

## 4. Экономичные разностные схемы

Схемы применяемые для решения многомерных задач и сочетающие в себе достоинства явных и неявных схем называются экономичными.

Экономичная разностная схема:

- 1) является безусловно устойчивой;
- 2) требует при переходе со слоя на слой числа арифметических операций, пропорционального числу узлов сетки.

### 1) Схема переменных направлений

Основной идеей построения экономичных разностных схем является сведение многомерной задачи к цепочке одномерных задач. Одной из первых экономичных схем является построенная в 1955 году Писменом и Рэкфордом схема переменных направлений (продольно-поперечная схема).

**Рассмотрим начально-краевую задачу:**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (60)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{D}, \quad (61)$$

$$u(x, t) = \mu(x), \quad x \in \Gamma, \quad t \in [0, T], \quad (62)$$

$$Lu \equiv \Delta u = L_1 u + L_2 u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} \quad (\alpha = 1, 2),$$

$$\bar{D} \equiv \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha; \alpha = 1, 2\}, \quad Q_T \equiv D \times (0, T], \quad x = (x_1, x_2).$$

**Введем двумерную пространственную сетку и одномерную временную сетки:**

$$\bar{\omega}_h \equiv \bar{\omega}_{h_1 h_2} = \omega_h + \gamma_h \equiv \left\{ (x_{n_1}, x_{n_2}) \in \bar{D}; 0 \leq n_\alpha \leq N_\alpha; \alpha = 1, 2 \right\},$$

$$t = t_{s+\frac{1}{2}} = t_s + 0,5\tau; \quad \bar{y} = y^{s+\frac{1}{2}}, \quad \varphi^s = f(x_n, t^s).$$

Заменяем дифференциальные операторы конечно-разностными:

$$Lu \rightarrow \Lambda y = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y, \quad \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

**Схема Писмена-Рэкфорда осуществляет переход со слоя  $s$  на слой  $s+1$  в два шага, используя промежуточный (дробный) слой:**

$$\frac{y^{s+\frac{1}{2}} - y^s}{0,5\tau} = \Lambda_1 y^{s+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^s + \varphi^s, \quad (63)$$

$$\frac{y^{s+1} - y^{s+\frac{1}{2}}}{0,5\tau} = \Lambda_1 y^{s+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^{s+1} + \varphi^s, \quad (64)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (65)$$

$$y^{s+1} = \mu, \quad n_2 = 0, \quad n_2 = N_2, \quad (66a)$$

$$y^{s+\frac{1}{2}} = \mu, \quad n_1 = 0, \quad n_1 = N_1. \quad (66b)$$

Уравнение (63) является неявным по первому направлению и явным по второму, а уравнение (64) является явным по первому направлению и неявным по второму. Из (63) и (64) получаем:

$$\frac{2}{\tau} \bar{y} - \Lambda_1 \bar{y} = F, \quad F = \frac{2}{\tau} y + \Lambda_2 y + \varphi, \quad (67)$$

$$\frac{2}{\tau} \hat{y} - \Lambda_2 \hat{y} = \bar{F}, \quad \bar{F} = \frac{2}{\tau} \bar{y} + \Lambda_1 \bar{y} + \varphi. \quad (68)$$

$$\frac{1}{h_1^2} \bar{y}_{n_1-1} - 2 \left( \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{\tau} \right) \bar{y}_{n_1} + \frac{1}{h_1^2} \bar{y}_{n_1+1} = -F_{n_1}, \quad n_1 = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad (69)$$

$$\bar{y}_{n_1} = \mu_{n_1}, \quad n_1 = 0, \quad n_1 = N_1, \quad (70)$$

$$\frac{1}{h_2^2} \hat{y}_{n_2-1} - 2 \left( \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{\tau} \right) \hat{y}_{n_2} + \frac{1}{h_2^2} \hat{y}_{n_2+1} = -\bar{F}_{n_2}, \quad n_2 = 1, 2, \dots, N_2 - 1, \quad (71)$$

$$\hat{y}_{n_2} = \mu_{n_2}, \quad n_2 = 0, \quad n_2 = N_2, \quad (72)$$

$$x_n = (n_1 h_1, n_2 h_2), \quad F = F_{n_1 n_2}, \quad y = y_{n_1 n_2}.$$

**Замечание 1.** В формулах (69)-(72) пишется только изменяющийся индекс и не пишется фиксированный индекс.

Формулы (69)-(70) описывают прогонки вдоль каждой строки при  $n_2 = 1, \dots, N_2 - 1$ . Так как каждая прогонка вдоль строки требует  $\underline{\underline{O}}(N_1)$  арифметических операций, то общее число арифметических операций при выполнении прогонок вдоль строк равно  $\underline{\underline{O}}(N_1 N_2)$ .

Аналогично прогонка вдоль столбцов при каждом  $n_1 = 1, \dots, N_1 - 1$  требует  $\underline{\underline{O}}(N_2)$  операций, а полное число операций при выполнении всех прогонок вдоль столбцов равно  $\underline{\underline{O}}(N_1 N_2)$ .

