ЛЕКЦИИ 10—11

Регулярность. Самосопряжённые операторы

Следствие из теоремы Хилле—Иосиды (т. 2 предыдущей лекции). Пусть A — максимальный монотонный оператор, $\lambda \in \mathbb{R}$ произвольно. Тогда задача

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au + \lambda u = \theta, \quad t \in [0, +\infty), \\ u(0) = u_0 \in \mathcal{D}(A) \end{cases} \tag{1}$$

имеет в классе $u \in C^1([0, +\infty); H)$ единственное решение.

Доказательство. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + Av = \theta, \quad t \in [0, +\infty), \\ v(0) = u_0, \end{cases} \tag{2}$$

однозначная разрешимость которой в рассматриваемом классе вытекает из теоремы Хилле—Иосиды. Легко видеть, что если функции u и v связаны соотношением $v(t) = e^{\lambda t} u(t)$, то

$$\begin{cases} u \in C^1([0, +\infty); H), \\ u \text{ — решение задачи (1)} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} v \in C^1([0, +\infty); H), \\ v \text{ — решение задачи (2).} \end{cases}$$

Действительно, $u \in C^1([0, +\infty); H) \Leftrightarrow v \in C^1([0, +\infty); H)$; $u(0) = u_0 \Leftrightarrow v(0) = u_0$. Наконец, из $u' + Au + \lambda u = \theta$ и $v(t) = e^{\lambda t} u(t)$ вытекает

$$v' + Av = \lambda e^{\lambda t} u + e^{\lambda t} u' + A e^{\lambda t} u = \lambda e^{\lambda t} u + e^{\lambda t} u' + e^{\lambda t} Au = e^{\lambda t}(\lambda u + u' + Au) = e^{\lambda t}\theta = \theta;$$

из $v' + Av = \theta$ и $u(t) = e^{-\lambda t} v(t)$ вытекает

$$u' + Au + \lambda u = -\lambda e^{-\lambda t} v + e^{-\lambda t} v' + A e^{-\lambda t} v + \lambda e^{-\lambda t} v = e^{-\lambda t} v' + e^{-\lambda t} Av = e^{-\lambda t}(v' + Av) = e^{-\lambda t}\theta = \theta.$$

Поэтому однозначная разрешимость задачи (2) влечёт однозначную разрешимость задачи (1).
▲

§ 5. Регулярность решения эволюционной задачи

Положим

$$\mathcal{D}(A^k) = \{v \in \mathcal{D}(A^{k-1}) \mid A^{k-1} v \in \mathcal{D}(A)\}, \tag{3}$$

$$(u, v)_{\mathcal{D}(A^k)} = \sum_{j=0}^{k} (A^j u, A^j v), \quad \|u\|^2_{\mathcal{D}(A^k)} = \sum_{j=0}^{k} \|A^j u\|^2. \tag{4}$$

Можно показать (см. задачу 1), что введённые таким образом скалярные произведения делают линейные многообразия $\mathcal{D}(A^k)$ гильбертовыми пространствами.

Теорема 1. Пусть $u_0 \in \mathcal{D}(A^k)$ при некотором $k \geqslant 2$. Тогда решение задачи (12) лекций 8—9 удовлетворяет условиям

$$u \in C^{k-j}([0,+\infty); \mathcal{D}(A^j)), \quad j = 0, 1, 2, \dots k \quad (\mathcal{D}(A^0) = H). \tag{5}$$

Доказательство. Положим сначала $k = 2$. Рассмотрим гильбертово пространство $H_1 :=$ $:= \mathcal{D}(A)$ со скалярным произведением $(u, v)_{\mathcal{D}(A)}$. Нетрудно проверить (см. задачу 2), что оператор $A_1 : H_1 \to H_1$, определённый условиями

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}(A_1) = \mathcal{D}(A^2), \\ &A_1 u = Au, \quad u \in \mathcal{D}(A_1), \end{aligned} \tag{6}$$

является максимальным монотонным в H_1. Применяя теорему Хилле—Иосиды к оператору A_1 в пространстве H_1, видим, что существует функция

$$u \in C^1([0,+\infty); H_1) \cap C([0,+\infty); \mathcal{D}(A_1))$$

такая, что

$$\begin{cases} \left(\dfrac{du}{dt}\right)_{H_1} + A_1 u = \theta, \quad t \in [0,+\infty), \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{7}$$

где индекс H_1 у знака производной обозначает, что эта производная есть предел по норме H_1. В частности, она удовлетворяет задаче (2), поскольку оператор A_1 (*на своей области определения!*) совпадает с оператором A, а существование производной по норме H_1 влечёт существование производной по норме H и их равенство. Значит, решение u задачи (7) есть *то самое* единственное решение задачи (2), о котором говорится в условии теоремы.

