Тематическая лекция 6

УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ P–ЛАПЛАСИАНА: $\operatorname{div}(|D_X U|^{P-2} D_X U)$

В этой лекции мы рассмотрим второй базовый оператор эллиптического типа следующего вида [1]:

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|D_x u|^{p-2} D_x u) \quad \text{при} \quad p > 1.$$

§ 1. Постановка задачи Дирихле для уравнения с $\Delta_p u(x)$

В классическом смысле задача Дирихле для неоднородного уравнения с p–Лапласианом при $p \in (1, +\infty)$ имеет следующий вид:

$$-\Delta_p u(x) \stackrel{def:}{=} -\operatorname{div}(|D_x u(x)|^{p-2} D_x u(x)) = f(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

$$u(x) = g(x) \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega. \tag{1.2}$$

В этой тематической лекции мы будем изучать лишь слабые решения задачи Дирихле (1.1), (1.2) в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Нам удобно будет рассмотреть две следующие задачи Дирихле:

$$-\operatorname{div}(|D_x u(x)|^{p-2} D_x u(x)) = f(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{1.3}$$

$$u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega, \tag{1.4}$$

и

$$\operatorname{div}(|D_x u(x)|^{p-2} D_x u(x)) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{1.5}$$

$$u(x) = g(x) \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega. \tag{1.6}$$

Дадим определение слабых решений задач Дирихле (1.3), (1.4) и (1.5), (1.6).

Определение 1. *Функция $u(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, удовлетворяющая равенству*

$$\langle -\Delta_p u(x), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), \varphi(x) \rangle \quad \textit{для всех} \quad \varphi(x) \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{1.7}$$

---

[1] Напомним, что градиент мы обозначаем символом D_x.

где $f(x) \in W^{-1,p'}(\Omega)$ *называется слабым решением задачи Дирихле* (1.3), (1.4).

Замечание 1. В силу определения обобщенного оператора Δ_p, который был определен во второй тематической лекции, равенство (1.7) эквивалентно следующему равенству:

$$\int\limits_{\Omega} |D_x u(x)|^{p-2} \left(D_x u(x), D_x \varphi(x) \right) \, dx = \langle f(x), \varphi(x) \rangle \tag{1.8}$$

для всех $\varphi(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ и при $f(x) \in W^{-1,p'}(\Omega)$.

Определение 2. *Функция* $u(x) \in W^{1,p}(\Omega)$, *удовлетворяющая равенству*

$$\int\limits_{\Omega} |D_x u(x)|^{p-2} \left(D_x u(x), D_x \varphi(x) \right) \, dx = 0 \tag{1.9}$$

для всех $\varphi(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *называется слабым решением задачи Дирихле* (1.5), (1.6), *если существует продолжение функции* $g(x) \in \in W^{1,p}(\Omega)$ *такое, что*

$$u(x) - g(x) \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{1.10}$$

Отметим, что ниже мы будем изучать свойства так называемых p–гармонических функций. Дадим определение.

Определение 3. *Мы скажем, что* $u(x) \in W_{loc}^{1,p}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\Omega)$ — *это слабая p–гармоническая функция, если выполнено следующее равенство*:

$$\int\limits_{\Omega} |D_x u(x)|^{p-2} \left(D_x u(x), D_x \varphi(x) \right) \, dx = 0 \tag{1.11}$$

для всех $\varphi(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Сопоставим слабому решению задачи Дирихле (1.3), (1.4) в смысле определения 1 следующий функционал Эйлера:

$$\psi_1(u) \stackrel{def}{=} \frac{1}{p} \int\limits_{\Omega} |D_x u(x)|^p \, dx - \langle f(x), u(x) \rangle, \tag{1.12}$$

который определен на $W_0^{1,p}(\Omega)$. Используя результаты третьей тематической лекции, можно вычислить производную Фреше этого функционала, который имеет вид

$$\psi'_{1f}(u) = -\Delta_p u(x) - f(x) \in W^{-1,p'}(\Omega). \tag{1.13}$$

Ясно, что точки экстремума функционала $\psi_1(u)$ удовлетворяют равенству

$$\left\langle \psi'_{1f}(u), \varphi(x) \right\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{1.14}$$

т. е. являются слабыми решениями в смысле определения 1. Таким образом, можно применить вариационный подход к функционалу $\psi_1(u)$ с целью доказать существования экстремума (точнее точки минимума) на банаховом пространстве $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Рассмотрим теперь слабое решение задачи Дирихле (1.5), (1.6) в слабом смысле определения 2. Справедлива теорема.

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны для* $u(x) \in W^{1,p}(\Omega)$:

(i) *функция* $u(x)$ *минимизирует функционал*

$$\psi_2(u) \overset{def:}{=} \int\limits_\Omega |D_x u(x)|^p \, dx \leqslant \int\limits_\Omega |D_x v(x)|^p \, dx, \qquad (1.15)$$

в классе $u(x) - v(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$;

(ii) *функция* $u(x)$ *удовлетворяет следующему равенству*:

$$\int\limits_\Omega |D_x u(x)|^{p-2} \left(D_x u(x), D_x \varphi(x)\right) \, dx = 0 \qquad (1.16)$$

для всех $\varphi(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Доказательство.

Доказательство импликации $(i) \Rightarrow (ii)$. Пусть $u(x) \in W^{1,p}(\Omega)$ минимизирует функционал $\psi_2(u)$. Введем функцию

$$v(x) = u(x) + \varepsilon\varphi(x), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^1,$$

где $\varphi(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Определим вещественный функционал

$$J(\varepsilon) \overset{def:}{=} \int\limits_\Omega \left|D_x \left(u(x) + \varepsilon\varphi(x)\right)\right|^p \, dx.$$

Ясно, что этот функционал достигает своего минимума при $\varepsilon = 0$ и поэтому

$$\frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = 0 \Rightarrow \int\limits_\Omega |D_x u(x)|^{p-2} \left(D_x u(x), D_x \varphi(x)\right) \, dx = 0.$$

Доказательство импликации $(ii) \Rightarrow (i)$. Заметим, что при $p > 1$ в силу выпуклости функции $f(t) = |t|^p$ имеет место неравенство

$$|b|^p \geqslant |a|^p + p\left(|a|^{p-2}a, b - a\right) \quad \text{для всех} \quad a, b \in \mathbb{R}^N.$$

Таким образом, имеем

$$\int\limits_\Omega |D_x v(x)|^p \, dx \geqslant \int\limits_\Omega |D_x u(x)|^p \, dx + \\ + p \int\limits_\Omega \left(|D_x u(x)|^{p-2} D_x u(x), D_x (v(x) - u(x))\right) \, dx.$$

Но по условию $u(x)-v(x)\in W^{1,p}_0(\Omega)$ и поэтому в силу равенства (1.16), в котором $\varphi(x)=v(x)-u(x)$, получим

$$\int\limits_{\Omega}|D_x v(x)|^p\,dx\geqslant\int\limits_{\Omega}|D_x u(x)|^p\,dx$$

для всех $v(x)\in W^{1,p}(\Omega)$ и $u(x)-v(x)\in W^{1,p}_0(\Omega)$.

Т е о р е м а д о к а з а н а.

§ 2. Вариационный метод

Применим вариационный подход к доказательству существованию слабых решений задач Дирихле (1.3), (1.4) и (1.5), (1.6). Прежде всего рассмотрим функционал $\psi_1(u)$, определенный формулой (1.12).

1. Докажем, что функционал $\psi_1(u)$ *слабо полунепрерывен снизу*.

□ Действительно, функционал $\psi_1(u)$ может быть переписан в следующем виде:

$$\psi_1(u)=\frac{1}{p}\|D_x u(x)\|^p_p-\langle f(x),u(x)\rangle,$$

где первое слагаемое слабо полунепрерывно снизу как p–я степень нормы рефлексивного банахова пространства $W^{1,p}_0(\Omega)$, а второе является слабо непрерывным. Поэтому их сумма является слабо полунепрерывной снизу. ⊠

2. Докажем, что функционал $\psi_1(u)$ является слабо коэрцитивным на $W^{1,p}_0(\Omega)$.

