$$a_n=\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,$$

$$b_n=\frac{1}{\omega_n}\psi_n=\frac{2}{l\omega_n}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx.$$

Доказательство.

Необходимо доказать:

1) Непрерывность функции $u(x,t)$ в замкнутой области $[0,l]\times[0,T]$, откуда будет следовать непрерывное примыкание функции $u(x,t)$ к первому начальному условию и к граничным условиям.

Так как

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\omega_n t+b_n\sin\omega_n t\right)\sin\frac{\pi n x}{l}$$

и функции $u_n(x,t)$ непрерывны в области $[0,l]\times[0,T]$, то достаточно доказать равномерную сходимость функционального ряда в данной области, то есть сходимость мажорантного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|+|b_n|\right).$$

2) Непрерывность функции $u_t(x,t)$ в замкнутой области $[0,l]\times[0,T]$, откуда будет следовать непрерывное примыкание данной функции ко второму начальному условию.

Для этого достаточно доказать равномерную сходимость ряда, который получается в результате формального почленного дифференцирование ряда $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)$ по переменной t:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\frac{\pi n}{l}\left(-a_n\sin\omega_n t+b_n\cos\omega_n t\right)\sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Мажорантным рядом, для данного числового ряда является ряд:

$$\frac{a\pi}{l}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\left|a_n\right|+\left|b_n\right|\right).$$

3) Применимость обобщенного принципа суперпозиции в области $(0,l)\times(0,T]$, откуда будет следовать, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению колебаний в данной области, для чего нужно доказать равномерную сходимость рядов, полученных двукратным почленным дифференцированием ряда $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)$ по x и по t:

$$-a^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n\cos\omega_n t+\sin\omega_n t)\sin\frac{\pi nx}{l},$$

$$-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n\cos\omega_n t+\sin\omega_n t)\sin\frac{\pi nx}{l}.$$

Этим рядам с точностью до множителей соответствует общий мажорантны ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(|a_n|+|b_n|\right).$$

Поскольку $a_n = \varphi_n$ и $b_n = \dfrac{1}{\omega_n}\psi_n = \dfrac{l}{\pi a n}\psi_n$, то для обоснования 1) – 3) нужно доказать сходимость мажорантных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\varphi_n| \quad (k=0,1,2), \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^k |\psi_n| \quad (k=-1,0,1).$$

Условие теоремы обеспечивает сходимость всех мажорантных рядов, что и доказывает теорему. **Ч.т.д.**

5. Вынужденные колебания ограниченного стержня

Рассмотрим задачу малых продольных колебания упругого стержня с закрепленными концами при нулевых начальных условиях

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t), \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,\infty), & (11) \\ u(x,0) = 0, \quad x \in [0,l], & (12a) \\ u_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,l], & (12б) \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \in [0,\infty). & (13) \end{cases}$$

Предположим, что существует классические решение этой задачи $(M,t) \in C^{(2)}(Q_\infty) \cap C^{(1)}(\bar{Q}_\infty)$. Тогда при каждом фиксированном значении t функция $u(x,t)$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля (10):

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{\pi nx}{l}, \qquad (14)$$

где коэффициенты определяются формулой

$$u_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l u(\xi,t)\sin\frac{\pi n\xi}{l}\,d\xi.$$

в силу свойств интегралов, зависящих от параметра, получаем:

$$u_n''(t)=\frac{2}{l}\int_0^l \frac{\partial u^2(\xi,t)}{\partial t^2}\sin\frac{\pi n\xi}{l}\,d\xi.$$

Умножим исходное уравнение на $\dfrac{2}{l}\sin\dfrac{\pi n x}{l}$ и проинтегрируем по x. В результате получим:

$$u_n''(t)=\frac{2a^2}{l}\int_0^l \frac{\partial u^2(\xi,t)}{\partial \xi^2}\sin\frac{\pi n\xi}{l}\,d\xi+f_n(t), \tag{15}$$

где

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{\pi n\xi}{l}\,d\xi. \tag{16}$$

Интеграл в (15) вычислим двукратным интегрированием по частям с учетом однородных граничных условий (13):

$$\frac{2a^2}{l}\int_0^l \frac{\partial u^2(\xi,t)}{\partial \xi^2}\sin\frac{\pi n\xi}{l}\,d\xi=-\omega_n^2\,\frac{2}{l}\int_0^l u(\xi,t)\sin\frac{\pi n\xi}{l}\,d\xi$$

Учитывая формулу (15), получим

$$\frac{2a^2}{l}\int_0^l \frac{\partial u^2(\xi,t)}{\partial \xi^2}\sin\frac{\pi n\xi}{l}\,d\xi = -\omega_n^2 u_n(t),\ \omega_n = \frac{\pi n a}{l} \qquad (17)$$

Таким образом, принимая во внимание начальные условия исходной задачи, получаем для $u_n(t)$ задачу Коши:

$$\begin{cases} u_n''(t) + \omega_n^2 u_n(t) = f_n(t), \quad t \in (0,\infty), \\ u_n(0) = 0, \\ u_n'(0) = 0. \end{cases} \qquad (18)$$

Решение задачи (18) задается с помощью импульсной функции

(функции Коши) $K(t,\tau)$, которая является решением задачи

$$\begin{cases} K_{tt}(t,\tau)+\omega_n^2 K(t,\tau)=0, t\in(0,\infty), \\ K(\tau,\tau)=0, \\ K_t(\tau,\tau)=1. \end{cases}$$

Импульсная функция имеет вид

$$K(t,\tau)=\frac{\sin\omega_n(t-\tau)}{\omega_n},$$

а решение задачи (18) выражается через функцию Коши следующим образом

$$u_n(t)=\int_0^t K(t,\tau)f_n(\tau)d\tau=\frac{1}{\omega_n}\int_0^t \sin\omega_n(t-\tau)f_n(\tau)d\tau. \qquad (19)$$

Подставим выражение (19) в ряд (14), поменяем порядок интегрирования и суммирования и воспользуемся формулой (16). В результате получим:

$$u(M,t)=\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \qquad (20)$$

где

$$G(x,\xi,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n a}\sin\frac{\pi n x}{l}\sin\frac{\pi n \xi}{l}\sin\omega_n t. \qquad (21)$$

Определение. Функция, определяемая формулой (21), называется функцией влияния мгновенного точечного импульса или функцией Грина

Замечание. Для доказательства существования классического решения задачи (11)-(13), представимого в виде (19), необходимо, чтобы функция $f(x,t)\in C(Q_\infty)$ и удовлетворяла граничным условиям (13).

Рассмотрим физический смысл функции $G(x,\xi,t)$. Обозначим дельта-окрестность точки (x_0,t_0) через Ω_Δ:

$$\Omega_\Delta \equiv \{(x,t): x\in[x_0-\Delta x, x_0+\Delta x],\ t\in[t_0-\Delta t, t_0+\Delta t]\}.$$

Обозначим через $u_\Delta(x,t)$ решение задачи (11)-(13) с правой частью $f_\Delta(x,t)$:

$$f_\Delta(x,t)\neq 0,\ (x,t)\in\Omega_\Delta,$$
$$f_\Delta(x,t)=0,\ (x,t)\notin\Omega_\Delta,$$

Функция $\rho f_\Delta(x,t), \rho=\mathrm{const}$ есть линейная плотность приложенной внешней силы, а внешняя сила, приложенная к участку $x\in[x_0-\Delta x, x_0+\Delta x]$ стержня равна

$$F_\Delta(t)=\rho\int_{x_0-\Delta x}^{x_0+\Delta x} f_\Delta(\xi,t)d\xi.$$

Импульс внешней силы $F_\Delta(t)$ за время $t \in [t_0 - \Delta t, t_0 + \Delta t]$ равен

$$I = \int\limits_{t_0-\Delta t}^{t_0+\Delta t} F_\Delta(\tau)d\tau = \int\limits_{t_0-\Delta t}^{t_0+\Delta t} \int\limits_{x_0-\Delta x}^{x_0+\Delta x} f_\Delta(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Применяя теорему о среднем, получим

$$u_\Delta(M,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^l G(x,\xi,t-\tau)f_\Delta(\xi,\tau)d\xi d\tau =$$

$$= \int\limits_{t_0-\Delta t}^{t_0+\Delta t} \int\limits_{x_0-\Delta x}^{x_0+\Delta x} G(x,\xi,t-\tau)f_\Delta(\xi,\tau)d\xi d\tau =$$

$$= G(x,\xi^*,t-\tau^*) \int\limits_{t_0-\Delta t}^{t_0+\Delta t} \int\limits_{x_0-\Delta x}^{x_0+\Delta x} f_\Delta(\xi,\tau)d\xi d\tau = G(x,\xi^*,t-\tau^*) \cdot \frac{I}{\rho},$$

где $\xi^* \in \left[x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x\right]$, $\tau^* \in \left[t_0 - \Delta t, t_0 + \Delta t\right]$.

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$, получим функцию:

$$u_0\left(x,t\right) = \lim_{\Delta x\to 0, \Delta t\to 0} u_\Delta\left(x,t\right) = G\left(x, x_0, t-t_0\right)\cdot\frac{I}{\rho}. \qquad (22)$$

Таким образом из формулы (22) следует, что можно функцию Грина $G\left(x, x_0, t-t_0\right)$ рассматривать, как влияние мгновенного точечного импульса мощности $I=\rho$, действующего в точке x_0 в момент t_0.

6. Уравнение колебаний на неограниченной прямой

Формула Даламбера

1) Постановка задачи Коши

Если рассматривается процесс колебаний струны в некоторой точке в течение промежутка времени, когда влияние граничных точек струны еще не существенно, вместо полной задачи, учитывающей граничные условия, можно рассматривать задачу с начальными данными в неограниченной области, или **задачу Коши**.

Введем следующие обозначения

$$\Omega_T \equiv R^1 \times (0,T],\ \bar{\Omega}_T \equiv R^1 \times [0,T],\ R^1 \equiv \{-\infty < x < \infty\}.$$

Задача Коши для уравнения колебаний на бесконечной прямой ставится следующим образом:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t), (x,t) \in \Omega_\infty, & (1) \\ u(x,0) = \varphi(x), x \in R^1, & (2a) \\ u_t(x,0) = \psi(x), x \in R^1. & (2b) \end{cases}$$

Определение. Функция $u(x,t)$ называется классическим решением задачи (1)-(2), если она:

1) $u(x,t) \in C^{(2)}(\Omega_\infty) \cap C^{(1)}(\overline{\Omega}_\infty)$,

2) удовлетворяет уравнению (1) в классическом смысле,

3) непрерывно примыкает к начальным условиям (2a), (2b).

2) Вывод формулы Даламбера

Рассмотрим задачу Коши для однородного уравнения колебаний

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), (x,t) \in \Omega_\infty, & (3) \\ u(x,0) = \varphi(x), x \in R^1, & (4a) \\ u_t(x,0) = \psi(x), x \in R^1. & (4b) \end{cases}$$

Предположим, что существует классическое решение задачи (3)-(4).

Характеристики уравнения (3) имеют вид:

$$x - at = C_1, \quad x + at = C_2.$$

Введем новые переменные

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at$$

и приведем уравнение (3) к следующему виду

$$U_{\xi\eta}\left(\xi,\eta\right)=0. \qquad (5)$$

Для всякого решения уравнения (5) получаем

$$U_{\eta}\left(\xi,\eta\right)=\tilde{f}\left(\eta\right).$$

Интегрируя это равенство по η при фиксированном ξ, получим:

$$U\left(\xi,\eta\right)=\int\tilde{f}\left(\eta\right)d\eta+f_1\left(\xi\right)=f_1\left(\xi\right)+f_2\left(\eta\right). \qquad (6)$$

С другой стороны, каковы бы ни были дважды дифференцируемые функции $f_1\left(\xi\right)$, $f_2\left(\eta\right)$, функция $U\left(\xi,\eta\right)$, определяемая формулой (6), представляет собой решение уравнения (5).

