Лекция 10

ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА–КАПЕЛЛИ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ следующего общего вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} = \|A_1, A_2, \ldots, A_n\| = \left\| \begin{matrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{matrix} \right\|,$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix}, \cdots, A_n = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix},$$

$$A^1 = \left(a_1^1, a_2^1, \cdots, a_n^1\right), \ldots, A^m = \left(a_1^m, a_2^m, \cdots, a_n^m\right).$$

Рассмотрим линейные оболочки столбцов и строк матрицы A:

$$L(A_1, ..., A_n) \subset \mathbb{K}^m, \quad L(A^1, ..., A^m) \subset \mathbb{K}_n.$$

Пусть $A^{'}$ — это матрица, полученная из матрицы A элементарными преобразованиями строк первых четырёх типов. В силу результата теоремы **??** имеют место следующие равенства:

$$\dim L(A_1^{'}, A_2^{'}, \ldots, A_n^{'}) = \dim L(A_1, A_2, \ldots, A_n), \qquad (1.1)$$

$$\dim L(A^{'1}, A^{'2}, \ldots, A^{'m}) = \dim L(A^1, A^2, \ldots, A^m). \qquad (1.2)$$

Определение 1. *Размерность линейной оболочки $L(A_1, ..., A_n)$ столбцов матрицы $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ называется рангом матрицы A.*

Обозначение. $\operatorname{rk} A$, $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rg} A$, $\operatorname{rang} A$, $\operatorname{r}(A)$.

Теорема 1. *Для любой матрицы A размерность линейной оболочки её столбцов равна размерности линейной оболочки её строк*:

$$\dim L(A_1, ..., A_n) = \dim L(A^1, ..., A^m).$$

Доказательство.

Используя метод Гаусса–Жордана элементарными преобразованиями первых четырёх типов матрицу A можно преобразовать к матрице A' следующих четырёх типов: либо к нулевой матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

либо к блочным матрицам

$$\left\| \begin{array}{c|c} I_r & O_{r\times(n-r)} \\ \hline O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{array} \right\|, \quad 1 \leqslant r < \min\{m,n\};$$

$$\left\| I_m | O_{m\times(n-m)} \right\| \quad \text{при} \quad n > m;$$

$$\left\| \begin{array}{c} I_n \\ O_{(m-n)\times n} \end{array} \right\| \quad \text{при} \quad m > n,$$

где

$$O_{r\times(n-r)}, \quad O_{(m-r)\times r}, \quad O_{(m-r)\times(n-r)}, \quad O_{m\times(n-m)}$$

— это нулевые матрицы соответствующих размеров, а I_r, I_m, I_n — это единичные (квадратные) матрицы соответствующего порядка. В первом случае получаем, что

$$\dim L(A_1^{'}, ..., A_n^{'}) = \dim L(A^{'1}, ..., A^{'m}) = 0.$$

Во втором случае

$$\dim L(A_1^{'}, ..., A_n^{'}) = \dim L(A^{'1}, ..., A^{'m}) = r;$$

в третьем случае

$$\dim L(A_1^{'}, ..., A_n^{'}) = \dim L(A^{'1}, ..., A^{'m}) = m, \quad m < n;$$

в четвертом случае

$$\dim L(A_1^{'}, ..., A_n^{'}) = \dim L(A^{'1}, ..., A^{'m}) = n, \quad n < m.$$

Осталось воспользоваться равенствами (1.1) и (1.2).

Теорема доказана.

Следствие. *Для ранга* $\operatorname{rang} A$ *матрицы* A *имеет место следующее неравенство*:

$$\operatorname{rang} A \leqslant \min\{m,n\}.$$

Доказательство. Независимое доказательство основано на следующих неравенствах:

$$L(A_1, ..., A_n) \subset \mathbb{K}^m \Rightarrow \dim L(A_1, ..., A_n) \leqslant m;$$
$$L(A^1, \ldots, A^m) \subset \mathbb{K}_n \Rightarrow \dim L(A^1, ..., A^m) \leqslant n.$$

Следствие доказано.

Теорема Кронекера–Капелли:
Теорема 2. *Неоднородная система $AX = B$ совместна тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rang}\|A\| = \operatorname{rang}\|A \mid B\|.$$

Доказательство.

Шаг 1. Необходимость. Пусть система $AX = B$ совместна. Тогда найдутся такие числа $c^1, \dots, c^n \in \mathbb{K}$, что

$$B = c^1 A_1 + \dots + c^n A_n \Rightarrow B \subset L(A_1, ..., A_n) \Rightarrow \\ \Rightarrow L(A_1, ..., A_n, B) \subset L(A_1, ..., A_n).$$

Обратное вложение очевидно. Таким образом,

$$L(A_1, ..., A_n) = L(A_1, ..., A_n, B) \Rightarrow \\ \Rightarrow \dim L(A_1, ..., A_n) = \dim L(A_1, ..., A_n, B) \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{rang}\|A\| = \operatorname{rang}\|A \mid B\|.$$

Шаг 2. Достаточность. Пусть

$$\dim\|A\| = \dim\|A \mid B\|.$$

Вложение

$$L(A_1, ..., A_n) \subset L(A_1, ..., A_n, B)$$

очевидно. Докажем, что $L(A_1, ..., A_n) = L(A_1, ..., A_n, B)$.