□ Действительно, имеет место оценка снизу

$$\psi_1(u)\geqslant\frac{1}{p}\|D_x u(x)\|^p_p-\|f(x)\|_{-1,p'}\|D_x u(x)\|_p\to+\infty$$

при

$$\|D_x u(x)\|_p\to+\infty.\quad ⊠$$

3. Итак, согласно результатам третьей тематической лекции существует (может не единственная) функция $u_0(x)\in W^{1,p}_0(\Omega)$ такая, что

$$\psi_1(u_0)=\inf_{u\in W^{1,p}_0(\Omega)}\psi_1(u)>-\infty\Rightarrow\psi'_{1f}(u_0)=0,$$

т. е. $u_0(x)$ — это слабое решение задачи Дирихле (1.3), (1.4), понимаемой в смысле определения 1.

4. Осталось доказать единственность. Действительно, пусть $u_1(x),u_2(x)\in W^{1,p}_0(\Omega)$ — это два слабых решения задачи Дирихле. Тогда имеем

$$\int\limits_{\Omega}\Bigl(|D_x u_1(x)|^{p-2}\,D_x u_1(x)-|D_x u_2(x)|^{p-2}\,D_x u_2(x),D_x\varphi(x)\Bigr)\,dx=0,$$

в котором положим $\varphi(x) = u_1(x) - u_2(x)$ и в результате получим, что

$$\int\limits_{\Omega} \Big(|D_x u_1(x)|^{p-2} D_x u_1(x) - |D_x u_2(x)|^{p-2} D_x u_2(x), \\ D_x u_1(x) - D_x u_2(x)\Big)\, dx = 0,$$

Осталось воспользоваться неравенствами (**??**) леммы **??** третьей тематической лекции и получить для всех $p \in (1, +\infty)$ неравенство

$$0 = \int\limits_{\Omega} \Big(|D_x u_1(x)|^{p-2} D_x u_1(x) - |D_x u_2(x)|^{p-2} D_x u_2(x), \\ D_x u_1(x) - D_x u_2(x)\Big)\, dx \geqslant \\ \geqslant c_p \int\limits_{\Omega} \left(|D_x u_1(x)| + |D_x u_2(x)|\right)^{p-2} \left|D_x u_1(x) - D_x u_2(x)\right|^2 dx.$$

Стало быть,

$$D_x u_1(x) = D_x u_2(x) \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega \Rightarrow \\ \Rightarrow u_1(x) - u_2(x) = const \in W_0^{1,p}(\Omega) \Rightarrow const = 0.$$

Единственность доказана.

Теперь мы применим вариационный подход к доказательству существования слабого решения задачи Дирихле (1.5), (1.6), понимаемой в смысле определения 2. Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть* $g(x) \in W^{1,p}(\Omega)$. *Существует единственное* $u(x) \in W^{1,p}(\Omega)$ *с условием, что* $u(x) - g(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *такое, что*

$$\psi_2(u) = \int\limits_{\Omega} |D_x u(x)|^p\, dx \leqslant \int\limits_{\Omega} |D_x v(x)|^p\, dx \tag{2.1}$$

для всех $v(x) \in W^{1,p}(\Omega)$ *с условием, что* $v(x) - g(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Доказательство.

Единственность. Пусть существует две минимизирующие функционал $\psi_2(u)$ функции $u_1(x), u_2(x) \in W^{1,p}(\Omega)$ такие, что

$$u_1(x) - g(x),\ u_2(x) - g(x) \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Воспользуемся теперь неравенством, доказательство которого мы не приводим,

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p < \frac{|a|^p + |b|^p}{2}, \quad \text{если} \quad a \neq b, \quad a, b \in \mathbb{R}^N. \tag{2.2}$$

Если

$$D_x u_1 \neq D_x u_2$$

на множестве положительной меры Лебега, то мы можем воспользоваться неравенством (2.2) с $a = D_x u_1$ и $b = D_x u_2$. Теперь согласно определению $u_1(x)$ и $u_2(x)$ мы получим цепочку неравенств

$$\int\limits_\Omega |D_x u_2(x)|^p \, dx \leqslant \int\limits_\Omega \left| \frac{D_x u_1(x) + D_x u_2(x)}{2} \right| dx < \\ < \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |D_x u_1(x)|^p \, dx + \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |D_x u_2(x)|^p \, dx = \\ = \int\limits_\Omega |D_x u_2(x)|^p \, dx.$$

Полученное противоречие доказывает, что

$$D_x u_1(x) = D_x u_2(x) \quad \text{для п. вс.} \quad x \in \Omega \Rightarrow \\ \Rightarrow u_1(x) - u_2(x) = const \in W_0^{1,p}(\Omega) \Rightarrow const = 0.$$

С у щ е с т в о в а н и е. Итак, пусть

$$I_0 = \inf_{v(x) \in W} \int\limits_\Omega |D_x v(x)|^p \, dx \leqslant \int\limits_\Omega |D_x g(x)|^p \, dx,$$

поскольку $g(x) \in W^{1,p}(\Omega)$ и $g(x) - g(x) = 0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, где

$$W \stackrel{def:}{=} \left\{ v(x) \in W^{1,p}(\Omega) : \ v(x) - g(x) \in W_0^{1,p}(\Omega) \right\},$$

в частности, $g(x) \in W$. Таким образом, $0 \leqslant I_0 < +\infty$.

Выберем минимизирующую последовательность $\{v_m(x)\} \subset W$ так, чтобы

$$\int\limits_\Omega |D_x v_m(x)|^p \, dx < I_0 + \frac{1}{m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Докажем, что минимизирующая последовательность $\{v_m\}$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ ограничена в $W^{1,p}(\Omega)$. Действительно, во–первых,

$$\|D_x v_m(x)\|_p \leqslant I_0 + 1. \tag{2.3}$$

Во–вторых, $\{v_m(x) - g(x)\} \subset W_0^{1,p}$, поэтому имеем

$$\|v_m(x) - g(x)\|_p \leqslant K_{fr} \|D_x (v_m(x) - g(x))\|_p \leqslant \\ \leqslant K_{fr} \left[\|D_x v_m(x)\|_p + \|D_x g(x)\|_p \right] \leqslant \\ \leqslant K_{fr} \left[(I_0 + 1)^{1/p} + \|D_x g(x)\|_p \right].$$

Используя неравенство треугольника, получим отсюда

$$\|v_m\|_p \leqslant \|v_m - g\|_p + \|g\|_p \leqslant M_1.$$

Итак,

$$\|v_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant M < +\infty, \tag{2.4}$$

где постоянная $M > 0$ не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

В силу рефлексивности банахова пространства $W^{1,p}(\Omega)$ существует такая подпоследовательность $\{v_{m_k}\} \subset \{v_m\}$, что

$$v_{m_k} \rightharpoonup u(x) \quad \text{слабо в} \quad W^{1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad m_k \to +\infty.$$

В частности,

$$v_{m_k} \rightharpoonup u(x) \quad \text{слабо в} \quad L^p(\Omega) \quad \text{при} \quad m_k \to +\infty,$$
$$D_x v_{m_k} \rightharpoonup D_x u(x) \quad \text{слабо в} \quad \underbrace{L^p(\Omega) \otimes L^p(\Omega) \otimes \cdots \otimes L^p(\Omega)}_{N}$$

при $m_k \to +\infty$. Прежде всего имеем

$$W_0^{1,p}(\Omega) \ni v_{m_k}(x) - g(x) \rightharpoonup u(x) - g(x) \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

поскольку пространство $W_0^{1,p}(\Omega)$ слабо замкнуто [1)]

Наконец, в силу слабой полунепрерывности снизу функционала $\psi_2(u)$ на банаховом пространстве $W^{1,p}(\Omega)$ имеем

$$I_0 \leqslant \int\limits_\Omega |D_x u(x)|^p\, dx \leqslant \liminf_{m_k \to +\infty} \int\limits_\Omega |D_x v_{m_k}(x)|^p\, dx = I_0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow I_0 = \int\limits_\Omega |D_x u(x)|^p\, dx.$$

Теорема доказана.

