

Разностная аппроксимация начально-краевой задачи для уравнения колебаний. Явная (схема «крест») и неявная разностные схемы.

Рассмотрим несколько вариантов разностной аппроксимации линейного уравнения колебаний:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

на равномерной сетке:

$$x_i = i \cdot h, \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad t_j = j \cdot \tau \quad j = 0, 1, \dots, M.$$

В отличие от рассмотренных ранее разностных схем для уравнения теплопроводности для аппроксимации уравнения колебаний потребуется использовать три временных слоя: $(j - 1)$ -й, j -й и $(j + 1)$ -й.

1 Схема «крест» для уравнения колебаний

Используем шаблон, приведенный на рис. 1, и аппроксимируем дифференциальный оператор

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

в рассматриваемом уравнении колебаний с помощью разностного оператора $L_{h\tau}$, имеющего вид:

$$L_{h\tau} u = u_{\bar{t}t} - u_{\bar{x}x},$$

где

$$u_{\bar{t}t} = \frac{u(x, t + \tau) - 2u(x, t) + u(x, t - \tau)}{\tau^2}, \quad u_{\bar{x}x} = \frac{u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)}{h^2}.$$

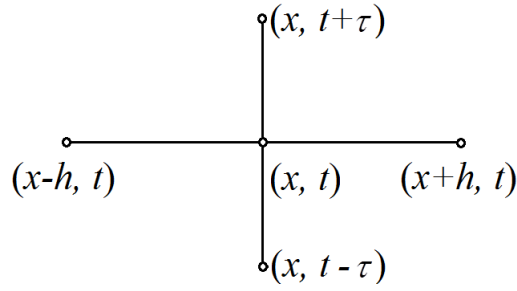


Рис. 1: Шаблон схемы «крест» для уравнения колебаний

Далее для краткости будем использовать стандартные обозначения \hat{u} , u и \tilde{u} для функции $u(x, t)$ на слоях t_{j+1} , t_j и t_{j-1} соответственно.

Разностный оператор $L_{h\tau}$ аппроксимирует исходный дифференциальный оператор L в точке (x, t) со вторым порядком погрешности аппроксимации по τ и h . В самом деле, для любой достаточно гладкой функции $u(x, t)$ имеет место равенство:

$$L_{h\tau}u = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + O(\tau^2) - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + O(h^2) = Lu(x, t) + O(\tau^2 + h^2).$$

Для того, чтобы получить разностную аппроксимацию уравнения колебаний с погрешностью $O(\tau^2 + h^2)$, естественно аппроксимировать правую часть $f(x, t)$ уравнения в центральной точке шаблона. В результате приходим к следующему разностному уравнению:

$$\frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} = \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} + f_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, \dots, M-1. \quad (1.1)$$

2 Неявная схема для уравнения колебаний

Используем для аппроксимации дифференциального оператора L в уравнении колебаний шаблон, приведенный на рис. 2.

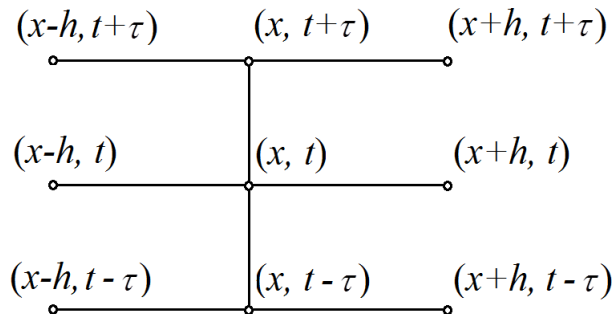


Рис. 2: Шаблон неявной схемы для уравнения колебаний

Аппроксимируем вторую производную по времени ее разностным аналогом, построенным на узлах $(x, t - \tau)$, (x, t) , $(x, t + \tau)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rightarrow u_{\bar{t}t} = \frac{u(x, t + \tau) - 2u(x, t) + u(x, t - \tau)}{\tau^2},$$

а вторую производную по координате x — линейной комбинацией вторых разностных производных $\check{u}_{\bar{x}x}$, $u_{\bar{x}x}$ и $\hat{u}_{\bar{x}x}$, построенных на слоях $t - \tau$, t и $t + \tau$ соответственно. При этом, если мы хотим получить второй порядок аппроксимации по τ , слои $t - \tau$ и $t + \tau$ должны входить в соответствующее разностное выражение с одинаковым весом, то есть:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \sigma \check{u}_{\bar{x}x} + \sigma \hat{u}_{\bar{x}x} + (1 - 2\sigma)u_{\bar{x}x},$$

где $\sigma > 0$ — некоторое число.

