МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

**В.Т. Волков, Д.В. Минаев, И.Е. Могилевский,
В.Ю. Попов, Н.Е. Шапкина**

Применение аналитических функций для решения физических задач

**Пособие по математике для
студентов физических,
физико-математических и инженерных
специальностей**

Москва 2024

Волков В. Т., Минаев Д. В.,
Могилевский И. Е., Попов В. Ю.,
Шапкина Н. Е.,
Применение аналитических функций для решения физических задач. Пособие по математике для студентов физических, физико-математических и инженерных специальностей

1. Применение аналитических функций для решения физических задач. Связь аналитической функции комплексной переменной и гармонической функции двух действительных переменных.

Если $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \in C^{\infty}(g)$, то $u_x = v_y$ и $u_y = -v_x$. Тогда получаем $\Delta u = 0$ и $\Delta v = 0$, то есть u и v — гармонические функции в области $(x,y) \in g$. Обратно, пара гармонических в g функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, связанные условиями Коши- Римана, являются действительной и мнимой частью аналитической функции.

Таким образом, ***необходимым и достаточным условием аналитичности функции*** $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ является требование, чтобы функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ были гармоническими и удовлетворяли условиям Коши–Римана.

Установленная связь между аналитическими и гармоническими функциями позволяет использовать некоторые свойства аналитических функций для изучения гармонических. Так, например, зная формулу среднего значения для аналитической функции, мы получаем аналогичную формулу для гармонической функции:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{C_{R_0}} u(\xi, \eta) ds,$$

где точка с координатами (x_0, y_0) — центр круга C_R радиуса R, целиком лежащего в области гармоничности функции $u(x,y)$.

Также аналогично формулируется и доказывается принцип максимума для гармонических функций.

Сохранение оператора Лапласа при конформном отображении.

Пусть в области g задана гармоническая функция $u(x,y)$:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Пусть задано невырожденное преобразование координат $\xi = xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$, где $(x,y) \in g \longleftrightarrow (\xi, \eta) \in D$. Задание двух действительных функций двух действительных переменных эквивалентно заданию комплексной функции комплексной переменной: функция $\zeta = f(z)$, отображает область g на область D, где $z = x + iy \in g$, $\zeta = \xi + i\eta \in D$.

Теорема 1 *Уравнение Лапласа для функции* $u(x,y)$ *перейдет в уравнение Лапласа для функции* $U(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$

только в том случае, когда преобразование координат $\zeta = f(z)$ *является конформным преобразованием I или II рода.* Доказательство теоремы приведено в [1].

2. Применение конформных отображений в задачах электростатики. Задачи электростатики заключаются в определении стационарного электрического поля, создаваемого в среде заданным распределением зарядов. В зависимости от постановки задачи — задаются или плотность распределения зарядов, или полный заряд, распределенный на поверхности проводника. Из уравнений Максвелла для изотропной среды получаем:

$$\begin{aligned}&\mathrm{rot}\mathbf{E} = 0;\\ &\mathrm{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho \ \ (\text{закон Кулона}); \mathbf{E} = -\nabla u \Rightarrow \Delta u = -4\pi\rho,\end{aligned}$$

где u — потенциал электрического поля; $4\pi q = \int\limits_C E_n(s)\,ds$ — теорема Гаусса (следствие закона Кулона). Задача Робэна — распределение заряда на плоской проводящей границе.

$q = \int\limits_C \sigma(s)ds$ — дано; значит, поверхностная плотность заряда $\sigma(s) = (1/4\pi)\left.E_n\right|_C = -(1/4\pi)\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_C$; $\mathbf{n}$ —внешняя нормаль.

Задача Робэна: $\Delta u = 0$ вне C, $u|_C = const$; $\int\limits_C \dfrac{\partial u}{\partial n}ds = -4\pi q$ — дано. Найти $\sigma(s)$.

Задача просто решается, если C есть окружность $|w| = 1$. Тогда $\sigma(s) = \dfrac{q}{2\pi}$.