□ Пусть $\{A_{\sigma_1}, ..., A_{\sigma_r}\}$ — это базис $(0 \leqslant r \leqslant n)$ в $L(A_1, ..., A_n)$ и столбец B не выражается линейно через столбцы $\{A_1, ..., A_n\}$. Тогда тем более столбец B линейно не выражается через столбцы $\{A_{\sigma_1}, ..., A_{\sigma_r}\}$. Тогда семейство $\{A_{\sigma_1}, ..., A_{\sigma_r}, B\}$ линейно независимое и образует базис в линейной оболочке $L(A_1, ..., A_n, B)$, т.е.

$$\dim L(A_1, ..., A_n, B) = \dim L(A_1, ..., A_n) + 1.$$

Противоречие. ⊠

$$L(A_1, ..., A_n) = L(A_1, ..., A_n, B) \Rightarrow \exists\, c^1, \dots, c^n, \quad B = c^1 A_1 + \dots + c^n A_n.$$

Система $AX = B$ совместна, поскольку имеет решение

$$X = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ \vdots \\ c^n \end{pmatrix}.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Если существует произведение матриц A и B, то*

$$\operatorname{rang}(AB) \leqslant \min\{\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B\}. \tag{1.3}$$

Доказательство.

Пусть $A \in \mathbb{K}^{m\times p}$ и $B \in \mathbb{K}^{p\times n}$. Обозначим через $C \in \mathbb{K}^{m\times n}$ произведение $A \cdot B$. Поэтому

$$C_k = A \cdot B_k = \sum_{l=1}^{p} A_l b_k^l,\ k = \overline{1,n} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L(C_1, \ldots, C_n) \in L(A_1, \ldots, A_p) \Rightarrow \operatorname{rang} C \leqslant \operatorname{rang} A,$$

$$C^j = A^j \cdot B = \sum_{l=1}^{p} a_l^j B^l,\ j = \overline{1,m} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L(C^1, \ldots, C^m) \subset L(B^1, \ldots, B^p) \Rightarrow \operatorname{rang} C \leqslant \operatorname{rang} B.$$

Теорема доказана.

§ 2. Теорема о базисном миноре

Рассмотрим матрицу $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Выберем в этой матрице произвольные k строк с номерами $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$ и k столбцов с номерами $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$.

$$\begin{pmatrix}
a_1^1 & \cdots & a_{i_1}^1 & \cdots & a_{i_2}^1 & \cdots & a_{i_k}^1 & \cdots & a_n^1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_1^{j_1} & \cdots & a_{i_1}^{j_1} & \cdots & a_{i_2}^{j_1} & \cdots & a_{i_k}^{j_1} & \cdots & a_n^{j_1} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_1^{j_2} & \cdots & a_{i_1}^{j_2} & \cdots & a_{i_2}^{j_2} & \cdots & a_{i_k}^{j_2} & \cdots & a_n^{j_2} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_1^{j_k} & \cdots & a_{i_1}^{j_k} & \cdots & a_{i_2}^{j_k} & \cdots & a_{i_k}^{j_k} & \cdots & a_n^{j_k} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_1^m & \cdots & a_{i_1}^m & \cdots & a_{i_2}^m & \cdots & a_{i_k}^m & \cdots & a_n^m
\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}
a_{i_1}^{j_1} & a_{i_2}^{j_1} & \cdots & a_{i_k}^{j_1} \\
a_{i_1}^{j_2} & a_{i_2}^{j_2} & \cdots & a_{i_k}^{j_2} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{i_1}^{j_k} & a_{i_2}^{j_k} & \cdots & a_{i_k}^{j_k}
\end{pmatrix}.$$

Построенную матрицу будем называть подматрицей матрицы A и обозначать следующим образом:

$$A \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{k\times k}.$$

Определение 2. *Определитель матрицы*

$$A \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$$

называется минором порядка k матрицы A.

Матрицу, из которой удалили указанные строки и столбцы, будем обозначать следующим образом:

$$\overline{A}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{(m-k)\times(n-k)}.$$

Определение 3. *Если $m = n$, то определитель матрицы*

$$\overline{A}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$$

называется дополнительным минором порядка $n - k$ квадратной матрицы A.

Обозначение. При этом в литературе используются следующие обозначения:

$$M^{j_1 j_2 \cdots j_k}_{i_1 i_2 \cdots i_k} := \det A\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix},$$

$$\overline{M}^{j_1 j_2 \cdots j_k}_{i_1 i_2 \cdots i_k} := \det \overline{A}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}.$$

Определение 4. *Минор порядка $k \leqslant \min\{m, n\}$ матрицы $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ называется базисным, если он отличен от нуля, а любой минор большего порядка, если он существует, равен нулю.*

Пример 1. У матрицы может быть не один базисный минор. Действительно, у матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

имеется три базисных минора второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2.$$

Определение 5. *Будем говорить, что подматрица $\widehat{\widehat{A}}$ матрицы A окаймляет подматрицу $\widehat{A}$ матрицы A, если $\widehat{A}$ получается из матрицы $\widehat{\widehat{A}}$ вычеркиванием последнего столбца и последней строчки.*

Например, матрица

$$\widehat{\widehat{A}} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \\ \hline 3 & 4 & 5 \end{array}\right) \quad \text{окаймляет матрицу} \quad \widehat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема о базисном миноре.

