Глава III. Математическое моделирование нелинейных объектов и процессов

§1 Математические модели процессов нелинейной теплопроводности и горения

Автомодельные решения

Автомодельное решение вида (3) квазилинейного уравнения теплопроводности (1), удовлетворяющее условиям (2):

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}) \quad (1) \quad u(0,t)=u_1, u(x,0)=u_2 \quad (2)$$

$$\xi=\frac{x}{2\sqrt{t}}, u(x,t)=\theta\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)=\theta\left(\xi\right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}=-\frac{x}{4t^{3/2}}\theta'(\xi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{t}}\theta'(\xi)$$

$$(1) \Rightarrow -c\rho\frac{x}{4t^{3/2}}\frac{d\theta\left(\xi\right)}{d\xi}=\frac{1}{4t}\frac{d}{d\xi}\left(k(\theta)\frac{d\theta(\xi)}{d\xi}\right) \Rightarrow$$

$$-c\rho\frac{x}{\sqrt{t}}\theta'\left(\xi\right)=\left(k(\theta)\theta'\left(\xi\right)\right)', \ \frac{x}{\sqrt{t}}=2\xi \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (k(\theta)\theta'(\xi))'=-2c\rho\xi\theta'(\xi), \ \xi>0, & (4) \\ \theta(0)=u_1; \quad \theta(\infty)=u_2 & (5) \end{cases}$$

Задача (4), (5) имеет единственное решение, которое в общем случае находится численно.

Автомодельное решение уравнения (1) типа бегущей волны:

$$\xi = x - Dt, \quad u(x,t) = \theta(x - Dt) = \theta(\xi) \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = -D \cdot \theta'(\xi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \theta'(\xi)$$

$$(1) \;\Rightarrow\; -c\rho D \cdot \theta'(\xi) = \left(k(\theta)\theta'(\xi)\right)' \quad (7)$$

Ищем непрерывное решение, обладающее непрерывным «тепловым потоком»:

$$k\left(\theta\right)\theta'\left(\xi\right) \;\Rightarrow\; W(x,t) = -k(u(x,t))\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \qquad (8)$$

Начало движения по нулевому фону температуры:

$$\theta\left(\xi\right) \to 0, \xi \to \infty; \quad k\left(\theta\right)\theta'\left(\xi\right) \to 0, \xi \to \infty \quad (9)$$

$$(7),(9) \;\Rightarrow\; -c\rho D \cdot \theta(\alpha)\Big|_{\xi}^{\infty} = \int_{\xi}^{\infty}\left(k\left(\theta\right)\theta'\left(\alpha\right)\right)' d\alpha \;\Rightarrow$$

$$-c\rho D \cdot \theta(\alpha)\Big|_{\xi}^{\infty} = k\left(\theta\right)\theta'\left(\alpha\right)\Big|_{\xi}^{\infty} \;\Rightarrow$$

$$-c\rho D \cdot \theta(\xi) = k\left(\theta\right)\theta'\left(\xi\right) \;\Rightarrow\; \frac{k\left(\theta\right)}{\theta}\frac{d\theta}{d\xi} = -D \cdot c\rho \quad (10)$$

Пусть:

$$k(u) = k_0 u^{\sigma} \;\Rightarrow\; k\left(\theta\right) = k_0 \theta^{\sigma},\; k_0 > 0,\; \sigma > 0.$$

Тогда решение уравнения (10) имеет вид:

$$\theta\left(\xi\right) = \begin{cases} \left[\dfrac{\sigma D c \rho}{k_0}\left(-\xi\right)\right]^{\frac{1}{\sigma}}, & \xi \le 0, \\ 0, \quad \xi > 0. \end{cases} \qquad (11)$$

Из формул (6) и (11) получим:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_0 t^{\frac{1}{\sigma}} \left(1 - \dfrac{x}{Dt}\right)^{\frac{1}{\sigma}}, & 0 \le x \le Dt, \\ 0, & x > Dt. \end{cases} \qquad (12)$$

где

$$u_0 = \left(\frac{\sigma D^2 c \rho}{k_0}\right)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Функция (12) не имеет всюду непрерывных производных, входящих в уравнение (1).