Покажем, что разностный оператор

$$L_{h\tau}^{(\sigma)} = u_{\bar{t}t} - (\sigma \check{u}_{\bar{x}x} + \sigma \hat{u}_{\bar{x}x} + (1 - 2\sigma)u_{\bar{x}x})$$

аппроксимирует оператор $L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ в точке (x, t) с погрешностью $O(\tau^2 + h^2)$ при любом σ . В самом деле, для достаточно гладкой функции $u(x, t)$ справедливо равенство:

$$\begin{aligned} L_{h\tau}^{(\sigma)} u &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + O(\tau^2) - \left(\sigma \frac{\partial^2 u(x, t - \tau)}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 u(x, t + \tau)}{\partial x^2} + (1 - 2\sigma) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + O(h^2) \right) = \\ &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \left(\sigma \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \tau \sigma \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t \partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \tau \sigma \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t \partial x^2} + \right. \\ &\left. + (1 - 2\sigma) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + O(\tau^2 + h^2) \right) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + O(\tau^2 + h^2). \end{aligned}$$

Если взять в качестве аппроксимации правой части $f(x, t)$ уравнения колебаний значения функции $f(x, t)$ в узлах (x_i, t_j) , то есть ввести сеточную функцию $\varphi(x_i, t_j) = f(x_i, t_j)$, то разностное уравнение

$$L_{h\tau}^{(\sigma)} y = \varphi \tag{2.1}$$

будет аппроксимировать исходное дифференциальное уравнение колебаний с погрешностью $O(\tau^2 + h^2)$ при любом $\sigma > 0$. Заметим, что при $\sigma = 0$ уравнение (2.1) совпадает с уравнением (1.1), получаемым при использовании схемы «крест».

3 Реализация схемы «крест» и неявной схемы для начально-краевой задачи на отрезке

Пример 3.1. Постройте схему «крест» для следующей начально-краевой задачи на отрезке $x \in [0, 1]$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \sin t, & 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 1, \\ u(x, 0) = \cos(\pi x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = x^2, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = 2 \sin t. \end{cases} \quad (3.1)$$

При выборе шагов сетки соблюдайте условие устойчивости $\tau \leq h$. Сравните численное решение с аналитическим и оцените погрешность.

РЕШЕНИЕ. Прежде всего, построим аналитическое решение задачи. Так как граничные условия задачи неоднородные, будем искать решение в виде суммы:

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x, t), \quad w(x, t) = A(t)x^2 + B(t)x,$$

где функция $w(x, t)$ удовлетворяет нужным граничным условиям. Подставляя ее в граничные условия задачи, получаем:

$$w(x, t) = x^2 \sin t.$$

Следовательно, второе слагаемое $v(x, t)$ должно быть решением задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \sin t, & 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 1, \\ v(x, 0) = \cos(\pi x), \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \\ \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=1} = 0. \end{cases}$$

Используя метод разложения решения в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & x \in (0, 1), \\ X'(0) = X'(1) = 0, \end{cases}$$

получаем:

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos(\pi n x),$$

где

$$\begin{cases} T_n''(t) + (\pi n)^2 T_n = \delta_{n,0} 2 \sin t, \\ T_n(0) = \delta_{n,1}, \quad T_n'(0) = 0. \end{cases}$$

Следовательно, ненулевыми оказываются только два коэффициента Фурье:

$$T_0(t) = 2(t - \sin t), \quad T_1(t) = \cos(\pi t),$$

и функция $v(x, t)$ имеет вид:

$$v(x, t) = 2(t - \sin t) + \cos(\pi t) \cos(\pi x).$$

Складывая $v(x, t)$ и $w(x, t)$, получаем аналитическое решение задачи (3.1):

$$u(x, t) = 2t + (x^2 - 2) \sin t + \cos(\pi t) \cos(\pi x).$$

Рассмотрим схему «крест» для задачи (3.1). Введем в области $x \in [0, 1]$, $t \in [0, 1]$ равномерную сетку:

$$x_i = i \cdot h, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad N \cdot h = 1; \quad t_j = j \cdot \tau, \quad j = 0, 1, \dots, M, \quad M \cdot \tau = 1. \quad (3.2)$$

На внутренних узлах сетки аппроксимируем уравнение следующим образом:

$$\frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} = \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} - x_i^2 \sin t_j, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, \dots, M-1. \quad (3.3)$$