Теорема 4. *Справедливы следующие свойства*:

1. *Столбцы (строки) матрицы, образующие её базисный минор, линейно независимы.*
2. *Любой столбец (строка) матрицы является линейной комбинацией столбцов (строк), образующих базисный минор.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что базисный минор матрицы A порядка r расположен в левом верхнем угле матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_{r+1}^r & \cdots & a_n^r \\ a_1^{r+1} & \cdots & a_r^{r+1} & a_{r+1}^{r+1} & \cdots & a_n^{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_r^m & a_{r+1}^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

Шаг 1. Поскольку определитель

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{vmatrix} \neq 0,$$

то столбцы матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{pmatrix}$$

линейно независимы. Но тогда тем более линейно независимыми будут столбцы

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^r \\ a_1^{r+1} \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix}, \quad A_r = \begin{pmatrix} a_r^1 \\ \vdots \\ a_r^r \\ a_r^{r+1} \\ \vdots \\ a_r^m \end{pmatrix}$$

исходной матрицы A.

Шаг 2. Пусть A_k — это произвольный столбец матрицы. Если $k \leqslant r$, то имеет место равенство

$$A_k = 0 \cdot A_1 + \cdots + 0 \cdot A_{k-1} + 1 \cdot A_k + 0 \cdot A_{k+1} + \cdots + 0 \cdot A_r$$

и, следовательно, столбец A_k линейно выражается через базисные столбцы. Если же $k > r$, то рассмотрим минор порядка $r+1$, полученный окаймлением базисного минора столбцом A_k и какой либо строчкой A^s:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_k^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_k^r \\ a_1^s & \cdots & a_r^s & a_k^s \end{vmatrix}$$

Нужно рассмотреть два случая: $s \in \overline{1, r}$ и $s \in \overline{r+1, m}$. В первом случае у этого определителя заведомо две одинаковые строчки. Поэтому он равен нулю. Во втором случае указанный минор $r+1$–го порядка составлен из элементов, находящихся на пересечении первых r строк и s–ой строчки и первых r столбцов и k–го столбца:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & \cdots & a_k^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & \cdots & a_k^r & \cdots & a_n^r \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^s & \cdots & a_r^s & \cdots & a_k^s & \cdots & a_n^s \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_r^m & \cdots & a_k^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

Соответствующий минор $r+1$–го порядка равен нулю по определению базисного минора.

Теперь мы можем разложить этот определитель по s–й строчке и получить следующее равенство:

$$0 = a_1^s \mathcal{M}_1 + \cdots + a_r^s \mathcal{M}_r + a_k^s \mathcal{M}, \quad s = \overline{1, m},$$

причём $\mathcal{M} \neq 0$, а $\mathcal{M}_1, ..., \mathcal{M}_r$ — это алгебраические дополнения элементов последней строчки. Итак, имеем

$$a_k^s = -\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}} a_1^s - \cdots - \frac{\mathcal{M}_r}{\mathcal{M}} a_r^s, \quad s = \overline{1, m}.$$

Отсюда получаем

$$A_k = \begin{pmatrix} a_k^1 \\ \vdots \\ a_k^s \\ \vdots \\ a_k^m \end{pmatrix} = -\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}} \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^s \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix} - \cdots - \frac{\mathcal{M}_r}{\mathcal{M}} \begin{pmatrix} a_r^1 \\ \vdots \\ a_r^s \\ \vdots \\ a_r^m \end{pmatrix} = -\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}} A_1 - \cdots - \frac{\mathcal{M}_r}{\mathcal{M}} A_r.$$

Теорема доказана.

§ 3. Фундаментальное Семейство Решений

Применим теорему о базисном миноре к решению однородных систем линейных алгебраических уравнений. Рассмотрим следующую систему

$$A \cdot X = O,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 1}.$$

Пусть $\operatorname{rang} A = r \leqslant \min\{m, n\}$.

1. Перестановками строк и перестановками столбцов, что соответствует переобозначению переменных, можно добиться, чтобы базисный минор (если он существует) матрицы системы A расположился на пересечении первых r строк и первых r столбцов. Для того чтобы не загромождать рассуждения будем считать, что базисный минор расположен на пересечении первых r строк и первых r столбцов.

2. Согласно теореме о базисном миноре последние $n-r$ строк матрицы A линейно выражаются через первые r строк. Но тогда применяя к каждой из последних $n-r$ строк элементарное преобразование третьего типа, а именно вычитая соответствующую линейную комбинацию первых r строк, мы приведём последние $n-r$ строк к следующему тривиальному виду:

$$0\cdot x^1 + \cdots + 0\cdot x^r + 0\cdot x^{r+1} + \cdots + 0\cdot x^n = 0.$$

Таким образом, используя элементарное преобразование 5–го типа — вычёркивание нулевых строк матрицы системы мы приходим к следующей системе из r уравнений относительно n неизвестных:

$$\begin{gathered} a_1^1 x^1 + \cdots + a_r^1 x^r + a_{r+1}^1 x^{r+1} + \cdots + a_n^1 x^n = 0, \\ a_1^2 x^1 + \cdots + a_r^2 x^r + a_{r+1}^2 x^{r+1} + \cdots + a_n^2 x^n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^r x^1 + \cdots + a_r^r x^r + a_{r+1}^r x^{r+1} + \cdots + a_n^r x^n = 0. \end{gathered}$$

Здесь и ниже мы опять используем те же обозначения для переменных, хотя могли воспользоваться элементарным преобразованием четвёртого типа, т. е. ввести переобозначения среди первых r переменных $x^1, \ldots, x^r$.