Таким образом, формула (6) дает общее решение уравнения (5), а формула (7)

$$u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at) \tag{7}$$

дает общее решение уравнения (3).

Определим функции f_1, f_2 таким образом, чтобы выполнялись начальные условия (4):

$$u(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x),$$
$$u_t(x,0) = af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x), \quad x \in R^1,$$

где штрих означает производную по полному аргументу. Эти равенства имеют место при совпадении полных аргументов функций f_1, f_2.

Обозначим полный аргумент функций f_1, f_2 через ς. Тогда, проинтегрировав второе равенство, получим

$$\begin{cases} f_1(\varsigma) + f_2(\varsigma) = \varphi(\varsigma), \\ f_1(\varsigma) - f_2(\varsigma) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{\varsigma_0}^{\varsigma} \psi(z)\,dz + C, \quad \varsigma \in R^1. \end{cases}$$

Беря полусумму и полуразность этих равенств, будем иметь

$$f_1(\varsigma) = \frac{1}{2}\varphi(\varsigma) + \frac{1}{2a}\int_{\varsigma_0}^{\varsigma} \psi(z)\,dz + \frac{C}{2},$$

$$f_2(\varsigma) = \frac{1}{2}\varphi(\varsigma) - \frac{1}{2a}\int_{\varsigma_0}^{\varsigma} \psi(z)\,dz - \frac{C}{2}, \quad \varsigma \in R^1,$$

причем равенства должны иметь место для любого аргумента ς.

Подставляя найденные выражения для функций f_1, f_2 в формулу (7), окончательно получим

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz. \qquad (8)$$

Формула (8) называется **формулой Даламбера**.

3) Свойства формулы Даламбера

а) Единственность решения. Формула Даламбера доказывает единственность решения задачи (3)-(4). В самом деле. Предположим, что решение задачи (3)-(4) существует. Тогда оно представляется в виде (8). Если бы существовало второе решение задачи (3)-(4), то оно так же бы представлялось формулой (8) и совпадало с первым решением.

б) Существование решения. Пусть функция $\varphi(x)-$ дважды непрерывно дифференцируемая, а функция $\psi(x)-$ непрерывно дифференцируема на бесконечной прямой: $\varphi(x)\in C^{(2)}\left(R^1\right),\ \psi(x)\in C^{(1)}\left(R^1\right).$ Тогда непосредственной поверкой легко проверить, что определяемая формулой Даламбера функция является решением задачи (3)-(4).

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема. Если $\varphi(x)\in C^{(2)}\left(R^1\right),\ \psi(x)\in C^{(1)}\left(R^1\right),$ то классическое решение задачи (3)-(4) существует, единственно и определяется формулой Даламбера (8).

в) Устойчивость решения.

Теорема. Если начальные данные двух задач Коши (3)-(4) удовлетворяют условиям

$$\left|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right|<\varepsilon,\quad x\in R^1,$$

$$\int_a^b \left|\psi_1(z)-\psi_2(z)\right|dz<\varepsilon(b-a),\quad \forall a,b,$$

то для решений этих задач будет выполняться неравенство

$$\left|u_1(x,t)-u_2(x,t)\right|<\varepsilon(1+T),\quad (x,t)\in\bar{\Omega}_T.$$

Доказательство. Используя формулу Даламбера, получаем:

$$\left|u_1(x,t)-u_2(x,t)\right|\le\frac{1}{2}\left|\varphi_1(x+at)-\varphi_2(x+at)\right|+$$

$$+\frac{1}{2}\left|\varphi_1(x-at)-\varphi_2(x-at)\right|+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\left|\psi_1(z)-\psi_2(z)\right|dz,$$

откуда следует, что

$$\left|u_1(x,t)-u_2(x,t)\right| \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2a}2at < \varepsilon(1+T).$$

Ч.т.д.

4) Физическая интерпретация решения

а) Понятие бегущей волны. Конечная скорость распространения.

Пусть некоторый наблюдатель, находившийся в точке x=0 в момент времени t=0, движется со скоростью a положительном направлении оси X. Введем систему координат, связанную с наблюдателем: $x' = x - at,\ t' = t.$

В этой системе координат, движущейся со скоростью a в положительном направлении оси X, функция $u(x,t) = f(x-at)$ будет определяться формулой $f(x'),$ и наблюдатель все время будет видеть тот же профиль, что и в начальный момент. Следовательно, функция $u(x,t) = f(x-at)$ представляет собой правую бегущую волну, распространяющуюся со скоростью а в положительном направлении оси *X*. Аналогично, функция $u(x,t) = f(x+at)$ представляет собой левую бегущую волну, распространяющуюся со скоростью а в отрицательном направлении оси *X*. Таким образом, формула Даламбера представляет общее решение задачи Коши для бесконечной струны (3)-(4) в виде суперпозиции правой и левой бегущих волн:

$$u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at);\ f_1(x+at) = \frac{1}{2}\varphi(x+at) + \Psi(x+at);$$

$$f_2(x-at) = \frac{1}{2}\varphi(x-at) - \Psi(x-at);\ \Psi(\xi) = \frac{1}{2a}\int_{\xi_0}^{\xi}\psi(z)\,dz$$

б) Интерпретация на фазовой плоскости решения для локального начального возмущения. Для выяснения характера решения удобно пользоваться плоскостью состояния (x,t),или фазовой плоскостью.

Функция $u(x,t)=f(x-at)$ сохраняет постоянное значение вдоль правой характеристики $x-at=C$, а функция $u(x,t)=f(x+at)$ сохраняет постоянное значение вдоль левой характеристики $x+at=C$.

Пусть функция $f(x)$ отлична от нуля на интервале (x_1,x_2) и равна нулю вне этого интервала. Проведем через точки $P(x_1,0)$, $Q(x_2,0)$ две правые характеристики $x-at=x_1$, $x+at=x_2$, .соответственно. Эти характеристики разобьют верхнюю полуплоскость $t>0$ на три области: I, II, III. Функция $u(x,t)=f(x-at)$ отлична от нуля в области II, где $x_1<x-at<x_2$, причем две характеристики

$x - at = x_2,\ x - at = x_1$ представляют собой передний и задний фронты распространяющейся правой волны (см. рис. 1). Возьмем теперь на фазовой плоскости некоторую фиксированную точку $M(x_0, t_0)$ и проведем через нее характеристики: правую $x - at = x_0 - at_0$ и левую и $x + at = x_0 + at_0$. Эти характеристики пересекут ось X в точках $P(x_1, 0) = P(x_0 - at_0, 0),\ Q(x_2, 0) = Q(x_0 + at_0, 0)$ (см. рис. 2).

Значение функции $u(x,t)$ в точке $M(x_0, t_0)$ определяется значениями функций $f_1(\varsigma),\ f_2(\varsigma)$ в точках $P(x_1, 0) = P(x_0 - at_0, 0)$ и $Q(x_2, 0) = Q(x_0 + at_0, 0)$, являющихся вершинами треугольника PMQ, образованного двумя характеристиками и осью X, и на его основании PQ:

$$u(M) = \frac{\varphi(P) + \varphi(Q)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{PQ} \psi(z)\,dz.$$

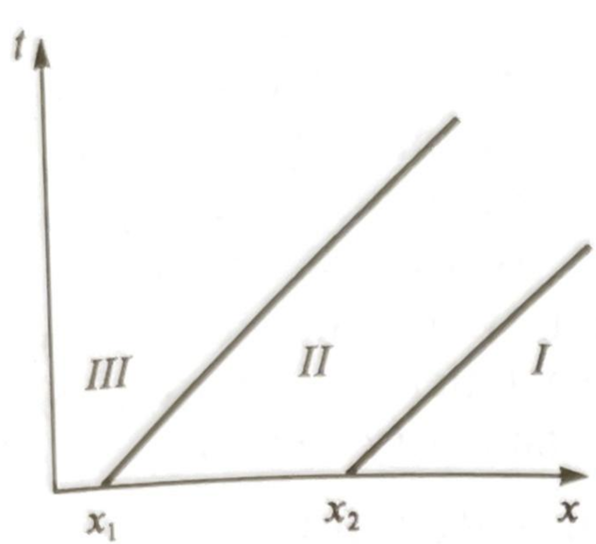

Рис. 1

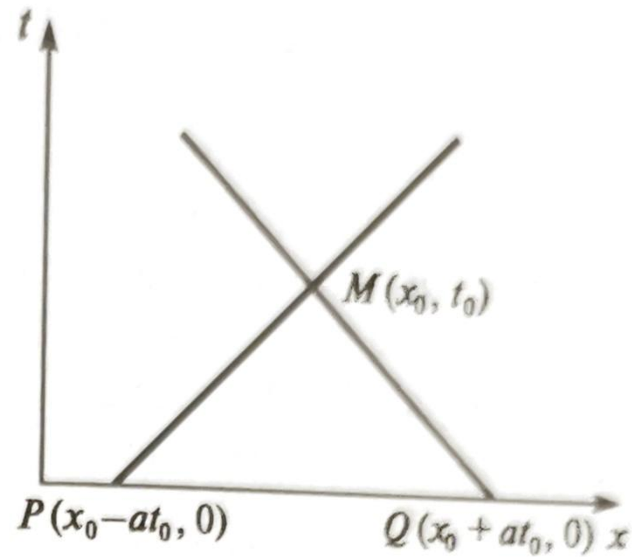

Рис. 2

Начальные данные, заданные вне основания PQ не оказывают влияния на значение $u(x,t)$ в точке $M(x_0,t_0)$. Физически это означает конечную скорость a распространения возмущения.

Пример 1. Рассмотрим случай, когда начальная скорость равна нулю, а начальное отклонение (возмущение) является локальным, то есть отличным от нуля на отрезке $[0,\pi]$ и нулю вне этого отрезка. Пусть, например начальное отклонение имеет вид равнобедренного треугольника, который имеет основанием отрезок $[0,\pi]$. Проведем через точки $P(0,0)$, $Q(\pi,0)$ правую и левую характеристики, которые разобьют верхнюю полуплоскость фазовой плоскость на шесть областей (см. рис. 3).

Рассмотрим, чему будет равно отклонение в каждой из этих областей. Поскольку начальная скорость равна нулю, то отклонение есть сумма правой и левой бегущих волн, что следует из формулы Даламбера при $\psi(x)=0$:

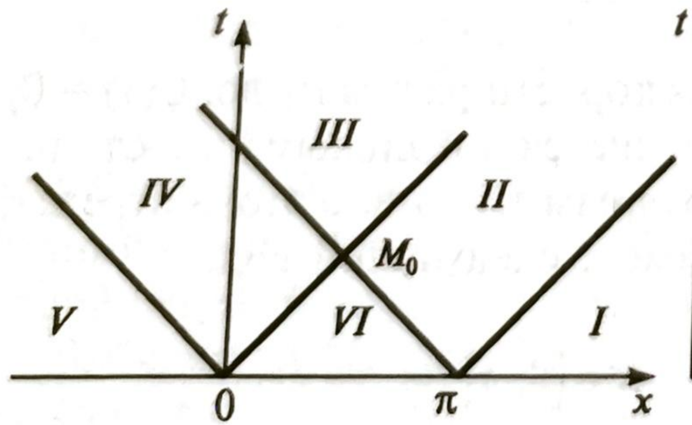
t
III
IV
II
M_0
V
VI
I
0
π
x

Рис. 3

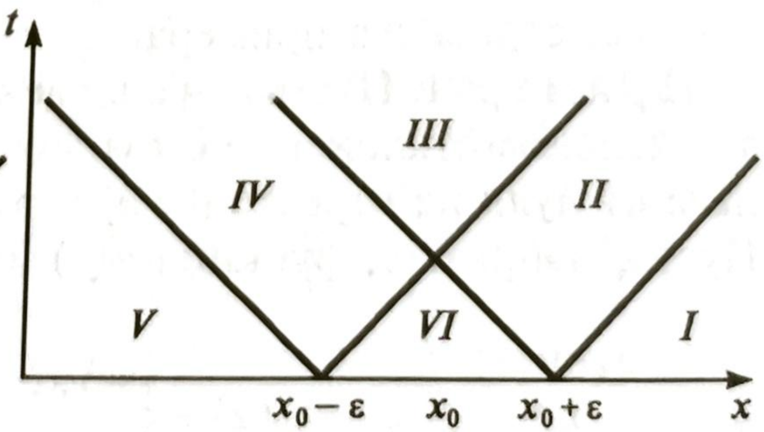
t
III
IV
II
V
VI
I
$x_0-\varepsilon$
x_0
$x_0+\varepsilon$
x

Рис. 4

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\right). \qquad (9)$$

Из формулы (9) следует, что в областях I, III, V отклонение равно нулю. В самом деле, если взять точку любой из этих областей и провести через нее левую и правую характеристики, то они не пересекут отрезок $[0,\pi]$, на котором задано начальное условие. В области II решением будет правая волна $u(x,t)=0.5\varphi(x-at)$, а в области IV будет левая волна $u(x,t)=0.5\varphi(x+at)$. В области VI существует обе волны, то есть решение представляет собой сумму правой и левой волн (см. рис. 3).

