

Гл. II. Некоторые классические задачи математической физики

§2. Задача Гурса

Мажорантные оценки

$$z_n(x, y) = - \int_0^y \int_0^x \left\{ a(\xi, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi, \eta) z_{n-1} \right\} d\xi d\eta,$$

$$\frac{\partial z_n}{\partial x}(x, y) = - \int_0^y \left\{ a(x, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + b(x, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c(x, \eta) z_{n-1} \right\} d\eta, \quad (13)$$

$$\frac{\partial z_n}{\partial y}(x, y) = - \int_0^x \left\{ a(\xi, y) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, y) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + c(\xi, y) z_{n-1} \right\} d\xi.$$

$$|a(x, y)| \leq M, \quad |b(x, y)| \leq M, \quad |c(x, y)| \leq M, \quad |z_0| \leq H, \quad \left| \frac{\partial z_0}{\partial x} \right| \leq H, \quad \left| \frac{\partial z_0}{\partial y} \right| \leq H, \quad (14)$$

Из формулы (13) получаем:

$$z_1 = - \int_0^y \int_0^x \left\{ a \frac{\partial z_0}{\partial \xi} + b \frac{\partial z_0}{\partial \eta} + cz_0 \right\} d\xi d\eta \Rightarrow |z_1| \leq 3MHxy \leq 3MH \frac{(x+y)^2}{2!}$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = - \int_0^y \left\{ a \frac{\partial z_0}{\partial x} + b \frac{\partial z_0}{\partial \eta} + cz_0 \right\} d\eta \Rightarrow \left| \frac{\partial z_1}{\partial x} \right| \leq 3MHy \leq 3MH(x+y)$$

Аналогично получаем:

$$\left| \frac{\partial z_1}{\partial y} \right| \leq 3MHx \leq 3MH(x+y)$$

Далее:

$$\begin{aligned} |z_2(x, y)| &\leq \int_0^y \int_0^x \left\{ M3MH(\xi + \eta) + M3MH(\xi + \eta) + M3MH \frac{(\xi + \eta)^2}{2!} \right\} d\xi d\eta = \\ &= 3HM^2 \int_0^y \int_0^x \left\{ 2(\xi + \eta) + \frac{(\xi + \eta)^2}{2!} \right\} d\xi d\eta = 3HM^2 \{I_1 + I_2\}, \end{aligned}$$

где

$$I_1 = \int_0^y \int_0^x (\xi + \eta) d\xi d\eta = \int_0^y \left(\int_0^x (\xi + \eta) d\xi \right) d\eta = \int_0^y \frac{(x + \eta)^2}{2} d\eta = \frac{1}{2 \cdot 3} (x + y)^3,$$

$$I_2 = \int_0^y \int_0^x (\xi + \eta)^2 d\xi d\eta = \int_0^y \left(\int_0^x (\xi + \eta)^2 d\xi \right) d\eta = \int_0^y \frac{(x + \eta)^3}{3} d\eta = \frac{1}{3 \cdot 4} (x + y)^4,$$

$$\begin{aligned} |z_2(x, y)| &\leq 3HM^2 \left\{ 2I_1 + \frac{1}{2} I_2 \right\} = 3HM^2 \left\{ 2 \frac{1}{2 \cdot 3} (x + y)^3 + \frac{1}{2} \frac{1}{3 \cdot 4} (x + y)^4 \right\} = \\ &= 3HM^2 \frac{(x + y)^3}{2 \cdot 3} \left\{ 2 + \frac{(x + y)}{4} \right\} < 3HM^2 \frac{(x + y)^3}{3!} \left\{ 2 + \frac{2L}{4} \right\} < \\ &< 3HM^2 \frac{(x + y)^3}{3!} \{2 + L\} = 3HM^2 K \frac{(x + y)^3}{3!}, \end{aligned}$$

$$K = 2 + L.$$

Аналогично получаем:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial z_2}{\partial x} \right| &\leq \int_0^y \left\{ M 3MH(x + \eta) + M 3MH(x + \eta) + M 3MH \frac{(x + \eta)^2}{2!} \right\} d\eta = \\ &= 3HM^2 \int_0^y \left\{ 2(x + \eta) + \frac{(x + \eta)^2}{2!} \right\} d\eta = 3HM^2 \left\{ 2 \frac{(x + y)^2}{2} + \frac{(x + y)^3}{3!} \right\} = \\ &= 3HM^2 \frac{(x + y)^2}{2} \left\{ 2 + \frac{(x + y)}{2} \right\} < 3HM^2 \frac{(x + y)^2}{2} \left\{ 2 + \frac{2L}{2} \right\} = 3HM^2 K \frac{(x + y)^2}{2} \end{aligned}$$