Начальное условие $u(x, 0) = \cos(\pi x)$ задается на сетке точно:

$$y_i^0 = \cos(\pi x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Аппроксимируем начальное условие

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = x^2. \quad (3.4)$$

Для этого рассмотрим выражение u_t в произвольном внутреннем узле сетки:

$$u_t = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \left. \frac{\partial u_i}{\partial t} \right|_{t=t_j} + \frac{\tau}{2} \left. \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right|_{t=t_j} + O(\tau^2), \quad (3.5)$$

где использованы обозначения

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=x_i}, \quad \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=x_i}.$$

Из равенства (3.5) видно, что если начальное условие (3.4) заменить разностным уравнением

$$\frac{y_i^1 - y_i^0}{\tau} = x_i^2, \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

то мы получим лишь первый порядок погрешности аппроксимации по τ , при том что разностное уравнение (3.3) аппроксимировало исходное дифференциальное с погрешностью $O(\tau^2 + h^2)$.

Воспользуемся тем, что в равенстве (3.5) функция $u(x, t)$ — это решение задачи (3.1), и выразим $\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$ из уравнения. При этом получим:

$$u_t = \frac{\partial u_i}{\partial t} \Big|_{t=t_j} + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{t=t_j} - x^2 \sin t_j \right) \Big|_{x=x_i} + O(\tau^2). \quad (3.6)$$

Переходя в равенстве (3.6) к пределу при $t_j \rightarrow 0$ и учитывая, что в силу начального условия $u(x, 0) = \cos(\pi x)$ имеет место равенство

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{t=0} = -\pi^2 \cos(\pi x),$$

получаем:

$$\frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau} = \frac{\partial u_i}{\partial t} \Big|_{t=0} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{t=0, x=x_i} + O(\tau^2) = x_i^2 - \frac{\pi^2 \tau}{2} \cos(\pi x_i) + O(\tau^2), \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Следовательно, начальное условие (3.4) можно аппроксимировать с погрешностью $O(\tau^2)$ следующим образом:

$$\frac{y_i^1 - y_i^0}{\tau} = x_i^2 - \frac{\pi^2 \tau}{2} \cos(\pi x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Обратимся теперь к аппроксимации граничных условий. Если заменить производные на концах отрезка $x \in [0, 1]$ соответствующими односторонними разностными производными, то разностные уравнения

$$\frac{y_1^{j+1} - y_0^{j+1}}{h} = 0, \quad \frac{y_N^{j+1} - y_{N-1}^{j+1}}{h} = 2 \sin t_{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, M-1 \quad (3.7)$$

на выбранной сетке будут аппроксимировать граничные условия задачи (3.1) с погрешностью первого порядка по h . Следовательно, и вся разностная схема будет иметь погрешность аппроксимации $O(\tau^2 + h)$.

Одним из способов аппроксимировать граничные условия со вторым порядком погрешности по h является специальный выбор сетки (введение фиктивных узлов). Построим равномерную сетку по переменной x так, чтобы точка $x = 0$ лежала строго в центре отрезка $[x_0, x_1]$, а точка $x = 1$ — строго в центре отрезка $[x_{N-1}, x_N]$ (см. рис. 3). При этом получаем:

$$x_0 = -\frac{h}{2}; \quad x_i = x_0 + ih = \left(i - \frac{1}{2}\right)h, \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad x_N = 1 + \frac{h}{2} \Rightarrow (N-1)h = 1. \quad (3.8)$$

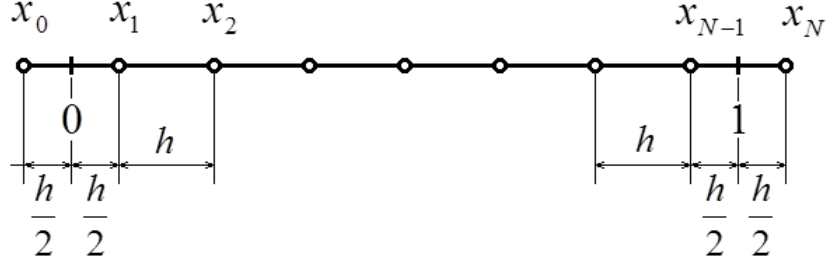


Рис. 3: Построение сетки в случае граничных условий Неймана на обоих концах отрезка

При таком выборе сетки уравнения (3.7) будут аппроксимировать граничные условия с погрешностью $O(h^2)$, так как используемые в них разностные производные оказываются центральными относительно точек $x = 0$ и $x = 1$ соответственно.