**Счет по схеме переменных направлений требует числа арифметических операций  $\underline{\underline{O}}(N_1 N_2)$  пропорционального числу узлов сетки и на каждый узел сетки приходится число операций, не зависящее от числа узлов. Так как можно доказать безусловную устойчивость схемы переменных направлений, то она является экономичной разностной схемой.**

**Многомерные схемы можно построить, вводя понятие суммарной аппроксимации (ЛОС – локально-одномерные схемы).**

**Замечание 2.** Схему переменных направлений нельзя обобщить на трехмерный случай: формально написанная схема уже не будет устойчивой:

$$\frac{y^{s+\frac{1}{3}} - y^s}{\frac{1}{3} - \tau} = \Lambda_1 y^{s+\frac{1}{3}} + \Lambda_2 y^s + \Lambda_3 y^s + \varphi^s,$$

$$\frac{y^{s+\frac{2}{3}} - y^{s+\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3} - \tau} = \Lambda_1 y^{s+\frac{1}{3}} + \Lambda_2 y^{s+\frac{2}{3}} + \Lambda_3 y^s + \varphi^s,$$

$$\frac{y^{s+1} - y^{s+\frac{2}{3}}}{\frac{1}{3} - \tau} = \Lambda_1 y^{s+\frac{1}{3}} + \Lambda_2 y^{s+\frac{2}{3}} + \Lambda_3 y^{s+1} + \varphi^s.$$

**К написанным уравнениям нужно добавить начальные и граничные условия.**

**Качественно накопление ошибки трехмерной схемы переменных направлений можно пояснить следующим образом.**

**В первом уравнении разностная схема является неявной по первому направлению и явной по второму и третьему направлениям, во втором – неявная по второму направлению и явная по первому и третьему, а в третьем уравнении – неявная по третьему направлению и явная по первому и второму. Таким образом, в каждом из уравнений схема оказывается неявной по одному направлению и явной по двум. Если учесть что по явному направлению ошибка накапливается, а по неявному отрабатывается (уменьшается). то в результате за каждый цикл ошибка шесть раз накапливается и только три раза отрабатывается, что приводит к накоплению ошибки. В схеме Письмена-Рекфорда ошибка за цикл сбалансировано два раза накапливается и два раза отрабатывается, что приводит к устойчивости схемы.**

## 2) Локально-одномерные схемы (ЛОС). Понятие суммарной аппроксимации

Общим методом построения экономичных разностных схем пригодных для уравнений с переменными  $\sigma$  даже с разрывными коэффициентами, для квазилинейных нестационарных уравнений в случае произвольной области любого числа измерений является **метод суммарной аппроксимации**.

Отказ от понятия аппроксимации и замена его более слабым **условием суммарной аппроксимации** расширяет класс задач и приводит к аддитивным схемам.

Основную роль при построении ЛОС играет возможность построения цепочки одномерных задач, то есть представления оператора  $L$  исходной задачи в виде суммы одномерных операторов:  $L = L_1 + L_2 + \dots + L_p$ .



**Аддитивные схемы имеют две основные черты:**

**1) переход от слоя  $S$  на слой  $S+1$  осуществляется при помощи обычных (двухслойных, трехслойных и т.д.) схем;**

**2) погрешность аппроксимации аддитивной схемы определяется как сумма невязок для всех промежуточных схем (аддитивная схема обладает суммарной аппроксимацией).**

**Каждая из промежуточных схем цепочки уравнений может не аппроксимировать исходную задачу, аппроксимация достигается за счет суммирования всех невязок.**

**Построение цепочки одномерных задач.** Пусть рассматривается начально-краевая задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in G, \quad t \in (0, T]; \quad \bar{G} = G + \Gamma;$$
$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{G}; \quad u(x, t) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \in [0, T]. \quad (72a)$$

Запишем ее уравнение в следующем виде

$$\sum_{\alpha=1}^p P_{\alpha} u = 0, \quad P_{\alpha} u = \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} - L_{\alpha} u - f_{\alpha},$$

где  $f_{\alpha}(x, t)$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, p$ ) –

произвольные функции, обладающие той же гладкостью, что и  $f(x, t)$  и удовлетворяющие условию нормировки

$$f_1 + f_2 + \dots + f_p = f.$$

На отрезке  $0 \leq t \leq T$  введем равномерную сетку

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_s = s\tau, s = 0, 1, \dots, S\}.$$

Каждый интервал разобьем на  $p$  частей, введя полуинтервалы  $\Delta_\alpha$

и точки

$$\Delta_\alpha : t_{s+\frac{\alpha-1}{p}} < t \leq t_{s+\frac{\alpha}{p}}, \quad t_{s+\frac{\alpha}{p}} = t_s + \frac{\alpha\tau}{p}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p-1.$$