§ 3. Слабый принцип максимума для слабых решений задачи Дирихле

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. *Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — это слабые решения задачи Дирихле класса $W^{1,p}(\Omega)$, т. е. имеют место следующие равенства*:

$$\int\limits_\Omega |D_x u_k(x)|^{p-2} \left(D_x u_k(x), D_x\varphi(x)\right) dx = \int\limits_\Omega f_k(x)\varphi(x)\, dx, \quad k = 1, 2 \tag{3.1}$$

для всех $\varphi(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, причем $f_k(x) \in L^{p'}(\Omega)$. Если выполнено неравенство

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \quad \text{для почти всех} \quad x \in \Omega \tag{3.2}$$

[1)] Поскольку является банаховым и рефлексивным.

и

$$u_1(x) \leqslant u_2(x) \quad \textit{при} \quad x \in \partial\Omega, \tag{3.3}$$

т. е.

$$(u_1(x) - u_2(x))^+ \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{3.4}$$

тогда

$$u_1(x) \leqslant u_2(x) \quad \textit{для почти всех} \quad x \in \Omega. \tag{3.5}$$

Доказательство.

Вычитая равенство (3.1) для $u_2(x)$ из равенства (3.1) для $u_1(x)$, мы получим равенство

$$\int\limits_\Omega \Bigl(|D_x u_1(x)|^{p-2} D_x u_1(x) - |D_x u_2(x)|^{p-2} D_x u_2(x), D_x\varphi(x)\Bigr)\, dx = \\ = \int\limits_\Omega (f_1(x) - f_2(x))\varphi(x)\, dx \tag{3.6}$$

для любого $\varphi(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Положим в этом равенстве

$$\varphi(x) = (u_1(x) - u_2(x))^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

и получим следующее неравенство:

$$\int\limits_\Omega \Bigl(|D_x u_1(x)|^{p-2} D_x u_1(x) - |D_x u_2(x)|^{p-2} D_x u_2(x), \\ D_x(u_1(x) - u_2(x))^+\Bigr)\, dx \leqslant 0, \tag{3.7}$$

из которого в силу неравенства (**??**) леммы **??** третьей тематической лекции мы отсюда для всех $p \in (1, +\infty)$ вытекает оценка

$$\int\limits_{\{u_1 > u_2\}} \Bigl(|D_x u_1(x)|^{p-2} + |D_x u_2(x)|^{p-2}\Bigr) |D_x u_1(x) - D_x u_2(x)|^2\, dx \leqslant 0, \tag{3.8}$$

где мы использовали обозначение

$$\{u_1 > u_2\} \stackrel{def:}{=} \{x \in \Omega :\ u_1(x) > u_2(x)\}.$$

Из неравенства (3.8) вытекает, что

$$D_x(u_1(x) - u_2(x))^+ = 0 \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega.$$

Откуда в силу неравенства Пуанкаре мы получим

$$(u_1(x) - u_2(x))^+ = 0 \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega \Rightarrow u_1(x) \leqslant u_2(x)$$

для почти всех $x \in \Omega$.

Теорема доказана.

§ 4. Метод монотонности в сочетании с методом Галеркина

Дадим определение.

Определение 4. *Отображение*

$$\mathbb{F} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$$

называется монотонным относительно скобок двойственности

$$\langle \cdot, \cdot \rangle$$

между сопряженными банаховыми пространствами $\mathbb{B}$ *и* $\mathbb{B}^*$, *если для всех* $u, v \in \mathbb{B}$ *имеет место следующее неравенство*:

$$\langle \mathbb{F}(u) - \mathbb{F}(v), u - v \rangle \geqslant 0, \tag{4.1}$$

и называется строго монотонным, если равенство в формуле (4.1) *имеет место, тогда и только тогда, когда* $u = v$.

Для дальнейшего нам нужно ввести новое понятие *коэрцитивности*. Дадим определение.

Определение 5. *Оператор* $\mathbb{F} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ *называется коэрцитивным, если имеет место следующее предельное равенство*:

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} \frac{\langle \mathbb{F}(u), u \rangle}{\|u\|} = +\infty. \tag{4.2}$$

Докажем, что оператор псевдолапласиана является коэрцитивным. Действительно, согласно определению обобщенного p–лапласиана имеет место следующая формула:

$$\langle -\Delta_p u, u \rangle = \int\limits_{\Omega} |Du|^p \, dx = \|Du\|_p^p \quad \text{при} \quad p \geqslant 2. \tag{4.3}$$

Отсюда и вытекает коэрцитивность.

Дадим сейчас определение очень полезного в приложениях S^+ свойства оператора Δ_p — псевдолапласиана.

Определение 6. *Будем говорить, что оператор* Δ_p *удовлетворяет так называемому* S^+ *свойству, если из того, что*

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad W_0^{1,p}(\Omega)$$

и условия, что

$$\limsup_{m \to +\infty} \langle -\Delta_p u_m, u_m - u \rangle \leqslant 0, \tag{4.4}$$

вытекает, что

$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad W_0^{1,p}(\Omega).$$

Справедлива следующая вспомогательная лемма.

Лемма 1. *Оператор* Δ_p *удовлетворяет* S^+ *свойству.*

Д о к а з а т е л ь с т в о .
Пусть
$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad W_0^{1,p}(\Omega).$$
Рассмотрим следующие выражения:
$$\langle \Delta_p u - \Delta_p u_m, u_m - u\rangle = \\ = \int\limits_\Omega \Bigl(|Du_m|^{p-2}Du_m - |Du|^{p-2}Du, Du_m - Du\Bigr) \geqslant \\ \geqslant 2^{p-2}\int\limits_\Omega |Du_m - Du|^p\,dx, \quad (4.5)$$
где в последнем неравенстве мы воспользовались неравенством из третьей тематической лекции. Теперь заметим, что в силу слабой сходимости последовательности $\{u_m\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ вытекает, что
$$\langle \Delta_p u, u_m - u\rangle \to 0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty, \quad (4.6)$$
поэтому переходя к пределу в неравенстве (4.5) в силу предельного свойства (4.4) получим, что
$$0 \geqslant \lim_{m\to+\infty}\int\limits_\Omega |Du_m - Du|^p\,dx \geqslant 0.$$
Значит,
$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad W_0^{1,p}(\Omega).$$
Л е м м а д о к а з а н а .

Теперь мы приступим к доказательству слабой обобщенной разрешимости задачи Дирихле в смысле определения 1. Действительно, воспользуемся теперь методом Галеркина.

1. С этой целью заметим, что банахово пространство $W_0^{1,p}(\Omega)$ является сепарабельным, т. е. в нем существует линейное счетное всюду плотное множество $\{w_j\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$. Рассмотрим следующее «галеркинское» приближение:
$$u_m(x) = \sum_{k=1}^m c_{mk}w_k(x), \quad c_{mk} \in \mathbb{R}^1, \quad (4.7)$$
причем функции $u_m(x)$ удовлетворяют следующему равенству:
$$\langle -\Delta_p u_m, w_j\rangle = \langle f, w_j\rangle \quad \text{для всех} \quad j = \overline{1, m}. \quad (4.8)$$

2. Теперь наша задача доказать разрешимость этой системы алгебраических уравнений. С этой целью мы и воспользуемся сформулированной и доказанной ранее леммы об остром угле. С этой целью рассмотрим следующий оператор
$$\mathbb{T}(\mathbf{c}_m) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m,$$

где
$$\mathbb{T}(\mathbf{c}_m) = (\mathbb{T}_1(\mathbf{c}_m), ..., \mathbb{T}_m(\mathbf{c}_m)), \quad \mathbf{c}_m = (c_{m1}, ..., c_{mm}).$$
$$\mathbb{T}_j(\mathbf{c}_m) = -\langle \Delta_p u_m, w_j \rangle - \langle f, w_j \rangle \quad \text{при} \quad j = \overline{1, m}.$$

Теперь рассмотрим стандартное скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ в $\mathbb{R}^m$. Справедлива следующая цепочка выражений:

$$(\mathbb{T}(\mathbf{c}_m), \mathbf{c}_m) = -\langle \Delta_p u_m, u_m \rangle - \langle f, w_m \rangle = \|Du_m\|_p^p - \langle f, w_m \rangle \geqslant$$
$$\geqslant \|Du_m\|_p^p - \|f\|_* \|Du_m\|_p = \|Du_m\|_p \left(\|Du_m\|_p^{p-1} - \|f\|_* \right) \geqslant 0$$