Итак, независимо от выбора сетки (3.2) или (3.8), мы получили следующую разностную схему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} = \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} - x_i^2 \sin t_j, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, M-1; \\ y_i^0 = \cos(\pi x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \\ \frac{y_i^1 - y_i^0}{\tau} = x_i^2 - \frac{\pi^2 \tau}{2} \cos(\pi x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \\ y_0^j = y_1^j, \quad y_N^j = y_{N-1}^j + 2h \sin t_j, \quad j = 0, 1, \dots, M. \end{array} \right. \quad (3.9)$$

На сетке (3.2) схема (3.9) обладает первым порядком погрешности аппроксимации по h и вторым по τ , а на сетке (3.8) — вторым порядком погрешности аппроксимации по h и τ .

Разностная схема (3.9) является явной. Значения y_i^j при $j = 0$ и $j = 1$ находятся из начальных условий. При каждом фиксированном $j = 1, 2, \dots, M-1$ неизвестные значения y_i^{j+1} выражаются через уже известные значения y_i^j и y_i^{j-1} .

Алгоритм решения системы (3.9) следующий:

1) Значения искомой сеточной функции на нулевом слое находим из начального условия $y_i^0 = \cos(\pi x_i)$ при $i = 1, 2, \dots, N - 1$. Затем вычисляем y_0^0 и y_N^0 , пользуясь граничными условиями:

$$y_0^0 = y_1^0, \quad y_N^0 = y_{N-1}^0.$$

2) Значения y_i^1 при $i = 1, 2, \dots, N - 1$ находим из условия:

$$y_i^1 = y_i^0 + \tau x_i^2 - \frac{\pi^2 \tau^2}{2} \cos(\pi x_i).$$

Затем вычисляем y_0^1 и y_N^1 , пользуясь граничными условиями:

$$y_0^1 = y_1^1, \quad y_N^1 = y_{N-1}^1 + 2h \sin \tau.$$

В результате выполнения этапов 1) и 2) значения y на нулевом и первом слоях будут найдены полностью.

3) При каждом фиксированном $j = 1, 2, \dots, M - 1$ переход на слой $j + 1$ сначала осуществляется для $i = 1, 2, \dots, N - 1$ по формуле

$$y_i^{j+1} = 2y_i^j - y_i^{j-1} + \frac{\tau^2}{h^2} (y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j) - \tau^2 x_i^2 \sin t_j.$$

Завершается переход на слой $j+1$ вычислением значений y_0^{j+1} и y_N^{j+1} с помощью граничных условий:

$$y_0^{j+1} = y_1^{j+1}, \quad y_N^{j+1} = y_{N-1}^{j+1} + 2h \sin t_{j+1}.$$

Аналитическое решение задачи и результаты расчетов по схеме (3.9) на сетках (3.2) и (3.8) в случае $N = 50$, $M = 60$ приведены на рис. 4 - 7. Число узлов по x и t выбрано так, чтобы шаги удовлетворяли условию устойчивости схемы $\tau \leq h$.

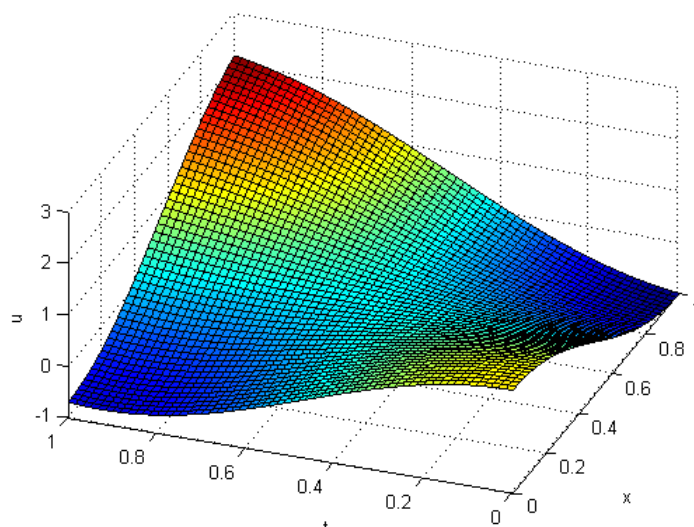


Рис. 4: Аналитическое решение задачи (3.1)

