Лекция 4

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Определение и пример.

Определение 1. *Множество Y называется метрическим пространством, если на нем задана вещественная функция $d : Y \otimes Y \to \mathbb{R}^1_+$ такая, что выполнены следующие свойства:*

(i) $d(x, y) = 0$, *тогда и только тогда, когда $x = y$;*

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ *для всех $x, y \in Y$;*

(iii) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ *для всех $x, y, z \in Y$.*

Пример 1.

Рассмотрим полностью один нетривиальный пример. Пусть l^p при $p > 1$ линейное пространство последовательностей комплексных чисел вида

$$x = \{x_k\}_{k=1}^{+\infty}, \quad x_k \in \mathbb{C}$$

таких, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p < +\infty.$$

Введем метрику на этом линейном пространстве как

$$d(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}. \tag{1.1}$$

Утверждение 1. *Функция $d(x, y)$ является метрикой на линейном пространстве l^p при $p > 1$.*

□ Действительно, первые два свойства очевидны и в доказательстве нуждается только неравенство треугольника. Доказательство проведем в несколько шагов.

Шаг 1.

Пусть сначала $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ — это последовательности неотрицательных чисел. Пусть

$$a = \frac{x_i^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p}, \quad b = \frac{y_i^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^p}.$$

Тогда из полученного нами арифметического неравенства Гельдера приходим к неравенству

$$\frac{x_i y_i}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{1/q}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{x_i^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p} + \frac{1}{q}\frac{y_i^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^p}.$$

Теперь просуммируем по $i = \overline{1, n}$ и получим неравенство

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{1/q}} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Таким образом, приходим к неравенству Гельдера

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{1/q}.$$

Итак, имеет место следующая цепочка выражений:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p = \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{p-1}x_i + \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{p-1}y_i \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{(p-1)/p}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p}\right]. \quad (1.2)$$

Значит,

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p}.$$

Пусть $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ это комплексные последовательности, тогда по доказанному получаем следующее неравенство:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}.$$

Наконец, осталось воспользоваться очевидным неравенством

$$|x_i + y_i| \leqslant |x_i| + |y_i|.$$

Теперь осталось перейти к пределу при $n \to +\infty$ и получить неравенство Минковского для линейного пространства l^p при $p > 1$. Случай $p = 1$ рассматривается очевидным образом. ⊠

§ 2. Открытые и замкнутые множества.

Определение 2. *Открытый шар $O(a,r)$ и замкнутый шар $K(a,r)$ метрического пространства (X,d) :*

$$O(a,r) \equiv \{x \in X : \ d(x,a) < r\} \quad K(a,r) \equiv \{x \in X : \ d(x,a) \leqslant r\}.$$

Пример 2. Хорошо ранее изученный случай — это метрическое пространство $\left(\mathbb{R}^N, |x-y|\right)$. В этом случае открытый шар — это собственно шар (без границы) с центром в точке $a \in \mathbb{R}^N$ и радиуса $r > 0$

$$B(a,r) \equiv \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \ |x-a| = \left(\sum_{i=1}^{N} (x_i - a_i)^2 \right)^{1/2} < r \right\},$$

а замкнутый шар — это шар $B(a,r)$ с границей $|x-a| = r$:

$$B(a,r) \equiv \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \ |x-a| = \left(\sum_{i=1}^{N} (x_i - a_i)^2 \right)^{1/2} \leqslant r \right\}.$$

Определение 3. *Открытое множество — множество, содержащее вместе с каждой точкой некоторый открытый шар. Замкнутое множество — дополнение открытого.*

Замечание 1. В разъяснении нуждается определение замкнутого множества. В курсе вещественного анализа мы рассматривали замкнутое множество как множество к которому добавлены все его предельные точки, т.е. замкнуто множество A тогда, когда любая последовательность его точек $\{x_n\} \subset A$ сходится в нем — *найдется такая точка $x_0 \in A$, что*

$$|x_n - x_0| \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Поэтому дадим определение предельной точки последовательности.

Сначала дадим такое определение *предельной точки*.

Определение 4. *Точка x_0 множества A, не обязательно принадлежащей самому множеству A, называется предельной точкой множества A, если любой открытый шар с центром в этой точке содержит точку этого множества, отличную от данной.*

Теперь дадим другое определение *предельной точки*.