3. Поскольку

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{vmatrix} \neq 0,$$

то используя алгоритм Гаусса–Жордана элементарными преобразованиями первых четырёх типов (в том числе переобозначениями переменных $x^1, \ldots, x^r$), мы можем привести эту систему к следующему эквивалентному виду:

$$\begin{aligned}
&x^1 + \overline{a}^1_{r+1} x^{r+1} + \cdots + \overline{a}^1_n x^n = 0,\\
&x^2 + \overline{a}^2_{r+1} x^{r+1} + \cdots + \overline{a}^2_n x^n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x^r + \overline{a}^r_{r+1} x^{r+1} + \cdots + \overline{a}^r_n x^n = 0.
\end{aligned}$$

Система уравнений приняла упрощенный вид. Выберем переменные $x^1, \ldots, x^r$ как базисные, а переменные $x^{r+1}, \ldots, x^n$ как свободные. Положим

$$x^{r+1} = c_1, \quad x^{r+2} = c_2, \ldots, x^{n-r} = c_{n-r}.$$

Тогда общее решение последней системы уравнений, а значит, в силу эквивалентных преобразований и исходной системы уравнений можно представить в следующем виде:

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \\ x^{r+1} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{a}^1_{r+1} c_1 - \cdots - \overline{a}^1_n c_{n-r} \\ \vdots \\ -\overline{a}^r_{r+1} c_1 - \cdots - \overline{a}^r_n c_{n-r} \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{pmatrix} = c_1 X_1 + \cdots + c_{n-r} X_{n-r},$$

где

$$X_1 = \begin{pmatrix} -\overline{a}^1_{r+1} \\ \vdots \\ -\overline{a}^r_{r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, X_{n-r} = \begin{pmatrix} -\overline{a}^1_n \\ \vdots \\ -\overline{a}^r_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Нетрудно убедиться в том, что столбцы $X_1, \ldots, X_{n-r}$ являются линейно независимыми, а по построению произвольное решение X исходной системы уравнений линейно выражается через эти столбцы. Следовательно, эти столбцы образуют базис пространства решений исходной однородной системы уравнений.

§ 4. Взаимное расположение двух прямых на плоскости

Рассмотрим две прямые на плоскости, заданные уравнениями

$$l_1 : \ A_1 x + +B_1 y = C_1, \quad l_2 : \ A_2 x + B_2 y = C_2, \tag{4.1}$$

где $A_j^2 + B_j^2 > 0$, $j = 1, 2$. Рассмотрим матрицу и расширенную матрицы системы уравнений (4.1).

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Ранг $\operatorname{rang} A$ матрицы A может принимать значения 1 и 2, поскольку матрица ненулевая и поэтому $\operatorname{rang} A \neq 0$. Рассмотрим три случая.

Случай 1. Система уравнений (4.1) имеет единственное решение — прямые пересекаются. Это означает, что $|A| \neq 0$, т. е. ранг матрицы A максимален: $\operatorname{rang} A = 2$. Заметим, что $\operatorname{rang} \widetilde{A}$ не может быть меньше 2, поскольку содержит базисный минор

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \widetilde{A} = 2$.

Случай 2. Система уравнений (4.1) не имеет решений — это означает, что $\operatorname{rang} A < \operatorname{rang} \widetilde{A}$. Как мы уже указывали, $\operatorname{rang} A \geqslant 1$. Поскольку случай $\operatorname{rang} A = 2$ соответствует уже рассмотренной ситуации, то поэтому $\operatorname{rang} A = 1$. Так как $\operatorname{rang} \widetilde{A}$ может быть больше только на единицу, то $\operatorname{rang} \widetilde{A} = 2$. По теореме Кронекера–Капелли система уравнений (4.1) не имеет решений.

Случай 3. Система уравнений (4.1) имеет бесконечно много решений — прямые совпадают. После рассмотрения первых двух случаев осталась только единственная ситуация: $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \widetilde{A} = 1$. По теореме Кронекера–Капелли система уравнений (4.1) бесконечно много решений.

§ 5. Взаимное расположение трех прямых на плоскости

Пусть прямые l_1, l_2 и l_3 заданы общими уравнениями в некоторой общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$

$$l_1: \quad A_1 x + B_1 y = C_1, \tag{5.1}$$

$$l_2: \quad A_2 x + B_2 y = C_2, \tag{5.2}$$

$$l_3: \quad A_3 x + B_3 y = C_3. \tag{5.3}$$

Случай 1. Прямые пересекаются в единственной точке.

С одной стороны, это означает, что каждые две прямые из трёх пересекаются в единственной точке (смотри первый случай предыдущего параграфа), т. е.

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{pmatrix} = 2.$$

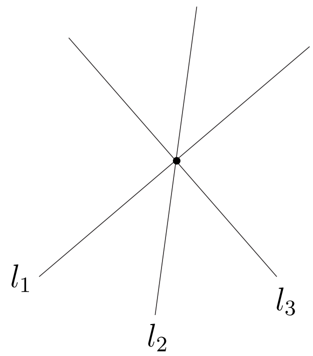

Рис. 1. Три прямые пересекаются в одной точке.