Пример 2. Пусть теперь начальное отклонение тождественно равно нулю, а начальная скорость отличается от нуля только в $\varepsilon-$ окрестности точки x_0:

$$\varphi(x)\equiv 0,\ \ \psi(x)=\begin{cases}0, & x<x_0-\varepsilon,\\ \psi_0=const, & x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon,\\ 0, & x_0+\varepsilon<x.\end{cases}$$

В этом случае из формулы Даламбера следует, что возмущение струны можно записать следующим образом:

$$u(x,t)=\Psi(x+at)-\Psi(x-at)=\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz,$$

$$\Psi(\varsigma)=\frac{1}{2a}\int\limits_{\varsigma_0}^{\varsigma}\psi(z)\,dz,$$

Выберем $\varsigma_0 = 0$ и, считая, что $x_0 - \varepsilon > 0$, вычислим $\Psi(\varsigma)$:

$$\Psi(\varsigma) = \frac{1}{2a}\int_0^{\varsigma} \psi(z)dz = \begin{cases} 0, & \varsigma < x_0 - \varepsilon, \\ \dfrac{(\varsigma - x_0 + \varepsilon)}{2a}\psi_0, & x_0 - \varepsilon < \varsigma < x_0 + \varepsilon, \\ \dfrac{\varepsilon\psi_0}{a}, & x_0 + \varepsilon < \varsigma. \end{cases}$$

Проведем на фазовой плоскости (x,t) через точки $P(x_0 - \varepsilon, 0)$ и $Q(x_0 + \varepsilon, 0)$ правую и левую характеристики, которые, как и в первом примере, разобьют верхнюю полуплоскость на шесть областей (см. рис. 4).

1) В области I имеем

$$x - at > x_0 + \varepsilon,\ x + at > x_0 + \varepsilon,\ \Psi(x - at) = \Psi(x + at) = \frac{\varepsilon\psi_0}{a},\ u_1(x,t) = 0$$

2) В области V

$$x+at<x_0-\varepsilon,\ x-at<x_0-\varepsilon,\ \Psi(x-at)=\Psi(x+at)=0,\ u_5(x,t)=0.$$

3) В области III

$$x-at<x_0-\varepsilon,\ x+at>x_0+\varepsilon,\ \Psi(x-at)=0,\Psi(x+at)=\frac{\varepsilon\psi_0}{a},\ u_3(x,t)=\frac{\varepsilon\psi_0}{a}.$$

4) В области II

$$x_0-\varepsilon<x-at<x_0+\varepsilon,\ x+at>x_0+\varepsilon,\ \Psi(x-at)=\frac{x-at-x_0+\varepsilon}{2a}\psi_0,$$

$$\Psi(x+at)=\frac{\varepsilon\psi_0}{a},\ u_2(x,t)=\Psi(x+at)-\Psi(x-at)=\frac{\varepsilon+x_0-(x-at)}{2a}\psi_0.$$

5) В области IV

$$x_0 - \varepsilon < x + at < x_0 + \varepsilon,\ x - at < x_0 - \varepsilon,\ \Psi\left(x - at\right) = 0,$$

$$\Psi\left(x + at\right) = \frac{x + at - x_0 + \varepsilon}{2a}\psi_0,\ u_4\left(x, t\right) = \Psi\left(x + at\right) = \frac{\left(x + at\right) - x_0 + \varepsilon}{2a}\psi_0.$$

6) В области VI

$$x - at > x_0 - \varepsilon,\ x + at < x_0 + \varepsilon,\ \Psi\left(x - at\right) = \frac{x - at - x_0 + \varepsilon}{2a}\psi_0,$$

$$\Psi\left(x + at\right) = \frac{x + at - x_0 + \varepsilon}{2a}\psi_0,\ u_6\left(x, t\right) = \Psi\left(x + at\right) - \Psi\left(x - at\right) = t \cdot \psi_0.$$

Замечание. Функция $u(x,t)$, определяемая формулой Даламбера (8), может быть классическим решением уравнения колебания струны только в том случае, если функция $\varphi(x)$ дифференцируема два раза, функция $\psi(x)$дифференцируема один раз: $\varphi(x)\in C^{(2)}(R^1), \psi(x)\in C^{(1)}(R^1)$. Более того, можно утверждать, что классическое решение уравнения колебаний не существует, если начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ не имеют нужных производных. Повторяя рассуждения, которые привели к формуле Даламбера, можно утверждать, что , если существует классическое решение уравнения колебаний, то оно должно представляться формулой Даламбера. Если же функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ не дифференцируемы достаточное число раз, то формула Даламбера определяет функцию, не удовлетворяющую уравнению колебаний, то есть не существует классического решения этой задачи.

Следовательно, для функций $\varphi(x), \psi(x)$ из примеров 1 и 2 не могут существовать классические решения уравнения колебаний. Однако можно немного изменить (сгладить) начальные функции, заменив их дифференцируемыми функциями $\varphi(x) \in C^{(2)}(R^1), \psi(x) \in C^{(1)}(R^1)$.

Из доказанной теоремы устойчивости следует, что определяемая формулой Даламбера функция $u(x,t)$ непрерывно зависит от начальных функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, независимо от того, дифференцируемы они, или нет. Значит, можно определить **обобщенные решения** уравнения колебаний, которые определяются как предел решений уравнения колебаний со сглаженными начальными условиями.

7. Вынужденные колебания неограниченной струны

1) Колебания струны под действием мгновенного сосредоточенного импульса

Рассмотрим задачу о колебаниях струны под действием мгновенного сосредоточенного импульса. Если точкам струны $\left[x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon\right]$ в начальный момент сообщить скорость ψ_0 (например, как в пианино, ударить струну молоточком), то тем самым к этому участку струны будет приложен импульс I_0, равный изменению количества движения при $t=0$, так что $I_0=2\varepsilon\rho_0\psi_0$, где ρ_0- линейная плотность струны.

Таким образом, нужно решить задачу о колебаниях струны с нулевым начальным отклонением и начальной скоростью $\psi_0=\dfrac{I_0}{2\varepsilon\rho_0}$ на интервале

$(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$ и нулевой начальной скоростью вне этого интервала. Эта задача рассмотрена в предыдущем разделе в примере 2. Если теперь в решении примера совершить предельный переход при $\varepsilon \to 0,$ то области II. IV, VI исчезнут и останутся области I, III, V, причем в областях I и V решение будет равно нулю, а в области III решение будет равно (см. рис. 5):

$$u_0(x,t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\psi_0\varepsilon}{a}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{I_0}{2a\rho_0}=\frac{I_0}{2a\rho_0}.$$

Можно говорить, что это отклонение вызывается мгновенным точечным импульсом I_0.

Если на фазовой плоскости (x,t) через точку (x_0,t_0) провести две характеристики $x-at=x_0-at_0,\ x+at=x_0+at_0,$ то они определят два угла $\alpha_1,\ \alpha_2,$ которые называются, соответственно, верхним и нижним

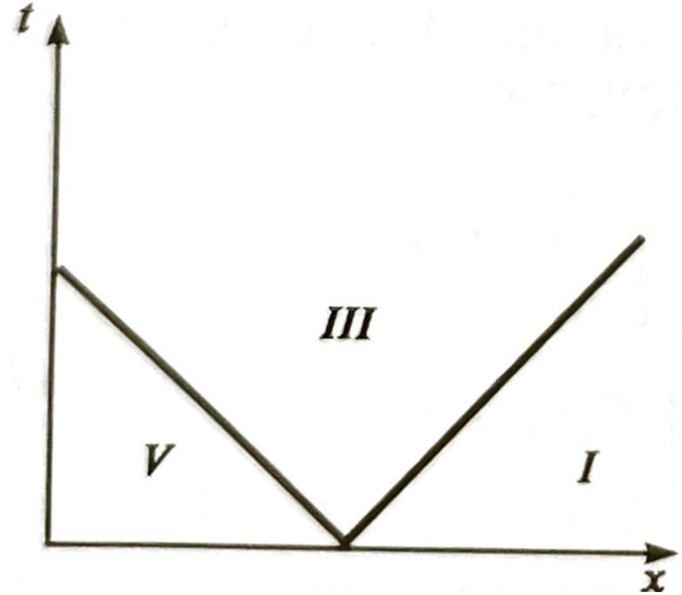

Рис. 5

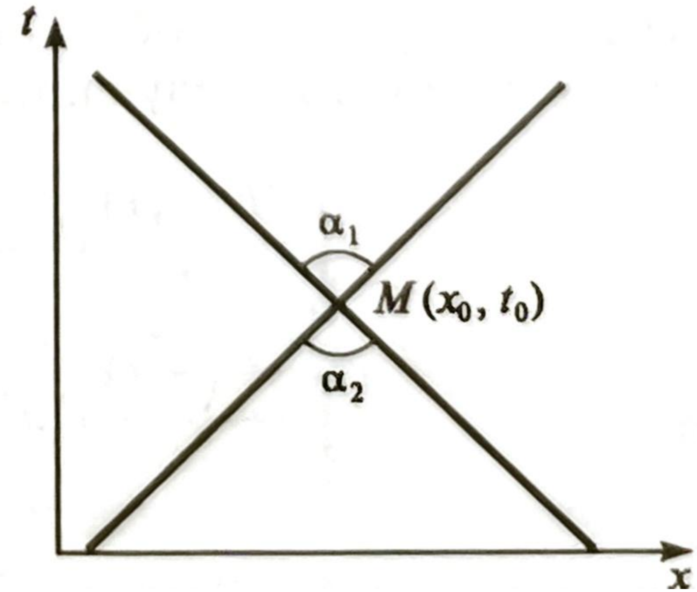

Рис. 6

характеристическими углами для точки (x_0, t_0). Действие мгновенного точечного источника в точке (x_0, t_0) вызывает отклонение $u_0(x,t) = \frac{I_0}{2a\rho_0}$ внутри характеристического угла α_1 точки (x_0, t_0), и нулю вне его (см. рис. 6).

Предположим, что в момент времени $t = \tau$ струне сообщается распределенный импульс с плотностью распределения $\rho_0 f(x,\tau)$, то на основании принципа суперпозиции можно предположить, что отклонение, вызванное таким распределенным импульсом будет равно

$$u_\tau(x,t) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\, d\xi, \quad t > \tau.$$

Если внешняя сила распределена непрерывно, то в силу принципа суперпозиции получим, что отклонение будет равно

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau. \qquad (10)$$

2) Формально-математический вывод формулы(10)

Формула (10) получена на основе качественных рассуждений. Предположим, что решение задачи (1)-(2) существует.

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t),(x,t)\in\Omega_\infty, & (1)\\ u(x,0)=\varphi(x),x\in R^1, & (2a)\\ u_t(x,0)=\psi(x),x\in R^1. & (2b)\end{cases}$$

В данном разделе мы строго математически обоснуем формулу (10).

