

# Лекция 8. Вариационные методы. Метод глобального расслоения С. И. Похожаева.

Корпусов Максим Олегович

Курс лекций по нелинейному функциональному анализу

20 ноября 2013 г.

В этом параграфе мы рассмотрим метод глобального расслоения С. И. Похожаева, который позволяет сопоставить исходной нелинейной задаче с однородными нелинейностями, т. е. с такими, что  $A(au) = a^\alpha A(u)$ , некоторую вариационную задачу на условный экстремум. Действительно, довольно часто функционал Эйлера  $\psi(u)$ , соответствующий исходной задаче в некотором банаховом пространстве, может не быть ограниченным не снизу не сверху. Однако, метод глобального расслоения С. И. Похожаева позволяет сопоставить исходной задаче новый функционал  $\mathcal{F}(u) : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}^1$  и некоторое многообразие  $\mathcal{V} \subset \mathbb{B}$  таким образом, чтобы функционал  $\mathcal{F}(u)$  был ограничен снизу на  $\mathcal{V}$ . После чего можно воспользоваться теорией категорий Люстерника–Шнирельмана.

## Постановка задачи.

Рассмотрим следующую задачу о собственных колебаниях:

$$\begin{cases} \Delta u + |u|^{p-2}u = 0, & \text{при } x \in \Omega; \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\Omega$  — это ограниченная область в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^N$ ,  $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$  при  $\delta \in (0, 1]$ . Пусть, кроме того,  $p \in (2, 2^*)$  :

$$2^* = \begin{cases} 2N/(N-2), & \text{при } N \geq 3; \\ +\infty, & \text{при } N = 1, 2. \end{cases} \quad (2)$$

# Функционал Эйлера-1.

Сопоставим краевой задаче (1) функционал Эйлера:

$$\psi(u) \equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p dx, \quad (3)$$

где функционал рассматривается на банаховом пространстве  $\mathbb{B} = \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ . Давайте докажем, что функционал  $\psi(u)$  является неограниченным на  $\mathbb{B}$ . Действительно, для доказательства неограниченности снизу возьмем в качестве  $u \in \mathbb{B}$  величину  $u = tv$ , где  $t > 0$  и  $v \in \mathbb{B}$ . Тогда получим следующее равенство:

$$\psi(u) = \psi(tv) = \frac{1}{2} t^2 \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \frac{1}{p} t^p \int_{\Omega} |v|^p dx \rightarrow -\infty \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty,$$

поскольку  $p > 2$ .

Докажем теперь неограниченность сверху. Для этого возьмем в качестве  $u$  величину

$$u = \frac{v}{\|\nabla v\|_2},$$

тогда после подстановки в (3) получим

$$\psi(u) = \frac{1}{2} \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2} - \frac{1}{p} \frac{\|v\|_p^p}{\|\nabla v\|_2^p},$$

но в силу теоремы вложения С. Л. Соболева имеет место неравенство

$$\|v\|_p \leq c_1 \|\nabla v\|_2 \quad \text{для всех } v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Отсюда вытекает оценка сверху

$$\frac{\|v\|_p^p}{\|\nabla v\|_2^p} \leq c_1^p,$$

т. е. получили следующую оценку снизу для функционала  $\psi(u)$  :

$$\psi(u) \geq \frac{1}{2} \|\nabla v\|_2 - \frac{c_1^p}{p} \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad \|\nabla v\|_2 \rightarrow +\infty.$$

Таким образом, функционал  $\psi(u)$  является неограниченным на  $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ .

Теперь мы на примере задачи (1) опишем метод глобального расслоения С. И. Похожаева. Действительно, представим функцию  $u \in \mathbb{B}$  в виде  $u = tv$ , где  $t \in \mathbb{R}^1$  и  $v \in \mathbb{B} = \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ . Тогда введем новый функционал

$$\psi_1(t, v) \equiv \psi(tv) : \mathbb{F} \equiv \mathbb{R}^1 \times \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^1,$$

причем пространство  $\mathbb{F}$  является банаховым относительно стандартной нормы

$$\|w\|_1 = \|(t, v)\|_1 = |t| + \|v\|,$$

где символом  $\|\cdot\|$  обозначена норма в банаховом пространстве  $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ .

Это существенно важный момент!!! Вводится новый параметр  $t \in \mathbb{R}^1$  и поэтому можно потребовать выполнения некоторого дополнительного условия, т. е., например, потребовать, чтобы решение задачи принадлежало следующему многообразию:

$$\mathcal{V} \equiv \{w = (t, v) \in \mathbb{F} : \varphi(w) = c, \} \quad (4)$$

где  $c \in \mathbb{R}^1$ ,  $\varphi(w) : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}^1$ . И теперь мы можем рассматривать функционал  $\psi_1(w)$  на многообразии  $\mathcal{V}$ .

Для задачи (1) в качестве функционала  $\varphi(w)$  удобно взять норму банахова пространства  $\mathbb{B} = \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ :

$$\mathcal{V} \equiv \{w = (t, v) \in \mathbb{F} : \varphi(t, v) = \|\nabla v\|_2 = 1\}, \quad (5)$$

т. е. пересечение многообразия  $\mathcal{V} \subset \mathbb{F}$  с банаховым пространством является единичной сферой в банаховом пространстве  $\mathbb{B}$

$$\mathbb{S} \equiv \{v \in \mathbb{B} : \|\nabla v\|_2 = 1\}. \quad (6)$$

## Дифференцируемость по Фреше.

Для дальнейшего нам необходимо получить явное выражение для производной Фреше произвольного функционала  $F(t, v) : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}^1$  класса  $\mathcal{C}^1$ . Действительно, имеет место равенства

$$F(t + \tau, v + h) = F(t, v) + \frac{\partial F}{\partial t} \tau + \langle F'_{vf}(t, v), h \rangle + \omega((t, v), (\tau, h)),$$

причем

$$\lim_{|\tau| + \|h\| \rightarrow +\infty} \frac{\omega((t, v), (\tau, h))}{|\tau| + \|h\|} = 0.$$

Следовательно, производная Фреше функционала  $F$  имеет вид

$$F'_f(w) = \left( \frac{\partial F(w)}{\partial t}, F'_{vf}(w) \right) \quad \text{для всех } w = (t, v) \in \mathbb{F}. \quad (7)$$

## Многообразие-1.

Как нам уже известно, необходимым условием существования критической точки у функционала  $F$  относительно многообразия  $\mathcal{V}$  — это следующее равенство

$$\left\| F'_f(w) \right\|_* (\mathbb{T}_w \mathcal{V}) = 0 \quad \text{при} \quad w \in \mathcal{V}. \quad (8)$$

Прежде всего выясним явный вид касательного пространства  $\mathbb{T}_w \mathcal{V}$ . Заметим, что это пространство определено в каждой точке многообразия  $\mathcal{V}$ , поскольку в каждой точке имеет место

$$\varphi'_f(w) \neq \theta \in \mathbb{F}^* \equiv \mathbb{R}^1 \times \mathbb{H}^{-1}(\Omega).$$

Действительно, в силу (7) производная Фреше имеет следующий вид:

$$\varphi'_f(w) = (0, -\Delta v) \quad \text{для всех} \quad w = (t, v) \in \mathcal{V}.$$

Предположим, что в некоторой точке  $w_0 = (t_0, v_0) \in \mathcal{V}$  имеет место равенство

$$\varphi'_f(w_0) = \theta \in \mathbb{F}^*.$$

Отсюда сразу же вытекает, что

$$-\Delta v_0 = 0 \Rightarrow \langle -\Delta v_0, v_0 \rangle = \|v_0\|^2 = 0 \Rightarrow v_0 = 0,$$