Значит, так как $\sigma(s) = -\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial u_0}{\partial n_0} \Rightarrow \left.\dfrac{\partial u_0}{\partial n_0}\right|_{w=1} = -2q.$

Пусть известна функция $w = f(z)$, которая конформно отображает C на плоскости z на окружность $|w| = 1$ на плоскости w. Тогда

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C = \left.\frac{\partial u_0}{\partial n_0}\right|_{|w|=1}\cdot\left.\frac{\partial n_0}{\partial n}\right|_C + \left.\frac{\partial u_0}{\partial \tau_0}\right|_{|w|=1}\cdot\left.\frac{\partial \tau_0}{\partial n}\right|_C = -2q\left.\frac{\partial n_0}{\partial n}\right|_C$$

(поскольку контур проводящий, то $E_\tau = \dfrac{\partial u_0}{\partial \tau_0} = 0$). Но при конформном отображении нормаль n к C переходит в нормаль n_0 к $|w| = 1$, а меняется лишь ее длина, следовательно,

$$\left.\frac{\partial n_0}{\partial n}\right|_C = \left.|f'(z)|\right|_C \Rightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C = -2q\left.|f'(z)|\right|_C \Rightarrow \sigma(s) = \frac{q}{2\pi}\left.|f'(z)|\right|_C.$$

Пример 1. Двусторонний отрезок $[-1;1]$ на плоскости z. $w = f(z)$: $C \overset{\text{К}}{\longleftrightarrow} |w| = 1$ — функция, обратная к функции Жуковского

$$w = f(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}\,; \quad f'(z)|_{z\in[-1;1]} = 1 + \left.\frac{z}{\sqrt{\mathrm{z}^2 - 1}}\right|_{z\in[-1;1]}.$$

Но $|f(z)||_{z\in[-1;1]} = |w| = 1$ (граница переходит в границу)

$$|f'(z)|_{z\in[-1;1]} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; -1 < x < 1$$

$$\Rightarrow \sigma(x) = \frac{q}{2\pi\sqrt{1-x^2}}; \quad -1 < x < 1;$$

Замечания.
1) $\sigma(x) \to \infty$, $x \to \pm 1$;
2) $2\int\limits_{-1}^{1} \sigma(x)dx = q$ (Двусторонний отрезок).

Задача Дирихле: Пусть требуется найти гармоническую функцию

$$\begin{aligned}&\Delta u = 0 \text{ в области } g,\\ &u(x,y) \in C(g + \partial g);\\ &u(P)|_{\partial g} = \alpha(P)\end{aligned}$$

Как известно, решение этой задачи методом разделения переменных может быть получено лишь для ограниченного класса областей g. Метод конформных преобразований весьма универсален.

Рассмотрим задачу Дирихле в круге радиуса R. Тогда $\alpha(P) = \alpha(\varphi)$. Постараемся выразить значение неизвестной функции $u(r,\varphi)$ в произвольной внутренней точке (r_0,φ_0) через ее граничные значения $\alpha(\varphi)$. Построим конформное отображение заданного круга на единичный круг $|w| < 1$, так, чтобы $(r_0,\varphi_0) \to w = 0$. Тогда наше отображение будет иметь вид:

$$w = f(z) = \lambda \frac{z - z_0}{z - \frac{R^2}{z_0^*}}, \; |\lambda| = \frac{R}{r_0}, \tag{1}$$

λ — выбирается из условия, чтобы граничные точки заданного круга перешли в $|\mathrm{w}|=1$). В результате преобразования искомая функция перейдет в $\mathrm{u}(\mathrm{r},\varphi) \to \mathrm{U}(\rho,\psi) = \mathrm{u}(\mathrm{r}(\rho,\psi),\varphi(\rho,\psi))$. При этом граничная функция $\alpha(\varphi) \to \mathrm{A}(\psi) = \alpha(1,\varphi)$. Так как оператор Лапласа инвариантен относительно конформных отображений, то функция $\mathrm{U}(\rho,\psi)$ – является гармонической и ее значение в центре круга может быть найдено по формуле среднего значения:

$$u(r_0,\varphi_0) = U|_{w=0} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} A(\psi)\,d\psi.$$

Если мы подставим граничные точки в формулу (1), то получим

$$e^{i\psi} = \frac{R}{r_0}\cdot\frac{R\cdot e^{i\varphi} - r_0\cdot e^{i\varphi_0}}{R\cdot e^{i\varphi} - \frac{R^2}{r_0}e^{i\varphi_0}}.$$

Значит,

$$d\psi = \frac{R^2 - r_0^2}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)}d\varphi.$$