Напомним формулы Грина в случае двух переменных. Предположим, что $F(x,t) \in C^{(1)}(G) \cap C(\bar{G})$, где $\bar{G} = G + \Gamma -$ двумерная область в плоскости (x,t) с границей Γ. Тогда:

$$\int_G \frac{\partial F(x,t)}{\partial t} dxdt = -\int_\Gamma F dx, \qquad (11a)$$

$$\int_G \frac{\partial F(x,t)}{\partial x} dxdt = \int_\Gamma F dt, \qquad (11b)$$

где контур Γ проходится в положительном направлении (чтобы область G находилась слева, то есть против часовой стрелки).

Возьмем на фазовой плоскости точку M и проведем через нее правую и левую характеристики. Получим характеристический треугольник ABM. Проинтегрируем неоднородное уравнение колебаний (1) по этому треугольнику (см. рис. 7)::

$$\frac{1}{2a}\int\limits_{\Delta ABM}\left(u_{tt}-a^2u_{xx}\right)dxdt=\frac{1}{2a}\int\limits_{\Delta ABM}f\left(x,t\right)dxdt. \qquad (12)$$

Применим к интегралам в левой части формулы (12) формулы Грина (11):

$$\int\limits_{\Delta ABM}u_{tt}dxdt=-\int\limits_{A}^{B}u_t dx-\int\limits_{B}^{M}u_t dx-\int\limits_{M}^{A}u_t dx,$$

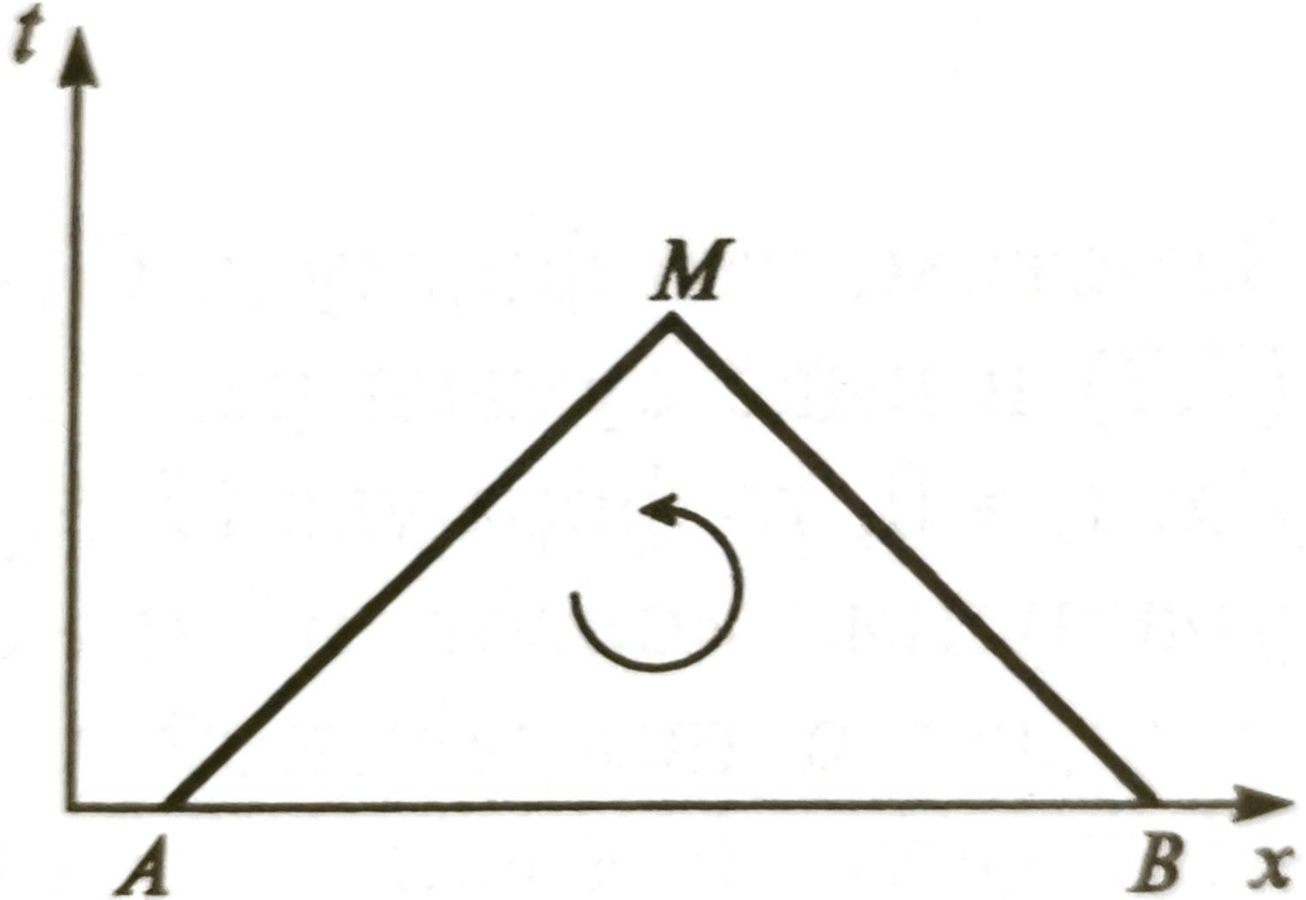

Рис. 7

$$\int\limits_{\Delta ABM} u_{xx}dxdt = \int\limits_{A}^{B} u_x dt + \int\limits_{B}^{M} u_x dt + \int\limits_{M}^{A} u_x dt.$$

Учтем далее, что на отрезке AB dt=0, а на отрезках BM и MA используем уравнения характеристик. На BM: $x + at = C \Rightarrow dx = -adt$, на MA: $x - at = C \Rightarrow dx = adt.$ Поэтому получаем

$$\int\limits_{\Delta ABM} \left(u_{tt} - a^2 u_{xx}\right)dxdt = -\int\limits_{A}^{B} u_t dx + a\int\limits_{B}^{M} u_t dt + u_x dx - a\int\limits_{M}^{A} u_t dt + u_x dx =$$

$$= -\int\limits_{A}^{B} u_t dx + a\Big(u\left(M\right) - u\left(B\right) - u\left(A\right) + u\left(M\right)\Big), \tag{13}$$

Тогда из формул (12), (13) получим

$$u(M)=\frac{u(A)+u(B)}{2}+\frac{1}{2a}\int_A^B u_t dx+\frac{1}{2a}\int_{\Delta ABM} f(x,t)\,dxdt,$$

или, учитывая, что, если $M=M(x,t)$, то $A=A(x-at,0),\ B=B(x+at,0)$:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau. \qquad (14)$$

При $\varphi=\psi=0$ из формулы (14) получаем формулу (10).

3) Существование и единственность решения

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t), (x,t) \in \Omega_\infty, & (15) \\ u(x,0) = 0,\ x \in R^1, & (16a) \\ u_t(x,0) = 0,\ x \in R^1. & (16b) \end{cases}$$

Теорема. Если функция $f(x,t)$ непрерывно дифференцируема в области Ω_∞ : $f(x,t) \in C^{(1)}(\Omega_\infty)$, то классическое решение задачи (15)-(16) $u(x,t)$ существует, единственное и определяется формулой (10).

Доказательство. Доказательство проведем конструктивным методом, подставив функцию $u(x,t)$, определяемую формулой (10) в уравнение (15) и начальные условия (16).

Найдем производные от функции $u(x,t)$.

$$u_x(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t \big(f(x+a(t-\tau),\tau)-f(x-a(t-\tau),\tau)\big)d\tau,$$

$$u_{xx}(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t \big(f'(x+a(t-\tau),\tau)-f'(x-a(t-\tau),\tau)\big)d\tau,$$

$$u_t(x,t)=\frac{1}{2a}\left(\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi\right)_{\tau=t}+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau=$$

$$= \frac{1}{2a} \int_0^t \Big(af\left(x + a(t-\tau),\tau\right) + af\left(x - a(t-\tau),\tau\right)\Big) d\tau,$$

$$u_{tt}(x,t) = \frac{1}{2}\big(f(x,t) + f(x,t)\big) +$$

$$+ \frac{a}{2} \int_0^t \Big(f'\left(x + a(t-\tau),\tau\right) + f'\left(x - a(t-\tau),\tau\right)\Big) d\tau,$$

причем штрих обозначает производную функции $f(x,t)$ по первому аргументу. Подставляя полученные формулы в уравнение (15) и в начальные условия (16), получим тождество.

Из представления решения задачи (15)-(16) формулой (10) следует его единственность. **Ч.т.д.**

8. Задачи для уравнение колебаний на полуограниченной прямой

1) Задачи для однородного уравнения с однородными граничными условиями. Метод отражения

Рассмотрим начально-краевые задачи Дирихле и Неймана для уравнения колебаний на полупрямой.

Задача Дирихле:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),\ (x,t) \in \Omega_\infty^+, & (17) \\ u(x,0) = \varphi(x),\ x \in \overline{R}^+, & (18a) \\ u_t(x,0) = \psi(x), x \in \overline{R}^+, & (18b) \\ u(0,t) = 0,\ t \in [0,\infty). & (19) \end{cases}$$

Задача Неймана:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_{\infty}^{+}, & (20) \\ u(x,0) = \varphi(x),\ x \in \overline{R}^{+}, & (21a) \\ u_t(x,0) = \psi(x), x \in \overline{R}^{+}, & (21b) \\ u_x(0,t) = 0,\ t \in [0,\infty). & (22) \end{cases}$$

где введены обозначения

$$\overline{\Omega}_{\infty}^{+} \equiv \{0 \le x < \infty; 0 \le t < \infty\},\ \Omega_{\infty}^{+} \equiv \{0 < x < \infty; 0 < t < \infty\}.$$

$$\overline{R}^{+} \equiv \{0 \le x < \infty\}, \quad R^{+} \equiv \{0 < x < \infty\}.$$

Рассмотрим применение формулы Даламбера для решения задачи на полупрямой. Докажем две леммы.

Лемма 1. Если в задаче Коши (17)-(19) функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ являются нечетными функциями относительно $x=0$, то решение этой задачи $u(x,t)$ равно нулю при $x=0$: $u(0,t)=0$.

Доказательство. По формуле Даламбера получаем:

$$u(0,t)=\frac{\varphi(at)+\varphi(-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\psi(z)dz.$$

По условию теоремы $\varphi(-at)=-\varphi(at)$ и интеграл от нечетной функции в симметричных пределах равен нулю: $\int_{-at}^{at}\psi(z)dz=0.$ Отсюда $u(0,t)=0.$ **Ч.т.д.**

Лемма 2. Если в задаче Коши (20)-(22) функции $\varphi(x), \psi(x)$ являются четными функциями относительно $x = 0,$ то производная по *x* решения задачи $u(x,t)$ равна нулю при $x = 0:$ $u_x(0,t) = 0.$

Доказательства. При доказательстве леммы учтем следующее свойство: производная четной функции является функцией нечетной. Из формулы Даламбера получаем:

$$u_x(x,t) = \frac{\varphi'(x+at) + \varphi'(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\left(\psi(x+at) - \psi(x-at)\right),$$

$$u_x(0,t) = \frac{\varphi'(at) + \varphi'(-at)}{2} + \frac{1}{2a}\left(\psi(at) - \psi(-at)\right),$$

$$\varphi'(at) + \varphi'(-at) = \varphi'(at) - \varphi'(at) = 0,$$

$$\psi(at) - \psi(-at) = \psi(at) - \psi(at) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_x(0,t) = 0.$$ **ч.т.д.**

Замечание. Приведенное доказательство опирается на формулу Даламбера и не связано с гладкостью (двукратной дифференцируемостью) функции $u(x,t)$. Следовательно, лемма 1 верна для любых функций, представимых формулой Даламбера, а лемма 2 – для функций, представимых формулой Даламбера с непрерывно дифференцируемой функцией $\varphi(x)$. Таким образом, обе формулы справедливы для обобщенных решений рассматриваемых задач.