С другой стороны, система всех трех уравнений совместна, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 2.$$

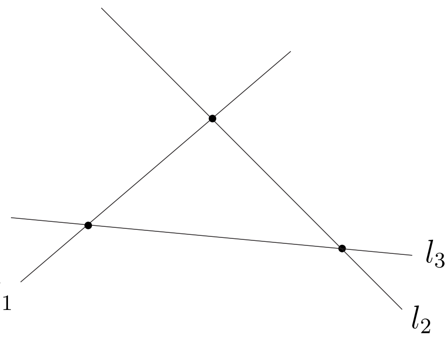

Рис. 2. Три прямые попарно пересекаются.

Случай 2. Прямые попарно пересекаются, но все три прямые не имеют общих точек. С одной стороны, любые два уравнения из трёх имеют единственное решение, что означает

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{pmatrix} = 2.$$

С другой стороны, все три уравнения не имеют решений, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 3, \quad \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 3. Две прямые из трёх параллельны, а оставшаяся прямая их пересекает.

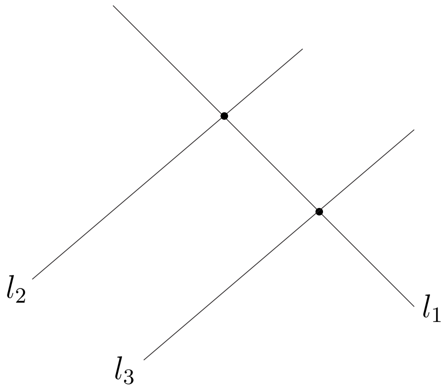

Рис. 3. Две прямые параллельны, а третья их пересекает.

Без ограничения общности можно считать, что прямые l_2 и l_3 параллельны, а прямая l_1 их пересекает. С одной стороны, это означает, что системы уравнений

$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_2x + B_2y = C_2$$

и

$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_3x + B_3y = C_3$$

имеют единственные решения. А система уравнений

$$A_2x + B_2y = C_2, \quad A_3x + B_3y = C_3$$

решений не имеет. Итак,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 2,$$

но (смотри второй случай предыдущего параграфа)

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 4. Две прямые совпадают, а третья их пересекает. Без ограничения общности пусть прямые l_2 и l_3 совпадают, а прямая l_1 их пересекает.

Тогда, с одной стороны, это означает, что системы уравнений

$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_2x + B_2y = C_2$$

и

$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_3x + B_3y = C_3$$

имеют каждая единственное решение. А система уравнений

$$A_2x + B_2y = C_2, \quad A_3x + B_3y = C_3$$

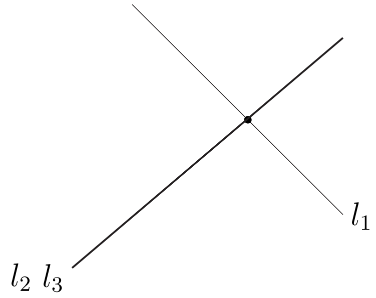

Рис. 4. Две прямые совпадают, а третья их пересекает.

имеет бесконечное число решений. Итак,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 2,$$

но (смотри третий случай предыдущего параграфа)

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1.$$

Случай 5. Три прямые параллельны.

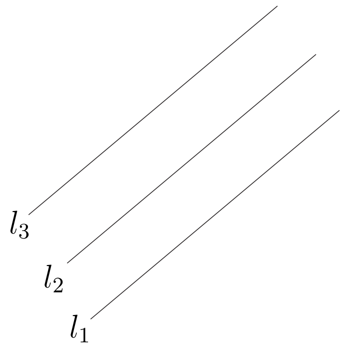

Рис. 5. Три прямые параллельны.

Это означает, что каждые два уравнения из трёх не имеют решений, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{pmatrix} = 1,$$

но

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 6. Две прямые из трёх совпадают, а третья им параллельна.

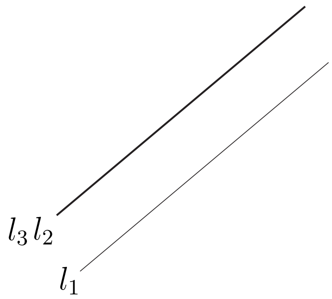

Рис. 6. Две прямые совпадают, а третья им параллельна.

Без ограничения общности, пусть прямые l_2 и l_3 совпадают, а первая прямая им параллельна. С одной стороны, система уравнений

$$A_2x + B_2y = C_2, \quad A_3x + B_3y = C_3$$

имеют бесконечно много решений, а, с другой стороны, каждая система уравнений

$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_2x + B_2y = C_2$$

и

$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_3x + B_3y = C_3$$

не имеют решений. Поэтому

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1$$

и при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = 1, \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 1, \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 7. Все три прямые совпадают.

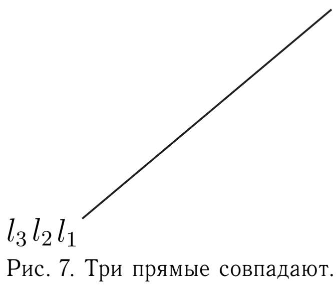

Рис. 7. Три прямые совпадают.