Будем последовательно решать уравнение (72б) при условиях (72в)

$$P_\alpha v_{(\alpha)}(x) = 0, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in G, \quad t \in \Delta_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \quad (72б)$$

$$v_{(1)}(x, 0) = u_0(x), \quad v_{(\alpha)}(x, t_{s+\frac{\alpha-1}{p}}) = v_{(\alpha-1)}(x, t_{s+\frac{\alpha-1}{p}}), \quad \alpha = 2, 3, \dots, p,$$

$$v(x, t_{s+1}) = v_{(p)}(x, t_{s+1}). \quad (72в)$$

**Решением этой задачи назовем значение**

$$v(x, t_s) = v_{(p)}(x, t_s), \quad s = 0, 1, \dots, S.$$

**Каждое из уравнений  $P_\alpha v_\alpha = 0$  или**

$$\frac{1}{p} \frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} = L_\alpha v_{(\alpha)} + f_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p.$$

**заменяется разностной схемой  $\Pi_\alpha y_\alpha = 0, \alpha = 1, 2, \dots, p,$**

**где  $\Pi_\alpha$  -разностные операторы, аппроксимирующие операторы  $P_\alpha$ .**

**В простейшем случае это двухслойная схема, связывающая значения**

$$y_{(\alpha)} = y^{s + \frac{\alpha}{p}} \quad \text{и} \quad y_{(\alpha-1)} = y^{s + \frac{\alpha-1}{p}}.$$

Для решения задачи (60)-(62) локально-одномерную схему можно записать, например, в следующем виде

$$\frac{y^{s+\frac{1}{3}} - y^s}{\tau} = \Lambda_1 y^{s+\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \varphi^s,$$

$$\frac{y^{s+\frac{2}{3}} - y^{s+\frac{1}{3}}}{\tau} = \Lambda_2 y^{s+\frac{2}{3}} + \frac{1}{3} \varphi^s, \quad (72z)$$

$$\frac{y^{s+1} - y^{s+\frac{2}{3}}}{\tau} = \Lambda_3 y^{s+1} + \frac{1}{3} \varphi^s.$$

К уравнениям (72г) следует добавить начальное и граничные условия. Полученная схема суммарно аппроксимирует исходную задачу с порядком  $\underline{\underline{O}}\left(\tau + |h|^2\right)$ , где  $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2$ .

## Примеры

### 1) Схема Писмена-Рекфорда как аддитивная схема.

Уравнения (63)-(64) эквивалентны ЛОС следующего вида:

$$\frac{y^{s+\frac{1}{4}} - y^s}{\tau} = 0.5\Lambda_2 y^s + 0.5\varphi^s; \quad \frac{y^{s+\frac{1}{2}} - y^{s+\frac{1}{4}}}{\tau} = 0.5\Lambda_1 y^{s+\frac{1}{2}};$$
$$\frac{y^{s+\frac{3}{4}} - y^{s+\frac{1}{2}}}{\tau} = 0.5\Lambda_1 y^{s+\frac{1}{2}}; \quad \frac{y^{s+1} - y^{s+\frac{3}{4}}}{\tau} = 0.5\Lambda_2 y^{s+1} + 0.5\varphi^s.$$

Схема обладает суммарной аппроксимацией  $\underline{O}(\tau^2 + |h|^2)$ .

## 2) Схема Дугласа-Рекфорда

$$\frac{y^{s+\frac{1}{2}} - y^s}{\tau} = \Lambda_1 y^{s+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^s; \quad \frac{y^{s+1} - y^{s+\frac{1}{2}}}{\tau} = \Lambda_2 (y^{s+1} - y^s)$$

обладает суммарной аппроксимацией  $\underline{\underline{O}}(\tau + |h|^2)$ .

## 5. Консервативные однородные разностные схемы

Под однородными разностными схемами (ОРС) понимаются такие схемы, вид которых не зависит ни от выбора конкретной задачи из данного класса, ни от выбора разностной сетки.

Коэффициенты ОРС определяются как функционалы (шаблонные функционалы) от коэффициентов дифференциального уравнения.

Широко распространены ОРС сквозного (или непрерывного) счета.

Схемы, выражающие на сетке законы сохранения, называются консервативными или дивергентными.

Схемы, нарушающие законы сохранения, называются неконсервативными или дисбалансными.



# 1) Интегро-интерполяционный метод (ИИМ) – метод баланса построения консервативных разностных схем

Рассмотрим уравнение:

$$\left( k(x) u'(x) \right)' - q(x) u(x) = -f(x), \quad (73)$$

где  $k(x)$  и  $q(x)$  могут быть разрывными функциями.

Уравнение (73) описывает **стационарное распределение тепла в стержне**. Введём равномерную сетку  $\omega_h$  и промежуточные **потокосы узлы**  $x_{i \pm 0,5} = x_i \pm 0,5 h$ . **Запишем закон сохранения тепла (уравнение баланса) для отрезка**  $[x_{i-0,5}, x_{i+0,5}]$ :

$$W_{i-0,5} - W_{i+0,5} - \int_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} q(x) u(x) dx + \int_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} f(x) dx = 0, \quad (74)$$

где  $W(x) = -k(x) \frac{du}{dx}$  - тепловой поток.