но тогда  $\varphi(w_0) = 0$ , что противоречит условию, что  $\varphi(w_0) = 1$ . Касательное пространство  $T_w \mathcal{V}$  согласно определению имеет следующий вид:

$$T_w \mathcal{V} \equiv \left\{ z = (\tau, h) \in \mathbb{F} : \left\langle \left\langle \varphi'_f(w), z \right\rangle \right\rangle = \frac{\partial \varphi(w)}{\partial t} \tau + \left\langle \varphi'_{vf}(w), h \right\rangle = 0 \right\}$$

где  $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$  — это скобки двойственности между  $\mathbb{F}$  и  $\mathbb{F}^*$ .

## Многообразие-3.

Но согласно определению (6) многообразия  $\mathcal{V}$  имеют место следующие равенства:

$$\frac{\partial \varphi(w)}{\partial t} = 0, \quad \varphi'_{vf}(w) = -\Delta v \quad \text{для всех } w = (t, v) \in \mathcal{V}.$$

Поэтому приходим к формуле

$$T_w \mathcal{V} = \mathbb{R}^1 \oplus T_v \mathbb{S} \quad \text{для всех } w = (t, v) \in \mathcal{V}, \quad (9)$$

где  $\mathbb{S}$  определено формулой (6).

Теперь займемся изучением равенства

$$\left\| \psi'_f(w) \right\|_* (T_w \mathcal{V}) = 0, \quad (10)$$

которое является необходимым условием экстремали в точке  $w \in \mathcal{V}$  функционала  $\psi(w)$  относительно многообразия  $\mathcal{V}$ .

Действительно, согласно определению полунормы

$$\|\cdot\|_* (\mathbb{T}_w \mathcal{V})$$

имеет место равенство

$$\begin{aligned} \left\| \psi'_f(w) \right\|_* (\mathbb{T}_w \mathcal{V}) &= \sup_{z=(\tau, h) \in \mathbb{T}_w \mathcal{V}, \|z\|_1 \leq 1} \left| \left\langle \left\langle \psi'_{1f}(w), z \right\rangle \right\rangle \right| = \\ &= \sup_{z=(\tau, h) \in \mathbb{T}_w \mathcal{V}, \|z\|_1 \leq 1} \left| \frac{\partial \psi_1(w)}{\partial t} \tau + \left\langle \psi'_{1vf}(w), h \right\rangle \right| = \\ &= \sup_{|\tau| + \|h\| \leq 1, \tau \in \mathbb{R}^1, h \in \mathbb{T}_v \mathbb{S}} \left| \frac{\partial \psi_1(w)}{\partial t} \tau + \left\langle \psi'_{1vf}(w), h \right\rangle \right|. \end{aligned}$$

Но тогда равенство (10) равносильно следующим двум равенствам:

$$\left. \frac{\partial \psi_1(w)}{\partial t} \right|_{v \in \mathbb{S}} = 0, \quad \|\psi'_{1vf}(w)\|_* (\mathbb{T}_v \mathbb{S}) = 0 \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R}^1.$$

# Условный экстремум.

Эти два равенства являются необходимыми условиями существования условно критической точки функционала  $\psi_1(w)$  относительно многообразия  $\mathcal{V}$ . Теперь заметим, что в нашей задаче

$$\psi_1(t, v) \Big|_{v \in \mathbb{S}} = \frac{t^2}{2} - \frac{|t|^p}{p} \int_{\Omega} |v|^p dx.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial \psi_1(w)}{\partial t} \Big|_{v \in \mathbb{S}} &\Rightarrow t - t|t|^{p-2} \int_{\Omega} |v|^p dx = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow t(v) = \pm \left( \int_{\Omega} |v|^p dx \right)^{-1/(p-2)}. \end{aligned}$$