Это означает, что совпадают прямые l_1 и l_2 и совпадают прямые l_2 и l_3, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1,$$
$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1.$$

§ 6. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве

Пусть две плоскости заданы общими уравнениями

$$p_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad p_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2$$

в некоторой общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, причём

$$A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0, \quad A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0.$$

Векторы нормалей к плоскостям p_1 и p_2 имеют следующий вид:

$$\mathbf{n}_1 = A_1\mathbf{f}_1 + B_1\mathbf{f}_2 + C_1\mathbf{f}_3, \quad \mathbf{n}_2 = A_2\mathbf{f}_1 + B_2\mathbf{f}_2 + C_2\mathbf{f}_3, \qquad (6.1)$$

где $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2\}$ взаимный базис к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

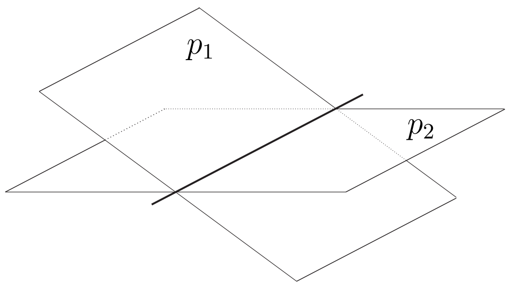

Рис. 8. Две плоскости пересекаются по прямой.

Случай 1. Плоскости пересекаются. Это означает, что система уравнений

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \qquad (6.2)$$

имеет решение, но плоскости не совпадают. Значит

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2.$$

□ Действительно, во–первых,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \geqslant 1,$$

поскольку $A_j^2 + B_j^2 + C_j^2 > 0$ при $j = 1, 2$. Поскольку плоскости не параллельны и не совпадают, то их векторы нормалей $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ не коллинеарны, а значит, не являются линейно зависимыми:

$$\alpha\mathbf{n}_1 + \beta\mathbf{n}_2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0. \tag{6.3}$$

В силу (6.1) равенство (6.3) эквивалентно следующим равенствам:

$$\alpha A_1 + \beta A_2 = \alpha B_1 + \beta B_2 = \alpha C_1 + \beta C_2 = 0, \tag{6.4}$$

которое можно записать в свою очередь в виде строчек

$$\alpha(A_1, B_1, C_1) + \beta(A_2, B_2, C_2) = (0, 0, 0), \tag{6.5}$$

которое в силу (6.3) возможно тогда и только тогда когда $\alpha = \beta = 0$. Следовательно, строчки у матрицы системы линейно независимы. ⊠

Очевидно, что

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 2.$$

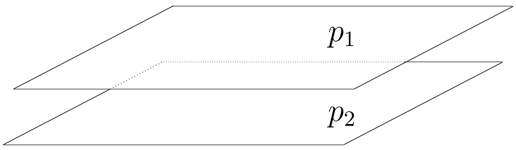

Рис. 9. Две плоскости параллельны.

Случай 2. Плоскости параллельны. Это означает, что система уравнений (6.2) не имеет решений, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1$$

□ Действительно, в этом случае векторы нормалей $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ к плоскостям p_1 и p_2 коллинеарны. В этом случае точно также рассуждая, что и в предыдущем случае можно доказать, что строчки матрицы системы линейно зависимы. ⊠

При этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 2.$$

□ Действительно, случай 2 — это случай не совместности системы уравнений и поэтому согласно теореме Кронекера–Капелли ранг расширенной матрицы ложен быть больше ранга основной матрицы системы. ⊠

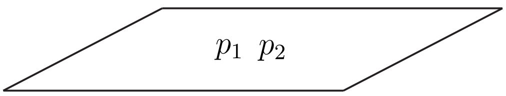

Рис. 10. Две плоскости совпадают.

Случай 3. Плоскости совпадают. Это означает, что система уравнений (6.2) имеет решения, но это не случай 1, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1$$

и

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 1.$$

□ Во–первых, это последняя ситуация из возможных. Во–вторых, поскольку плоскости совпадают, то их векторы коллинеарны и поэтому строчки основной матрицы системы линейно зависимы. В третьих, это случай совместности системы уравнений и, значит, в силу теоремы Кронекера–Капелли ранг расширенной матрицы системы должен совпадать с рангом основной матрицы. ⊠

§ 7. Взаимное расположение трёх плоскостей в пространстве

Пусть три плоскости заданы общими уравнениями

$$p_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \tag{7.1}$$

$$p_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \tag{7.2}$$

$$p_3: \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3 \tag{7.3}$$

в общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Пусть $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ — это взаимный базис к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Введём векторы нормалей к плоскостям

$$\mathbf{n}_1 = A_1\mathbf{f}_1 + B_1\mathbf{f}_2 + C_1\mathbf{f}_3, \tag{7.4}$$

$$\mathbf{n}_2 = A_2\mathbf{f}_1 + B_2\mathbf{f}_2 + C_2\mathbf{f}_3, \tag{7.5}$$

$$\mathbf{n}_3 = A_3\mathbf{f}_1 + B_3\mathbf{f}_2 + C_3\mathbf{f}_3. \tag{7.6}$$

Случай 1. Три плоскости пересекаются в единственной точке. Это означает, что система уравнений

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \tag{7.7}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \tag{7.8}$$

$$A_3x + B_3y + C_3z = D_3 \tag{7.9}$$

имеет единственное решение. Следовательно,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 3.$$