Поскольку $A \in \mathcal{L}(H_1, H)$ и $u \in C^1([0,+\infty); H_1)$, имеем $Au \in C^1([0,+\infty); H)$ и

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_H (Au) = A \left(\frac{d}{dt}\right)_{H_1} u.$$

В силу исходной задачи имеем

$$\frac{du}{dt} = -Au \in C^1([0,+\infty); H),$$

т. е. $u \in C^2([0,+\infty); H)$ и

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}\right) + A\left(\frac{du}{dt}\right) = \theta, \quad t \in [0,+\infty).$$

Доказательство теоремы для $k = 3, 4, \dots$ составляет задачу 3.

▲

Замечание 1. Строго говоря, согласно определению нормы графика из предыдущей лекции мы получили бы

$$\|u\|^2_{\mathcal{D}(A_1)} = \|u\|^2_{H_1} + \|Au\|^2_{H_1} = (\|u\|^2 + \|Au\|^2) + (\|Au\|^2 + \|A^2u\|^2) = \|u\|^2 + 2\|Au\|^2 + \|A^2u\|^2$$

вместо

$$\|u\|^2_{\mathcal{D}(A_1)} = \|u\|^2 + \|Au\|^2 + \|A^2u\|^2$$

согласно определению из начала данного параграфа. Однако это непринципиально, поскольку эти две нормы эквивалентны. (Однако чтобы этой проблемы не возникало, можно было бы ввести в определение $(u, v)_{\mathcal{D}(A^k)}$ подходящие коэффициенты.)

§ 6. Понятие самосопряжённого оператора

Нам потребуется понятие сопряжённого и самосопряжённого операторов. Для неограниченных операторов это понятие существенно сложнее, чем в случае ограниченных операторов. Вспомним прежде всего следующие определения.

Определение 1. Пусть $A \in \mathcal{L}(H)$. Тогда оператор A^* называется *сопряжённым к оператору* A, если

$$\forall u, v \in H \quad (Au, v) = (u, A^*v).$$

Определение 2. Пусть $A \in \mathcal{L}(H)$. Оператор A называется *самосопряжённым*, если

$$\forall u, v \in H \quad (Au, v) = (u, Av).$$

Перейдём теперь к случаю неограниченных операторов. Дадим сначала более простое

Определение 3. Линейный оператор A (не обязательно ограниченный) называется *симметрическим*, если

$$\forall u, v \in \mathcal{D}(A) \quad (Au, v) = (u, Av).$$

Пример 1. Рассмотрим оператор

$$A : l^2 \to l^2, \quad Ax = (x^{(1)}, 2x^{(2)}, 3x^{(3)}, \ldots),$$

определённый на линейном многообразии финитных элементов пространства l^2. Очевидно, такой оператор будет симметрическим. Но естественно ли назвать его самосопряжённым? Заметим, что «сопряжённым»[1] к оператору A можно считать оператор B, действующий аналогично A, но с областью определения, состоящей из всех таких элементов $x \in l^2$, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |x^{(n)}|^2 < +\infty.$$

[1] Слово заключено в кавычки, потому что это пока не термин: мы ещё не дали определения сопряжённого оператора для случая неограниченных операторов. Пока мы понимаем сопряжённый оператор в некотором интуитивном смысле.

Очевидно, $B \supsetneq A$. Следовательно, вряд ли стоит называть оператор A самосопряжённым: естественно называть самосопряжённым такой оператор, который совпадает со своим сопряжённым. Однако для этого прежде следует дать чёткое определение оператора, сопряжённого к данному. Для этого помимо естественного условия $(Au, v) = (u, A^*v)$ следует потребовать некоторую его «максимальность», сделав его область определения «максимально возможной». Дадим соответствующее определение.

Определение 4. Пусть A — линейный оператор, $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$. Положим

$$\mathcal{D}(A^*) := \{v \in H \mid \exists w[v] \in H \ \forall u \in \mathcal{D}(A) \ (Au, v) = (u, w)\}$$

и

$$A^*v := w[v], \quad v \in \mathcal{D}(A^*).$$

(Корректность определения устанавливается в задаче 5.)