Но тогда в силу того, что второе равенство из (11) выполнено для всех  $t \in \mathbb{R}^1$  мы можем ввести новый функционал по формуле

$$\mathcal{F}(v) \equiv \psi_1(t(v), v) \Big|_{v \in \mathbb{S}} = \frac{p-2}{2p} \left( \int_{\Omega} |v|^p dx \right)^{-2/(p-2)}, \quad (12)$$

который рассматривается на многообразии  $\mathbb{S}$ , определенному формулой (6). Действительно, в силу цепного правила дифференцирования по Фреше имеет место равенство

$$\mathcal{F}'_f(v) = \frac{\partial \psi_1(t(v), v)}{\partial t} t'_f(v) + \psi'_{1vf} = \psi'_{1vf} \quad \text{для всех } v \in \mathbb{S},$$

здесь мы воспользовались первым равенством из формулы (11).

## Эквивалентная задача.

Но тогда второе равенство из формулы (11) эквивалентно следующему равенству:

$$\|\psi'_{1vf}(w)\|_*(T_v\mathbb{S}) = \|\mathcal{F}'_f(v)\|_*(T_v\mathbb{S}) = 0 \quad \text{при} \quad t = t(v), \quad v \in \mathbb{S}.$$

Следовательно, задача отыскания условного экстремума функционала  $\psi_1(t, v)$  относительно многообразия  $\mathcal{V}$  в банаховом пространстве  $\mathbb{F} = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{H}_0^1(\Omega)$  эквивалентна задаче отыскания условного экстремума функционала  $\mathcal{F}(v)$  относительно единичной сферы  $\mathbb{S}$  банахова пространства  $\mathbb{B} = \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ .

# Метод Люстерника–Шнирельмана.

Для полученной задачи отыскания условно критических точек функционала  $\mathcal{F}(v)$  относительно единичной сферы  $\mathbb{S}$  банахова пространства  $\mathbb{B} = \mathbb{H}_0^1(\Omega)$  в силу четности функционалов  $\varphi(v)$  и  $\mathcal{F}(v)$  уже можно применить теорию категорий Люстерника–Шнирельмана. Давайте сейчас приступим к этой работе.

Прежде всего докажем, что функционал  $\mathcal{F}$  ограничен снизу на единичной сфере  $\mathbb{S}$ . Действительно, в силу теоремы вложения С. Л. Соболева имеет место следующее неравенство:

$$\|v\|_p \leq c_1 \|\nabla v\|_2, \quad p \in (2, 2^*).$$

Так что

$$\int_{\Omega} |v|^p dx \leq c_1^p \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{p/2} = c_1^p,$$

поскольку  $v \in \mathbb{S}$ .

## Задача.

Таким образом, приходим к оценке снизу для функционала  $\mathcal{F}(v)$  :

$$\mathcal{F}(v) \geq \frac{p-2}{2p} \frac{1}{c_1^{2p/(p-2)}} > 0 \quad \text{для всех } v \in \mathbb{S}. \quad (13)$$

Теперь проверим, что функционал  $\mathcal{F}(v)$  удовлетворяет на единичной сфере  $\mathbb{S}$  условию  $(PS_c)$  при всех

$$c \geq \inf_{v \in \mathbb{S}} \mathcal{F}(v).$$

Действительно, пусть  $\{v_n\} \subset \mathbb{S}$  — это произвольная последовательность такая, что имеют место условия

$$\mathcal{F}(v_n) \rightarrow c \quad \text{и} \quad \left\| \mathcal{F}'_f(v_n) \right\|_* (T_{v_n} \mathbb{S}) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty. \quad (14)$$

## Условие Пале–Смейла-1.

Заметим, что поскольку  $\{v_n\} \subset \mathbb{S}$ , то эта последовательность ограничена в  $\mathbb{B}$  и поэтому у нее в силу рефлексивности  $\mathbb{B} = \mathbb{H}_0^1(\Omega)$  существует подпоследовательность  $\{v_{n_k}\} \subset \{v_n\}$  такая, что

$$v_{n_k} \rightharpoonup v \quad \text{слабо в } \mathbb{B} \quad \text{при } k \rightarrow +\infty.$$

Отметим, что в частности  $v \in \mathbb{S}$ , поскольку единичная сфера вещественного гильбертова пространства  $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$  слабо компактна.