при достаточно большом $r : \|Du_m\|_p = r > 0$, где символом $\|\cdot\|_*$ обозначена норма банахова пространства $W^{-1,p'}(\Omega)$, а символом $\|Du\|_p$ обозначена норма банахова пространства $W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\|Du\|_p \stackrel{def:}{=} \left(\int\limits_\Omega |Du|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

и мы воспользовались следующим общим неравенством:

$$|\langle f, u \rangle| \leqslant \|f\|_* \|u\| \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{B}^*, \quad u \in \mathbb{B}.$$

□ Докажем его. Действительно, если $u = \vartheta$ — это нулевой элемент банахова пространства $\mathbb{B}$, то неравенство выполняется. Пусть $u \neq \vartheta$, тогда в силу определения нормы $\|\cdot\|_*$ имеет место следующее равенство

$$\|f\|_* = \sup_{\|w\| \leqslant 1} |\langle f, w \rangle|,$$

из которого сразу же вытекает неравенство

$$|\langle f, w \rangle| \leqslant \|f\|_* \quad \text{для всех} \quad \|w\| \leqslant 1.$$

Теперь возьмем в качестве w величину

$$w = \frac{u}{\|u\|}$$

и подставим это выражение в предыдущее неравенство и получим искомое неравенство. ⊠

3. Осталось заметить, что на конечномерном эвклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ все нормы эквивалентны, поэтому мы приходим к выводу, что найдется такое достаточно большое $R > 0$, что будет выполнено неравенство

$$(\mathbb{T}(\mathbf{c}_m), \mathbf{c}_m) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{c}_m| = R > 0.$$

Следовательно, в силу леммы об остром угле существует такое $\mathbf{c}_m \in \in \mathbb{R}^m$, что

$$\mathbb{T}(\mathbf{c}_m) = 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{c}_m| \leqslant R,$$

т. е. алгебраическая система (4.8) имеет решение $u_m \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Тем самым, у нас имеется последовательность $\{u_m\}$ «галеркинских» приближений.

4. Здесь заключается важный момент — нужно доказать, что при $m \to +\infty$ для некоторой подпоследовательности $\{u_{m_m}\} \subset \{u_m\}$ имеет место слабая сходимость

$$u_{m_m} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

5. Прежде всего умножим равенство (4.8) на c_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1, m}$, тогда получим следующее равенство:

$$\langle -\Delta_p u_m, u_m \rangle = \langle f, u_m \rangle, \tag{4.9}$$

из которого в силу определения обобщенного p–лапласиана мы получим следующую цепочку выражений:

$$\|Du_m\|_p^p = \langle f, u_m \rangle \leqslant \|f\|_* \|Du_m\|_p$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\|Du_m\|_p \leqslant \|f\|_*^{1/(p-1)} \quad \text{для всех} \quad m \in \mathbb{N}. \tag{4.10}$$

Следовательно, последовательность $\{u_m\}$ равномерно ограничена в банаховом пространстве $W_0^{1,p}(\Omega)$, и поэтому существует такая ее подпоследовательность $\{u_{m_m}\} \subset \{u_m\}$, которая

$$u_{m_m} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \tag{4.11}$$

6. Теперь докажем, что выполнено свойство (4.4). Действительно, в силу (4.8) имеет место следующее равенство

$$\langle -\Delta_p u_m, u_m \rangle = \langle f, u_m \rangle\,, \tag{4.12}$$

Выберем последовательность вида [1])

$$v_m = \sum_{j=1}^{m} k_{mj} w_j \tag{4.13}$$

такую, что

$$v_m \to u \quad \text{сильно в} \quad W_0^{1,p}(\Omega). \tag{4.14}$$

7. Умножим обе части равенства (4.8) на k_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1, m}$ и в результате получим равенство

$$\langle -\Delta_p u_m, v_m \rangle = \langle f, v_m \rangle\,. \tag{4.15}$$

Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\langle -\Delta_p u_m, u_m - u \rangle = \langle f, u_m \rangle - \langle -\Delta_p u_m, u \rangle =$$

---

[1]) Которая существует в силу того, что $\{w_j\}$ — это галеркинский базис банахова пространства $W_0^{1,p}(\Omega)$.

$$
\begin{aligned}
&= \langle f, u_m\rangle - \langle -\Delta_p u_m, u - v_m\rangle - \langle -\Delta_p u_m, v_m\rangle = \\
&= \langle f, u_m\rangle - \langle -\Delta_p u_m, u - v_m\rangle - \langle f, v_m\rangle = \\
&= \langle f, u_m - v_m\rangle - \langle -\Delta_p u_m, u - v_m\rangle \stackrel{def:}{=} \mathrm{I}_{1m} + \mathrm{I}_{2m}.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим каждое слагаемое в правой части последнего равенства. Действительно, имеет место неравенство

$$
|\mathrm{I}_{1m}| \leqslant |\langle f, u_m - v_m\rangle| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty, \tag{4.16}
$$

поскольку

$$
u_m - v_m = (u_m - u) - (v_m - u) \rightharpoonup 0 \quad \text{слабо в} \quad W_0^{1,p}(\Omega).
$$

Оценим второе слагаемое I_{2m}. Действительно, имеет место следующая оценка:

$$
|\mathrm{I}_{2m}| \leqslant |\langle -\Delta_p u_m, u - v_m\rangle| \leqslant \|\Delta_p u_m\|_* \|u - v_m\| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty, \tag{4.17}
$$

поскольку имеет место свойство (4.14) и, кроме того, так как имеет место следующая цепочка неравенств:

$$
\begin{aligned}
\|\Delta_p u_m\|_* &= \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} |\langle -\Delta_p u_m, \varphi\rangle| = \\
&= \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} \left| \int_\Omega |Du_m|^{p-2}(Du_m, D\varphi)\,dx \right| \leqslant \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} \int_\Omega |Du_m|^{p-1}|D\varphi|\,dx \leqslant \\
&\leqslant \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} \left(\int_\Omega |Du_m|^p\,dx \right)^{1/p'} \left(\int_\Omega |D\varphi|^p\,dx \right)^{1/p} \leqslant \\
&\leqslant \left(\int_\Omega |Du_m|^p\,dx \right)^{1/p'} \leqslant \|f\|_*^p.
\end{aligned}
$$

Следовательно, имеет место свойство (4.4). Теперь осталось воспользоваться леммой 2 и в силу S^+ свойства p–лапласиана получить следующий важный результат:

$$
u_{m_m} \to u \quad \text{сильно в} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \tag{4.18}
$$

8. Наша ближайшая задача доказать, что

$$
\Delta_p u_{m_m} \to \Delta_p u \quad \text{сильно в} \quad W^{-1,p'}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \tag{4.19}
$$

С этой целью нам нужно доказать так называемую *липшиц–непрерывность* оператора псевдолапласиана. Рассмотрим отдельно следующее выражение:

$$\left||\xi|^{p-2}\xi-|\eta|^{p-2}\eta\right| \quad \text{для любых} \quad \xi,\eta\in\mathbb{R}^n$$

и получим для него две «грубые» оценки, из которых потом получим одну «тонкую» оценку. Действительно, имеет место первая оценка

$$\left||\xi|^{p-2}\xi-|\eta|^{p-2}\eta\right| = \left||\xi|^{p-2}[\xi-\eta]+\eta\left[|\xi|^{p-2}-|\eta|^{p-2}\right]\right| \leqslant$$
$$\leqslant |\xi|^{p-2}|\xi-\eta|+(p-2)|\eta|\max\left\{|\xi|^{p-3},|\eta|^{p-3}\right\}|\xi-\eta|, \quad (4.20)$$

а теперь вторая

$$\left||\eta|^{p-2}\eta-|\xi|^{p-2}\xi\right| = \left||\eta|^{p-2}[\eta-\xi]+\xi\left[|\eta|^{p-2}-|\xi|^{p-2}\right]\right| \leqslant$$
$$\leqslant |\eta|^{p-2}|\eta-\xi|+(p-2)|\xi|\max\left\{|\eta|^{p-3},|\xi|^{p-3}\right\}|\eta-\xi|, \quad (4.21)$$

из которых вытекает «тонкая» оценка и дальнейшие выражения

$$\left||\xi|^{p-2}\xi-|\eta|^{p-2}\eta\right| \leqslant \min\left\{|\xi|^{p-2},|\eta|^{p-2}\right\}|\xi-\eta|+$$
$$+(p-2)\min\{|\xi|,|\eta|\}\frac{\max\left\{|\xi|^{p-2},|\eta|^{p-2}\right\}}{\min\{|\xi|,|\eta|\}}|\xi-\eta| =$$
$$=(p-1)\max\left\{|\xi|^{p-2},|\eta|^{p-2}\right\}|\xi-\eta| \quad (4.22)$$

для всех $\xi,\eta\in\mathbb{R}^n$ и $p\geqslant 2$.