Определение 5. *Предельной точкой последовательности $\{x_n\} \subset X$ называется такая точка $x_0 \in X$, что*

$$d(x_n, x_0) \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

При этом говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к x_0 по метрике d и пишут

$$x_n \xrightarrow{d} x_0.$$

Справедливо следующее утверждение:

Утверждение 2. *Для каждой предельной точки x_0 множества A найдется последовательность $\{x_n\} \subset A$ такая, что*

$$x_n \xrightarrow{d} x_0 \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

$\square$. Действительно, рассмотрим вложенные шары $O_n = O(x_0, r_n)$ радиусов $r_n = 1/n$ при $n \in \mathbb{N}$ и в каждом шаре O_n возьмем точки $x_n \in \in O_n$, отличные от точки x_0. Поскольку $r_n \to +0$ при $n \to +\infty$, то

$$d(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \xrightarrow{d} x_0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

$\boxtimes$

Справедливо следующее утверждение:

Утверждение 2. *Замкнутое множество содержит все свои предельные точки.*

$\square$ Действительно, пусть $G \subset X$ — замкнутое множество. Тогда найдется такое открытое множество $U \subset X$, что $G = X \backslash U$. Пусть $\{x_n\} \subset G$ и пусть

$$x_n \xrightarrow{d} x_0.$$

Докажем, что $x_0 \in G = X \backslash U$. Пусть нет — $x_0 \in U$. Тогда в силу открытости множества U найдется число $r > 0$, что шар $O(x_0, r) \subset U$, но начиная с некоторого номера $n_0 \in \mathbb{N}$ последовательность

$$\{x_n\}_{n=n_0}^{+\infty} \subset O(x_0, r) \subset U, \quad \{x_n\} \subset G = X \backslash U.$$

Полученное противоречие доказывает утверждение. $\boxtimes$

Дадим определения *внутренней* и *внешней* точек.

Определение 6. *Внутренняя точка множества — содержится во множестве вместе с некоторым открытым шаром. Внешняя точка — содержится вместе с некоторым открытым шаром в дополнении множества.*

Определение 7. *Изолированная точка — существует открытый шар с центром в этой точке, непересекающийся с этой точкой.*

Дадим определения окрестности и открытой окрестности.

Определение 7. *Окрестностью точки метрического пространства называется любое множество, содержащее данную точку вместе с некоторым открытым шаром.*

Определение 8. *Открытой окрестностью точки называется произвольное открытое множество, содержащее данную точку.*

Пример 3. Напомним определения ε–окрестности и замкнутой ε–окрестности точки x_0 в пространстве $\mathbb{R}^N$:

$$U_\varepsilon(x_0) \equiv \left\{x \in \mathbb{R}^N : \, |x - x_0| < \varepsilon\right\}, \quad \overline{U}_\varepsilon(x_0) \equiv \left\{x \in \mathbb{R}^N : \, |x - x_0| \leqslant \varepsilon\right\}.$$

Справедлива следующая лемма:

Л е м м а 1. *Справедливы следующие топологические свойства метрических пространств:*

(i) *Объединение любого числа открытых множеств и пересечение конечного числа открытых множеств — открытое множество;*

(ii) *Пересечение любого числа и объединение конечного числа замкнутых множеств — замкнутое множества;*

(iii) *Само пространство X и $\varnothing$ — это открыто–замкнутые множества.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Итак, пусть $\{\Sigma_\alpha :\ \alpha \in A\}$ — произвольное семейство открытых множеств и пусть

$$x \in \bigcup_{\alpha \in A} \Sigma_\alpha,$$

тогда найдется такое $\alpha_0 \in A$ и такой открытый шар $O(x, r)$ что

$$x \in O(x, r) \subset \Sigma_{\alpha_0} \in \bigcup_{\alpha \in A} \Sigma_\alpha.$$

Следовательно, объединение произвольного числа открытых множеств — это открытое множество.