Предположим, что  $u = u_i = \text{const}$  при  $x_{i-0,5} \leq x \leq x_{i+0,5}$ .

Тогда

$$\int_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} q(x) u(x) dx \approx hu_i d_i, \quad (75)$$

где

$$d_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} q(x) dx. \quad (76)$$

Проинтегрируем равенство  $\frac{du}{dx} = -\frac{W}{k}$  на отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$ :

$$u_{i-1} - u_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{W(x)}{k(x)} dx. \quad (77)$$

Положим  $W = W_{i-0,5} = \text{const}$  при  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ . Тогда

$$u_{i-1} - u_i \approx W_{i-0,5} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \quad (78)$$

или

$$W_{i-0,5} \approx -a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = -a_i u_{\bar{x},i}, \quad (79)$$

где

$$a_i = \left\{ \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right\}^{-1} \quad (80)$$

Из формул (74), (76), (79), (80) получим:

$$\frac{1}{h} \left\{ a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right\} - d_i y_i = -\varphi_i, \quad (81)$$

где

$$\varphi_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} f(x) dx \quad (82)$$

**Замечание.** Интегралы (76), (80) и (82) являются шаблонными функционалами.

## 2) Метод конечных элементов (МКЭ) – проекционно-сеточный метод

Рассмотрим краевую задачу:

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x), \quad x \in (0,1), \quad (83)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \quad (84)$$

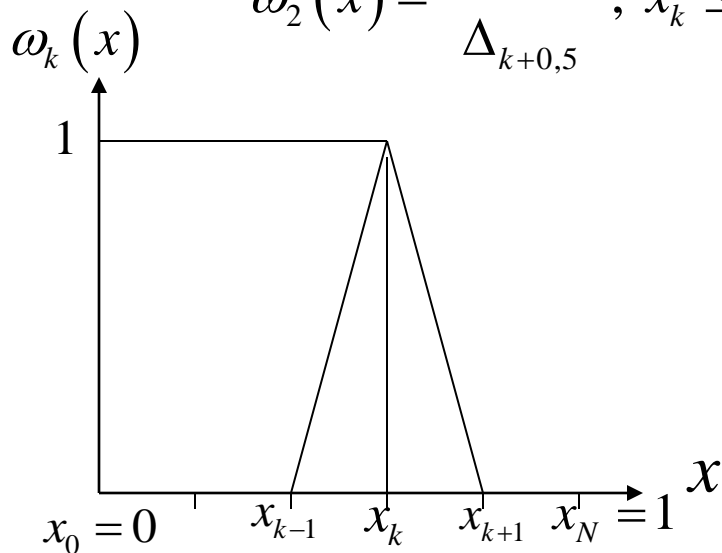
Покроем отрезок  $0 \leq x \leq 1$  системой интервалов  $x_{k-1} \leq x \leq x_k$  и для каждого  $k \geq 1$  введём функцию  $\omega_k(x)$ :

$$\omega_k(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_{k-1}, \\ \tilde{\omega}_1(x), & x_{k-1} \leq x \leq x_k, \\ \tilde{\omega}_2(x), & x_k \leq x \leq x_{k+1}, \\ 0, & x_{k+1} \leq x \leq x_N = 1, \end{cases} \quad (85)$$

где

$$\tilde{\omega}_1(x) = \frac{x - x_{k-1}}{\Delta_{k-0,5}}, \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k, \quad \Delta_{k-0,5} = x_k - x_{k-1},$$

$$\tilde{\omega}_2(x) = \frac{x_{k+1} - x}{\Delta_{k+0,5}}, \quad x_k \leq x \leq x_{k+1}, \quad \Delta_{k+0,5} = x_{k+1} - x_k. \quad (86)$$



**Система функций  $\{\omega_k(x)\}$  полна в том смысле, что любую непрерывную функцию  $\varphi(x)$  с возможными изломами в узловых точках  $\{x_k\}$  и обращающуюся в нуль в граничных точках отрезка  $[0, 1]$  можно представить в виде линейной комбинации функций**

**$\{\omega_k(x)\}$ :  $\varphi(x) = \sum \varphi_k \omega_k$ , где в качестве коэффициентов стоят значения самой функции  $\varphi(x)$  в точках  $x_k$ :  $\varphi_k = \varphi(x_k)$ .**

Система  $\{\omega_k(x)\}$  обладает также некоторым аналогом свойства ортогональности:

$$(\omega_k, \omega_n) = \int_0^1 \omega_k(x) \omega_n(x) dx = \begin{cases} 0, & n \leq k-2, \\ \frac{1}{6} \Delta_{k-0,5}, & n = k-1, \\ \frac{1}{3} (\Delta_{k-0,5} + \Delta_{k+0,5}), & n = k, \\ \frac{1}{6} \Delta_{k+0,5}, & n = k+1, \\ 0, & n \geq k+2. \end{cases} \quad (87)$$