Поэтому, сделав замену переменной в интеграле, получим интеграл Пуассона

$$u(r_0,\varphi_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\left(R^2 - r_0^2\right)\cdot\alpha(\varphi)}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)}d\varphi.$$

Данная формула позволяет в принципе решить задачу Дирихле для любой области, которую мы можем конформно отобразить на единичный круг.
Пример 2. Задача Дирихле для верхней полуплоскости.
Найти

$$u(x,y)\in C(y>0):\begin{cases}\Delta u = 0,\ y>0,\\ u(x,0) = \alpha(x),\end{cases}$$

где $\alpha(x)\in C$ задана.
Найдем конформное отображение, переводящее верхнюю полуплоскоть в единичный круг $|\mathrm{w}|<1$, так, чтобы заданная точка z_0 верхней полуплоскости $\to w=0$. Такое отображение осуществляется функцией $\mathrm{w} = \mathrm{f}(\mathrm{z}) = \frac{\mathrm{z}-\mathrm{z}_0}{\mathrm{z}-\mathrm{z}_0^*}$. Подставляя граничные точки, получим $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} = \frac{\mathrm{x}-\mathrm{z}_0}{\mathrm{x}-\mathrm{z}_0^*}$. Значит $\mathrm{d}\psi = \frac{2\mathrm{y}_0}{(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)^2+\mathrm{y}_0^2}\mathrm{dx}$. Поэтому, сделав

замену переменной в интеграле формулы среднего значения, получим интеграл Пуассона для полуплоскости

$$u\left(x_0, y_0\right) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0 \cdot \alpha\left(x\right)}{\left(x - x_0\right)^2 + y_0^2} dx$$

3. Применение конформных отображений в задачах аэродинамики. Функция $w = f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ была введена в рассмотрение Н.Е. Жуковским в теории крыла самолета и использовалась при решении многих задач гидро- и аэродинамики. Эта функция является однозначной и аналитической в кольце $0 < |z| < \infty$. У нее два полюса 1-го порядка: z=0 и z=∞. Производная функции Жуковского $f'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - z^2\right)$ отлична от нуля на всей комплексной плоскости, кроме точек ± 1, значит, отображение $w = f(z)$ является конформным всюду кроме точек $z = \pm 1$. Найдем области однолистности функции Жуковского: предположим, что $z_1 \neq z_2$, но эти точки переводятся в одну и ту же точку w, то есть $z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2}$, тогда $z_1 - z_2 = \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2}$. В силу того, что $z_1 \neq z_2$, получаем, что $z_1 \cdot z_2 = 1$, то есть точки симметричны относительно единичного круга. Отсюда области однолистности функции Жуковского $|z| < 1$ и $|z| > 1$, обе области отражаются на одну и ту же область w. Действительно,

$$\begin{aligned} w = f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(re^{i\varphi} + \frac{1}{r}e^{-i\varphi}\right) = \\ = \frac{1}{2}r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \frac{1}{2r}(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \\ = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + i\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi). \end{aligned}$$

Далее,

$u^2 = \frac{1}{4}\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 \cos^2\varphi$ и $v^2 = \frac{1}{4}\left(r - \frac{1}{r}\right)^2 \sin^2\varphi$. Тогда из основного тригонометрического тождества имеем

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = \frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1.$$

Таким образом, функция Жуковского отражает окружности фиксированного радиуса r в эллипсы с полуосями $a = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$ и

$b = \dfrac{1}{2}\left(r - \dfrac{1}{r}\right)$ и совпадающими фокусами ± 1 на действительной оси u. Отметим, что при $r \to 1$ эллипс вырождается в отрезок $[-1;1]$ на действительной оси.При $r \to 1$ выполняется $a \to 1$, $b \to 0$.

Таким образом, функция Жуковского преобразует область внутри круга $|z| < 1$ на комплексную плоскость w с разрезом по отрезку $[-1;1]$ действительной оси. Граница круга отражается на этот отрезок, причем верхняя полуокружность отражается на нижний, а нижняя полуокружность — на верхний берег разреза. Аналогично, область $|z| > 1$ также преобразуется на второй экземпляр комплексной плоскости w с разрезом по отрезку $[-1;1]$ действительной оси. Причем верхняя полуокружность отражается на верхний, а нижняя полуокружность — на нижний берег разреза. Таким образом, функция Жуковского отражает полную плоскость z на двулистную Риманову поверхность Обратной функции $z = w + \sqrt{z^2+1}$ с листами, склеенными по берегам разреза: верхний с нижним и наоборот.Отметим, что лучи $\arg z = \varphi_0$ преобразуются в семейство софокусных гипербол. Значит, функция Жуковского преобразует ортогональную полярную систему координат в ортогональную криволинейную систему софокусных эллипсов и гипербол.