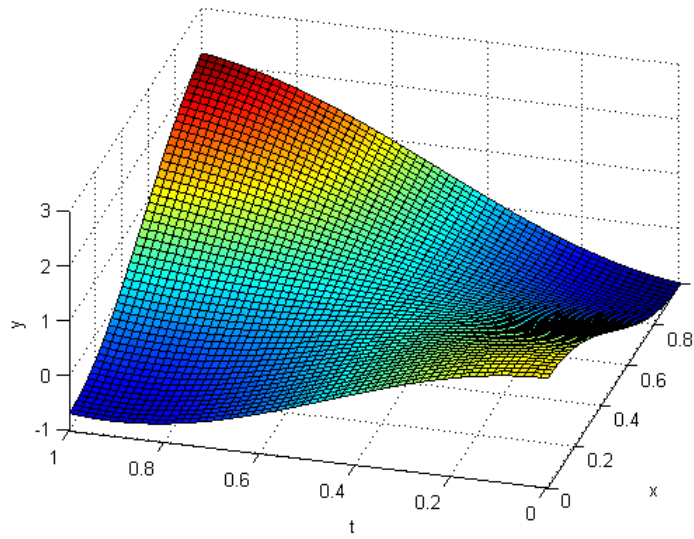


Рис. 5: Численное решение задачи (3.1) с использованием схемы «крест» на сетке (3.2)

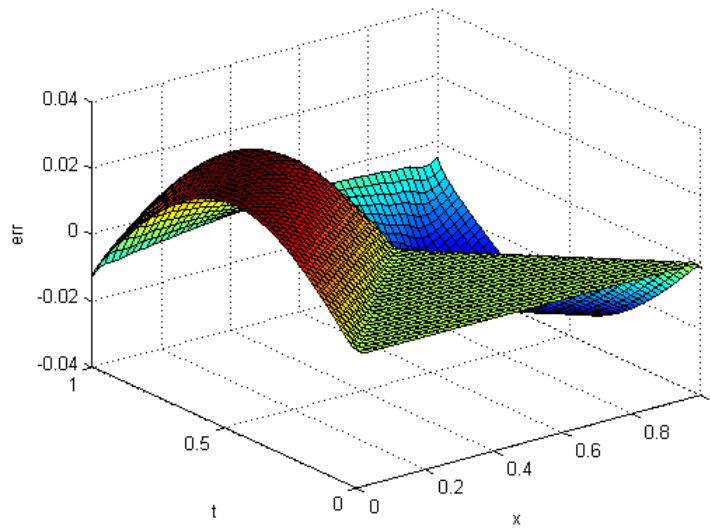


Рис. 6: Погрешность решения задачи (3.1) с использованием схемы «крест» на сетке (3.2)

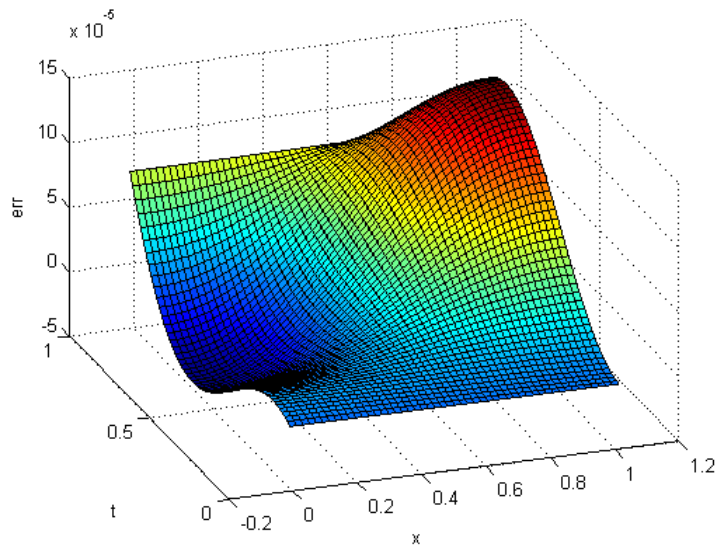


Рис. 7: Погрешность решения задачи (3.1) с использованием схемы «крест» на сетке (3.8)