9. Теперь согласно определению нормы банахова пространства $W^{-1,p'}(\Omega)$ имеют место следующие выражения:

$$\|\Delta_p u-\Delta_p u_m\|_* = \sup_{\|w\|\leqslant 1}|\langle\Delta_p u-\Delta_p u_m,w\rangle| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\|w\|\leqslant 1}\left|\int\limits_{\Omega}\left||Du|^{p-2}Du-|Du_m|^{p-2}Du_m\right||Dw|\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant (p-1)\sup_{\|w\|\leqslant 1}\int\limits_{\Omega}|Du_m-Du|\max\left\{|Du|^{p-2},|Du_m|^{p-2}\right\}|Dw|\,dx =$$
$$=(p-1)\sup_{\|w\|\leqslant 1}\mathrm{I}, \quad (4.23)$$

где мы воспользовались неравенством (4.22).

10. Воспользуемся обобщенным неравенством Гельдера для последнего интеграла в цепочке выражений (4.23). Действительно, в обобщенном неравенстве Гельдера положим соответственно

$$p_1=p, \quad p_2=\frac{p}{p-2}, \quad p_3=p, \quad r=1, \quad \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}=1.$$

И тогда получим следующее неравенство для выражения I :

$$\mathrm{I} \leqslant \left(\int\limits_{\Omega} |Du - Du_m|^p \, dx\right)^{1/p} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\Omega} \max\left\{|Du|^p, |Du_m|^p\right\} \, dx\right)^{(p-2)/p} \left(\int\limits_{\Omega} |Dw|^p \, dx\right)^{1/p}. \quad (4.24)$$

Таким образом из неравенств (4.23) и (4.24) вытекает следующая оценка

$$\|\Delta_p u - \Delta_p u_m\|_* \leqslant \mu(\mathrm{R}_m)\|Du - Du_m\|_p, \quad (4.25)$$

$$\mu(\mathrm{R}_m) = c_1 \mathrm{R}_m^{p-2}, \quad \mathrm{R}_m = \max\left\{\|Du\|_p, \|Du_m\|_p\right\}.$$

В силу свойства (4.10) приходим к выводу, что имеет место неравенство

$$\mu(\mathrm{R}_m) \leqslant c_1 \max\left\{\|Du\|_p, \|f\|_*^{1/(p-1)}\right\},$$

т. е. ограничена величиной, которая не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Тем самым, мы в силу (4.18) и (4.25) приходим к выводу о том, что

$$\Delta_p u_m \to \Delta_p u \quad \text{сильно в} \quad W^{-1,p'}(\Omega). \quad (4.26)$$

11. Осталось перейти к пределу при $m \to +\infty$ в равенстве (4.8) и получить с учетом (4.26) следующий результат:

$$\langle -\Delta_p u, w_j \rangle = \langle f, w_j \rangle \quad \text{для всех} \quad j = \overline{1, +\infty}, \quad (4.27)$$

из которого в силу плотности линейного счетного семейства $\{w_j\}$ в $W_0^{1,p}(\Omega)$ вытекает, что построенная функция $u(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ является слабым решением задачи Дирихле в смысле определения 1.

12. Осталось доказать единственность слабого решения. Справедливо неравенство

$$\langle -\Delta_p u_1 + \Delta_p u_2, u_2 - u_1 \rangle =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \left(|Du_2|^{p-2} Du_2 - |Du_1|^{p-2} Du_1, Du_2 - Du_1\right) \, dx \geqslant$$

$$\geqslant 2^{2-p} \int\limits_{\Omega} |Du_1 - Du_2|^p \, dx. \quad (4.28)$$

Теперь возьмем в неравенстве (4.28) в качестве $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ два произвольных слабых решения задачи Дирихле в смысле определения 2, но тогда из неравенства (4.28) вытекает, равенство

$$\int\limits_{\Omega} |Du_1 - Du_2|^p \, dx = 0.$$

Отсюда вытекает единственность слабого решения задачи Дирихле, понимаемого в слабом смысле определения 1. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 4. *Для всякой $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ существует единственное слабое обобщенное решение $u(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ задачи Дирихле, понимаемой в слабом смысле определения* 1.

В заключение этого параграфа приведем без доказательства важный результат Браудера и Минти.

Теорема 5. *Пусть оператор $\mathbb{A} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ радиально непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Тогда существует обратный оператор $\mathbb{A}^{-1} : \mathbb{B}^* \to \mathbb{B}$, и этот обратный оператор строго монотонен, ограничен и деминепрерывен.*

Отметим, что обобщенный оператор p–Лапласа удовлетворяет всем условиям теоремы Браудера–Минти.

§ 5. Метод слабых верхних и нижних решений

В этом параграфе мы рассмотрим метод слабых нижних и верхних решений для нелинейного неоднородного уравнения p–лапласиана в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$

$$-\Delta_p u = f(x,u) \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \quad 2 < p < 3, \tag{5.1}$$

где

$$f(x,u) : \overline{\Omega} \otimes \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$$

— это непрерывная функция и

$$|f(x,u)| \leqslant a_1 + b_1 |u|^{q+1}, \tag{5.2}$$

$$0 < q + 2 \leqslant p^* = \frac{3p}{3-p}$$

где постоянные $a_1, b_1 \geqslant 0$ и

$$a_1 + b_1 > 0.$$

Причем либо

$$f_u'(x,u) \geqslant 0 \quad \text{либо} \quad |f_u'(x,u)| \leqslant a \tag{5.3}$$

для всех $x \in \Omega$ и $u \in \mathbb{R}^1$.

Определение 7.

(i) *Функция $\overline{U} \in W^{1,p}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ называется слабым верхним решением задачи* (5.1), *если*

$$\int_\Omega \left(\left| D\overline{U} \right|^{p-2} D\overline{U}, Dv \right) dx \geqslant \int_\Omega f(x, \overline{U}) v \, dx \tag{5.4}$$

для любой функции $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $v \geqslant 0$ почти всюду.

(ii) *Функция* $\underline{U} \in W^{1,p}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ *называется слабым нижним решением задачи* (5.1), *если*

$$\int\limits_{\Omega} \left(|D\underline{U}|^{p-2} \, D\underline{U}, Dv \right) \, dx \leqslant \int\limits_{\Omega} f(x, \underline{U}) v \, dx \tag{5.5}$$

для любой функции $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $v \geqslant 0$ *почти всюду.*

(iii) *Функция* $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ *называется слабым решением задачи* (5.1), *если*

$$\int\limits_{\Omega} \left(|Du|^{p-2} \, Du, Dv \right) \, dx = \int\limits_{\Omega} f(x, u) v \, dx \tag{5.6}$$

для любой функции $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Замечание 1. Если $\overline{U}, \underline{U} \in \mathbb{C}^2(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, то из (5.4) и (5.5) получаем

$$-\Delta_p \overline{U} \geqslant f(x, \overline{U}), \quad -\Delta_p \underline{U} \leqslant f(x, \underline{U}) \quad \text{в} \quad \Omega,$$

что соответствует классическим определениям верхних и нижних решений. [1])

Теорема 6. *Пусть существует верхнее* $\overline{U}$ *и нижнее* $\underline{U}$ *решения задачи* (5.1) *такие, что*

$$\underline{U} \leqslant 0, \quad \overline{U} \geqslant 0 \quad \textit{на} \quad \partial\Omega \quad \textit{в смысле следов,} \quad \underline{U} \leqslant \overline{U} \quad \textit{п.в.} \quad \textit{в} \quad \Omega. \tag{5.7}$$

Тогда существует слабое решение u *задачи* (5.1) *такое, что*

$$\underline{U} \leqslant u \leqslant \overline{U} \quad \textit{п.в.} \quad \textit{в} \quad \Omega.$$

Доказательство.

Доказательство проведем в несколько шагов.