Рассмотрим задачу Дирихле (17)-(19). Предположим, что выполнены условия согласования начальных и граничного условий: $\varphi(0)=\psi(0)=0$. Для решения задачи используем принцип продолжения. Продолжим нечетно функции $\varphi(x),\ \psi(x)$ на отрицательную полуось X и обозначим эти продолженные функции соответственно через $\Phi(x),\Psi(x)$:

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x>0,\\ -\varphi(-x), & x<0,\end{cases}\qquad \Psi(x)=\begin{cases}\psi(x), & x>0,\\ -\psi(-x), & x<0.\end{cases}$$

Тогда функция

$$u(x,t)=\frac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\Psi(z)dz,\quad x\ge 0, \qquad (23)$$

при $x \ge 0$ будет решением задачи (17)-(19). Функция (23) удовлетворяет однородному волновому уравнению, так как является суперпозицией прямой и обратной волны. Краевому условию она удовлетворяет в силу леммы 1. Проверим выполнение начальных условий.

$$u(x,0)=\frac{\Phi(x)+\Phi(x)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x}^{x}\Psi(z)dz=\Phi(x)=\varphi(x),\quad x\geq 0,$$

$$u_t(x,0)=\frac{a\Phi'(x)-a\Phi'(x)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2a}\left(a\Psi(x)+a\Psi(x)\right)=\Psi(x)=\psi(x),\quad x\geq 0,$$

В формулу (23) входят функции $\Phi(x),\ \Psi(x),$ что неудобно Запишем эту формулу через функции $\varphi(x),\ \psi(x).$

Если $x-at>0,$ то и $x+at>0$, поэтому

$$\Phi(x+at)=\varphi(x+at),\ \Phi(x-at)=\varphi(x-at),$$

$$\Psi(x+at)=\psi(x+at),\ \Psi(x-at)=\psi(x-at).$$

Если $x - at < 0,$ то в силу нечетного продолжения $\Phi\left(x - at\right) =$

$= -\Phi\left(at - x\right) = -\varphi\left(at - x\right),\quad \Psi\left(x - at\right) = -\Psi\left(at - x\right) = -\psi\left(at - x\right).$

Поэтому формула (23) принимает вид:

$$u\left(x,t\right) = \begin{cases} \dfrac{\varphi\left(x+at\right)+\varphi\left(x-at\right)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi\left(z\right)dz,\ 0 \le t \le \dfrac{x}{a},\ x \ge 0, \\ \dfrac{\varphi\left(x+at\right)-\varphi\left(at-x\right)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi\left(z\right)dz,\ t \ge \dfrac{x}{a},\ x \ge 0. \end{cases} \quad (24)$$

Отметим, что при $0 < t \le \dfrac{x}{a}$ влияние граничного условия не сказывается, и формула (24) совпадает с решением для бесконечной струны представимой формулой Даламбера.

Рассмотрим задачу Неймана (20)-(22). Она решается аналогичным образом с использованием метода продолжения, но начальные функции продолжаются четным образом:

$$\tilde{\Phi}(x)=\begin{cases}\varphi(x), \ x>0,\\ \varphi(-x), \ x<0,\end{cases} \qquad \tilde{\Psi}(x)=\begin{cases}\psi(x), \ x>0,\\ \psi(-x), \ x<0.\end{cases}$$

Решение задачи записывается с помощью формулы Даламбера

$$u(x,t)=\frac{\tilde{\Phi}(x+at)+\tilde{\Phi}(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\tilde{\Psi}(z)dz, \quad x\geq 0, \qquad (25)$$

граничное условие (22) выполняется в силу леммы 2.

Переходя к функциям $\varphi(x),\ \psi(x)$, решение задачи (20)-(22) можно записать в виде:

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz,\ 0\le t\le\dfrac{x}{a},\ x\ge 0,\\ \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2}+\\ \qquad +\dfrac{1}{2a}\left(\displaystyle\int_0^{x+at}\psi(z)dz+\int_0^{at-x}\psi(z)dz\right),\ t\ge\dfrac{x}{a},\ x\ge 0.\end{cases}\quad(26)$$

Отметим, что, как и в случае задачи Дирихле, влияние граничных условий не сказывается при $0\le t\le\dfrac{x}{a}$ и решение (26) совпадает с решением задачи на бесконечной прямой.

2) Распространение краевого режима

Рассмотрим на полупрямой задачу для уравнения колебаний с неоднородными граничными условиями Дирихле:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), (x,t) \in \Omega_\infty^+, & (27) \\ u(x,0) = 0,\ x \in \overline{R}^+, & (28a) \\ u_t(x,0) = 0, x \in \overline{R}^+, & (28b) \\ u(0,t) = \mu(t),\ t \in [0,\infty). & (29) \end{cases}$$

Так как единственной причиной возмущения струны является краевой режим, то будем искать решение в виде правой бегущей волны:

$$u(x,t) = f(x - at).$$

Из начальных условий получаем:

$$u(x,0) = f(x) = 0, \quad 0 < x < \infty.$$

Условие

$$u_t(x,0) = -af'(x) = 0, \quad 0 < x < \infty$$

также, очевидно, будет выполнено.

Из краевого условия находим:

$$u(0,t) = f(-at) = \mu(t), \quad t > 0.$$

Таким образом,

$$f\left(\varsigma\right)=\begin{cases}0, & \varsigma\geq 0,\\ \mu\left(-\dfrac{\varsigma}{a}\right), & \varsigma<0,\end{cases}$$

откуда получаем, что

$$u\left(x,t\right)=f\left(x-at\right)=\begin{cases}0, & 0\leq t\leq\dfrac{x}{a},\\ \mu\left(t-\dfrac{x}{a}\right), & t\geq\dfrac{x}{a}.\end{cases}\qquad(30)$$

Для существования классического решения необходимо выполнение условия согласования граничного и начальных условий $\mu\left(0\right)=0.$

9. Колебания в неограниченном пространстве

Рассмотрим задачу Коши для уравнения колебаний в пространстве.

Введем следующие обозначения

$$\Omega_T^3 \equiv \left\{ (M,t) : M \in R^3, t \in (0,T] \right\}; \quad \bar{\Omega}_T^3 \equiv \left\{ (M,t) : M \in R^3, t \in [0,T] \right\}$$

Задача Коши для уравнения колебаний в трехмерном пространстве ставится следующим образом:

$$\begin{cases} u_{tt}(M,t) = a^2 \Delta u(M,t) + f(M,t), \quad (M,t) \in \Omega_\infty^3, & (31) \\ u(M,0) = \varphi(M), M \in R^3, & (32a) \\ u_t(M,0) = \psi(M), M \in R^3. & (32b) \end{cases}$$

Определение. Функция $u(M,t)$ называется классическим решением задачи (31)-(32), если она:

1) $u(M,t) \in C^{(2)}\left(\Omega_\infty^3\right) \cap C^{(1)}\left(\overline{\Omega}_\infty^3\right)$,

2) удовлетворяет уравнению (31) в классическом смысле,

3) непрерывно примыкает к начальным условиям.

Ниже будут указаны условия, при которых существует классическое решение. Пока будем считать, что входные данные задачи удовлетворяют достаточным условиям гладкости, при которых существует классическое решение.

Задача (31)-(32) является естественным пространственным обобщение одномерного случая, рассмотренного ранее. Чтобы получить некоторое общее представление о решении задачи (31)-(32), рассмотрим частный случай.

1) Сферически симметричны случай. Характеристический конус

Пусть данные задачи являются сферически симметричными функциями относительно некоторой точки M_0. Введем сферическую систему координат с началом в этой точке. Очевидно, решение также будет симметричным $u = u(r,t)$. В результате приходим к следующей задаче:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(r,t)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{1}{r^2} \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \dfrac{\partial u(r,t)}{\partial r} \right) + f(r,t),\ r \in (0,\infty),\ t \in (0,\infty), & (33) \\ u(r,0) = \varphi(r),\ r \in [0,\infty), & (34) \\ \dfrac{\partial u(r,0)}{\partial t} = \psi(r),\ r \in [0,\infty), & (35) \\ \left| u(0,t) \right| < \infty,\ t \in [0,\infty). & (36) \end{cases}$$

С помощью замены $v(r,t)=ru(r,t)$ задачу (33)-(36) можно свести к уже изученной задаче одномерных колебаний на полупрямой:

$$\begin{cases} v_{tt}(r,t)=a^2v_{rr}(r,t)+rf(r,t),\ r\in(0,\infty),\ t\in(0,\infty), & (37)\\ v(r,0)=r\varphi(r),\ r\in[0,\infty), & (38)\\ v_t(r,0)=r\psi(r),\ r\in[0,\infty), & (39)\\ v(0,t)=0,\ t\in[0,\infty). & (40)\end{cases}$$

Решение задачи (33)-(36) представляет собой суперпозицию бегущих волн, распространяющихся со скоростью a от начальных возмущений и внешнего источника. Поэтому и решение задачи (37)-(40) будет представлять собой суперпозицию бегущих волн, распространяющихся со скоростью a от начальных возмущений и источника в радиальном направлении. При этом, в силу связи $u(r,t)=\dfrac{v(r,t)}{r}$, амплитуда этих волн будет убывать при удалении от центра – точки M_0. Колебания обладают сферической симметрией. Такие колебания называются **бегущими сферическими волнами – расходящимися и сходящимися** в зависимости от того, распространяется ли волна от точки M_0 или к ней.

Переходя к рассмотрению общего случая, получим одно вспомогательное соотношение, носящее название формулы Кирхгофа.

2) Вывод формулы Кирхгофа

Получим интегральную формулу, аналогичную третьей формуле Грина для уравнений эллиптического типа и связывающую значения любого решения уравнения (31) в произвольной точке M_0 в момент времени t_0 со значением этого решения и его производных на замкнутой поверхности Σ, окружающей точку M_0, в предыдущие моменты времени. Почему в предыдущие моменты времени - это понятно: уравнение колебаний, как мы знаем, описывает процессы с конечной скоростью взаимодействия – явление близкодействия: возмущение, возникшее в точке M в момент времени t оказывается в точке M_0 не мгновенно, а через промежуток времени $\Delta t = \dfrac{r_{MM_0}}{a}$.

Как мы видели, в одномерном случае при рассмотрении решения на фазовой плоскости определяющим является характеристический треугольник, образованный характеристиками $x - at = C$, $x + at = C$, проходящими через точку M_0. Аналогично, в трехмерном и двумерном случаях определяющим является характеристический конус с вершиной в точке (M_0, t_0). Множество точек (M, t), определяемых условиями $\frac{r_{MM_0}}{a} = t_0 - t$, $t < t_0$, называется нижним характеристическим конусом точки (M_0, t_0) и определяет те точки M, из которых возмущение, вышедшее в момент времени t ранее момента t_0, доходит до точки M_0.

Множество точек (M, t), определяемых условием $\frac{r_{MM_0}}{a} = t - t_0$, $t_0 < t$, составляет верхний характеристический конус точки (M_0, t_0): сигнал, вышедший из точки M_0 в момент времени t_0, доходят до этих точек M

в момент времени t.