Пусть теперь

$$\Sigma \equiv \bigcap_{k=1}^{n} \Sigma_k \text{ – пересечение конечного числа открытых множеств.}$$

Пусть $x \in \Sigma$, тогда найдутся такие открытые шары $O(x, r_k)$, что

$$x \in O(x, r_k) \subset \Sigma_k.$$

Определим теперь $r = \min\{r_k,\ k = \overline{1, n}\}$, тогда, очевидно, что

$$x \in O(x, r) = \bigcap_{k=1}^{n} O(x, r_k) \subset \Sigma.$$

Второе утверждение леммы о топологии вытекает из первого переходом к дополнениям. Действительно, пусть

$$\{S_\alpha :\ \alpha \in A\} \text{ – произвольное семейство замкнутых множеств.}$$

Тогда имеет место следующая цепочка равенств множеств:

$$\bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (X \backslash \Sigma_\alpha) = X \backslash \left(\bigcup_{\alpha \in A} \Sigma_\alpha \right),$$

где мы ввели обозначение

$$S_\alpha = X \backslash \Sigma_\alpha.$$

С другой стороны, имеет место следующая цепочка равенств множеств:

$$\bigcup_{k=1}^{n} S_k = \bigcup_{k=1}^{n} (X\backslash\Sigma_k) = X\backslash \left(\bigcap_{k=1}^{n} \Sigma_k\right), \quad S_k = X\backslash\Sigma_k.$$

Поэтому имеют место следующие рассуждения. Пусть $\{G_\alpha\}$ при $\alpha \in A$ — это произвольное семейство замкнутых множеств. Тогда согласно определению замкнутого множества найдутся такие открытые множества U_α, что $G_\alpha = X\backslash U_\alpha$. Поэтому в силу формул двойственности имеем

$$\bigcap_{\alpha\in A} G_\alpha = \bigcap_{\alpha\in A} (X\backslash U_\alpha) = X\backslash \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \text{ -- замкнуто,}$$

поскольку как мы доказали

$$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \text{ -- открыто.}$$

Аналогичным образом, доказывается, что

$$\bigcup_{k=1}^{n} G_n \text{ -- замкнуто.}$$

Отсюда приходим к утверждению.

Лемма доказана.

Пример 4. Рассмотрим пример счетной системы открытых множеств, пересечение которых замкнуто, и пример счетной системы замкнутых множеств, объединение которых открыто. Действительно,

$$O_n = O(0, 1 + 1/n) \equiv \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1 + \frac{1}{n}\right\},$$

$$K_n = K(0, 1 - 1/(2n)) \equiv \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leqslant 1 - \frac{1}{2n}\right\}$$

при $n \in \mathbb{N}$. Справедливы следующие равенства:

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n = K(0,1), \quad \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n = O(0,1).$$

Дадим определение замыкания множества.

Определение 9. *Пересечение всех замкнутых множеств, содержащих множество A, называется замыканием множества и обозначается как $\overline{A}$.*

Справедливы следующие свойства замыкания множества, которые мы без доказательств собрали в одной лемме.

Лемма 2. *Справедливы следующие свойства:*

(i) $A \subset \overline{A}$, $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$;

(ii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(iii) $\overline{\varnothing} = \varnothing$, $\overline{X} = X$;

(vi) *вообще говоря,* $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Доказательство. Докажем (i). Действительно,

$$\overline{A} = \bigcap_{\alpha} B_\alpha, \quad A \subset B_\alpha - \text{замкнуто} \Rightarrow A \subset \overline{A}.$$

Следовательно, $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$. Пусть

$$\overline{A} = \bigcap_{\alpha} B_\alpha, \quad A \subset B_\alpha \Rightarrow \overline{A} \subset B_\alpha \Rightarrow \overline{\overline{A}} \subset \bigcap_{\alpha} B_\alpha = \overline{A} \Rightarrow \overline{\overline{A}} \subset \overline{A}.$$

Следовательно, $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$.

Докажем (ii). Действительно, любое покрытие множества $A \cup B$ замкнутыми множествами C_α представимо в виде объединения покрытия множеств A и B замкнутыми множествами A_α и B_β. Отсюда следует утверждение (ii).

Докажем (iii). Действительно,

$$\varnothing = \varnothing - \text{замкнуто} \Rightarrow \varnothing = \overline{\varnothing}, \quad X = X - \text{замкнуто} \Rightarrow X = \overline{X}.$$

И это утверждение справедливо для любого замкнутого множества $A \subset X$. Замыкание замкнутого множества совпадает с самим множеством.

Для доказательства утверждения (iv) приведем пример.

Пример 5. Пусть $\mathbb{Q}$ — множество рациональных числе, а $\mathbb{J}$ — множество иррациональных чисел.

$$A = [0,1] \cap \mathbb{Q}, \ B = [0,1] \cap \mathbb{J}, \ \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}^1, \ \overline{\mathbb{J}} = \mathbb{R}^1 \Rightarrow \overline{A} = [0,1], \ \overline{B} = [0,1].$$

Лемма доказана.