Тепловой поток является непрерывной функцией.

$$u = u_0 t^{1/\sigma}\left(1 - \frac{x}{D\cdot t}\right)^{1/\sigma}, \quad 0 \le x \le Dt,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\sigma} u_0 t^{\frac{1}{\sigma}-1}\left(1-\frac{x}{Dt}\right)^{\frac{1}{\sigma}} + u_0 t^{\frac{1}{\sigma}} \frac{1}{\sigma}\left(1-\frac{x}{Dt}\right)^{\frac{1}{\sigma}-1} \frac{x}{Dt^2} =$$

$$= \frac{u_0}{\sigma} t^{\frac{1}{\sigma}-1}\left(1-\frac{x}{Dt}\right)^{\frac{1}{\sigma}-1}\left(1-\frac{x}{Dt}+t\frac{x}{Dt^2}\right) = \frac{u_0}{\sigma} t^{\frac{1}{\sigma}-1}\left(1-\frac{x}{Dt}\right)^{\frac{1}{\sigma}-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sigma} u_0 t^{\frac{1}{\sigma}}\left(1-\frac{x}{Dt}\right)^{\frac{1}{\sigma}-1}\left(-\frac{1}{Dt}\right) = -\frac{u_0}{\sigma D} t^{\frac{1}{\sigma}-1}\left(1-\frac{x}{Dt}\right)^{\frac{1}{\sigma}-1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{u_0}{\sigma D} t^{\frac{1}{\sigma}-1}\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)\left(1-\frac{x}{Dt}\right)^{\frac{1}{\sigma}-2}\left(-\frac{1}{Dt}\right) = \frac{u_0}{\sigma D^2} t^{\frac{1}{\sigma}-2}\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)\left(1-\frac{x}{Dt}\right)^{\frac{1}{\sigma}-2}$$

$$W = -k(u)\frac{\partial u}{\partial x} = -k_0 u^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x} = k_0 u_0^{\sigma} t\left(1-\frac{x}{Dt}\right)\frac{u_0}{\sigma D} t^{\frac{1}{\sigma}-1}\left(1-\frac{x}{Dt}\right)^{\frac{1}{\sigma}-1} =$$

$$= \frac{k_0 u_0^{\sigma+1}}{\sigma D} t^{\frac{1}{\sigma}}\left(1-\frac{x}{Dt}\right)^{\frac{1}{\sigma}}, \quad 0 \le x \le Dt$$

$$\sigma = 1: \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u_0 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u_0}{D}$$

$$\sigma = 2: \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_0}{2} t^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{Dt}\right)^{-\frac{1}{2}}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u_0}{2D} t^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{Dt}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_0}{D^2} t^{-\frac{3}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{x}{Dt}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

1) $\underline{\sigma = 1}$: $u(x,t) = u_0 t\left(1 - \dfrac{x}{D\cdot t}\right) = u_0\left(t - \dfrac{x}{D}\right),\ 0 \le x \le D\cdot t$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u_0}{D} = const,\ 0 \le x \le D\cdot t\ ;\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ x > D\cdot t$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_0 = const,\ 0 \le x \le D\cdot t\ ;\ \frac{\partial u}{\partial t} = 0,\ x > D\cdot t$$

На прямой $x = D\cdot t$ первые производные функции $u(x,t)$ имеют разрыв первого рода.

$\underline{2)\ \ \sigma = 2}$: $u(x,t) = u_0 t^{1/2}\left(1 - \dfrac{x}{D\cdot t}\right)^{1/2} = u_0\left(t - \dfrac{x}{D}\right)^{1/2},\ 0 \le x \le D\cdot t,$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_0}{2}\frac{1}{\sqrt{t - \frac{x}{D}}}\left(-\frac{1}{D}\right),\ 0 \le x \le D\cdot t\ ;\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ x > D\cdot t$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_0}{2}\frac{1}{\sqrt{t - \frac{x}{D}}},\ 0 \le x \le D\cdot t\ ;\ \frac{\partial u}{\partial t} = 0,\ x > D\cdot t$$

На прямой $x = D\cdot t$ первые производные функции $u(x,t)$ имеют разрыв второго рода.