Пример 3.2. Решите численно начально-краевую задачу (3.1) с помощью неявной схемы. Сравните численное решение с аналитическим и оцените погрешность. При выборе параметров схемы учитывайте, что она безусловно устойчива при $\sigma \geq 1/4$, а при $\sigma < 1/4$ условие устойчивости имеет вид:

$$\tau \leq \frac{h}{\sqrt{1-4\sigma}}.$$

РЕШЕНИЕ. Для того, чтобы получить аппроксимацию граничных условий Неймана с погрешностью $O(h^2)$, введем в расчетной области равномерную сетку

$$x_i = \left(i - \frac{1}{2}\right) \cdot h, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (N-1) \cdot h = 1; \quad t_j = j \cdot \tau, \quad j = 0, 1, \dots, M, \quad M \cdot \tau = 1.$$

Уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \sin t$$

аппроксимируем следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} &= \sigma \frac{y_{i-1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}}{h^2} + \sigma \frac{y_{i-1}^{j-1} - 2y_i^{j-1} + y_{i+1}^{j-1}}{h^2} + \\ &+ (1 - 2\sigma) \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} - x_i^2 \sin t_j, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, \dots, M-1. \end{aligned}$$

Начальные и граничные условия аппроксимируем так же, как в предыдущем примере при использовании схемы «крест». В результате приходим к следующей системе:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} = \sigma \frac{y_{i+1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i-1}^{j+1}}{h^2} + G_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, \dots, M-1; \\ y_i^0 = \cos(\pi x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N; \\ \frac{y_i^1 - y_i^0}{\tau} = x_i^2 - \frac{\pi^2 \tau}{2} \cos(\pi x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \\ y_0^j = y_1^j, \quad y_N^j = y_{N-1}^j + 2h \sin t_j, \quad j = 0, 1, \dots, M, \end{array} \right. \quad (3.10)$$

где для краткости введено обозначение:

$$G_i^j = \sigma \frac{y_{i-1}^{j-1} - 2y_i^{j-1} + y_{i+1}^{j-1}}{h^2} + (1 - 2\sigma) \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} - x_i^2 \sin t_j.$$

Значения y_i^j при $j = 0$ и $j = 1$ вычисляются из начальных условий точно так же, как в предыдущем примере для схемы «крест». Поэтому при каждом фиксированном

$j = 1, 2, \dots, M - 1$ неизвестными оказываются значения y_i^{j+1} . Они удовлетворяют системе с трехдиагональной матрицей:

$$\begin{cases} \frac{\sigma\tau^2}{h^2}y_{i-1}^{j+1} - \left(1 + \frac{2\sigma\tau^2}{h^2}\right)y_i^{j+1} + \frac{\sigma\tau^2}{h^2}y_{i+1}^{j+1} = -(\tau^2 G_i^j + 2y_i^j - y_i^{j-1}), & i = 1, \dots, N-1, \\ y_0^{j+1} = y_1^{j+1}, \\ y_N^{j+1} = y_{N-1}^{j+1} + 2h \sin t_{j+1}. \end{cases} \quad (3.11)$$

Систему (3.11) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} A_i y_{i-1}^{j+1} - C_i y_i^{j+1} + B_i y_{i+1}^{j+1} = -F_i, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0^{j+1} = \varkappa_1 y_1^{j+1} + \mu_1, \\ y_N^{j+1} = \varkappa_2 y_{N-1}^{j+1} + \mu_2, \end{cases}$$

где

$$A_i = B_i = \frac{\sigma\tau^2}{h^2}, \quad C_i = 1 + \frac{2\sigma\tau^2}{h^2}, \quad F_i = \tau^2 G_i^j + 2y_i^j - y_i^{j-1}, \quad \varkappa_{1,2} = 1, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 2h \sin t_{j+1}.$$

Достаточные условия устойчивости прогонки

$$C_i > A_i + B_i, \quad 0 \leq \varkappa_{1,2} \leq 1$$

для этой системы выполнены.

Проведем расчеты по неявной схеме при различных значениях веса σ и сравним результаты. При этом число узлов по x и t выберем так, чтобы условие устойчивости схемы «крест» ($\tau \leq h$) не выполнялось. На рис. 8 - 11 приведены графики погрешности численного решения в случае $N = 51$, $M = 40$.

При $\sigma < 1/4$ рассматриваемая неявная схема является условно устойчивой, и условие ее устойчивости имеет вид

$$\tau \leq \frac{h}{\sqrt{1 - 4\sigma}}. \quad (3.12)$$

Для $N = 51$ и $M = 40$ оно выполнено при $\sigma \geq 0.09$.

Если $\sigma \geq 1/4$, то неявная схема для уравнения колебаний безусловно устойчива, то есть устойчива при любом сочетании шагов τ и h .