Шаг 1. Фиксируем достаточно большое $\lambda > 0$ так, что отображение

$$z \to f(x, z) + \lambda z \tag{5.8}$$

неубывающее для всех $x \in \Omega$. Такой выбор возможен в силу (5.3).

Теперь запишем $u_0 = \underline{U}$ и при заданных u_k $(k = 0, 1, 2...)$ индуктивно определим $u_{k+1} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ как единственное слабое решение краевой задачи

$$-\Delta_p u_{k+1} + \lambda u_{k+1} = f(x, u_k) + \lambda u_k \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u_{k+1} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{5.9}$$

[1]) Идея доказательства этого утверждения такая — пусть в какой–то точке $x_0 \in \Omega$ выражение $-\Delta_p \overline{U} < f(x, \overline{U})$, но тогда в силу непрерывности этого выражения и в некоторой замкнутой ее окрестности знак будет тот же. Теперь достаточно взять $v(x) \geqslant 0$ с носителем, лежащим в этой замкнутой окрестности и получить противоречие с определением слабого верхнего решения $\overline{U}(x)$.

Шаг 2. Покажем, что
$$\underline{U} = u_0 \leqslant u_1 \leqslant \dots \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \cdots \quad \text{п.в.} \quad \Omega. \tag{5.10}$$

1. Для этого сначала заметим, что в силу (5.9) при $k = 0$
$$\int\limits_\Omega \left(\left(|Du_1|^{p-2} Du_1, Dv \right) + \lambda u_1 v \right) dx = \int\limits_\Omega (f(x, u_0) + \lambda u_0) v \, dx \tag{5.11}$$
для любой $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Вычитая (5.11) из (5.5), получим следующее неравенство:
$$\int\limits_\Omega \left[(|Du_0|^{p-2} Du_0 - |Du_1|^{p-2} Du_1, Dv) + \lambda(u_0 - u_1, v) \right] dx \leqslant 0, \quad u_0 = \underline{U},$$
и полагая
$$v = (u_0 - u_1)^+ \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad v \geqslant 0 \quad \text{почти всюду},$$
находим
$$\int\limits_\Omega \Big(|Du_0|^{p-2} Du_0 - |Du_1|^{p-2} Du_1,$$
$$, D(u_0 - u_1)^+ + \lambda(u_0 - u_1)(u_0 - u_1)^+ \Big) dx \leqslant 0. \tag{5.12}$$
Однако,
$$D(u_0 - u_1)^+ = \begin{cases} D(u_0 - u_1) & \text{почти всюду на} \quad \{u_0 \geqslant u_1\}, \\ 0 & \text{почти всюду на} \quad \{u_1 \geqslant u_0\}. \end{cases}$$
Кроме того, воспользуемся неравенством (**??**) леммы **??** третьей тематической лекции и получить неравенство
$$\int\limits_{u_0 \geqslant u_1} \left(|Du_0|^{p-2} Du_0 - |Du_1|^{p-2} Du_1, Du_0 - Du_1 \right) dx \geqslant$$
$$\geqslant 2^{2-p} \int\limits_{u_0 \geqslant u_1} |Du_0 - Du_1|^p \, dx.$$
Следовательно,
$$\int\limits_{u_0 \geqslant u_1} \left[2^{2-p} |D(u_0 - u_1)|^p + \lambda(u_0 - u_1)^2 \right] dx \leqslant 0,$$
откуда вытекает, что
$$u_0(x) \leqslant u_1(x) \quad \text{почти всюду на} \quad \Omega.$$

2. Теперь по индукции предположим, что
$$u_{k-1}(x) \leqslant u_k(x) \quad \text{п.в. в} \quad \Omega. \tag{5.13}$$

Из (**??**) находим

$$\int\limits_{\Omega}\left[\left(|Du_{k+1}|^{p-2}\,Du_{k+1},Dv\right)+\lambda u_{k+1}v\right]\,dx=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\left(f(x,u_k)+\lambda u_k\right)v\,dx \quad (5.14)$$

и

$$\int\limits_{\Omega}\left[\left(|Du_k|^{p-2}\,Du_k,Dv\right)+\lambda u_k v\right]\,dx=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\left(f(x,u_{k-1})+\lambda u_{k-1}\right)v\,dx \quad (5.15)$$

для любых $v\in W_0^{1,p}(\Omega)$. Вычитая и полагая

$$v\equiv\left(u_k-u_{k+1}\right)^+,$$

находим

$$\int\limits_{u_k\geqslant u_{k+1}}\left[2^{2-p}\,|D(u_k-u_{k+1})|^p+\lambda\left(u_k-u_{k+1}\right)^2\right]\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\Omega}\left[\left(f(x,u_{k-1})+\lambda u_{k-1}\right)-\left(f(x,u_k)+\lambda u_k\right)\right]\left(u_k-u_{k+1}\right)^+dx\leqslant 0.$$

Последнее неравенство верно в силу (5.13) и (5.8). Поэтому $u_k\leqslant u_{k+1}$ почти всюду в Ω, как и утверждалось.

Шаг 3. Теперь покажем, что

$$u_k\leqslant\overline{U}\quad\text{почти всюду в}\quad\Omega\quad(k=0,1,2\ldots). \quad (5.16)$$

При $k=0$ (5.16) верно в силу (5.7). Пусть для некоторого k

$$u_k\leqslant\overline{U}\quad\text{почти всюду в}\quad\Omega. \quad (5.17)$$

Вычитая (5.4) из (5.14) и полагая

$$v\equiv\left(u_{k+1}-\overline{U}\right)^+,$$

находим

$$\int\limits_{u_{k+1}\geqslant\overline{U}}\left[2^{2-p}\left|D(u_{k+1}-\overline{U})\right|^p+\lambda(u_{k+1}-\overline{U})^2\right]\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\Omega}\left[\left(f(x,u_k)+\lambda u_k\right)-\left(f(x,\overline{U})+\lambda\overline{U}\right)\right]\left(u_{k+1}-\overline{U}\right)^+\,dx\leqslant 0$$

в силу (5.17) и (5.8). Таким образом, $u_{k+1} \leqslant \overline{U}$ почти всюду в Ω.

Шаг 4.

1. Ввиду (5.10) и (5.16)

$$\underline{U} \leqslant \cdots \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant \cdots \leqslant \overline{U} \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega. \tag{5.18}$$

Поэтому

$$u(x) \equiv \lim_{k \to +\infty} u_k(x) \tag{5.19}$$

существует для почти всюду $x \in \Omega$. Кроме того,

$$u_k \to u \quad \text{сильно в} \quad L^{q+2}(\Omega) \subset L^2(\Omega), \quad q \geqslant 0 \tag{5.20}$$

что гарантируется теоремой о мажорируемой сходимости и (5.18).

□ Действительно, имеем

$$\int\limits_{\Omega} |u_k(x) - u(x)|^{q+2}\, dx \leqslant c(q) \int\limits_{\Omega} |V(x)|^{q+2}\, dx < +\infty,$$

$$V(x) \stackrel{def:}{=} \max\left\{|\underline{U}(x)|, |\overline{U}(x)|\right\} \in \mathbb{C}(\overline{\Omega}).$$

В совокупности с (5.19) получаем утверждение. ⊠

2. Наконец, в силу того, что функция $f(x,u)$ каратеодориева с условием роста (5.3), то соответствующий оператор Немыцкого

$$N_f(u) : L^{q+2}(\Omega) \to L^{(q+2)/(q+1)}(\Omega)$$

является непрерывным, т. е., в частности, в силу (5.20)

$$\|N_f(u_n) - N_f(u)\|_{(q+2)/(q+1)} \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{5.21}$$

3. Из (5.9) скалярным в смысле скобок двойственности

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : W^{-1,p'}(\Omega) \otimes W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}^1$$

умножением на $u_{k+1} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ получаем равенство

$$\langle -\Delta_p u_{k+1} + \lambda u_{k+1}, u_{k+1} \rangle = \langle f(x, u_k) + \lambda u_k, u_{k+1} \rangle\, .$$

После «интегрирования по частям» отсюда получим следующую цепочку выражений:

$$\|Du_{k+1}\|_p^p + \lambda \|u_{k+1}\|_2^2 = \int\limits_{\Omega} f(x, u_k) u_{k+1}\, dx + \lambda \int\limits_{\Omega} u_k u_{k+1}\, dx.$$