3) $$W(x,t) = \begin{cases} \dfrac{k_0 u_0^{\sigma+1}}{\sigma D} t^{\frac{1}{\sigma}}\left(1 - \dfrac{x}{Dt}\right)^{\frac{1}{\sigma}}, & 0 \le x \le Dt, \\ 0, & x > Dt. \end{cases} \qquad (13)$$

Тепловой поток *W(x,t)* непрерывен при *x=Dt.*

Рассмотрим задачу (14)-(15):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k_0 u^\sigma \dfrac{\partial u}{\partial x} \right), \; x > 0, t > 0, & (14) \\ u(x,0) = 0, \quad x \ge 0 & (15) \\ u(0,t) = u_0 t^m, \quad t \ge 0, \; m > 0 & (16) \end{cases}$$

Автомодельное решение вида (17):

$$\xi = \frac{x}{k_0^{\frac{1}{2}} u_0^{\frac{\sigma}{2}} t^{\frac{(1+m\sigma)}{2}}}, \quad u(x,t) = u_0 t^m \theta(\xi) \qquad (17)$$

$$u_t = k_0 u^\sigma u_{xx} + k_0 \sigma u^{\sigma-1} \left(u_x \right)^2$$

$$u_x = u_0 t^m \theta' \xi_x, \quad u_{xx} = u_0 t^m \theta'' \left(\xi_x \right)^2 \quad \textit{так как} \;\; \xi_{xx} = 0$$

$$\xi_t = -\frac{x \dfrac{1+m\sigma}{2}}{k_0^{1/2} u_0^{\sigma/2} t^{(3+m\sigma)/2}} = -\underbrace{\frac{x}{k_0^{1/2} u_0^{\sigma/2} t^{(1+m\sigma)/2}}}^{=\xi} \frac{1+m\sigma}{2t} = -\frac{1+m\sigma}{2} \frac{\xi}{t}$$

$$\xi_x = -\frac{1}{k_0^{1/2} u_0^{\sigma/2} t^{(1+m\sigma)/2}} \quad ; \quad \xi_{xx} = 0.$$

$$u_0 m t^{m-1} \theta - u_0 \frac{1+m\sigma}{2} \xi t^{m-1} \theta' = \frac{k_0 u_0^\sigma t^{m\sigma} \theta^\sigma u_0 t^m \theta''}{k_0 u_0^\sigma t^{m\sigma+1}} + \frac{k_0 \sigma u_0^{\sigma-1} t^{m(\sigma-1)} \theta^{\sigma-1} u_0^2 t^{2m} (\theta')^2}{k_0 u_0^\sigma t^{m\sigma+1}} =$$

$$= \theta^\sigma u_0 t^{m-1} \theta'' + u_0 \sigma t^{m-1} \theta^{\sigma-1} (\theta')^2 \Rightarrow m\theta - \frac{1+m\sigma}{2} \xi \theta' = \theta^\sigma \theta'' + \sigma \theta^{\sigma-1} (\theta')^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\theta^\sigma \theta'' + \sigma \theta^{\sigma-1} (\theta')^2} + \frac{1+m\sigma}{2} \xi \theta' - m\theta = 0$$

Для функции $\theta(\xi)$ получаем задачу:

$$\left(\theta^{\sigma}\theta'\right)' + \frac{1}{2}(1+m\sigma)\xi\theta' - m\theta = 0, \quad \xi > 0, \qquad (18)$$

$$\theta(0) = 1, \qquad \theta(\infty) = 0. \qquad (19)$$

Непрерывность теплового потока $\theta^{\sigma}\theta'$.