Для вывода интересующего интегрального соотношения удобно сделать замену независимых переменных, вводя локальное время точки $\left(M_0, t_0\right)$ по формуле

$$t' = t - \left(t_0 - \frac{r_{MM_0}}{a}\right) = t - t_0 + \frac{r_{MM_0}}{a} \qquad (41)$$

Очевидно, для $\left(M_0, t_0\right)$ получим $t' = 0$. Введем сферическую систему координат с центром в точке $M_0\left(r, \theta, \varphi\right)$. При независимых переменных r, θ, φ, t для $u\left(r, \theta, \varphi, t\right)$ имеем задачу (31)-(32). Получим задачу в новых переменных

$$u\left(r, \theta, \varphi, t\right) = u\left(r, \theta, \varphi, t' + \left(t_0 - \frac{r}{a}\right)\right) = U\left(r, \theta, \varphi, t'\right). \qquad (42)$$

Пересчитаем производные:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{a}\frac{\partial U}{\partial t'};\;\;\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{2}{a}\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial t'}+\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t'^2};$$
$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial U}{\partial \theta};\;\;\frac{\partial u}{\partial \varphi}=\frac{\partial U}{\partial \varphi};\;\;\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial U}{\partial t'};\;\;\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial t'^2}. \qquad (43)$$

Подставим формулы (43) в уравнение (31), учитывая вид оператора Лапласа в сферической системе координат:

$$\Delta u\equiv\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}u,\;\;\Delta_{\theta,\varphi}u\equiv\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

В результате получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t'^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial t'^2}+a^2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+2a\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial t'}+\frac{2a^2}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{2a}{r}\frac{\partial U}{\partial t'}+\frac{a^2}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}U+F\left(M,t'\right),$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t'^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial t'^2}+a^2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+2a\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial t'}+\frac{2a^2}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{2a}{r}\frac{\partial U}{\partial t'}+\frac{a^2}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}U+F\left(M,t'\right), \tag{44}$$

$$a^2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{2a^2}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{a^2}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}U\equiv a^2\Delta U,$$

$$2a\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial t'}+\frac{2a}{r}\frac{\partial U}{\partial t'}=a^2\left(\frac{2}{ar}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial t'}\right)\right),\quad F\left(M,t'\right)=F\left(M,t-t_0+\frac{r_{MM_0}}{a}\right)=f\left(M,t\right).$$

Преобразовав уравнение (44) и поделив обе его части на a^2, получим вид уравнения колебаний (31) в новых переменных:

$$\Delta U\left(M,t'\right)=-\frac{2}{ar}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U\left(M,t'\right)}{\partial t'}\right)-\frac{1}{a^2}F\left(M,t'\right) \tag{45}$$

Формально предполагая существование решения уравнения колебаний (31), мы можем рассматривать уравнение (45) как уравнение Пуассона , правая часть которого является функцией параметра t'.

Нас интересует значение решения уравнения (31) $u(M_0,t_0)=U(M_0,0)$.
На основании третьей формулы Грина мы можем формально записать:

$$U(M_0,0)=\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial U(P,0)}{\partial n_P}-U(P,0)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\right)\right)d\sigma_P+$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int_{D}\frac{1}{r_{MM_0}^2}\frac{\partial}{\partial r_{MM_0}}\left(r_{MM_0}\frac{\partial U(M,0)}{\partial t'}\right)dV_M+\frac{1}{4\pi a^2}\int_{D}\frac{F(M,0)}{r_{MM_0}}dV_M. \quad (46)$$

В дальнейшем будем предполагать, что область $\bar{D}=D+\Sigma$ ограничена поверхностью Σ, являющейся **звездной** относительно точки M_0: любой луч, проведенный из точки M_0, пересекает поверхность Σ только в одной точке. Это предположение не является ограничением для наших дальнейших рассуждений.

Интегралы по области D в формуле (46) являются сходящимися несобственными интегралами. Преобразуем первый из них (отмечен синим цветом):

$$I=\int_D \frac{1}{r_{MM_0}^2}\frac{\partial}{\partial r_{MM_0}}\left(r_{MM_0}\frac{\partial U(M,0)}{\partial t'}\right)dV_M=\left\{dV_M=r_{MM_0}^2\,d\omega dr_{MM_0}\right\}=$$

$$=\int_D \frac{\partial}{\partial r_{MM_0}}\left(r_{MM_0}\frac{\partial U(M,0)}{\partial t'}\right)d\omega dr_{MM_0}=\int_\Omega r_{PM_0}\frac{\partial U(P,0)}{\partial t'}d\omega=$$

$$=\int_\Omega \frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial U(P,0)}{\partial t'}r_{PM_0}^2\,d\omega=\int_\Sigma \frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial U(P,0)}{\partial t'}\frac{dr_{PM_0}}{dn_P}d\sigma_P, \qquad (47)$$

где интеграл по Ω означает интегрирование по единичной сфере, то есть по углам $\theta,\ \varphi.$ Заметим, что при переходе от интеграла по области D к интегралу по единичной сфере Ω мы воспользовались звездностью области D относительно точки M_0. При переходе от интегрирования по единичной сфере Ω к интегрированию по $\sum$ были использованы соотношения

$$r_{PM_0}^2 d\omega = \cos\gamma d\sigma_P = \frac{dr_{PM_0}}{dn_p} d\sigma_P, \quad P \in \Sigma, \qquad (48)$$

где γ —угол между векторами $\vec{n}_P,\ \vec{r}_{PM_0}$.

Подставляя значение интеграла из формулы (47) в формулу (46) , будем иметь:

$$U\left(M_0,0\right)=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial U\left(P,0\right)}{\partial n_P}-U\left(P,0\right)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\right)+\frac{2}{ar_{PM_0}}\frac{\partial U\left(P,0\right)}{\partial t'}\frac{dr_{PM_0}}{dn_p}\right)d\sigma_P+$$

$$+\frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_{D}\frac{F\left(M,0\right)}{r_{MM_0}}dV_M. \qquad (49)$$

Вернемся к формуле (49) к старым независимым переменным. Так как

$$\frac{\partial U}{\partial n_P}=\frac{\partial u}{\partial n_P}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial r}\frac{dr}{dn_P}, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial n_P}\right|_{t'=0}=\left(\frac{\partial u}{\partial n_P}-\frac{1}{a}\frac{dr}{dn_P}\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=t_0-\frac{r_{PM_0}}{a}},$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial t'}\right|_{t'=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=t_0-\frac{r_{PM_0}}{a}},$$

то

$$u(M_0,t_0)=$$
$$=\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial u(P,t)}{\partial n_P}-u(P,t)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\right)+\frac{1}{ar_{PM_0}}\frac{\partial u(P,t)}{\partial t}\frac{dr_{PM_0}}{dn_p}\right)_{t=t_0-\frac{r_{PM_0}}{a}}d\sigma_P+$$
$$+\frac{1}{4\pi a^2}\int_D\frac{f\left(M,t_0-\frac{r_{MM_0}}{a}\right)}{r_{MM_0}}dV_M. \qquad (50)$$

Формула (50) и является искомым интегральным соотношением. Она называется **формулой Кирхгофа.**

Кирхгоф Густав Роберт (1824-1887 гг.) – немецкий физик. Развил строгую теорию дифракции (1882 г.).

3) Формула Пуассона

Воспользуемся полученными результатами для того, чтобы получить явное аналитическое представление решения задачи Коши (31)-(32). Мы предполагаем, что выполнены условия гладкости данных задачи (31)-(32), обеспечивающие существование решения и применимости формулы (50). В этой формуле область $\bar{D} = D + \Sigma$ является произвольной областью, содержащая точку M_0 внутри: $M_0 \in D$.

Выберем в качестве поверхности Σ сферу $\Sigma_{M_0}^{at_0}$. Тогда получаем:

$$u\left(P, t_0 - \frac{r_{PM_0}}{a}\right) = u\left(P, t_0 - \frac{at_0}{a}\right) = u(P, 0) = \varphi(P),\ P \in \Sigma_{M_0}^{at_0},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u\left(P,t_0-\frac{r_{P,M_0}}{a}\right)=\frac{\partial}{\partial t}u\left(P,t_0-\frac{at_0}{a}\right)=\frac{\partial}{\partial t}u\left(P,0\right)=\psi\left(P\right),\quad P\in\Sigma_{M_0}^{at_0},$$

$$\frac{\partial}{\partial n_P}u\left(P,t_0-\frac{r_{P,M_0}}{a}\right)=\frac{\partial}{\partial n_P}u\left(P,t_0-\frac{at_0}{a}\right)=\frac{\partial}{\partial n_P}u\left(P,0\right)=\frac{\partial}{\partial n_P}\varphi\left(P\right),\quad P\in\Sigma_{M_0}^{at_0}.$$

При этом поскольку получаем, что

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\varphi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\varphi\right),\ \varphi=\varphi\left(P\right),\ r\equiv r_{PM_0},\ P\in\Sigma_{M_0}^{at_0},$$

то из формулы (50) при $f\left(M,t\right)\equiv 0$ следует решение задачи Коши для однородного уравнения колебаний в трехмерном пространстве:

$$u\left(M_0,t_0\right)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma_{M_0}^{at_0}}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\varphi\right)+\frac{1}{ar}\psi\right)r^2d\omega=$$

$$
= \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi) + \frac{1}{a}(r\psi) \right) \Bigg|_{r=at_0} d\omega =
$$

$$
= \frac{1}{4\pi a} \left(\frac{\partial}{\partial t_0} \int_{\Omega} r\varphi \Big|_{r=at_0} d\omega + \int_{\Omega} r\psi \Bigg|_{r=at_0} d\omega \right),
$$

Откуда окончательно получаем:

$$
u(M_0, t_0) = \frac{1}{4\pi a} \left(\frac{\partial}{\partial t_0} \int_{\Sigma_{M_0}^{at_0}} \frac{\varphi(P)}{r_{PM_0}} d\sigma_P + \int_{\Sigma_{M_0}^{at_0}} \frac{\psi(P)}{r_{PM_0}} d\sigma_P \right). \qquad (51)
$$

Формула (51), выражающая влияние начальных условий, называется **формулой Пуассона**.

В общем случае формула, выражающая решение задачи **(31)-(32)** Коши для неоднородного уравнения колебаний с неоднородными начальными условиями имеет вид:

$$u\left(M_0,t_0\right)=\frac{1}{4\pi a}\left(\frac{\partial}{\partial t_0}\int\limits_{\Sigma_{M_0}^{at_0}}\frac{\varphi\left(P\right)}{r_{PM_0}}d\sigma_P+\int\limits_{\Sigma_{M_0}^{at_0}}\frac{\psi\left(P\right)}{r_{PM_0}}d\sigma_P\right)+$$

$$+\frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_{K_{M_0}^{at_0}}\frac{f\left(M,t_0-\dfrac{r_{MM_0}}{a}\right)}{r_{MM_0}}dV_M. \qquad (52)$$

Замечание 1. Формула (52), так же, как и формула Даламбера, доказывает теорему единственности решения задачи (31)-(32).

Замечание 2. Существование классического решения задачи (31)-(32) можно доказать путем непосредственной проверки того, что при достаточной гладкости входных данных функция, определяемая формулой (52), удовлетворяет всем условиям задачи (31)-(32). При этом достаточно потребовать, чтобы $\varphi \in C^{(3)}\left(R^3\right), \psi \in C^{(2)}\left(R^3\right), f \in C^{(2)}\left(\Omega_\infty^3\right)$.

Замечание 3. Из формулы (52) следует устойчивость решения задачи (1)-(2). Как легко видеть, малому изменению входных данных φ, ψ, f будет отвечать малые изменения решения $u\left(x,t\right)$. Причем возмущения входных данных можно задавать в оценивать $L_P -$ норме, а оценивать возмущения решения в равномерной C – норме.

4) Метод спуска Адамара

Мы получили формулу Пуассона решения задачи Коши для уравнения колебаний в трехмерном случае. Но с помощью метода спуска Адамара можно из формулы Пуассона, дающей решение в пространстве (трехмерный случай), получить формулу для решения задачи на плоскости (двумерный случай) и на прямой (одномерный случай).