Из вполне непрерывности вложения

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^p(\Omega) \quad \text{при } p \in (2, 2^*)$$

имеем

$$v_{n_k} \rightarrow v \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^p(\Omega) \quad \text{при } k \rightarrow +\infty.$$

## Условие Пале–Смейла-2.

В частности,

$$\|v_{n_k}\|_p \rightarrow \|v\|_p \quad \text{при} \quad k \rightarrow +\infty.$$

В силу первого условия (PS<sub>c</sub>) приходим к выводу, что

$$\mathcal{F}(v_n) \leq K \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N},$$

где  $K \in (0, +\infty)$  и не зависит от  $n \in \mathbb{N}$ . Поэтому приходим к выводу, что

$$\|v\|_p \neq 0, \tag{15}$$

и, значит,

$$\mathcal{F}(v_{n_k}) \rightarrow \mathcal{F}(v) \quad \text{при} \quad k \rightarrow +\infty.$$

Для сокращения громоздкости выкладок обозначим найденную подпоследовательность  $\{v_{n_k}\}$  снова через  $\{v_n\}$ .

Для того, чтобы воспользоваться вторым условием из  $(PS_c)$  найдем производную Фреше функционала  $\mathcal{F}(v)$ . Действительно,

$$\mathcal{F}(v) \equiv \psi_1(t(v), v) = \frac{p-2}{2p} \left( \int_{\Omega} |v|^p dx \right)^{-2/(p-2)},$$
$$\mathcal{F}'_f(v) = - \left( \int_{\Omega} |v|^p dx \right)^{-p/(p-2)} |v|^{p-2} v. \quad (16)$$

Производная Фреше функционала  $\varphi(v) = \|\nabla v\|_2^2$  вычисляется элементарно:

$$\varphi'_f(v) = -\Delta v. \quad (17)$$

## Условие Пале–Смейла-4.

Теперь перепишем второе условие из (14). Действительно, справедлива цепочка выражений

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{F}'_f(v_n) \right\|_* (\mathbb{T}_{v_n} \mathbb{S}) &= \inf_{\mu \in \mathbb{R}^1} \left\| \mathcal{F}'_f(v_n) + \mu \varphi'_f(v_n) \right\|_* = \\ &= \left\| \mathcal{F}'_f(v_n) + \mu_n \varphi'_f(v_n) \right\|_* = \sup_{z \in \mathbb{B}, \|z\| \leq 1} \left| \left\langle \mathcal{F}'_f(v_n) + \mu_n \varphi'_f(v_n), z \right\rangle \right| \geq \\ &\geq \left| \left\langle \mathcal{F}'_f(v_n) + \mu_n \varphi'_f(v_n), v_n \right\rangle \right| = \left| \left\langle \mathcal{F}'_f(v_n), v_n \right\rangle + \mu_n \left\langle \varphi'_f(v_n), v_n \right\rangle \right|. \end{aligned}$$

Отдельно вычислим выражения

$$\left\langle \mathcal{F}'_f(v_n), v_n \right\rangle \quad \text{и} \quad \left\langle \varphi'_f(v_n), v_n \right\rangle.$$

Действительно,

$$\left\langle \mathcal{F}'_f(v_n), v_n \right\rangle = - \left( \int_{\Omega} |v_n|^p dx \right)^{-2/(p-2)}, \quad \left\langle \varphi'_f(v_n), v_n \right\rangle = \varphi(v_n).$$

## Условие Пале–Смейла-5.

Теперь выберем  $\{\mu_n\} \subset \mathbb{R}_+^1$  таким образом, чтобы

$$\langle \mathcal{F}'_f(v_n), v_n \rangle + \mu_n \langle \varphi'_f(v_n), v_n \rangle = 0,$$