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\left|\int\limits_{\Omega} f(x, u_k) u_{k+1}\, dx\right| \leqslant a_1 \int\limits_{\Omega} |u_{k+1}|\, dx + b_1 \int\limits_{\Omega} |u_k|^{q+1} |u_{k+1}|\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \|u_{k+1}\|_2^2 + c_1(\varepsilon) + b_1 \|u_k\|_{q+2}^{q+1} \|u_{k+1}\|_{q+2}. \tag{5.22}$$

Заметим, что

$$\underline{U}(x) \leqslant u_k(x) \leqslant \overline{U}(x) \quad \text{для п. вс.} \quad x \in \Omega,$$

причем

$$\underline{U}(x), \overline{U}(x) \in W^{1,p}(\Omega) \subset L^{q+2}(\Omega).$$

Поэтому

$$|u_k(x)| \leqslant V(x) \stackrel{def:}{=} \max\left\{|\underline{U}(x)|, \left|\overline{U}(x)\right|\right\} \in L^{q+2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

для почти всех $x \in \Omega$. Тогда имеем

$$b_1\|u_k\|_{q+2}^{q+1}\|u_{k+1}\|_{q+2} \leqslant b_1\|V(x)\|_{q+2}^{q+1} K_{fr}\|Du_{k+1}\|_p, \tag{5.23}$$

где K_{fr} — это постоянная Фридрихса. Далее применяя трехпараметрическое с малым $\varepsilon > 0$ к правой части в (5.23), мы получим неравенство

$$\left|\int\limits_{\Omega} f(x, u_k)u_{k+1}\,dx\right| \leqslant c_2(\varepsilon) + \varepsilon\|u_{k+1}\|_2^2 + \varepsilon\|Du_{k+1}\|_p^p. \tag{5.24}$$

Наконец, справедливо очевидное неравенство

$$\lambda\left|\int\limits_{\Omega} u_k u_{k+1}\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\|u_{k+1}\|_2^2 + c(\varepsilon)\|u_k\|_2^2 \leqslant \varepsilon\|u_{k+1}\|_2^2 + c(\varepsilon)\|V(x)\|_2^2. \tag{5.25}$$

В силу (5.22) и неравенств (5.24), (5.25) мы получим неравенство

$$(1-\varepsilon)\|Du_{k+1}\|_p^p + (\lambda - 2\varepsilon)\|u_{k+1}\|_2^2 \leqslant$$
$$\leqslant c_3(\varepsilon), \quad \varepsilon \in (0, \min\{1, \lambda/2\}). \tag{5.26}$$

Из оценки (5.26) мы приходим к выводу о том, что последовательность $\{u_k\}$ равномерно по $k \in \mathbb{N}$ ограничена в $W_0^{1,p}(\Omega)$. Поскольку банахово пространство $W_0^{1,p}(\Omega)$ рефлексивно [1], то существует такая подпоследовательность $\{u_{k_j}\} \subset \{u_k\}$, что

$$u_{k_j}(x) \rightharpoonup u(x) \quad \text{слабо в} \quad W_0^{1,p}(\Omega).$$

Как и в предыдущем параграфе, можно доказать, что в силу S^+–свойства p–Лапласиана

$$u_{k_j}(x) \to u(x) \quad \text{сильно в} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad k_j \to +\infty.$$ [2]

[1] А значит, слабо замкнуто.

[2] В частности, $u_{k_j} \to u(x)$ сильно в $L^2(\Omega)$.

Отсюда, как и ранее, вытекает, что

$$\Delta_p u_{k_j}(x) \to \Delta_p u(x) \quad \text{сильно в} \quad W^{-1,p'}(\Omega) \quad \text{при} \quad k_j \to +\infty.$$

Шаг 5. Наконец, проверим, что u — это слабое решение задачи (5.1). Для этого фиксируем $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{q+2}(\Omega)$. Тогда из (5.9) находим

$$\int\limits_\Omega \left[\left(\left|Du_{k_j}\right|^{p-2} Du_{k_j}, Dv\right) + \lambda u_{k_j} v\right] dx =$$
$$= \int\limits_\Omega \left(f(x, u_{k_j-1}) + \lambda u_{k_j-1}\right) v\, dx. \quad (5.27)$$

Устремляя $k_j \to +\infty$, имеем

$$f(x, u_{k_j-1}) \to f(x,u) \quad \text{сильно в} \quad L^{(q+2)/(q+1)}(\Omega),$$
$$u_{k_j-1} \to u \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega)$$

и поэтому из (5.27) получим, что имеет место предельное равенство

$$\int\limits_\Omega \left[\left(|Du|^{p-2} Du, Dv\right) + \lambda uv\right] dx = \int\limits_\Omega (f(x,u) + \lambda u)\, v\, dx.$$

Сокращая член, содержащий λ, приходим к требуемому равенству

$$\int\limits_\Omega \left(|Du|^{p-2} Du, Dv\right) dx = \int\limits_\Omega f(x,u) v\, dx \quad \text{для всех} \quad v(x) \in H_0^1(\Omega).$$

Что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

§ 6. Метод Лере–Шаудера. Слабые решения

Рассмотрим следующую задачу

$$\begin{cases} -\Delta_p u \equiv -\operatorname{div}(|Du|^{p-2} Du) = f(x,u) & x \in \Omega, \\ u = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.1)$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$, $\delta \in (0,1]$.

Введем обозначение

$$p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-p}, & \text{если} \quad p < N, \\ \infty, & \text{если} \quad p \geqslant N. \end{cases}$$

Предположим, что функция $f : \Omega \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ является Каратеодориевой и удовлетворяет условию роста

$$|f(x,s)| \leqslant c|s|^{q-1} + b(x), \quad x \in \Omega, \quad s \in \mathbb{R}^1, \tag{6.2}$$

где $c > 0$ — некоторая постоянная, $q \in (1, p^*)$, $b(x) \in L^{q'}(\Omega)$,

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Ограничение $q \in (1, p^*)$ гарантирует компактность вложения $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

Теперь сопоставим Каратеодориевой функции $f(x,u)$ оператор Немыцкого $N_f \equiv f(x, u(x))$. Заметим, что справедлива следующая цепочка вложений

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \xrightarrow{N_f} L^{q'}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega),$$

из которой вытекает, что оператор Немыцкого N_f является компактным оператором

$$N_f : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega).$$

Определение 8. *Слабым решением задачи* (6.1) *называется функция* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *удовлетворяющая уравнению*

$$\langle -\Delta_p u, v \rangle = \langle N_f u, v \rangle \quad \text{для всех} \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{6.3}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — *скобки двойственности между банаховыми пространствами* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *и* $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Как мы уже установили ранее оператор

$$(-\Delta_p)^{-1} : W^{-1,p'}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$$

является ограниченным и непрерывным. Поэтому (6.3) может быть переписано в эквивалентном виде

$$u = (-\Delta_p)^{-1} N_f u, \tag{6.4}$$

с компактным оператором

$$\mathbb{T}(\cdot) \overset{def}{=} (-\Delta_p)^{-1} N_f : W_0^{1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega). \tag{6.5}$$

Докажем, что следующее множество ограничено в $W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$S = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \middle| \, u = \alpha \mathbb{T}(u) \text{ для некоторого } \alpha \in [0,1] \right\}.$$

□ Действительно, справедлива следующая цепочка равенств для произвольного $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\|\mathbb{T}(u)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \langle (-\Delta_p)\, \mathbb{T}(u), \mathbb{T}(u) \rangle = \langle N_f u, \mathbb{T}(u) \rangle =$$

$$= \int\limits_{\Omega} f(x,u(x))\mathbb{T}(u)\,dx \leqslant \int\limits_{\Omega} \big(c|u|^{q-1} + b(x)\big)\,|\mathbb{T}(u)|\,dx.$$