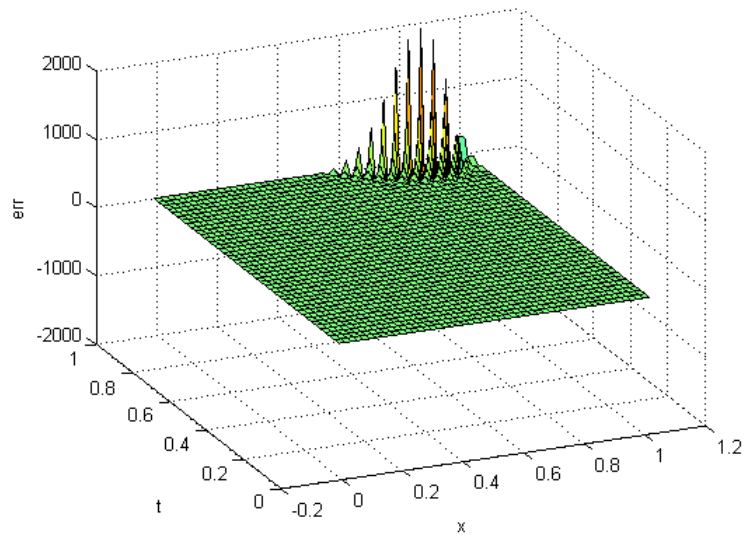


Рис. 8: Погрешность решения задачи (3.1) с помощью неявной схемы для $\sigma = 0.05$

На рис. 8 приведен график погрешности расчетов для $\sigma = 0.05$. Условие устойчивости (3.12) при этом не выполнено, и схема расходится. На рис. 9 приведен график погрешности расчетов для $\sigma = 0.09$ на той же сетке. Условие устойчивости при этом выполнено, и схема сходится. На рис. 10 и 11 представлены графики погрешности численного решения для $\sigma = 0.25$ и $\sigma = 0.5$. Схема при этом безусловно устойчива. На практике рекомендуется выбирать $\sigma \in [0.25, 0.5]$.

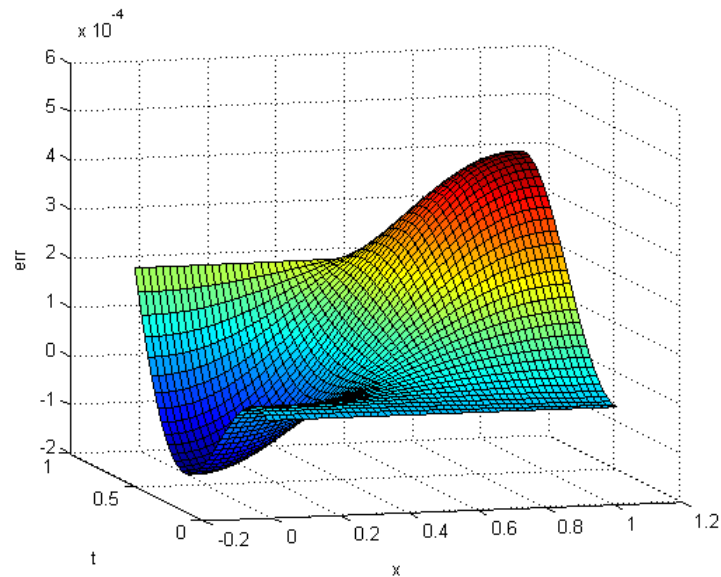


Рис. 9: Погрешность решения задачи (3.1) с помощью неявной схемы для $\sigma = 0.09$

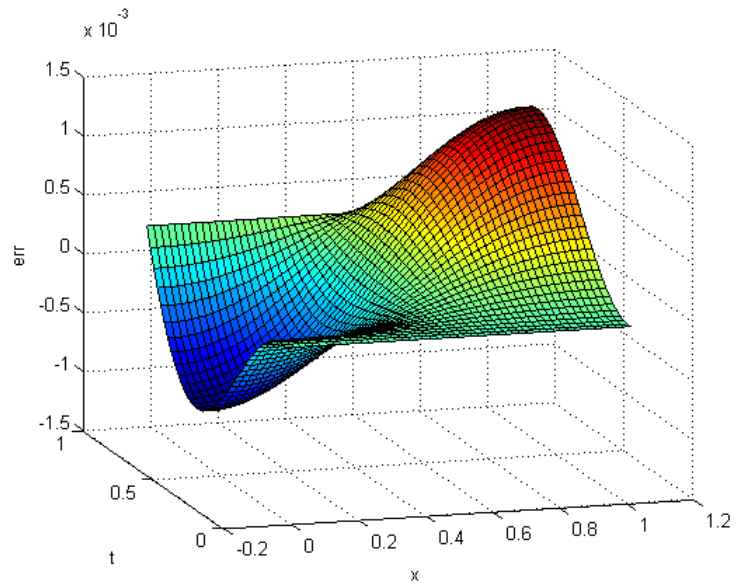


Рис. 10: Погрешность решения задачи (3.1) с помощью неявной схемы для $\sigma = 0.25$