Пусть входные данные задачи (31)-(32) не зависят от z: $\varphi=\varphi(x,y)$; $\psi=\psi(x,y)$; $f=f(x,y,t)$. Тогда в формуле Пуассона u не будет зависеть от z: $u=u(x,y,t)$ и, кроме того, мы можем перейти от интегрирования по поверхности сферы (или объему шара) к интегрированию по ее проекции на плоскость $x,y-$ кругу радиуса at. При этом нужно учесть, что обе полусферы проектируются на один и тот

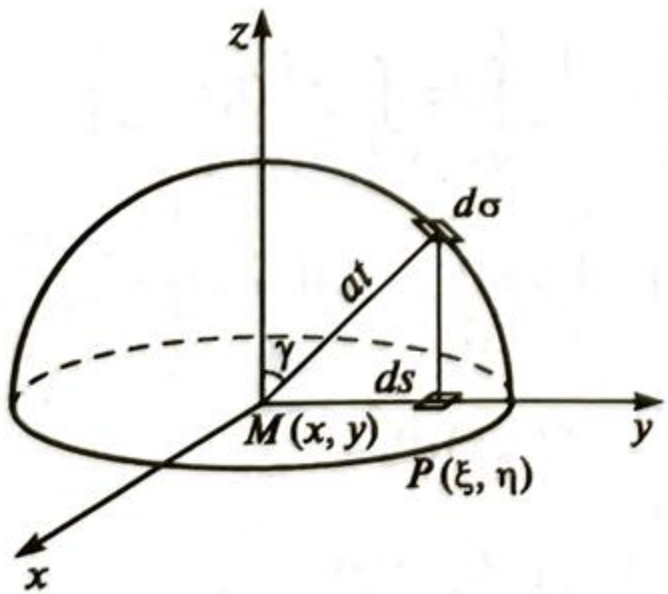

Рис. 8

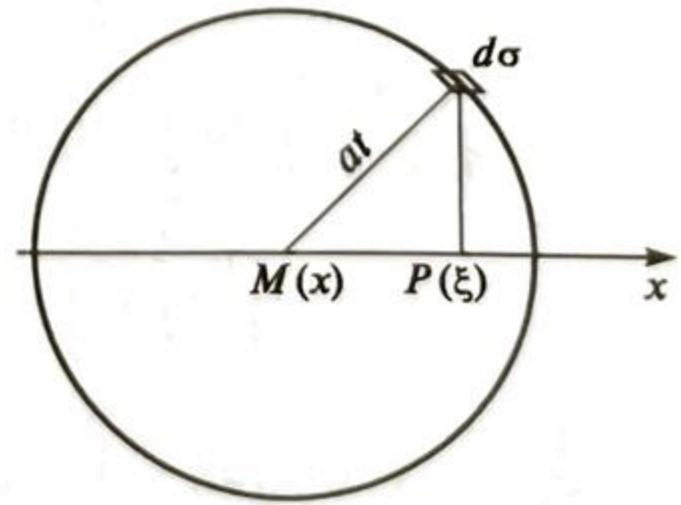

Рис. 9

тот же круг (см. рис. 8):.

Элемент поверхности сферы $d\sigma$ связан с элементом плоскости ds соотношением:

$$d\sigma = \frac{ds}{\cos\gamma} \Rightarrow ds = \cos\gamma \cdot d\sigma; \;\; \cos\gamma = \cos\left(\vec{r}, \vec{z}\right) = \frac{\sqrt{\left(at\right)^2 - r_{PM}^2}}{at} =$$

$$= \frac{\sqrt{\left(at\right)^2 - \left(x-\xi\right)^2 - \left(y-\eta\right)^2}}{at}; \; ds = d\xi \cdot d\eta; \;\; \frac{d\sigma}{r} = \frac{ds}{at\cos\gamma} =$$

$$= \frac{d\xi \cdot d\eta}{\sqrt{\left(at\right)^2 - \left(x-\xi\right)^2 - \left(y-\eta\right)^2}}$$

Пусть U_M^{at} – круг радиуса at с центром в точке M.
Так как

$$d\sigma = (at)^2\, d\omega \Rightarrow d\omega = \frac{d\sigma}{(at)^2} = \frac{1}{(at)^2}\frac{ds}{\cos\gamma} = \frac{1}{at}\frac{ds}{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}};$$

$$r \cdot d\omega = at \cdot d\omega = \frac{ds}{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}};$$

$$\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{K_M^{at}} \frac{f\left(Q, t - \dfrac{r_{QM}}{a}\right)}{r_{QM}}\, dV_Q = \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_0^{at} d(a\tau) \iint\limits_{\Sigma_M^{a\tau}} \frac{f\left(Q, t - \dfrac{r_{QM}}{a}\right)}{r_{QM}}\, d\sigma_Q =$$

$$= \frac{1}{4\pi a}\int\limits_0^{t} d\tau \iint\limits_{\Sigma_M^{a\tau}} \frac{f(Q, t-\tau)}{r_{QM}}\, d\sigma_Q,$$

то из формулы Пуассона для трехмерного случая (52) получаем формулу для двумерного случая:

$$u(x,y,z)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{U_M^{at}}\frac{\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{U_M^{at}}\frac{\psi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t\iint\limits_{U_M^{a\tau}}\frac{f(\xi,\eta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(a\tau)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}d\tau \qquad (53)$$

Предположим теперь, что входные данные задачи (31)-(32) зависят от одного пространственного переменного $x : \varphi = \varphi(x); \psi = \psi(x); f = f(x,t)$.

Введем сферическую систему координат, направив полярную ось по оси x (см. рис. 9). Будем иметь:

$$d\sigma = r^2 d\omega = r^2 \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\phi;\ \ \xi - x = r \cdot \cos\theta;\ \ \xi = x + r\cos\theta;$$

$$d\xi = -r \cdot \sin\theta \cdot d\theta;\ d\sigma = -r \cdot d\phi \cdot d\xi;\ d\omega = \frac{d\sigma}{r^2} = -\frac{1}{r} d\phi \cdot d\xi;\ r \cdot d\omega = -d\phi \cdot d\xi.$$

Заметим, что при θ меняющемся от 0 до π и $r = at,$ переменная ξ будет меняться от $\xi = x + at$ до $\xi = x - at.$

Из формулы Пуассона для трехмерного случая (52) получаем следующую формулу:

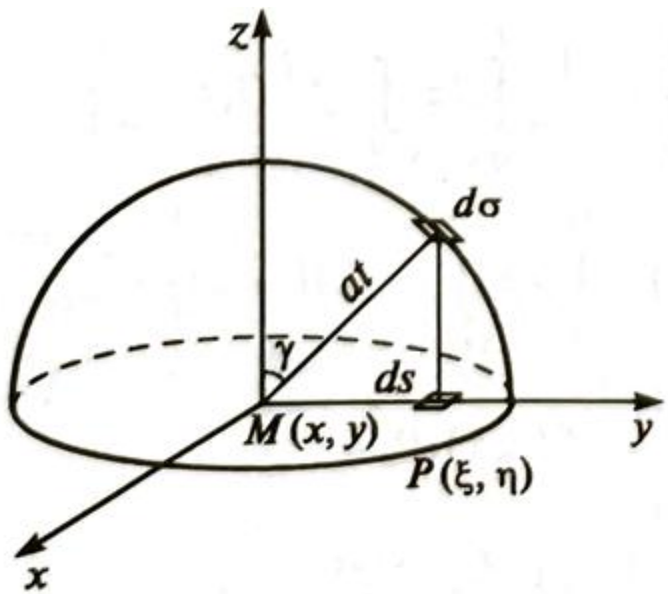

Рис. 8

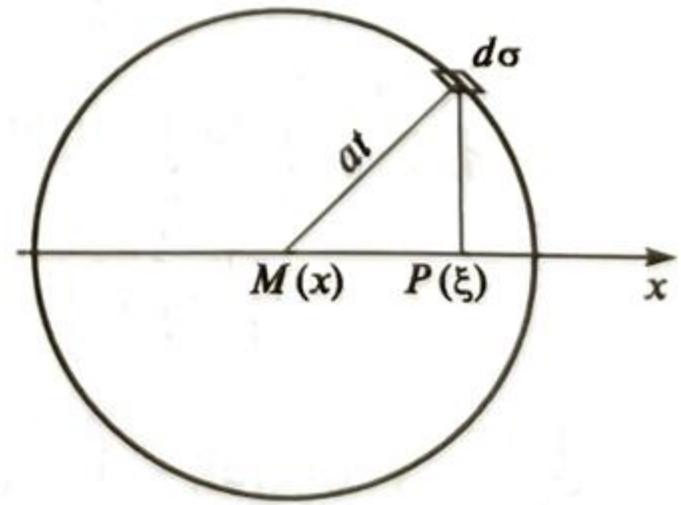

Рис. 9

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi a}\left(\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\Sigma_M^{at}} r\varphi\, d\omega+\iint\limits_{\Sigma_M^{at}} r\psi\, d\omega\right)+\frac{1}{4\pi a}\int\limits_0^t d\tau\iint\limits_{\Sigma_M^{a\tau}}\frac{f\left(Q,t-\frac{r_{QM}}{a}\right)}{r_{QM}}r_{QM}^2\, d\omega=$$

$$=\frac{1}{4\pi a}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{2\pi} d\phi\int\limits_{x+at}^{x-at}\varphi(\xi)(-d\xi)+\int\limits_0^{2\pi} d\phi\int\limits_{x+at}^{x-at}\psi(\xi)(-d\xi)\right)+$$

$$+\frac{1}{4\pi a}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^{2\pi} d\phi\int\limits_{x+a\tau}^{x-a\tau} f(\xi,t-\tau)(-d\xi).$$

Сделав в последнем интеграле замену $t-\tau$ на τ, приведем его к виду:

$$\frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-a\tau}^{x+a\tau} f(\xi,t-\tau)d\xi=\frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi.$$

Таким образом, получаем:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)\,d\xi+\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi\right)+$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\xi. \qquad (54)$$

Продифференцировав в формуле (54) первый интеграл по t, получим хорошо известную формулу (при f=0) формулу Даламбера.

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\xi. \qquad (55)$$

Уравнение колебаний с тремя, двумя и одним пространственными аргументами называют уравнениями сферических, цилиндрических и плоских волн.

Метод, заключающийся в получении из формулы с большим числом пространственных переменных формулу решения с меньшим числом пространственных переменных, носит название **метода спуска Адамара**.

Этот метод применим не только к уравнению колебаний, но и к другим типам уравнений.

5) Физическая интерпретация

1. Локальные начальные условия. Пусть пока в задаче (31)-(32) функция $f(M,t)=0$.

Рассмотрим случай локального начального возмущения, когда начальное возмущение (функции $\varphi > 0$ и $\psi > 0$) отличны от нуля только в некоторой ограниченной области D_0 : $D_0 = \operatorname{supp}\varphi = \operatorname{supp}\psi$.

Рассмотрим изменение состояния $u(M_0,t)$ в точке $M_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ трехмерной области, лежащей вне области D_0. Формула Пуассона при $f(M,t)=0$ имеет вид:

$$u(M_0,t) = \frac{1}{4\pi a}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Sigma_{M_0}^{at}\cap D_0}\frac{\varphi(P)}{r_{PM_0}}d\sigma_P + \int\limits_{\Sigma_{M_0}^{at}\cap D}\frac{\psi(P)}{r_{PM_0}}d\sigma_P\right).$$

Функция $u(M_0,t)$ отлична от нуля только в том случае, если сфера $\Sigma_{M_0}^{at}$ пересекает область начальных значений D_0. Пусть d_1 и d_2 – расстояния от точки M_0 до ближайшей и наиболее удаленной точек области $D_0: d_1 = \min \rho(M_0,\ D_0); d_2 = \max \rho(M_0,\ D_0)$ (см. рис.10).

Если $t < t_1 = \dfrac{d_1}{a}$, то $\Sigma_{M_0}^{at} \cap D_0 = \varnothing,\ u(M_0,t) = 0:$

до точки M_0 возмущение еще не дошло.

Если $t_1 = \dfrac{d_1}{a} < t < t_2 = \dfrac{d_2}{a}$, то $\Sigma_{M_0}^{at} \cap D_0 \neq \varnothing,\ u(M_0,t) \neq 0:$

точка M_0 находится в возмущенном состоянии.