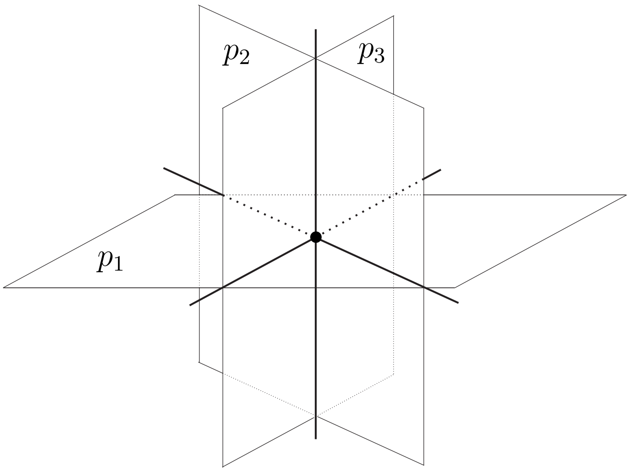

Рис. 11. Три плоскости пересекаются в одной точке.

Очевидно, что при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 3.$$

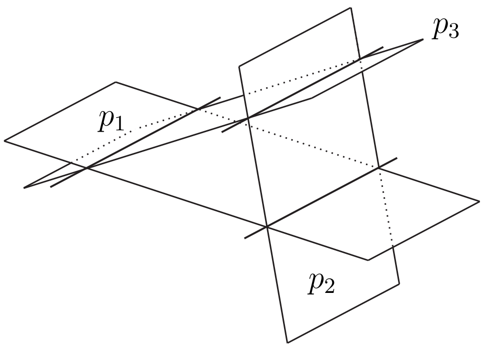

Рис. 12. Плоскости попарно перескаются.

Случай 2. Плоскости попарно пересекаются, но три плоскости не имеют общих точек. Это означает, что любые два уравнения из трёх (7.7)–(7.9) имеют решения, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix} = 2. \tag{7.10}$$

Очевидно, что при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = \\ = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \end{pmatrix} = 2.$$

С другой стороны, система уравнений (7.7)–(7.9) трёх уравнений не имеет решений. Следовательно,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2.$$

□ Во–первых, в матрице системы

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$$

любые две строчки линейно не зависимы и поэтому

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \geqslant 2.$$

Во–вторых, случай максимального ранга — это рассмотренный выше случай. ⊠

При этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 3,$$

поскольку три плоскости не пересекаются, а значит, система уравнений (7.7)–(7.9) не имеет решений. Значит, по теореме Кронекера–Капелли ранг расширенной матрицы должен быть больше ранга основной матрицы. ⊠

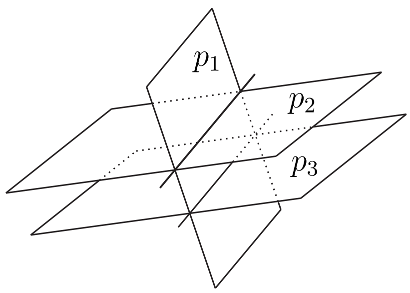

Рис. 13. Две плоскости параллельна, а третья их перескает.

Случай 3. Две плоскости параллельны параллельны, а третья их пересекает. Без ограничения общности будем считать, что плоскости

p_2 и p_3 параллельны, а плоскость p_1 их пересекает. Это означает, что система уравнений

$$A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3$$

не имеет решений, а системы уравнений

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2$$

и

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3$$

имеют решения, но соответствующие плоскости не совпадают (см. предыдущий параграф). Итак, с одной стороны,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1, \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 2.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Очевидно, что при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 2.$$

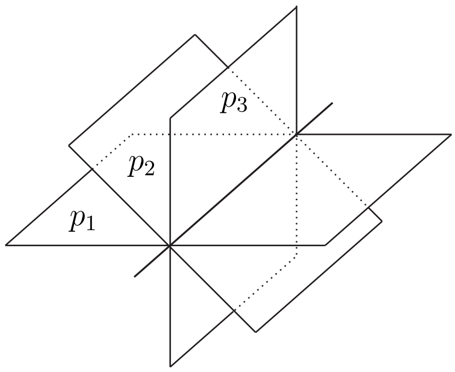

Рис. 14. Три плоскости пересекаются по общей прямой.

Случай 4. Три плоскости пересекаются по прямой. Это означает, что каждые две плоскости из двух пересекаются по прямой, т.е. каждые два уравнения из трёх (7.7)–(7.9) имеют решение — прямую (см. предыдущий параграф). Стало быть, с одной стороны, имеем

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix} = 2.$$

Очевидно, что при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = \\ = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \end{pmatrix} = 2.$$

С другой стороны, поскольку система уравнений (7.7)–(7.9) совместна, поэтому

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 2.$$

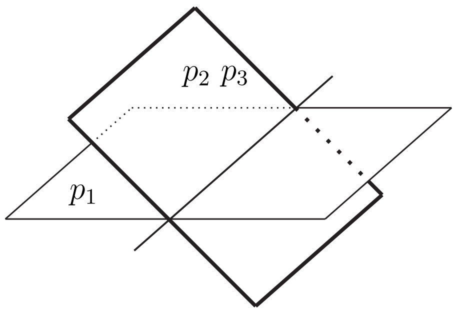

Рис. 15. Две плоскости совпадает, а третья из пересекает.