Конформность отображения нарушается в точках $z_{1,2} = \pm 1$, где $f'(z_{1,2}) = 0$; при этом $w_{1,2} = \pm 1$. Обратная функция $z = w + \sqrt{w^2-1}$ (обе ветви) имеет две точки ветвления $w = \pm 1$, которые являются концами берегов разреза.

Пример 1. *В какую область отобразится верхняя полуплоскость функцией $w = \sqrt{z^2-1}$?*

Решение. Рассмотрим последовательные отображения:

$w_1 = z^2$ переводит верхнюю полуплоскость во всю плоскость с разрезом вдоль положительной части действительной оси;

$w_2 = w_1 - 1$ — разрез сдвигается на 1 влево;

$w_3 = \sqrt{w_2} = \sqrt{z^2-1}$ дает искомую область: верхнюю полуплоскость с разрезом вдоль мнимой оси [0;1].

Задача 2. *В какую область отобразится сектор $0 < \varphi < \dfrac{2\pi}{3}$, где $z = \rho e^{i\varphi}$ функцией $w = \sqrt{z^3-2}$?*

Пример 3. *Отобразить конформно верхнюю полуплоскость с исключенным полукругом $\left(|z| > \dfrac{1}{2}\right) \cap (\mathrm{Im} z > 0)$ на круг $|w| < 1$.*

Решение. Рассмотрим последовательные отображения:

$w_1 = 2z$ — переводит область в верхнюю полуплоскость с исключенным полукругом$|w_1| < 1$;
$w_2 = \dfrac{1}{2}\left(w_1 + \dfrac{1}{w_1}\right)$ — отображает на верхнюю полуплоскость (разрез $[-1;1]$ убираем, так как в нижней полуплоскости у нас нет точек);
$w = \dfrac{w_2 - i}{w_2 + i}$ — отображает верхнюю полуплоскость внутрь единичного круга, при этом точка i на верхней полуплоскости переходит в центр круга, а симметричная ей относительно границы точка $-i$ переходит в точку ∞.

Задача 4. *Отобразить конформно нижнюю полуплоскость с исключенным полукругом* $\left(|z| > \dfrac{1}{3}\right) \cap (\mathrm{Im} z < 0)$ *на круг* $|w| < 1$.

Пример 5. *Отобразить всю комплексную плоскость с разрезом* $[-1;1]$ *на действительной оси на верхнюю полуплоскость.*
Решение. Сначала воспользуемся функцией, обратной к функции Жуковского, и отобразим комплексную плоскость с разрезом в круг радиус 1 с центром в начале координат. Далее, как было описано выше, отобразим круг на полуплоскость с помощью дробно-линейной функции и получим

$$w_1 = z - \sqrt{z^2 - 1}\,; \quad w = \frac{w_1 + i}{i - w_1}$$

Пример 6. *Отобразить единичный круг с разрезом вдоль действительной оси [0,5;1] на верхнюю полуплоскость.*
Решение. Сначала с помощью функции Жуковского внутренность единичного круга отображаем на всю комплексную плоскость. При этом важно определить, куда перейдет разрез (разрез всегда переходит в разрез в силу принципа соответствия границ):

$$w_1 = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

Далее, как обычно, один конец разреза отразим в точку 0, а другой в — точку ∞. Таким образом получим всю комплексную плоскость с разрезом вдоль положительной части действительной оси.

$$w_2 = \frac{w_1 + 1}{1,25 - w_1}; \quad w_3 = \sqrt{w_2}$$

Список литературы

1. А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. Теория функций комплексной переменной. М. Физматлит, 2005.
2. М.А. Лаврентьев, Б.М. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
3. Л.И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
4. А.В. Кравцов, А.Р. Майков. Пособие к курсу теории функций комплексной переменной. М.: Физический факультет МГУ, 2007.
5. А.В. Бицадзе. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука, 1969.