Режимы с обострением

Задача Коши для одномерного уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t = k_0\left(u^2 u_x\right)_x + q_0 u^{\beta}, \ -\infty < x < \infty, \ 0 < t \le T, & (1) \\ u(x,0) = u_0(x), \ -\infty < x < \infty. & (2) \end{cases}$$

Преобразование переменных:

$$t \to \frac{t}{q_0}, \quad x \to x\sqrt{\frac{k_0}{q_0}} \qquad (3)$$

Уравнение (1) в безразмерном виде:

$$u_t = \left(u^2 u_x\right)_x + u^{\beta} \qquad (4)$$

Частный случай уравнения (4):

$$u_t = \left(u^2 u_x\right)_x \qquad (5)$$

Точное автомодельное решение вида

$$u(x,t) = \frac{1}{t^{1/4}}\theta(\xi), \quad \xi = \frac{x^2}{\sqrt{t}}, \qquad (6)$$

$$u_t = (u^2 u_x)_x = u^2 u_{xx} + 2(u_x)^2 u$$

$$u_t = -\frac{1}{4}\frac{1}{t^{5/4}}\theta(\xi) + \frac{1}{t^{1/4}}\theta'\left(-\frac{x^2}{2t^{3/2}}\right)$$

$$u_x = -\frac{1}{t^{1/4}}\theta'\frac{2x}{t^{1/2}};\;\; u_{xx} = \frac{1}{t^{1/4}}\theta'\frac{2}{t^{1/2}} + \frac{1}{t^{1/4}}\theta''\frac{4x^2}{t}$$

$$-\frac{1}{4}\frac{1}{t^{5/4}}\theta - \frac{x^2}{2t^{7/4}}\theta' = \frac{1}{t^{1/2}}\theta^2\frac{1}{t^{1/4}}\theta'\frac{2}{t^{1/2}} + \frac{1}{t^{1/2}}\theta^2\frac{1}{t^{1/4}}\theta''\frac{4x^2}{t} + 2\frac{1}{t^{1/2}}(\theta')^2\frac{4x^2}{t}\frac{\theta}{t^{1/4}} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{4}\theta - \frac{x^2}{2t^{1/2}}\theta' = 2\theta^2\theta' + \frac{4x^2}{t^{1/2}}\theta^2\theta'' + 2(\theta')^2\frac{4x^2}{t^{1/4}}\frac{\theta}{t^{1/4}}$$

$$2\theta^2\theta' + \frac{1}{4}\theta = -\frac{x^2}{2t^{1/2}}\theta' - \frac{4x^2}{t^{1/2}}\theta^2\theta'' - 8(\theta')^2\theta\frac{x^2}{t^{1/2}} = -\frac{\xi}{2}\theta' - 4\xi\theta^2\theta'' - 8(\theta')^2\theta\xi$$

$$\psi = 2\theta^2\theta' + \frac{1}{4}\theta \quad ; \quad 2\xi\psi' = 4\xi\theta^2\theta'' + 8\xi\theta(\theta')^2 + \frac{\xi}{2}\theta' \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \psi = -2\xi\psi' \Rightarrow 2\xi\psi'(\xi) + \psi(\xi) = 0$$

Таким образом, из формул (5) и (6) получаем:

$$2\theta^2(\xi)\theta'(\xi) + \frac{1}{4}\theta(\xi) = \psi(\xi),$$

где

$$2\xi\psi'(\xi) + \psi(\xi) = 0.$$

Пусть в среде имеется источник тепловой энергии, соответствующий β=3:

$$u_t = (u^2 u_x)_x + u^3 \qquad (8)$$

Автомодельное решение (8) ищется в виде:

$$u = \frac{1}{\sqrt{T_0 - t}}\theta(x) \qquad (9)$$

$$u_t = \frac{1}{2(T_0 - t)^{3/2}}\theta(x), \;\; u_x = \frac{\theta'}{\sqrt{T_0 - t}}, \;\; u_{xx} = \frac{\theta''}{\sqrt{T_0 - t}}$$

$$u_t = u^2 u_{xx} + 2u(u_x)^2 + u^3 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\theta}{2(T_0 - t)^{3/2}} = \frac{\theta^2\theta''}{(T_0 - t)^{3/2}} + \frac{2\theta(\theta')^2}{(T_0 - t)^{3/2}} + \frac{\theta^3}{(T_0 - t)^{3/2}} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\theta = \theta^2\theta'' + 2\theta(\theta')^2 + \theta^3 \quad \Rightarrow \quad \theta \neq 0 \quad \Rightarrow$$