тогда получим, что

$$\mu_n = \left( \int_{\Omega} |v_n|^p dx \right)^{-2/(p-2)}.$$

Но тогда для таких  $\{\mu_n\}$  в силу второго условия из (14) получим предельную формулу

$$I_n \equiv \langle \mathcal{F}'_f(v_n), z \rangle + \mu_n \langle \varphi'_f(v_n), z \rangle \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty. \quad (18)$$

Заметим, что имеет место следующее равенство:

$$\int_{\Omega} \left| \mathcal{F}'_f(v_n) \right|^{p'} dx = \mu_n \quad p' = \frac{p}{p-1}.$$

Поэтому последовательность  $\{\mathcal{F}'_f(v_n)\}$  ограничена в  $\mathbb{L}^{p'}(\Omega)$ . С другой стороны, имеет место следующая цепочка плотных и непрерывных вложений:

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) \stackrel{ds}{\subset} \mathbb{L}^p(\Omega) \stackrel{ds}{\subset} \mathbb{L}^{p'}(\Omega) \stackrel{ds}{\subset} \mathbb{H}^{-1}(\Omega).$$

Поэтому в силу теоремы 3 второй лекции первого тома имеет место равенство

$$\left\langle \mathcal{F}'_f(v_n), w \right\rangle = \int_{\Omega} \mathcal{F}'_f(v_n)(x) w(x) dx \quad \text{для всех } w(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

(19)

## Условие Пале–Смейла-7.

Ранее мы доказали, что

$$v_n \rightarrow v \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^p(\Omega),$$

тогда в силу ограниченности  $\{\mathcal{F}'_f(v_n)\}$  в  $\mathbb{L}^{p'}(\Omega)$  из (19) приходим к выводу, что

$$\langle \mathcal{F}'_f(v_n), v_n - v \rangle \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty. \quad (20)$$

С другой стороны, в силу слабой сходимости  $\{v_n\}$  к  $v$  в  $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$  приходим к выводу, что

$$\langle \varphi'_f(v), v_n - v \rangle \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty, \quad (21)$$

поскольку  $\varphi'_f(v) \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ .

## Условие Пале–Смейла-8.

Теперь из выражения (18) можно получить следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \mu_n \langle \varphi'_f(v_n) - \varphi'_f(v), v_n - v \rangle = \\ & = I_n - \langle \mathcal{F}'_f(v_n), v_n - v \rangle - \mu_n \langle \varphi'_f(v), v_n - v \rangle \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

которое вытекает из предельных формул (18), (20) и (21). С другой стороны, по доказанному

$$\mu_n \geq \varepsilon > 0 \quad \text{при достаточно большом } n \in \mathbb{N}.$$

Итак,

$$\langle \varphi'_f(v_n) - \varphi'_f(v), v_n - v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla v_n - \nabla v|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty,$$

т. е.

$$v_n \rightarrow v \quad \text{сильно в } \mathbb{H}_0^1(\Omega) \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

## Категория-1.

Таким образом, функционал  $\mathcal{F}(v)$  удовлетворяет условию  $(PS_c)$  относительно единичной сферы  $\mathbb{S}$  для всех

$$c \geq \inf_{v \in \mathbb{S}} \mathcal{F}(v) > 0.$$

Заметим, что функционалы  $\mathcal{F}(v)$  и  $\varphi(v)$  четные. Поэтому мы можем отождествить диаметрально противоположные точки единичной сферы  $\mathbb{S}$ . Введем банахово пространство

$$\mathbb{X} = \{x = [v, -v] : v \in \mathbb{B} = \mathbb{H}_0^1(\Omega)\},$$

функционалы  $\mathcal{F}_1(x) \equiv \mathcal{F}(v)$  и  $\varphi_1(x) \equiv \varphi(v)$ , и многообразие