Теперь естественным будет следующее определение самосопряжённого оператора:

Определение 5. Линейный оператор A (не обязательно ограниченный) называется *самосопряжённым*, если $A^* = A$.

Подчеркнём, что последнее определение подразумевает, что $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A)$. В частности, симметрический ограниченный линейный оператор, определённый на всём пространстве H, является самосопряжённым.

Вернёмся к примеру 1. Нетрудно проверить, что $B = A^*$ и, тем самым, $A^* \supsetneq A$. Таким образом, оператор A не является самосопряжённым. А оператор B — является (см. задачу 4).

Отметим также (см. задачу 6), что для любого симметрического оператора A верно $A^* \supseteq A$.

Докажем теперь лемму, непосредственно связанную с исследуемой нами задачей (12) из § 4.

Лемма 1. Симметрический максимальный монотонный оператор является самосопряжённым.

Доказательство. Итак, пусть оператор A — максимальный монотонный и симметрический. В силу предыдущего замечания достаточно доказать лишь, что $\mathcal{D}(A^*) \subseteq \mathcal{D}(A)$. Обратное вложение, как и равенство $(Au, v) = (u, Av)$, нам уже известно.

Шаг 1. Воспользуемся введёнными в лекции 8 операторами $J_\lambda \equiv (E + \lambda A)^{-1}$. Как мы помним, это ограниченные операторы, определённые на всём пространстве H. Сейчас мы докажем их симметричность (а следовательно, самосопряжённость). Итак, нам надо доказать, что

$$\forall u, v \in H \quad (J_\lambda u, v) = (u, J_\lambda v).$$

Вспомним (см. лемму 2 и определение 2 § 3), что при всех $u, v \in H$ верно $J_\lambda u, J_\lambda v \in \mathcal{D}(A)$. А тогда, поскольку оператор A симметрический, имеем

$$\forall u, v \in H \quad (J_\lambda u, A(J_\lambda v)) = (J_\lambda v, A(J_\lambda u)). \tag{8}$$

Поскольку, в силу определения J_λ, верно

$$u = (E + \lambda A)(J_\lambda u), \quad v = (E + \lambda A)(J_\lambda v),$$

получаем

$$(J_\lambda u, J_\lambda v) + \lambda(A(J_\lambda u), J_\lambda v) = (u, J_\lambda v),$$
$$(J_\lambda v, J_\lambda u) + \lambda(A(J_\lambda v), J_\lambda u) = (v, J_\lambda u),$$

где в силу (8) левые части равны, а следовательно, равны и правые части.

Шаг 2. Пусть $v \in \mathcal{D}(A^*)$ произвольно. Нам достаточно доказать, что $v \in \mathcal{D}(A)$.

По определению сопряжённого оператора условие $v \in \mathcal{D}(A^*)$ означает, что

$$\exists w \equiv A^* v \in H \quad \forall u \in \mathcal{D}(A) \quad (Au, v) = (u, w) \equiv (u, A^* v).$$

Положим $f := v + A^* v$. Для любого $z \in H$ положим $u_z := (E + A)^{-1} z \equiv J_1 z \in \mathcal{D}(A)$. Тогда получим

$$(z, v) = ((E + A)u_z, v) = (u_z, v) + (Au_z, v) = \{v \in \mathcal{D}(A^*)\} = (u_z, v) + (u_z, A^* v) =$$
$$= (u_z, v + A^* v) = (u_z, f) = (J_1 z, f) = \{\text{самосопряжённость } J_\lambda\} = (z, J_1 f).$$

В силу произвольности $z \in H$ делаем вывод, что $v = J_1 f$, а следовательно, $v \in \mathcal{D}(A)$.

Вложение $\mathcal{D}(A^*) \subseteq \mathcal{D}(A)$ доказано.

▲

§ 7. Эволюционное уравнение в случае самосопряжённого оператора

Теорема 2. Пусть A — *самосопряжённый* максимальный монотонный оператор. Тогда для любого $u_0 \in H$ существует единственная функция

$$u \in C([0, +\infty); H) \cap C^1((0, +\infty); H)$$

такая, что

$$\begin{cases} u' + Au = \theta, & t \in (0, +\infty), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{9}$$

При этом

$$\|u(t)\| \leqslant \|u_0\|, \quad \|u'(t)\| = \|Au(t)\| \leqslant \frac{1}{t}\|u_0\|, \quad t > 0, \tag{10}$$

$$u \in C^k((0, +\infty); \mathcal{D}(A^l)) \quad \forall k, l \in \mathbb{Z}_+ \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{11}$$

Замечание 2. Отметим отличие задачи (9) от исходной задачи (2). В новой задаче начальное данное произвольно (не обязательно лежит в $\mathcal{D}(A)$) и поэтому, естественно, решение не может удовлетворять уравнению в точке $t = 0$. Решение лишь *непрерывно примыкает* к начальному данному. Однако при любом $t > 0$ уже будет $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ и будет выполнено уравнение. В этом состоит сглаживающее свойство *самосопряжённого* монотонного оператора.