Умножим (83) на  $\omega_k(x)$  и проинтегрируем от 0 до 1:

$$\int_0^1 \left\{ -\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u - f(x) \right\} \omega_k(x) dx = 0. \quad (88)$$

Проинтегрируем формулу (88) по частям с учетом граничных условий (84):

$$\int_0^1 \left\{ p(x) \frac{du}{dx} \frac{d\omega_k}{dx} + (q(x)u - f(x))\omega_k \right\} dx = 0 \quad (89)$$

Представим интеграл (89) в виде суммы интегралов:

$$\sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \left\{ p(x) \frac{du}{dx} \frac{d\omega_k}{dx} + (q(x)u - f(x))\omega_k \right\} dx = 0. \quad (90)$$

Ищем решение задачи (83)-(84) в виде разложения по системе  $\{\omega_k(x)\}$ :

$$u(x) = \sum_k u_k \omega_k(x). \quad (91)$$

Из формул (85) и (91) получим:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x) \frac{du}{dx} \frac{d\omega_k}{dx} dx = \frac{P_{k-0,5}}{\Delta_{k-0,5}} (u_k - u_{k-1}), \quad (92)$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_k}^{x_{k+1}} p(x) \frac{du}{dx} \frac{d\omega_k}{dx} dx &= -\frac{P_{k+0,5}}{\Delta_{k+0,5}} (u_{k+1} - u_k), \\
\int_{x_{k-1}}^{x_k} q(x) u \omega_k dx &= q_{k-0,5}^{1,2} u_{k-1} + q_{k-0,5}^{1,1} u_k, \\
\int_{x_k}^{x_{k+1}} q(x) u \omega_k dx &= q_{k+0,5}^{2,2} u_k + q_{k+0,5}^{1,2} u_{k+1},
\end{aligned} \tag{92}$$

где

$$\begin{aligned}
p_{k+0,5} &= \frac{1}{\Delta_{k+0,5}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} p(x) dx, \\
q_{k+0,5}^{i,j} &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} \omega_i(x) \omega_j(x) q(x) dx, \quad i, j = 1, 2.
\end{aligned} \tag{93}$$



Учитывая формулы (90), (92), построим разностную схему:

$$\frac{P_{k-0,5}}{\Delta_{k-0,5}} (u_k - u_{k-1}) - \frac{P_{k+0,5}}{\Delta_{k+0,5}} (u_{k+1} - u_k) + \\ + q_{k-0,5}^{1,2} u_{k-1} + (q_{k-0,5}^{1,1} + q_{k+0,5}^{2,2}) u_k + q_{k+0,5}^{1,2} u_{k+1} = F_k, \quad (94)$$

где

$$F_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \tilde{\omega}_1 dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \tilde{\omega}_2 dx = \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f(x) \omega_k(x) dx. \quad (95)$$

К уравнениям (95) следует добавить граничные условия:

$$u_0 = 0, \quad u_N = 0. \quad (96)$$

**Замечание.** Интегралы (93) являются шаблонными функционалами.

### 3) Пример схемы, расходящейся в случае разрывных коэффициентов

Рассмотрим краевую задачу:

$$\left(k(x)u'(x)\right)' = 0, \quad x \in (0,1), \quad (97)$$

$$u(0) = 1, \quad u(1) = 0. \quad (98)$$

Заменим производные разностными производными по формулам:

$$\left(ku'\right)' = ku'' + k'u', \quad u'' \sim u_{\bar{x}x}, \quad u' \sim u_{x^\circ}, \quad k' \sim k_{x^\circ},$$

где  $u_{x^\circ,i} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$ . В результате получим разностную задачу:

$$k_i \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h} \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = 0, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (99)$$

$$y_0 = 1, \quad y_N = 0. \quad (100)$$

Разностную схему (99), (100) можно привести к виду:

$$\begin{cases} \frac{1}{h}(by_x - ay_{\bar{x}}) - dy = -\varphi, & (101) \\ y_0 = 1, \quad y_N = 0, & (102) \end{cases}$$

где

$$a_i = k_i - \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{4}, \quad b_i = k_i + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{4}, \quad d_i = \varphi_i = 0. \quad (103)$$

**Замечание.** Уравнение (101) – общий вид разностной схемы второго порядка.

Покажем, что **схема (99), (100) расходится даже в классе кусочно-постоянных коэффициентов:**

$$k(x) = \begin{cases} k_1, & x \in (0, \xi), \\ k_2, & x \in (\xi, 1), \end{cases} \quad (104)$$

где  $\xi$  - иррациональное число,  $\xi = x_n + \theta h$ ,  $x_n = nh$ ,  $\theta \in (0, 1)$ .