Ясно, что всякое подмножество Y метрического пространства (X,d) является метрическим пространством (Y,d). Мы ранее выяснили, что в метрическом пространстве (X,d) открыто–замкнутыми множествами заведомо являются само множество X и $\varnothing$. Однако, существуют такие метрические пространства, у которых есть и другие открыто–замкнутые множества. Дадим определение *связного метрического пространства*.

Определение 10. *Метрическое пространство (X,d) является связным, если нет других открыто–замкнутых множеств кроме X и $\varnothing$.*

Пример 6. Пусть A и B — это два непересекающихся открытых подмножества множества X с метрикой d. Тогда $(A \cup B, d)$ — это несвязное метрическое пространство. Справедливы следующие равенства:

$$A = (A \cup B) \setminus B - \text{замкнуто}, \quad B = (A \cup B) \setminus A - \text{замкнуто}.$$

Следовательно, множества A и B в метрическом пространстве

$$(A \cup B, d)$$

одновременно открыты и замкнуты.

§ 3. Плотные и неплотные множества.

Дадим определения *плотных и нигде не плотных множеств* в метрических пространствах.

Определение 11. *Множество A метрического пространства (X,d) называется плотным во множестве B этого же пространства, если $B \subset \overline{A}$.*

Пример 7. Пусть $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, $B = [0,1]$, причем $\overline{A} = B$.

Определение 12. *Множество A называется всюду плотным в метрическом пространстве (X,d), если $\overline{A} = X$.*

Определение 13. *Множество A называется нигде не плотным в метрическом пространстве, если всякое открытое множество метрического пространства (X,d) содержит другое открытое множество целиком свободное от точек множества A.*

Пример 8. Например, тривиальным примером нигде не плотного множества в метрическом пространстве $(X = [0,1], d(x,y) = |x-y|)$ является любое конечное множество точек $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Пример 9. Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{C}[0,1]$ относительно метрики
$$d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)|\,.$$

Это пространство является сепарабельным, поскольку в силу известной теоремы Стоуна любую непрерывную функцию можно приблизить полиномом с рациональными коэффициентами
$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_k \in \mathbb{Q}. \tag{3.1}$$

Именно, для любой функции $f(x) \in \mathbb{C}[0,1]$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой многочлен $P_n(x)$ вида (3.1), что имеет место неравенство
$$d(f(x), P_n(x)) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Рассмотрим множество всех многочленов с рациональными коэффициентами $E_0 = \{P_n(x)\}$. Ясно, что предельными точками этого множества в силу неравенства (3.2) являются все непрерывные функции на отрезке $[0,1]$.

Определение 14. *Метрическое пространство (X,d) называется сепарабельным, если в нем существует счетное всюду плотное множество.*

Пример 10. Введем в рассмотрение следующее метрическое пространство. Рассмотрим всевозможные последовательности вещественных чисел $\{x_k\}$, для которых
$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < +\infty.$$

Введем на этом пространстве следующую метрику:

$$d(x,y) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k - y_k|.$$

Это метрическое пространство обозначается как m. Докажем, что это пространство не является сепарабельным.

С этой целью нам нужно предъявить такое подмножество E_0 множества m, которое нельзя приблизить с любой наперед заданной точностью элементами любого счетного множества.

В качестве такого множества E_0 возьмем произвольные последовательности, состоящие из нулей и единиц:

$$\{x_k\}, \quad x_k = 0 \quad \text{либо} \quad x_k = 1.$$

Можно проверить, что мощность этого множества E_0 континуум. Кроме того,

$$d(x_0, y_0) = 1 \quad \text{для всех} \quad x_0, y_0 \in E_0.$$

С другой стороны, шары

$$O(x_0, 1/2) \cap O(y_0, 1/2) = \varnothing \quad \text{для всех} \quad x_0, y_0 \in E_0.$$

Возьмем в каждом из шаров $O(x_0, 1/2)$ точку x, когда x_0 пробегает все множество E_0. Образованное множество M имеет туже мощность, что и множество E_0. Поэтому множество, которое с любой точностью по метрике d приближает множество E_0 должно иметь мощность континуума. Следовательно, *счетного* всюду полного множества в m не существует.

§ 4. Множество Кантора.

Дадим определение *совершенного множества*.