Случай 5. Две плоскости совпадают, а третья их пересекает. Без ограничения будем считать, что плоскости $p_2 = p_3$, а плоскость p_1 их пересекает. Это означает, что система уравнений

$$A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3$$

имеет бесконечно много решений (см. предыдущий параграф) и поэтому имеем

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1$$

и при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 1.$$

□ Действительно, одно из уравнений является следствием другого. Поэтому строчки

$$(A_2, B_2, C_2, D_2) \quad \text{и} \quad (A_3, B_3, C_3, D_3)$$

линейно зависимы. ⊠

С другой стороны, системы уравнений

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2$$

и

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3$$

имеют решение — прямую (пересекаются, но не совпадают). Тогда

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Очевидно, что при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 2.$$

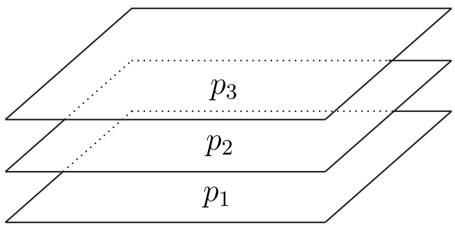

Рис. 16. Три плоскости параллельны.

Случай 6. Три плоскости параллельны. Это означает, что каждые два уравнения из системы трёх уравнений (7.7)–(7.9) не имеют решений (см. предыдущий параграф). Это означает, что

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix} = 1$$

и при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} =$$
$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \end{pmatrix} = 2.$$

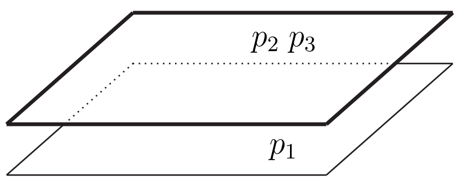

Рис. 17. Две плоскости совпадают, а третья им параллельна.

Случай 7. Две плоскости из трёх совпадают, а третья им параллельна. Без ограничения общности можно считать, что плоскости

$p_2 = p_3$, а плоскость p_1 им параллельна. Действительно, равенство $p_2 = p_3$ означает, что для системы уравнений

$$A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3$$

справедливы следующие выражения (см. предыдущий параграф):

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 1.$$

□ Одно из уравнений является следствием другого, т.е. строчки

$$(A_2, B_2, C_2, D_2) \quad \text{и} \quad (A_3, B_3, C_3, D_3)$$

линейно зависимы. ⊠

С другой стороны, системы уравнений

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2$$

и

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3$$

не имеют решение вовсе. Следовательно,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1,$$

но при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 2.$$

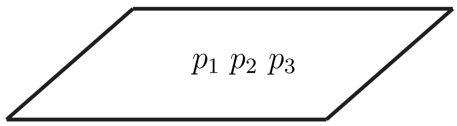

Рис. 18. Три плоскости совпадают.

Случай 8. Три плоскости совпадают. Это означает, что каждое уравнение из трёх является следствием любого из оставшихся уравнений, т.е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 1.$$

§ 8. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Пусть прямые заданы своими векторными параметрическими уравнениями. Для удобства запишем эти уравнения в следующей форме:

$$l_1: \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{a}t, \quad l_2: \quad \mathbf{r} = -\mathbf{r}_2 + \mathbf{b}\tau, \quad t, \tau \in \mathbb{R}. \tag{8.1}$$

Приравняем эти уравнения и получим уравнение

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \mathbf{a}t + \mathbf{b}\tau. \tag{8.2}$$

Пусть $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — это общая декартова система координат. Пусть в этой системе координат

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}.$$

Тогда из (8.2) приходим к системе трёх уравнений относительно двух неизвестных t и τ :

$$a_x t + b_x \tau = c_x, \tag{8.3}$$

$$a_y t + b_y \tau = c_y, \tag{8.4}$$

$$a_z t + b_z \tau = c_z. \tag{8.5}$$

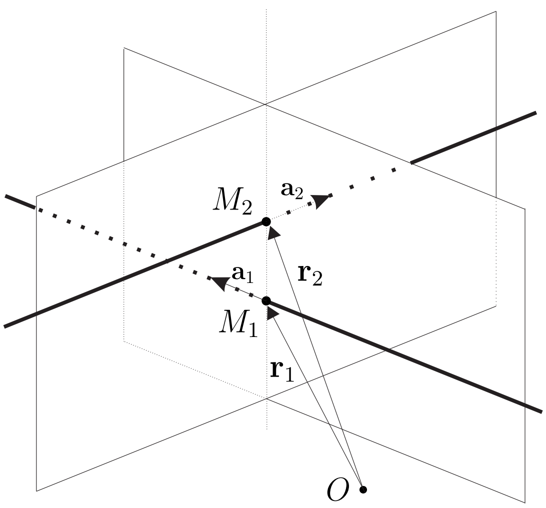

Рис. 19. Скрещивающиеся прямые.

Случай 1. Прямые скрещиваются. Это означает, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны, т. е.

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix} = 2,$$

а система уравнений (8.3)–(8.5) не имеет решений, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} = 3.$$

Случай 2. Прямые параллельны. Это означает, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix} = 1,$$

а система уравнений (8.3)–(8.5) не имеет решений, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 3. Прямые пересекаются. Это означает, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix} = 2,$$

а система уравнений (8.3)–(8.5) имеет единственное решение, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 4. Прямые совпадают. Это означает, что направляющие векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix} = 1,$$

а система уравнений (8.3)–(8.5) имеет бесконечное множество решений, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} = 1.$$