6. Задача о промерзании (задача с подвижной границей, задача о фазовом переходе, задача Стефана)

1. Постановка задачи

При изменении температуры тела может происходить изменение его физического состояния. Например, при переходе температуры через точку плавления происходит переход вещества из жидкой фазы в твердую фазу при затвердевании, или обратный переход из твердой фазы в жидкую при плавлении.

При этом на поверхности фазового перехода все время поддерживается постоянная температура.

При движении поверхности фазового перехода происходит выделение скрытой теплоты затвердевания (плавления).

Математической моделью, описывающей процесс фазового перехода, является задача с подвижной границей (задача Стефана).

Рассмотрим плоскую задачу, когда поверхностью раздела двух фаз является плоскость $x = \xi(t)$. **. С момента времени** t **до момента времени** $t + \Delta t$ **поверхность раздела переместится на величину** $\Delta\xi$ **:** $t \to t + \Delta t,\quad \xi = x_1 \to \xi = x_2 = x_1 + \Delta\xi.$

При этом происходит затвердевание массы $\rho\Delta\xi$ **при** $\Delta\xi > 0$ **(или расплавление массы** $\rho\Delta\xi$ **при** $\Delta\xi < 0$ **) и выделяется соответствующее количество тепла** $\lambda\rho\Delta\xi$.

Уравнение теплового баланса имеет вид:

$$\left[k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x_1} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x_2} \right] \Delta t = \lambda\rho\Delta\xi,$$

где k_1 **и** k_2 **– коэффициенты теплопроводности первой и второй фазы, а** λ **- скрытая теплота плавления.**

.

При $\Delta t \to 0$ **получаем условия на границе раздела:**

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=\xi} - \frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=\xi} = \lambda \rho \frac{d\xi}{dt}.$$

При $\Delta\xi > 0;\ \frac{d\xi}{dt} > 0$ **происходит процесс затвердевания вещества.**

При $\Delta\xi < 0, \frac{d\xi}{dt} < 0$ **происходит процесс плавления вещества.**

Рассмотрим процесс замерзания воды , при котором температура фазового перехода равна нулю.

Будем предполагать, что масса воды расположена в области $x \geq 0$, **ограниченной плоскостью** $x = 0$.

В начальный момент $t = 0$ **вода обладает постоянной температурой** $T > 0$.

Если на границе поверхности $x = 0$ **все время поддерживается постоянная температура** $T_1 < 0$ **, то граница промерзания** $x = \xi(t)$ **, будет со временем проникать вглубь жидкости.**

Задача о промерзании (задача с подвижной границей, задача Стефана) ставится следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, & 0<x<\xi, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, & \xi < x < \infty, \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} u_1 = T_1, & x=0, \\ u_2 = T, & t = 0, \end{cases} \qquad (2)$$

$$u_1=u_2=0, \;\; x=\xi(t), \;\; \xi(0) = 0, \qquad (3)$$

$$k_1 \left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=\xi} - k_2 \left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=\xi} = \lambda\rho \frac{d\xi}{dt}, \qquad (4)$$

где $k_1,\ a_1^2$ **и** $k_2,\ a_2^2$ **- коэффициенты теплопроводности и температуропроводности твердой и жидкой фазы.**

Построение решения задачи (1)-(4).

Ищем решение в виде:

$$u_1 = A_1 + B_1\Phi\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right), \quad u_2 = A_2 + B_2\Phi\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right),$$

где $\Phi(w)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^w e^{-z^2}dz$ - **функция ошибок.**

Из (2), (3) следует: $A_1 = T_1, \quad A_2 + B_2 = T,$

$$A_1 + B_1\Phi\left(\frac{\xi}{2a_1\sqrt{t}}\right) = 0, \quad A_2 + B_2\Phi\left(\frac{\xi}{2a_2\sqrt{t}}\right) = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

Условия (5) выполняются при любом *t*, откуда следует: $\xi = \alpha\sqrt{t},$ **(6)**

где α **- некоторая постоянная. Отсюда получаем:**

$$\begin{cases} A_1 = T_1 & B_1 = -\dfrac{T_1}{\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} \\ A_2 = -\dfrac{T\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)}{1-\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)} & B_2 = -\dfrac{T}{1-\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)} \end{cases} \qquad \textbf{(7)}$$