Если $t > t_2 = \dfrac{d_2}{a}$, то $\Sigma_{M_0}^{at} \cap D_0 = \varnothing,\ u(M_0,t) = 0:$ возмущение

прошло точку M_0.

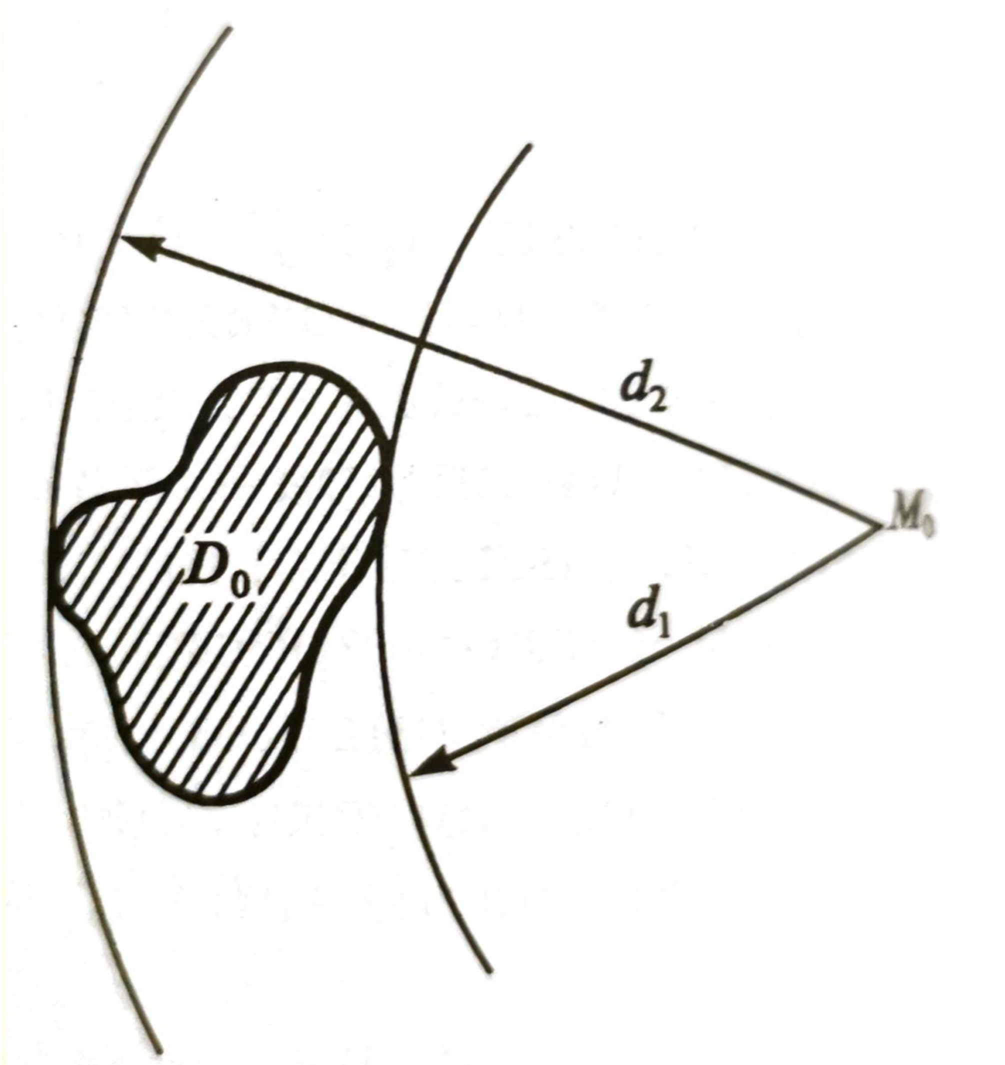

Рис. 10

Таким образом, при распространении локального возмущения в трехмерном пространстве явление последействия отсутствует.

Теперь рассмотрим мгновенную пространственную картину возмущения $u\left(M, t_0\right)$ в некоторый момент t_0.

Точки M, находящиеся в возбужденном состоянии, характеризуется тем, что сферы $\Sigma_M^{at_0}$ пересекают область начальных возмущений D_0. Таким образом, множество точек W, в которых возмущение отлично от нуля, состоит из точек M, находящихся на сферах $\Sigma_M^{at_0}$ радиуса at_0 с центром в точках M', находящихся в области D_0:

$$W = \left\{ M \in \Sigma_{M'}^{at_0}; M' \in D_0 \right\}.$$

Огибающие семейства сфер $\Sigma_{M'}^{at_0}$ будут границами области W. Внешняя огибающая называется **передним фронтом**, а внутренняя огибающая – **задним фронтом** распространяющейся волны.

Таким образом возмущение, локализованное в пространстве, в трехмерном случае вызывает в каждой точке M_0 пространства действие, локализованное во времени. При этом имеет место распространение волны с резко очерченным передним и задним фронтом. **Выполняется принцип Гюйгенса.**

Перейдем к случаю двух переменных. Пусть начальное возмущение задано в области G_0 на плоскости (x, y). Рассмотрим изменение состояния $u(M_0, t)$ точке M_0, расположенной вне G_0.

Состояние в точке $M_0(x_0, y_0)$ определяется формулой:

$$u\left(x_0, y_0, t\right) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{U_{M_0}^{at}\cap G_0} \frac{\varphi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}} +$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{U_{M_0}^{at}\cap G_0} \frac{\psi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}},$$

то есть состояние $u\left(x_0, y_0, t\right)$ определяется начальными значениям в точках $P(\xi,\eta)$, принадлежащих пересечению $U_{M_0}^{at}\cap G_0$ с учетом финитности функций $\varphi(P)$, $\psi(P)$.

Обозначим через d кратчайшее расстояние от точки M_0 до области G_0: $d_1 = \min \rho\left(M_0,\ \mathrm{G}_0\right)$.

Если $t < t_1 = \dfrac{d_1}{a}$, то $u(M_0, t) = 0.$

Если $t > t_1$, то $u(M_0, t) \neq 0.$ Таким образом, начиная с момента времени $t = t_1$, в точке M_0 возникает возмущение, которое сначала, вообще говоря, возрастают, а затем, начиная с некоторого момента времени, постепенно убывает до нуля при $t \to \infty.$ В этом явлении последействия и заключается отличие двумерного плоского случая от трехмерного пространственного. Мгновенная картина возмущений на плоскости имеет резко очерченный передний фронт, но не имеет заднего фронта. Влияние начальных возмущений, локализованных на плоскости, не локализовано во времени и характеризуется длительно продолжающимся последействием. **Принцип Гюйгенса не выполняется.**

.

6) Функция источника

Пусть в задаче (31)-(32) начальные функции равны нулю: $\varphi(M)=0$, $\psi(M)=0$, а функция $f(M,t)$ отлично от нуля лишь в точке $M=M_0$ (рассмотрим трехмерный случай):

$$f(M,t)=\tilde{f}(t)\cdot\delta(M,M_0). \qquad (56)$$

Напомним основные свойства дельта-функции. Для любой непрерывной функции $\varphi(M)$ получаем:

$$\iiint\limits_D \varphi(Q)\delta(Q,M_0)\,dV_Q=\begin{cases}0, & M_0\notin D,\\ \varphi(M_0), & M_0\in D\end{cases}. \qquad (57)$$

Возмущение $\tilde{u}(M,t)$ определяется формулой:

$$\tilde{u}(M,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{K_M^{at}}\frac{f\left(Q,t-\dfrac{r_{MQ}}{a}\right)}{r_{MQ}}dV_Q=$$

$$=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{K_M^{at}}\frac{\tilde{f}\left(t-\dfrac{r_{MQ}}{a}\right)\delta(Q,M_0)}{r_{MQ}}dV_Q. \qquad (58)$$

Так как $M_0\in K_M^{at}$, если $at>r_{MM_0}$, и $M_0\notin K_M^{at}$, если имеем $at<r_{MM_0}$, то получаем, что возмущение $\tilde{u}(M,t)$ будет иметь следующий вид:

$$\tilde{u}(M,t)=\begin{cases}0, \ t<\dfrac{r_{MM_0}}{a}, \\ \dfrac{1}{4\pi a^2}\dfrac{1}{r_{MM_0}}\tilde{f}\left(t-\dfrac{r_{MM_0}}{a}\right), \ t>\dfrac{r_{MM_0}}{a}\end{cases}. \quad (59)$$

Если, в частности, функция $\tilde{f}(t)$ представляет собой импульс конечной длительности:

$$\tilde{f}(t)\equiv 0, \ t>t_1,$$

то вызываемое им возмущение можно записать следующим образом:

$$\tilde{u}(M,t)=\begin{cases} 0,\ t<\dfrac{r_{MM_0}}{a}, \\ \dfrac{1}{4\pi a^2}\dfrac{1}{r_{MM_0}}\,\tilde{f}\left(t-\dfrac{r_{MM_0}}{a}\right),\ \ \dfrac{r_{MM_0}}{a}<t<t_1+\dfrac{r_{MM_0}}{a}, \\ 0,\ t>t_1+\dfrac{r_{MM_0}}{a}. \end{cases} \quad (60)$$

Из формулы (60) следует, что опять можно говорить о переднем и заднем фронтах волны возмущений от точечного источника, проходящей через точку M.

Определение. Функция $\tilde{u}(M,t)$, являющаяся решением задачи о возбуждении точечным импульсом конечной длительности, называется **функцией источника.**

7) Установившиеся колебания

Рассмотрим задачу (31)-(32) с нулевым начальными условиями и правой частью, являющейся периодической по времени функцией:

$$f(M,t)=\tilde{f}(M)e^{-i\omega t}, \tag{61}$$

где $\tilde{f}(M)-$ финитная функция с локальным носителем в области D: $\operatorname{supp}\tilde{f}\subset D.$ Тогда по формуле (52) получаем:

$$u(M,t)= \tag{62}$$

$$=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{K_M^{at}}\frac{\tilde{f}(Q)e^{-i\omega\left(t-\frac{r_{QM}}{a}\right)}}{r_{QM}}dV_Q=\frac{e^{-i\omega t}}{4\pi a^2}\iiint\limits_{K_M^{at}}\frac{\tilde{f}(Q)e^{i\omega\frac{r_{QM}}{a}}}{r_{QM}}dV_Q.$$

Обозначим через $\rho\left(M,\operatorname{supp}\tilde{f}\right)$ расстояние от точки M до носителя функции $\tilde{f}$ и введем минимальное и максимальное расстояния от точки M до носителя:

$$d_1 = \min\rho\left(M,\operatorname{supp}\tilde{f}\right),\;\; d_2 = \max\rho\left(M,\operatorname{supp}\tilde{f}\right). \tag{63}$$

Получим:

$$u\left(M,t\right)=\begin{cases} 0,\;\, t<\dfrac{d_1}{a}, \\[2ex] \dfrac{e^{-i\omega t}}{4\pi a^2}\displaystyle\iiint\limits_{K_M^{at}\cap D}\dfrac{\tilde{f}\left(Q\right)e^{-i\omega\frac{r_{QM}}{a}}}{r_{QM}}dV_Q,\;\; \dfrac{d_1}{a}<t<\dfrac{d_2}{a}, \\[2ex] e^{-i\omega t}V\left(M\right),\; t>\dfrac{d_2}{a}, \end{cases} \tag{64}$$

где

$$V(M)=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_D \frac{\tilde{f}(Q)e^{-i\omega\frac{r_{QM}}{a}}}{r_{QM}}dV_Q. \qquad (65)$$

Интеграл в средней строчке формулы (64), вообще говоря, зависит от времени, так как от времени зависит область интегрирования $K_M^{at}\cap D$, в то время как функция $V(M)$, определяема формулой (65) от времени не зависит. Следовательно, в каждой точке M, начиная с момента времени $t_2=\frac{d_2}{a}$, под действием локального периодического источника устанавливаются периодические колебания с той же частотой ω.

Амплитуда этих колебаний определяется формулой (65).