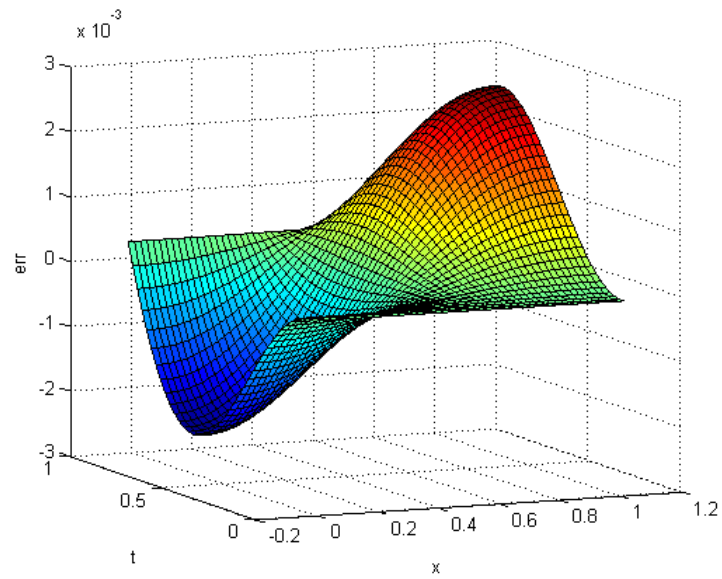


Рис. 11: Погрешность решения задачи (3.1) с помощью неявной схемы для $\sigma = 0.5$

4 Задачи для самостоятельного решения

Решите аналитически и численно при помощи схемы «крест» и неявной схемы начально-краевую задачу для уравнения колебаний на отрезке:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, T], \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \\ -\gamma_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \delta_0 u \Big|_{x=0} = g_0(t), \\ \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \delta_1 u \Big|_{x=l} = g_1(t), \end{array} \right.$$

где:

а) $a = 2$, $f = \cos\left(\frac{3x}{2}\right) \cdot \sin t$, $\varphi = \pi - x$, $\psi = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$, $\gamma_0 = 1$, $\delta_0 = 0$, $\gamma_1 = 0$, $\delta_1 = 1$, $g_0 = 1$, $g_1 = 0$, $l = \pi$;

б) $a = 1$, $f = 0$, $\varphi = x^2$, $\psi = \cos(\pi x)$, $\gamma_0 = 1$, $\delta_0 = 0$, $\gamma_1 = 1$, $\delta_1 = 0$, $g_0 = 0$, $g_1 = 2$, $l = 1$;

в) $a = 0.5$, $f = -\cos t$, $\varphi = 1 + \sin(3x)$, $\psi = 0$, $\gamma_0 = 0$, $\delta_0 = 1$, $\gamma_1 = 1$, $\delta_1 = 0$, $g_0 = \cos t$, $g_1 = 0$, $l = \pi/2$;

г) $a = 1$, $f = \sin t \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$, $\varphi = 3 - x + \cos\left(\frac{3\pi x}{4}\right)$, $\psi = 0$, $\gamma_0 = 1$, $\delta_0 = 0$, $\gamma_1 = 0$, $\delta_1 = 1$, $g_0 = 1$, $g_1 = 1$, $l = 2$;

д) $a = 3$, $f = -x \sin t$, $\varphi = \sin(\pi x/2)$, $\psi = x$, $\gamma_0 = 0$, $\delta_0 = 1$, $\gamma_1 = 1$, $\delta_1 = 0$, $g_0 = 0$, $g_1 = \sin t$, $l = 3$.

Сравните результаты численного решения по разным схемам между собой и с аналитическим решением задачи. При выборе шагов сетки учитывайте условие устойчивости схемы «крест»:

$$\tau a \leq h$$

и условие устойчивости неявной схемы при $\sigma < 0.25$:

$$\tau a \leq \frac{h}{\sqrt{1 - 4\sigma}}.$$