и

$$\left| \frac{\partial z_2}{\partial y} \right| \leq 3HM^2 K \frac{(x + y)^2}{2}.$$

Метод математической индукции

$$z_n = - \int_0^y \int_0^x \left\{ a \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + cz_{n-1} \right\} d\xi d\eta$$

$$|z_{n-1}| \leq 3HM^{n-1} K^{n-2} \frac{(x + y)^n}{n!}$$

$$\left| \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} \right| \leq 3HM^{n-1} K^{n-2} \frac{(x + y)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\left| \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} \right| \leq 3HM^{n-1}K^{n-2} \frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!},$$

где $K = L + 2$.

$$|z_n| \leq 3HM^n K^{n-2} \left\{ \frac{2}{(n-1)!} \int_0^y \int_0^x (\xi + \eta)^{n-1} d\xi d\eta + \frac{1}{n!} \int_0^y \int_0^x (\xi + \eta)^n d\xi d\eta \right\},$$

$$\int_0^y \int_0^x (\xi + \eta)^{n-1} d\xi d\eta \leq \frac{1}{n} \int_0^y (x + \eta)^n d\eta \leq \frac{1}{n(n+1)} (x+y)^{n+1},$$

$$\int_0^y \int_0^x (\xi + \eta)^n d\xi d\eta \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} (x+y)^{n+2},$$

$$\{\dots\} \leq \frac{2}{(n-1)!} \frac{1}{n(n+1)} (x+y)^{n+1} + \frac{1}{n!} \frac{1}{(n+1)(n+2)} (x+y)^{n+2} =$$

$$= \frac{2}{(n+1)!} (x+y)^{n+1} + \frac{1}{(n+2)!} (x+y)^{n+2} = \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} \left(2 + \frac{x+y}{n+2} \right) <$$

$$< \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} \left(2 + \frac{2L}{n+2} \right) < \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} (2+L) = \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} K \Rightarrow$$

$$|z_n| \leq 3HM^n K^{n-1} \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$\frac{\partial z_n}{\partial x} = - \int_0^y \left\{ a \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c z_{n-1} \right\} d\eta,$$

$$\left| \frac{\partial z_n}{\partial x} \right| \leq 3HM^n K^{n-2} \left\{ \frac{2}{(n-1)!} \int_0^y (x+\eta)^{n-1} d\eta + \frac{1}{n!} \int_0^y (x+\eta)^n d\eta \right\},$$

$$\{\dots\} = \frac{2}{(n-1)!} \frac{(x+y)^n}{n} + \frac{1}{n!} \frac{(x+y)^{n+1}}{n+1} = 2 \frac{(x+y)^n}{n!} + \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!},$$

< 2L

$$\left| \frac{\partial z_n}{\partial x} \right| \leq 3HM^n K^{n-2} \frac{(x+y)^n}{n!} \left(2 + \frac{(x+y)}{n+1} \right) =$$

$$= 3HM^n K^{n-2} \frac{(x+y)^n}{n!} \left(2 + \frac{2}{n+1} L \right) < 3HM^n K^{n-1} \frac{(x+y)^n}{n!} .$$

Аналогично получаем:

$$\left| \frac{\partial z_n}{\partial y} \right| < 3HM^n K^{n-1} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

$$|z_n| \leq 3HM^n K^{n-1} \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} < 3HM^n K^{n-1} \frac{(2L)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{3H}{K^2 M} \frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!} ,$$

$$\left| \frac{\partial z_n}{\partial x} \right| \leq 3HM^n K^{n-1} \frac{(x+y)^n}{n!} < 3HM^n K^{n-1} \frac{(2L)^n}{n!} = \frac{3H}{K} \frac{(2KLM)^n}{n!} ,$$

$$\left| \frac{\partial z_n}{\partial y} \right| \leq \frac{3H}{K} \frac{(2KLM)^n}{n!} .$$

Доказательство равномерной сходимости последовательностей

Предполагается, что в квадрате $G = \{0 < x, y < L\}$ выполнены оценки (14)

$$|a(x, y)| \leq M, \quad |b(x, y)| \leq M, \quad |c(x, y)| \leq M, \quad |z_0| \leq H, \quad \left| \frac{\partial z_0}{\partial x} \right| \leq H, \quad \left| \frac{\partial z_0}{\partial y} \right| \leq H,$$

где $M > 0, N > 0$.