Точное решение задачи (97), (98), (104), удовлетворяющее условиям сопряжения, имеет вид:

$$u(x) = \begin{cases} 1 - \alpha_0 x, & x \in [0, \xi], \\ \beta_0 (1 - x), & x \in [\xi, 1], \end{cases} \quad (105)$$

где

$$\alpha_0 = \left( \chi + (1 - \chi) \xi \right)^{-1}, \quad \beta_0 = \chi \alpha_0, \quad \chi = \frac{k_1}{k_2}. \quad (106)$$

Найдём решение разностной задачи (99), (100), (104).

Так как  $a_i = b_i = k_1$  при  $0 < i < n$ ,  $a_i = b_i = k_2$  при  $n + 1 < i < N$ , то уравнение (99) принимает вид:

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq n, \quad i \neq n + 1. \quad (107)$$

Решение уравнения (107) определяется следующей формулой:

$$y_i = y(x_i) = \begin{cases} 1 - \alpha x_i, & 0 \leq x \leq x_n, \\ \beta (1 - x_i), & x_{n+1} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (108)$$

Коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  определим из уравнения (99) при  $i = n$  и  $i = n + 1$ :

$$\begin{cases} b_n (\beta(1 - x_{n+1}) - (1 - \alpha x_n)) + a_n \alpha h = 0, \\ b_{n+1} \beta h + a_{n+1} (\beta(1 - x_{n+1}) - (1 - \alpha x_n)) = 0. \end{cases} \quad (109)$$

Из формул (103) и (104) находим:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{4}(5k_1 - k_2), & a_{n+1} &= \frac{1}{4}(k_1 + 3k_2), \\ b_n &= \frac{1}{4}(3k_1 + k_2), & b_{n+1} &= \frac{1}{4}(5k_2 - k_1). \end{aligned} \quad (110)$$

Решая систему (109) с коэффициентами (110) относительно  $\alpha$  и  $\beta$  и учитывая, что  $x_n = \xi - \theta h$ ,  $x_{n+1} = \xi + (1 - \theta)h$ , определим  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\alpha = \left( \mu + (1 - \mu)\xi + h(\lambda - \theta - (1 - \theta)\mu) \right)^{-1}, \quad \beta = \mu\alpha,$$

где

$$\mu = \frac{3 + \chi}{5 - \chi} \lambda, \quad \lambda = \frac{5\chi - 1}{3\chi + 1}. \quad (111)$$

Предельный переход при  $h \rightarrow 0$  даёт:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \alpha = \bar{\alpha}_0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \beta = \bar{\beta}_0, \quad (112)$$

где

$$\bar{\alpha}_0 = (\mu + (1 - \mu)\xi)^{-1}, \quad \bar{\beta}_0 = \mu\bar{\alpha}_0 \quad (113)$$

С помощью интерполяции доопределим функцию (108)  $y_i$  на всём отрезке  $0 \leq x \leq 1$ . Получим функцию  $\tilde{y}(x, h)$ , заданную при  $x \in [0, 1]$ , причём:  $\tilde{y}(x_i, h) = y_i$ .

Перейдём к пределу:

$$\tilde{u}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \tilde{y}(x, h) = \begin{cases} 1 - \bar{\alpha}_0 x, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \bar{\beta}_0 (1 - x), & \xi \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (114)$$

Сравним  $\tilde{u}(x)$  с точным решением задачи (97), (98), (104)  $u(x)$ .

Из формул (106), (111), (113) следует, что  $\tilde{u}(x) = u(x)$ , если  $\bar{\alpha}_0 = \alpha_0$ ,  $\bar{\beta}_0 = \beta_0$ , откуда вытекает, что  $\chi = 1$  и  $k_1 = k_2$ .

**Вывод.** Решение (108) разностной задачи (99), (100), (104) при  $h \rightarrow 0$  стремится к функции  $\tilde{u}(x)$ , которая при  $k_1 \neq k_2$  отлична от точного решения задачи (97), (98), (104). Следовательно, **разностная схема (99), (100), (104) расходится.**

**Физический смысл функции  $\tilde{u}(x)$ :** функция  $\tilde{u}(x)$  является решением задачи (97), (98), (104), удовлетворяющим следующим условиям при  $x = \xi$ :

$$[\tilde{u}] = 0, \quad [k\tilde{u}'] = -\bar{\alpha}_0(\mu - \chi)k_2 = q,$$

где  $q$  - мощность точечного источника (стока) тепла при  $x = \xi$ .  
При  $\chi \rightarrow 5 \pm 0$   $q \rightarrow \pm\infty$ .

