

**Вопросы к коллоквиуму по математическому анализу  
«Предел последовательности и предел функции»**

**1. Определения.**

- 1.1. Определение бесконечно малой последовательности.
- 1.2. Определение сходящейся последовательности.
- 1.3. Определение монотонной последовательности.
- 1.4. Определение предельной точки последовательности.
- 1.5. Определение подпоследовательности.
- 1.6. Определение верхнего и нижнего пределов последовательности.
- 1.7. Определение фундаментальной последовательности.
- 1.8. Определение предела функции.
- 1.9. Определение монотонной функции.
- 1.10. Определение непрерывности функции.
- 1.11. Определение сложной функции.
- 1.12. Определение предела функции по Коши и по Гейне.

**2. Теоремы.**

- 2.1. Теорема о пределе суммы двух бесконечно малых последовательностей.
- 2.2. Теорема о пределе разности двух бесконечно малых последовательностей.
- 2.3. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.
- 2.4. Теорема о пределе суммы сходящихся последовательностей.
- 2.5. Теорема о пределе разности сходящихся последовательностей.
- 2.6. Теорема о пределе произведения сходящихся последовательностей.
- 2.7. Теорема о пределе частного сходящихся последовательностей.
- 2.8. Теорема о предельном переходе в неравенствах.
- 2.9. Теорема о пределе монотонной последовательности.
- 2.10. Определение монотонной последовательности. Теорема о существовании предела у монотонной последовательности.
- 2.11. Теорема о существовании предельной точки у ограниченной последовательности.
- 2.12. Теорема Больцано-Вейерштрасса.
- 2.13. Теорема о связи существования предела последовательности с равенством верхнего и нижнего пределов этой последовательности.
- 2.14. Критерий Коши для последовательностей.
- 2.15. Теорема о пределе суммы двух функций.
- 2.16. Теорема о пределе разности двух функций.
- 2.17. Теорема о пределе произведения двух функций.
- 2.18. Теорема о пределе отношения двух функций.
- 2.19. Теорема о непрерывности суммы двух функций.
- 2.20. Теорема о непрерывности разности двух функций.
- 2.21. Теорема о непрерывности произведения двух функций.
- 2.22. Теорема о непрерывности отношения двух функций.
- 2.23. Формулировка теоремы об обратной функции. Примеры.
- 2.24. Первый замечательный предел.
- 2.25. Теорема о непрерывности сложной функции.
- 2.26. Теорема о существовании предела по Гейне как следствие существования предела по Коши.
- 2.27. Критерий Коши существования предела функции.

**3. Примеры теоретических вопросов:**

3.1. Дайте определение бесконечно большой функции по Коши:

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty \quad x \rightarrow a+.$$

3.2. Пусть функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ ,  $g(x)$  – разрывна в точке  $x_0$ . Что можно сказать о непрерывности произведения  $f(x)g(x)$  в точке  $x_0$ ? Ответ обоснуйте.

3.3. Приведите пример последовательности, у которой ровно две предельные точки.

**4. Примеры задач.**

4.1.  $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2 \cos x}$

4.2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(a-1) + \sqrt[n]{b}}{a} \right)^n$ .

**5. Пример билета.**

Билет 1.

1. Дайте определение бесконечно малой последовательности. Докажите теорему о пределе суммы двух бесконечно малых последовательностей.

2. Дайте определение бесконечно большой функции по Коши:  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty \quad x \rightarrow a+.$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}$

**Все вопросы взяты из пособия «Вопросы и задачи к экзамену по математическому анализу (I семестр)», размещенном на сайте кафедры.**