Для определения α из (4) получаем уравнение:

$$\frac{k_1 T_1 e^{-\frac{\alpha^2}{4a_1^2}}}{a_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} + \frac{k_2 T e^{-\frac{\alpha^2}{4a_2^2}}}{a_2 \left\{1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)\right\}} = -\lambda \rho \alpha \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad (8)$$

При T=0 формулы (7) и (8) существенно упрощаются:

$$A_1 = T_1; \quad B_1 = -\frac{T_1}{\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)}, \quad A_2 = 0; \quad B_2 = 0, \qquad (9)$$

$$\frac{k_1 T_1 e^{\frac{-\alpha^2}{4a_1^2}}}{a_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} = -\lambda \rho \alpha \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad (10)$$

Положив $\beta = \frac{\alpha}{2a_1}$, $D = \frac{\lambda \rho a_1^2}{k_1 T_1}$, **из (10) получим уравнение:**

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\beta^2}}{\Phi(\beta)} = -D\beta,$$

которое решается численно или графически.

Метод подобия

Рассмотрим уравнение: $$u_t = a^2 u_{xx} \qquad (11)$$

Уравнение (11) не изменяется при преобразовании переменных:

$$x' = kx, \quad t' = k^2 t, \qquad (12)$$

Это означает, что решение задает зависит от аргумента $\frac{x}{\sqrt{t}}$ **, то есть что**

$$u(x,t) = f\left(\tfrac{x}{2\sqrt{t}}\right) = f(z), \quad z = \frac{x}{2\sqrt{t}} \qquad (13)$$

$$(13) \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{4t}\frac{d^2 f}{dz^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{x}{4t^{\frac{3}{2}}}\frac{df}{dz} = -\frac{z}{2t}\frac{df}{dz} \qquad (14)$$

$$(11),(14) \Rightarrow \qquad a^2 \frac{d^2 f}{dz^2} = -2z\frac{df}{dz} \qquad (15)$$

$$(15) \Rightarrow \; f(z) = A + \bar{B}\int_0^z e^{-\frac{\omega 2}{a 2}} d\omega = A + B\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{z}{a}} e^{-\zeta^2} d\zeta = A + B\Phi\left(\tfrac{z}{a}\right) \qquad (16)$$

$$a^2 \frac{f''}{f'} = -2z \quad \Rightarrow \quad f' = \overline{B} e^{-\frac{z^2}{a^2}}$$

Движение нулевой изотермы описывается уравнением: $\xi = \alpha\sqrt{t}$,
где $f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0.$

$$(1) \Rightarrow \quad \begin{cases} a_1 \dfrac{d^2 f_1}{dz^2} = -2z \dfrac{df_1}{dz}, & 0 < z < \frac{\alpha}{2}, \\ a_2 \dfrac{d^2 f_2}{dz^2} = -2z \dfrac{df_2}{dz}, & \frac{\alpha}{2} < z < \infty \end{cases} \qquad (17)$$

$$(2) \Rightarrow \qquad f_1(0) = T_1, \quad f_2(\infty) = T \qquad (18)$$

$$(3) \Rightarrow \qquad f_1\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) = f_2\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) = 0 \qquad (19)$$

$$(4) \Rightarrow \qquad k_1 f_1'\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) - k_2 f_2'\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) = \lambda\rho\alpha \qquad (20)$$

Ищем решение виде:

$$f(z)=\begin{cases} f_1(z)=A_1+B_1\Phi\left(\frac{z}{a_1}\right), & 0<z<\frac{\alpha}{2} \\ f_2(z)=A_2+B_2\Phi\left(\frac{z}{a_2}\right), & \frac{\alpha}{2}<z<\infty \end{cases} \qquad (21)$$

Из условий (18)-(20) получаем формулы (7) и (8).

Замечание 1. Задачу о промерзании можно аналогично решить, если скрытая теплота выделяется не при фиксированной температуре, а при некотором интервале температур.

Замечание 2. Аналогично решается задача в случае, когда имеется не одна, а несколько критических температур. Это происходит, например, в процессе перехода из одной кристаллической структуры в другую, например при перекристаллизации соли.