**Физическая причина расходимости схемы (99), (100) состоит в том, что она нарушает баланс (закон сохранения) тепла. Схема не является консервативной.**

## 6. Спектральный анализ разностной задачи Коши

### 1) Необходимое спектральное условие устойчивости Неймана

Рассмотрим задачу Коши для уравнения переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t \in (0, T], \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \mu(x), \quad x \in \mathbb{R}^1. \quad (2)$$

Разностная схема для задачи (1)-(2) имеет следующий вид:

$$\frac{y_n^{s+1} - y_n^s}{\tau} - \frac{y_{n+1}^s - y_n^s}{h} = 0, \quad (3)$$

$$y_n^0 = \varphi_n, \quad n = 0, \pm 1, \dots; \quad s = 0, 1, \dots, S. \quad (4)$$



**Введём равномерную норму на слое:**

$$\|y^s\| = \max(n) |y_n^s| \quad (5)$$

**Для устойчивости решения задачи (3),(4) по начальным данным необходимо, чтобы условие (6)**

$$\|y^s\| \leq M \|y^0\|, \quad s = 0, 1, \dots, S \quad (6)$$

**выполнялось, в частности, если начальная функция есть какая-нибудь гармоника:**

$$y_n^0 = e^{i\alpha n}, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad (7)$$

где  $\alpha$  - вещественный параметр.

**Решение задачи (3),(4) примет вид:**

$$y_n^s = \lambda^s e^{i\alpha n}. \quad (8)$$

Параметр  $\lambda = \lambda(\alpha)$  определяется при подстановке решения (8) в уравнение (3):

$$\lambda(\alpha) = 1 - r + re^{i\alpha}, \quad r = \frac{\tau}{h} = \text{const} \quad (9)$$

Из формул (7) и (8) следует:

$$\max(n) |y_n^s| = |\lambda(\alpha)|^s \max(n) |y_n^0| \quad (10)$$

Для выполнения неравенства (5) необходимо, чтобы выполнялось неравенство:

$$|\lambda(\alpha)|^s \leq M, \quad s = 0, 1, \dots, S \quad (11)$$

или

$$\lambda(\alpha) \leq 1 + C_1 \tau \quad (12)$$

так как

$$(1 + C_1 \tau)^s \leq e^{C_1 \tau s} < e^{C_1 T} = M,$$

где  $C_1$  - постоянная, не зависящая от  $\alpha$  и  $\tau$ .

Гармоника  $\left\{ e^{i\alpha n} \right\}$  является собственной функцией оператора перехода со слоя  $s$  на слой  $s+1$ :

$$y_n^{s+1} = (1 - r) y_n^s + r y_{n+1}^s, \quad n=0, \pm 1, \dots, \quad (13)$$

соответствующей собственному значению (9)  $\lambda(\alpha)$ .

Линия, которую пробегает точка  $\lambda(\alpha)$  на комплексной плоскости, когда  $\alpha$  пробегает вещественную ось, вся состоит из собственных значений и является спектром оператора перехода.

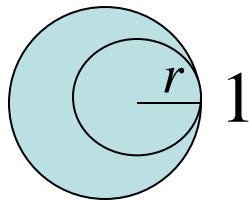
**Необходимое спектральное условие устойчивости Неймана (12): спектр оператора перехода, соответствующего разностному уравнению, должен лежать в круге радиуса  $1 + C_1 \tau$  на комплексной плоскости.**

**Замечание.** Если спектр оператора перехода не зависит от  $\tau$ , то условие (12) равносильно требованию, чтобы спектр лежал в единичном круге:

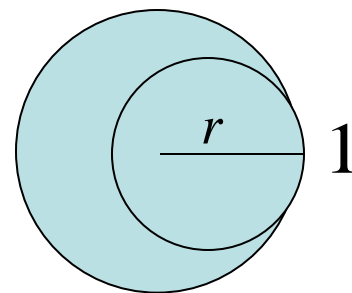
$$|\lambda(\alpha)| \leq 1. \quad (14)$$

Спектр (9) – окружность с центром в точке  $1-r$  и радиусом  $r$ . При  $r < 1$  - спектр лежит в единичном круге, при  $r = 1$  совпадает с единичной окружностью, а при  $r > 1$  лежит вне единичного круга.

**Условие Неймана выполняется при  $r \leq 1$  ( $\tau \leq h$ ).**



$$1-r > 0$$



$$1-r < 0$$

## 2) Примеры

А) Уравнение переноса (вторая схема).

$$\frac{y_n^{s+1} - y_n^s}{\tau} - \frac{y_n^s - y_{n-1}^s}{h} = 0, \quad (15)$$

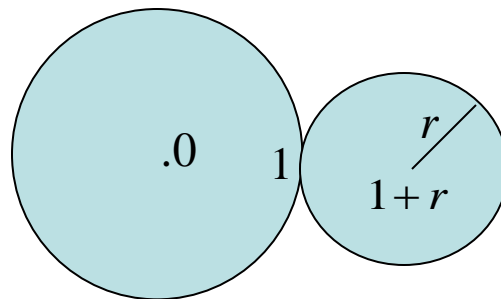
$$y_n^0 = \varphi_n, \quad n=0, \pm 1, \dots; \quad s = 0, 1, \dots, S. \quad (16)$$

Спектр оператора перехода имеет вид:

$$\lambda(\alpha) = 1 + r - re^{-i\alpha} \quad (17)$$

и является окружностью с центром в точке  $1 + r$  и радиусом  $r$ .