$$\mathcal{V}_1 \equiv \{x \in \mathbb{X} : \varphi_1(x) = 1\}.$$

Но многообразие  $\mathcal{V}_1$  является бесконечномерным проективным пространством  $\mathbb{P}^\infty$ , поэтому

$$\text{cat}_{\mathcal{V}_1}(\mathcal{V}_1) = +\infty.$$

Рассмотрим множество

$$\mathcal{F}_1^{d_n} \equiv \{x \in \mathcal{V}_1 : \mathcal{F}_1(x) \leq d_n\}, \quad d_n \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Заметим, что

$$\mathcal{V}_1 = \operatorname{induct}_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_1^{d_n}.$$

Значит,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{cat}_{\mathcal{V}_1} \left( \mathcal{F}_1^{d_n} \right) = +\infty.$$

## Теорема

Функционал  $\mathcal{F}(v)$  имеет не менее, чем счетное множество условно критических, геометрически разных точек  $\{v_n\} \subset \mathbb{S} \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega)$  относительно единичной сферы  $\mathbb{S} \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ , причем для соответствующих собственных значений  $\{\lambda_n\}$  справедлива минимаксная формулировка:

$$\lambda_n = \inf_{\mathcal{A} \in \mathcal{A}_n} \sup_{v \in \mathcal{A}} \left( \int_{\Omega} |v|^p dx \right)^{-2/(p-2)}, \quad \mathcal{A}_n \equiv \{ \mathcal{A} \subset \mathbb{S} : \text{cat}_{\mathbb{S}}(\mathcal{A}) \geq n \},$$

причем  $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}$  и, кроме того,  $\mathcal{A} = -\mathcal{A}$ . Наконец, справедлива предельная формула

$$\int_{\Omega} |v_n|^p dx = \frac{1}{\lambda_n^{(p-2)/2}} \searrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty.$$

## Критические точки-1.

Теперь наша задача заключается в том, чтобы доказать, что последовательность  $\{u_k\} \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega)$  при  $u_k = t(v_k)v_k$  является последовательностью критических точек функционала  $\psi(u)$ . Действительно, по доказанному точки  $v_k$  удовлетворяют равенству

$$\psi'_{1fv}(t_k, v_k) - \mu_k \varphi'_f v(t_k, v_k) = \theta \in \mathbb{B}^*, \quad \text{где } t_k = t(v_k). \quad (22)$$

Умножим «скалярно» равенство (22) на  $v_k$  относительно скобок двойственности между банаховыми пространствами  $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$  и  $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$  и получим равенство

$$\langle \psi'_{1fv}(w_k), v_k \rangle = \mu_k \langle \varphi'_f(w_k), v_k \rangle. \quad (23)$$

## Критические точки-2.

Заметим, что имеет место следующее цепочка равенств:

$$\langle \psi'_{1fv}(w_k), v_k \rangle = t_k \langle \psi'_f(u_k), v_k \rangle = t_k \frac{\partial \psi_1(t_k, v_k)}{\partial t} = 0.$$

Последнее равенство имеет место в силу равенства (11). Но тогда из (23) вытекает, что

$$\mu_k \langle \varphi'_f(w_k), v_k \rangle = 0,$$

но поскольку по построению

$$\langle \varphi'_f(w_k), v_k \rangle \neq 0 \Rightarrow \mu_k = 0.$$

Отсюда в силу (22) вытекает равенство

$$\psi'_{1fv}(t_k, v_k) = \theta \in \mathbb{B}^* \Rightarrow \theta = \psi'_{1fv}(t_k, v_k) = t_k \psi'_f(u_k).$$

Следовательно,  $u_k = t(v_k)v_k$  — это критические точки функционала  $\psi(u)$  на банаховом пространстве  $\mathbb{B} = \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ .

# Наша задача.

Таким образом, исходная краевая задача (1) имеет по меньшей мере счетное множество геометрически разных собственных функций вида  $u_k = t(v_k)v_k$ , где  $\|v_k\| = 1$ .