Для функции $\theta(x)$ **получается уравнение:**

$$\theta(x)\theta''(x) + 2(\theta'(x))^2 + \theta^2(x) = \frac{1}{2} \qquad (10)$$

Пусть в среде имеется источник тепловой энергии, соответствующий β=2:

$$u_t = (u^2 u_x)_x + u^2 \qquad (12)$$

Ищем решение в виде:

$$u = \frac{1}{T_0 - t}\theta(\xi), \quad \xi = x\sqrt{T_0 - t} \qquad (13)$$

$$u_t = u^2 u_{xx} + 2u(u_x)^2 + u^2$$

$$u_x = \frac{1}{T_0 - t}\theta' \sqrt{T_0 - t} = \frac{\theta'}{\sqrt{T_0 - t}}$$

$$u_{xx} = \theta'' \qquad\qquad u_t = \frac{1}{(T_0 - t)^2}\theta - \frac{x}{2(T_0 - t)^{3/2}}\theta'$$

$$\frac{1}{(T_0 - t)^2}\theta - \frac{x}{2(T_0 - t)^{3/2}}\theta' = \frac{\theta''\theta^2}{(T_0 - t)^2} + 2\frac{\theta}{T_0 - t}\frac{(\theta')^2}{T_0 - t} + \frac{\theta^2}{(T_0 - t)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\theta - \frac{\xi}{2}\theta' = \underbrace{\theta''\theta^2 + 2\theta(\theta')^2}_{=(\theta^2\theta')'} + \theta^2 \quad \Rightarrow \quad (\theta^2\theta')' + \frac{\xi}{2}\theta' - \theta + \theta^2 = 0.$$

Для функции $\theta(x)$ получается уравнение:

$$(\theta^2\theta')' + \frac{\xi}{2}\theta' - \theta + \theta^2 = 0 \qquad (14)$$

Пусть в среде имеется источник тепловой энергии, соответствующий β=4:

$$u_t = (u^2 u_x)_x + u^4 \qquad (16)$$

Ищем решение в виде:

$$u = \frac{1}{\sqrt[3]{T_0 - t}}\theta(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt[6]{T_0 - t}} \qquad (17)$$

$$u_t = u^2 u_{xx} + 2u(u_x)^2 + u^4$$

$$u_t = \frac{1}{3(T_0 - t)^{4/3}}\theta(\xi) + \frac{1}{(T_0 - t)^{1/3}}\theta'(\xi)\frac{x}{6(T_0 - t)^{7/6}}$$

$$u_x = \frac{1}{(T_0 - t)^{1/3}} \theta'(\xi) \frac{1}{(T_0 - t)^{1/6}} = \frac{\theta'(\xi)}{(T_0 - t)^{1/2}}$$

$$u_{xx} = \frac{\theta''(\xi)}{(T_0 - t)^{2/3}}$$

$$\frac{1}{3(T_0 - t)^{4/3}} \theta + \frac{1}{(T_0 - t)^{4/3}} \frac{1}{6} \frac{x}{(T_0 - t)^{1/6}} \theta' =$$

$$= \frac{1}{(T_0 - t)^{2/3}} \theta^2 \frac{\theta''(\xi)}{(T_0 - t)^{2/3}} + 2 \frac{\theta}{(T_0 - t)^{1/3}} \frac{(\theta')^2}{T_0 - t} + \frac{\theta^4}{(T_0 - t)^{4/3}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}\theta + \frac{1}{6}\xi\theta' = \underbrace{\theta^2\theta'' + 2\theta(\theta')^2}_{=(\theta^2\theta')'} + \theta^4 \quad \Rightarrow (\theta^2\theta')' - \frac{1}{6}\xi\theta' - \frac{1}{3}\theta + \theta^4 = 0.$$

Для функции $\theta(x)$ получается уравнение:

$$(\theta^2\theta')' - \frac{1}{6}\xi\theta' - \frac{1}{3}\theta + \theta^4 = 0, \quad -\infty < \xi < \infty \tag{18}$$