Замечание 3. Это отличие хорошо известно в физике на примере уравнений теплопроводности и колебаний. Так, уравнение теплопроводности может быть записано в виде задачи из теоремы Хилле—Иосиды в пространстве $H := L^2(\Omega)$ с $A = -a^2\Delta$ с подходящим образом выбранной областью определения. Тогда, например для граничных условий Дирихле в ограниченной области, оператор Лапласа оказывается самосопряжённым (подчеркнём, что здесь важно правильно выбрать область определения!) и мы получаем помимо разрешимости задачи с начальными условиями из $L^2(\Omega)$ и сглаживающие свойства: при $t > 0$ решение с произвольными начальными условиями из $L^2(\Omega)$ оказывается принадлежащим $\mathcal{D}(\Delta^k)$ при любом натуральном k! В то же время для уравнения колебаний аналогичный результат места не имеет. Это не случайно, поскольку уравнение колебаний в абстрактной форме может быть записано так:

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = -a^2\Delta u, \end{cases}$$

или, в векторной форме,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta & E \\ -a^2\Delta & \Theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Оператор уже не является симметрическим. (Подробное исследование этого примера будет сделано в следующей лекции.)

Доказательство.

Единственность решения. Если u, $\tilde{u}$ суть решения задачи (9), положим $\varphi(t) := \|u(t) - \tilde{u}(t)\|^2$. Как и ранее, можно показать, что $\varphi'(t) \leqslant 0$, но только уже не при всех $t \geqslant 0$, а при всех $t > 0$. Однако этого достаточно, чтобы утверждать, что φ — невозрастающая функция на всём замкнутом луче $[0, +\infty)$: вспомним, что в теореме Лагранжа требуется дифференцируемость во внутренних точках отрезка и непрерывное примыкание к граничным значениям.

Существование решения.

Шаг 1. Предположим, что $u_0 \in \mathcal{D}(A^2)$; пусть u — решение, существование и единственность которого следует из теоремы 2 § 4. Докажем, что

$$\|u'(t)\| \leqslant \frac{1}{t}\|u_0\|, \quad t > 0.$$

При всех $\lambda > 0$ верно

$$J_\lambda^* = J_\lambda, \quad A_\lambda^* = A_\lambda.$$

В самом деле, первое равенство установлено на первом шаге доказательства леммы 1, а второе тогда получается в силу определения оператора A_λ. Вернёмся к приближённой задаче:

$$\begin{cases} u_\lambda' + A_\lambda u_\lambda = \theta, \quad t \in [0, +\infty), \\ u_\lambda(0) = u_0. \end{cases} \tag{13}$$

1) Умножим уравнение задачи (13) скалярно на $u_\lambda(t)$:

$$(u_\lambda', u_\lambda) + (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda) = 0,$$

или

$$\frac{1}{2}\left(\|u_\lambda\|^2\right)' + (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda) = 0.$$

Интегрируя по t, получаем

$$\frac{1}{2}\|u_\lambda(T)\|^2 + \int_0^T (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda)dt = \frac{1}{2}\|u_0\|^2. \tag{14}$$

2) Умножим уравнение задачи (13) скалярно на $tu'_\lambda(t)$:

$$t(u'_\lambda, u'_\lambda) + t(A_\lambda u_\lambda, u'_\lambda) = 0.$$

После интегрирования:

$$\int_0^T t\|u'_\lambda\|^2 dt + \int_0^T (A_\lambda u_\lambda(t), u'_\lambda(t))t\,dt = 0. \tag{15}$$

Но, поскольку $A_\lambda = A^*_\lambda$, имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(A_\lambda u_\lambda, u_\lambda) = \frac{1}{2}\left[(A_\lambda u'_\lambda, u_\lambda) + (A_\lambda u_\lambda, u'_\lambda)\right] = (A_\lambda u_\lambda, u'_\lambda).$$

Поэтому, интегрируя по частям второй интеграл в (15), имеем

$$\int_0^T (A_\lambda u_\lambda(t), u'_\lambda(t))t\,dt = \frac{1}{2}\left.(A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t))t\right|_0^T - \int_0^T \frac{1}{2}(A_\lambda u_\lambda, u_\lambda)dt =$$
$$= \frac{1}{2}(A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T))T - \frac{1}{2}\int_0^T (A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t))dt. \tag{16}$$

(Непрерывность подынтегральных функций вытекает из непрерывности u_λ, u'_λ, Au_λ и непрерывности скалярного произведения по совокупности переменных.)