Методом математической индукции получены мажорантные оценки (15):

$$\left| z_n \right| \leq \frac{3H}{K^2 M} \frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \left| \frac{\partial z_n}{\partial x} \right| \leq \frac{3H}{K} \frac{(2KLM)^n}{n!}, \quad \left| \frac{\partial z_n}{\partial y} \right| \leq \frac{3H}{K} \frac{(2KLM)^n}{n!},$$

где **$K=L+2$** .

В правой части (15) с точностью до множителей пропорциональности стоят общие члены разложения $\exp(2KLM)$. По признаку сходимости функционального ряда, мажорируемого сходящимся числовым рядом, последовательности функций

$$u_n = u_1 + z_1 + \dots + z_{n-1},$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial z_1}{\partial x} + \dots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial z_1}{\partial y} + \dots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}$$

равномерно сходятся предельным функциям $u(x, y)$, $V(x, y)$, $W(x, y)$.

$$u(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, y), \quad V(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}, \quad W(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_n}{\partial y}.$$

Перейдем в формулах (11), (12) к пределу при $n \rightarrow \infty$:

$$u(x, y) = u_1(x, y) - \int_0^y \int_0^x \{a(\xi, \eta)V + b(\xi, \eta)W + c(\xi, \eta)u\} d\xi d\eta,$$

$$V = \frac{\partial u_1}{\partial x} - \int_0^y \{a(x, \eta)V + b(x, \eta)W + c(x, \eta)u\} d\eta, \quad (16)$$

$$W = \frac{\partial u_1}{\partial y} - \int_0^x \{a(\xi, y)V + b(\xi, y)W + c(\xi, y)u\} d\xi,$$

$$u_1(x, y) = \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \Phi(x, y),$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= u_1(x, y) - \int_0^y \int_0^x \{a(\xi, \eta)V + b(\xi, \eta)W + c(\xi, \eta)u\} d\xi d\eta = \\
&= \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \Phi(x, y) - \int_0^y \int_0^x (aV + bW + cu) d\xi d\eta,
\end{aligned}$$

откуда следует, что $V=ux$, $W=uy$ и $u(x,y)$ удовлетворяют уравнению (8)

$$u(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_{\Re} F d\xi d\eta = \int_0^y \int_0^x F d\xi d\eta + \Phi(x, y), \quad (8)$$

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = f - au_x - bu_y - cu,$$

$$\Phi(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0).$$

Удовлетворение условиям (6)

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u(0, y) = \varphi_2(y) \quad (6)$$

следует из формул (16), условий сопряжения (7)

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = u(0, 0), \quad (7)$$

и вида функций $u_1(x, y)$ и $\Phi(x, y)$.

Из формулы (8) следует, что

$$u(0, y) = \varphi_1(0) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^0 F d\xi d\eta = \varphi_2(y),$$

$$\begin{aligned}
u(x, 0) &= \varphi_1(x) + \varphi_2(0) - \varphi_1(0) + \int_0^0 \int_0^x F d\xi d\eta = \\
&= \varphi_1(x) + u(0, 0) - u(0, 0) = \varphi_1(x).
\end{aligned}$$

Единственность решения краевой задачи (5)-(7) (от противного)

Пусть существуют два решения

$$u_1(x, y) \neq u_2(x, y)$$

Рассмотрим их разность

$$U(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y).$$

Из формулы (8) следует, что

$$U(x, y) = - \int_0^x \int_0^y \{ aU_\xi + bU_\eta + cU \} d\xi d\eta,$$

а из формулы (14) следуют оценки

$$|U| \leq H_1, \quad |U_x| \leq H_1, \quad |U_y| \leq H_1.$$

При $(x, y) \in G$ для любого n будем иметь

$$|U| \leq \frac{3H_1}{K^2M} \frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!},$$

откуда следует, что $U(x, y) = 0$, то есть $u_1(x, y) = u_2(x, y)$ - противоречие.