Более того, для $u \in S$, т.е. $u = \alpha\mathbb{T}(u)$ с некоторым $\alpha \in [0,1]$ мы имеем цепочку неравенств

$$\|\mathbb{T}(u)\|^p_{W^{1,p}_0(\Omega)} \leqslant c\alpha^{q-1}\|\mathbb{T}(u)\|^q_q + \|b\|_{q'}\|\mathbb{T}(u)\|_q \leqslant$$
$$\leqslant c_1^q\alpha^{q-1}\|\mathbb{T}(u)\|^q_{W^{1,p}_0(\Omega)} + c_1\|b\|_{q'}\|\mathbb{T}(u)\|_{W^{1,p}_0(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant c_1^q\|\mathbb{T}(u)\|^q_{W^{1,p}_0(\Omega)} + c_1\|b\|_{q'}\|\mathbb{T}(u)\|_{W^{1,p}_0(\Omega)},$$

где c_1 — это постоянная вложения $W^{1,p}_0(\Omega) \to L^q(\Omega)$. Следовательно, для каждого $u \in S$ справедливо неравенство

$$\|\mathbb{T}(u)\|^p_{W^{1,p}_0(\Omega)} - K_1\|\mathbb{T}(u)\|^q_{W^{1,p}_0(\Omega)} - K_2\|\mathbb{T}(u)\|_{W^{1,p}_0(\Omega)} \leqslant 0 \tag{6.6}$$

с некоторыми постоянными $K_1, K_2 \geqslant 0$. Заметим, что из (6.6) при $q \in \in (1,p)$ вытекает существует такая постоянная $a \geqslant 0$, что

$$\|\mathbb{T}(u)\|_{W^{1,p}_0(\Omega)} \leqslant a.$$

Отсюда вытекает ограниченность S поскольку

$$\|u\|_{W^{1,p}_0(\Omega)} = \alpha\|\mathbb{T}(u)\|_{W^{1,p}_0(\Omega)} \leqslant a. \quad \boxtimes$$

Отметим, что всегда $p < p^*$.

Таким образом, в силу следствия из теоремы Шаудера мы приходим к следующей теореме о разрешимости:

Теорема 7. *Если каратеодориева функция $f : \Omega \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ удовлетворяет* (6.2) *с $q \in (1,p)$, тогда оператор $(-\Delta_p)^{-1} N_f$ имеет неподвижную точку в $W^{1,p}_0(\Omega)$ или, что эквивалентно, задача* (6.3) *имеет решение. Более того, все решения этой задачи образуют ограниченное множество в $W^{1,p}_0(\Omega)$.*

§ 7. Метод Лере–Шаудера. Классические решения

Пусть $\mathbb{B}$ — это банахово пространство. Заметим, что справедлива следующий вариант теоремы Лере–Шаудера о существовании неподвижной точки компактного отображения, зависящего от параметра:

Теорема 8. *Отображение $T(u,\sigma)$*

$$T(u,\sigma) : \mathbb{B} \otimes [0,1] \to \mathbb{B}, \tag{7.1}$$

удовлетворяет следующим условиям:

(i) *T — это компактное отображение;*

(ii) *$T(u,0) = 0$ для всех $u \in \mathbb{B}$;*

(iii) *Существует постоянная $M > 0$ такая, что если*

$$u = T(u,\sigma) \quad \text{для некоторого} \quad \sigma \in [0,1], \quad u \in \mathbb{B},$$

то отсюда вытекает, что $\|u\| \leqslant M$. [1])
Тогда отображение $T(\cdot, 1)$ *имеет неподвижную точку, т. е. существует* $u \in \mathbb{B}$, *что*

$$T(u, 1) = u.$$

Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$-\operatorname{div}(a(u)D_x u) + b(u) = f(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{7.2}$$

$$u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega, \tag{7.3}$$

где

$$a(u) = (u^2 + 1)^{m/2}, \quad b(u) = |u|^{\gamma-1}u, \quad f(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}(\overline{\Omega}) \tag{7.4}$$

при $m > 0$, $\gamma > 1$. Справедлива следующая теорема:
Теорема 9. *Пусть* $0 < \alpha < 1$, $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\alpha}$. *Тогда*

(i) *Существуют постоянные* $0 < \beta < 1$ *и* $M > 0$, *не зависящие от* $u(x)$, *что для любого решения* $u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ *задачи Дирихле* (7.2), (7.3) *имеет место априорная оценка*

$$|u|_{1+\beta;\Omega} \leqslant M. \tag{7.5}$$

(ii) *Задача Дирихле* (7.2), (7.3) *имеет решение класса* $u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Доказательство. Отметим, что свойство (i) доказывается достаточно сложно и относится к тонкой технике получения априорных оценок типа классических априорных оценок Шаудера [2]). Поэтому предполагаем свойство (i) выполненным.

Шаг 1. Выберем $\mathbb{B} = \mathbb{C}^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$. Для любого $v(x) \in \mathbb{B}$ и $\sigma \in [0, 1]$ рассмотрим задачу

$$-\sigma \operatorname{div}(a(v)D_x u) - (1-\sigma)\Delta u + \sigma b(v) = \sigma f(x), \quad x \in \Omega, \tag{7.6}$$

$$u(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{7.7}$$

В силу классических априорных оценок Шаудера линейная относительно $u(x)$ задача (7.6), (7.7) имеет единственное решение класса $u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Определим отображение

$$T : (v, \sigma) \in \mathbb{B} \otimes [0, 1] \to u(x) \in \mathbb{B}.$$

Теперь наша задача проверить, что выполнены свойства (i)–(iii) указанного отображения $T(v, \sigma)$ из теоремы Лере–Шаудера 8.

Шаг 2. Поскольку пространство $\mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ вполне непрерывно вложено в $\mathbb{B} = \mathbb{C}^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$, то оператор T является компактным.

---

[1]) Постоянная M на зависит от $u \in \mathbb{B}$ и от $\sigma \in [0, 1]$.

[2]) Даже получение классической оценки Шаудера для уравнения Пуассона непросто.

Шаг 3. Свойство (ii). Пусть $\sigma = 0$, тогда задача (7.6), (7.7) примет следующий вид:

$$-\Delta u(x) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega.$$

Эта задача, понимаемая в классическом смысле, имеет лишь тривиальное решение. Значит, свойство (ii) теоремы Лере–Шаудера 8 выполнено:

$$T(v, 0) = 0 \quad \text{для всех} \quad v(x) \in \mathbb{B}.$$

Шаг 4. Наконец, предположим, что при некотором $\sigma \in [0, 1]$ существует неподвижная точка $u(x) \in \mathbb{B}$ отображения $T(\sigma, v)$. Именно, функция $u(x)$ удовлетворяет задаче

$$-\sigma \operatorname{div}(a(u)D_x u) - (1-\sigma)\Delta u + \sigma b(u) = \sigma f(x), \quad x \in \Omega,$$
$$u(x) = 0 \quad \text{на} \quad x \in \partial\Omega.$$

В соответствии с утверждением (i) теоремы 9 существует постоянная $0 < \beta < 1$ и константа $M > 0$, не зависящая от $u(x)$ и σ такая, что

$$|u|_{1+\beta;\Omega} \leqslant M. \tag{7.8}$$

Теперь перепишем уравнение для $u(x)$ в следующей форме:

$$-\left(\sigma a(u) + 1 - \sigma\right)\Delta u = \sigma\left(a^{'}(u)|D_x u|^2 - b(u) + f(x)\right). \tag{7.9}$$

В силу априорной оценки (7.8) коэффициенты уравнения (7.9) принадлежат классу $\mathbb{C}^{\alpha\beta}(\overline{\Omega})$. В соответствии с теорией Шаудера линейных уравнений справедлива априорная оценка

$$|u|_{2+\alpha\beta;\Omega} \leqslant K, \tag{7.10}$$

где постоянная $K > 0$ на зависит от u, но систематически зависит от постоянной M из оценки (7.8). Но в силу очевидного вполне непрерывного [1] вложения

$$\mathbb{C}^{2+\alpha\beta}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{C}^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$$

мы получим, что

$$\|u\| \stackrel{def:}{=} |u|_{1+\alpha;\Omega} \leqslant M < +\infty,$$

где постоянная $M > 0$ и не зависит от u и от σ.

Итак, в силу теоремы Лере–Шаудера 8 существует такое $u(x) \in \mathbb{B}$, что

$$T(u, 1) = u \in \mathbb{C}^{1+\alpha}(\Omega).$$

Далее используя классические априорные оценки Шаудера для линейных эллиптических уравнений можно получить, что на самом деле указанная неподвижная точка $u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Теорема доказана.

---

[1] т. е. компактного и непрерывного.