С учётом невозрастания $\|u'_\lambda(t)\|$ (лемма 4 § 4) имеем

$$\int_0^T \|u'_\lambda\|^2 t\,dt \geqslant \|u'_\lambda(T)\|^2\frac{T^2}{2}. \tag{17}$$

Соотношения (14)—(17) дают

$$\int_0^T (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda)dt \overset{(16)}{=} T(A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T)) - 2\int_0^T (A_\lambda u_\lambda(t), u'_\lambda(t))t\,dt \overset{(15)}{=}$$
$$\overset{(15)}{=} T(A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T)) + 2\int_0^T \|u'_\lambda(t)\|^2 t\,dt \overset{(17)}{\geqslant} T(A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T)) + \|u'_\lambda(T)\|T^2. \tag{18}$$

Далее, из (14) получаем

$$\frac{1}{2}\|u_\lambda(T)\|^2 = \frac{1}{2}\|u_0\|^2 - \int_0^T (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda)dt \overset{(18)}{\leqslant} \frac{1}{2}\|u_0\|^2 - T(A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T)) - T^2\|u'_\lambda(T)\|^2,$$

или

$$\frac{1}{2}\|u_\lambda(T)\|^2 + T(A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T)) + T^2\|u'_\lambda(T)\|^2 \leqslant \frac{1}{2}\|u_0\|^2.$$

Отсюда следует как равномерная по λ глобальная ограниченность решений u_λ вспомогательных задач

$$\|u_\lambda(T)\| \leqslant \|u_0\|, \tag{19}$$

так и равномерная оценка их производных:

$$\|u'_\lambda(T)\| \leqslant \frac{1}{T\sqrt{2}}\|u_0\|, \quad T > 0. \tag{20}$$

Как и в теореме 2 § 4, можно перейти к пределу[2] при $\lambda \to +0$:

$$u_\lambda(t) \to u(t), \quad u'_\lambda(t) \to u'(t), \quad t > 0.$$

Тогда из (19) и (20) получим (10), но пока лишь для $u_0 \in \mathcal{D}(A^2)$.

Шаг 2. Пусть $u_0 \in H$. Заметим, что $\mathcal{D}(A^2)$ плотно в H. Действительно, в силу леммы 5 § 4 множество $\mathcal{D}(A^2)$ плотно в $\mathcal{D}(A)$ даже по норме графика и тем более по исходной норме пространства H, а $\mathcal{D}(A)$, в свою очередь, плотно в H. Поэтому существует последовательность $\{u_{0n}\} \subset \mathcal{D}(A^2)$ такая, что $u_{0n} \to u_0$ в H. Пусть u_n — решения задач

$$\begin{cases} u'_n + Au_n = \theta, \quad t \in [0, +\infty), \\ u_n(0) = u_{0n}. \end{cases} \tag{21}$$

Применяя оценки решения задачи (12) из предыдущей лекции к $u_n - u_m$, получаем:

$$\|u_n(t) - u_m(t)\| \leqslant \|u_{0n} - u_{0m}\|, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad t \geqslant 0,$$

а также, в силу шага 1 этого доказательства,

$$\|u'_n(t) - u'_m(t)\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}t}\|u_{0n} - u_{0m}\|, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad t > 0.$$

Поэтому

$$u_n \rightrightarrows u \quad \text{на } [0, +\infty) \text{ при } n \to +\infty, \tag{22}$$

$$u_n \to v \quad \textit{локально} \text{ равномерно на } (0, +\infty) \text{ при } n \to +\infty. \tag{23}$$

Следовательно, u дифференцируема по t при всех $t > 0$ и $u' = v$, а в силу замкнутости оператора A из

$$u_n \to u, \quad Au_n = -u'_n \to -u', \quad n \to +\infty \text{ при всех } t > 0$$

получаем, что

$$u(t) \in \mathcal{D}(A), Au(t) = -u'(t) \quad \text{при всех } t > 0.$$

[2] При втором предельном переходе используется предположение $u_0 \in \mathcal{D}(A^2)$, см. шаг 4 доказательства теоремы 2 § 4.