**Условие Неймана всегда не выполнено.**



**Б) Уравнение теплопроводности:**

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t \in (0, T], \quad (18)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^1. \quad (19)$$

**Рассмотрим явную схему:**

$$\frac{y_n^{s+1} - y_n^s}{\tau} - a^2 \frac{y_{n+1}^s - 2y_n^s + y_{n-1}^s}{h^2} = 0, \quad (20)$$

$$y_n^0 = \varphi_n, \quad n = 0, \pm 1, \dots; \quad s = 0, 1, \dots, S \quad (21)$$

**Подставляя (8) в уравнение (20), получим:**

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} - a^2 \frac{e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}}{h^2} = 0. \quad (22)$$

Так как

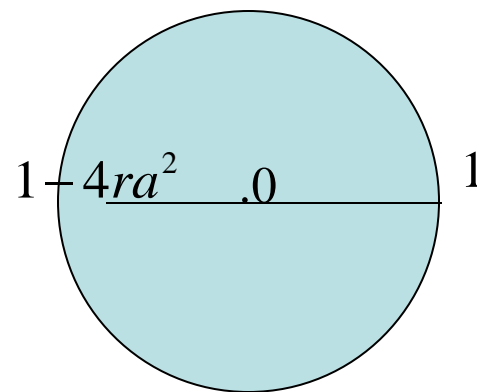
$$\frac{e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}}{4} = - \left( \frac{e^{\frac{i\alpha}{2}} - e^{-\frac{i\alpha}{2}}}{2i} \right)^2 = -\sin^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right), \quad (23)$$

то

$$\lambda(\alpha) = 1 - 4ra^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad r = \frac{\tau}{h^2}. \quad (24)$$

При изменении  $\alpha$  число  $\lambda(\alpha)$  пробегает отрезок  $1 - 4ra^2 \leq \lambda \leq 1$ .  
Условие Неймана выполнено, если  $1 - 4ra^2 \geq -1$ , откуда получаем,

что  $r \leq \frac{1}{2a^2}$  и  $\tau \leq \frac{h^2}{2a^2}$ . (25)



**Рассмотрим неявную схему:**

$$\frac{y_n^{s+1} - y_n^s}{\tau} - a^2 \frac{y_{n+1}^{s+1} - 2y_n^{s+1} + y_{n-1}^{s+1}}{h^2} = 0, \quad (26)$$

$$y_n^0 = \varphi_n, \quad n=0, \pm 1, \dots; \quad s=0, 1, \dots, S. \quad (27)$$

**Аналогично предыдущему случаю, получаем:**

$$\lambda(\alpha) = \frac{1}{1 + 4ra^2 \sin^2 \alpha}, \quad r = \frac{\tau}{h^2}. \quad (28)$$

**Спектр  $\lambda(\alpha)$  заполняет отрезок вещественной оси:**

$$\frac{1}{1 + 4ra^2 \sin^2 \alpha} \leq \lambda \leq 1. \quad (29)$$

**Условие Неймана выполнено при любом  $r$ .**



## В) Случай нескольких пространственных переменных

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in (0, T], \quad (30)$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (31)$$

**Явная разностная схема имеет вид:**

$$\frac{V_{m,n}^{s+1} - V_{m,n}^s}{\tau} - \frac{V_{m+1,n}^s - 2V_{m,n}^s + V_{m-1,n}^s}{h^2} - \frac{V_{m,n+1}^s - 2V_{m,n}^s + V_{m,n-1}^s}{h^2} = 0 \quad (32)$$

$$V_{m,n}^0 = \varphi_{m,n}, \quad \varphi_{m,n} = f(x_m, y_n); \quad m, n = 0, \pm 1, \dots; \quad s = 0, 1, \dots, S. \quad (33)$$

**Задавая начальную функцию в виде двумерной гармоника, зависящей от двух вещественных параметров  $\alpha$  и  $\beta$  :**

$$V_{m,n}^0 = \varphi_{m,n} = e^{i(\alpha n + \beta m)}; \quad m, n = 0, \pm 1, \dots; \quad s = 0, \pm 1, \dots, S \quad (34)$$

найдем решения вида:

$$V_{m,n}^s = \lambda^s (\alpha, \beta) e^{i(\alpha m + \beta n)}. \quad (35)$$

Подставляя решение (35) в уравнение (32), получим:

$$\lambda(\alpha, \beta) = 1 - 4r \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 4r \sin^2 \frac{\beta}{2}. \quad (36)$$

При изменении  $\alpha$  и  $\beta$  точка  $\lambda = \lambda(\alpha, \beta)$  пробегает отрезок  $1 - 8r \leq \lambda \leq 1$  вещественной оси

Условия Неймана выполняются, если  $1 - 8r \geq -1$ , откуда следует

$$r \leq \frac{1}{4} \quad \text{и окончательно:} \quad \tau \leq \frac{h^2}{4}.$$