Мы только что доказали, что

$$u \in C^1((0,+\infty); H) \tag{24}$$

и удовлетворяет уравнению. Непрерывность решения в точке 0 вытекает из предельного перехода (22). Таким образом,

$$u \in C([0,+\infty); H).$$

Далее, в силу (24) имеем $Au \equiv -u' \in C((0,+\infty); H)$, а следовательно,

$$u \in C((0,+\infty); \mathcal{D}(A)). \tag{25}$$

В свою очередь, неравенства (10) можно в силу (22), (23) получить предельным переходом из аналогичных неравенств для решений вспомогательных задач (21) (для этих задач нужные неравенства доказаны на шаге 1).

Шаг 3. Осталось доказать, что решение обладает гладкостью, указанной в (11). По индукции покажем, что

$$u \in C^{k-j}((0,+\infty); \mathcal{D}(A^j)), \quad j = 0, 1, \ldots, k, \quad k \geqslant 2. \tag{26}$$

Для $k = 1$ это уже доказано (см. (24), (25)). Далее будем доказывать по индукции. Пусть это верно для порядков до $k-1$ включительно. В частности,

$$u \in C((0,+\infty); \mathcal{D}(A^{k-1})). \tag{27}$$

Рассмотрим пространство $\widetilde{H} := \mathcal{D}(A^{k-1})$ и оператор $\tilde{A} : \widetilde{H} \to \widetilde{H}$, определённый следующим образом:

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}(\tilde{A}) = \mathcal{D}(A^k), \\ &\tilde{A} = A \quad \text{на } \mathcal{D}(\tilde{A}). \end{aligned} \tag{28}$$

Легко показать (см. задачу 2), что $\tilde{A}$ — максимальный монотонный и симметрический оператор в $\widetilde{H}$; значит, он является самосопряжённым. С помощью первого утверждения этой теоремы (оно уже доказано), применённого к $\widetilde{H}$ и $\tilde{A}$, получаем единственное решение $v \in C([0,+\infty); \widetilde{H}) \cap$ $\cap\, C^1((0,+\infty); \widetilde{H})$ задачи

$$\begin{cases} v' + Av = \theta, \quad t \in (0,+\infty), \\ v(0) = v_0, \end{cases} \tag{29}$$

если $v_0 \in \widetilde{H}$. Более того (см. (25)),

$$v \in C((0,+\infty); \mathcal{D}(\tilde{A})).$$

Выберем $v_0 = u(\varepsilon)$ при некотором $\varepsilon > 0$ (мы уже знаем из (27), что $v_0 \in \widetilde{H}$). Получим, с одной стороны, $v \in C((0,+\infty); \mathcal{D}(A^k))$, а с другой — равенство $v(t) = u(t-\varepsilon)$ (в силу единственности решения задачи (29)). Следовательно, $u \in C((\varepsilon, +\infty); \mathcal{D}(A^k))$. Выбирая затем $w_0 = u(2\varepsilon) \in \mathcal{D}(A^k)$, мы в силу теоремы 1 вместе с теоремой Хилле—Иосиды получаем, что решение задачи

$$\begin{cases} w' + Aw = \theta, \quad t \in [0, +\infty), \\ w(0) = w_0, \end{cases}$$

существует и единственно, совпадает с $u(t - 2\varepsilon)$ и обладает гладкостью (5). Следовательно,

$$u \in C^{k-j}([2\varepsilon, +\infty); \mathcal{D}(A^j)), \quad j = 0, 1, 2, \ldots, k,$$

а силу произвольности ε мы получаем (26) при рассматриваемом k. Таким образом, индукционный переход сделан, что и доказывает (26) для всех $k = 2, 3, \ldots$ ▲

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что пространства $\mathcal{D}(A^k)$, введённые по формулам (3), (4), являются гильбертовыми пространствами.

2. а) Доказать, что оператор A_1 (см. формулу (6)) является максимальным монотонным в пространстве H_1; б) доказать, что оператор $\tilde{A}$ (см. формулу (28)) является максимальным монотонным и симметрическим в $\widetilde{H}$.

3. Завершить доказательство теоремы 1.

4. Доказать самосопряжённость оператора B из примера 1.

5. Доказать, что сопряжённый оператор определён однозначно (при условии, если исходный оператор плотно определён) и является линейным оператором.

6. Доказать, что для любого симметрического оператора A верно $A^* \supseteq A$.