Определение 15. *Множество метрического пространства называется совершенным, если оно замкнуто и состоит из предельных точек.*

Предъявим алгоритм построения так называемого множества Кантора. Рассмотрим отрезок $I = [0,1]$, который мы разделим на три равные части и выкинем из него интервал $(1/3, 2/3)$. Теперь оставшиеся отрезки также разделим на три равные части и из них также выкинем серединные интервалы $(1/9, 2/9)$ и $(7/9, 8/9)$ и т.д. В результате на $n-$ом шаге получим замкнутое множество I_n длиной 3^{-n}, причем выполнена цепочка вложений

$$I \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots.$$

Рассмотрим множество Кантора

$$K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n. \tag{4.1}$$

Справедлива следующая лемма:
Лемма 3. *Множество Кантора K является совершенным и нигде не плотным множеством.*

Доказательство.

1. Прежде всего заметим, что по построению I_n замкнуты в метрическом пространстве $(X = [0,1], d(x,y) = |x-y|)$. Поэтому множество Кантора K как пересечение счетного числа замкнутых множеств замкнуто.

2. Докажем, что множество Кантора K содержит все свои предельные точки.

Действительно, пусть $x \in K$. Рассмотрим произвольную окрестность этой точки Σ_x, которое согласно определению содержит открытый интервал $\sigma_x \equiv (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \Sigma_x$ с центром в точке x. Пусть Λ_n — это тот отрезок из множества I_n, который содержит точку x. Заметим, что при достаточно большом $n \in \mathbb{N}$ имеем $\Lambda_n \in \sigma_x$. Пусть $a_n \in \Lambda_n$ — это тот конец отрезка Λ_n, который не совпадает с $x \neq a_n$. Следовательно, для произвольной окрестности Σ_x точки x нашлась точка $a_n \in K$ такая, что $x \neq a_n \in \Sigma_x$.

Таким образом, множество Кантора совершенно.

3. Докажем, что множество Кантора K является нигде не плотным множеством на отрезке $[0,1]$. Пусть Σ — это произвольное открытое множество на отрезке $[0,1]$. Ясно, что если на этом множестве нет точек Канторова множества, то доказывать нечего. Пусть, однако, $x \in K \cap \Sigma$. Теперь возьмем тот отрезок Λ_m, который содержит точку x. Возьмем теперь интервал с центром в середине этого отрезка Λ_m и радиуса 2^{-m-1}. Этот интервал не принадлежит Канторову множеству.

Таким образом, нигде не плотность доказана.

Лемма доказана.

§ 5. Непрерывные отображения метрических пространств.

Как вам известно из курса математического анализа существуют два определения непрерывности отображений метрических пространств. Дадим определение по Коши.

Определение 16. *Отображение*

$$g : (X, d) \to (Y, \rho)$$

называется непрерывным по Коши в точке $x_0 \in X$, если для всякой окрестности $\Sigma_{g(x_0)} \subset Y$ точки $g(x_0)$ найдется окрестность $\Sigma_{x_0} \subset X$ точки x_0, что

$$g(\Sigma_{x_0}) \subset \Sigma_{g(x_0)}.$$

Теперь дадим определение по Хайне.

Определение 17. *Отображение*

$$g : (X, d) \to (Y, \rho)$$

называется непрерывным по Хайне в точке $x_0 \in X$, *если для всякой сходящейся к точке* x_0 *последовательности* $\{x_n\}$ *соответствующая последовательность* $\{g(x_n)\}$ *сходится к точке* $g(x_0)$ *в метрическом пространстве* (Y, ρ).

Справедлива следующая лемма:

Лемма 4. *Точка* a *принадлежит замыканию* $\overline{A}$ *множества* A *метрического пространства* (X, d), *тогда и только тогда, когда существует последовательность* $\{x_n\} \subset A$, *что*

$$x_n \to a.$$

Доказательство.

Пусть $a \in \overline{A}$. По определению

$$\overline{A} = \bigcap_{\alpha} A_\alpha, \quad A \subset A_\alpha.$$

Предположим, что найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что

$$O(a, 1/n_0) \bigcap A = \varnothing.$$

Следовательно,

$$O(a, 1/n_0) \in X \backslash A, \quad B_a = X \backslash O(a, 1/n_0) \text{ -- замкнуто},$$

причем $A \subset B_a$. Стало быть,

$$a \in \overline{A} \subset B_a \quad \text{и} \quad a \notin B_a.$$

Полученное противоречие доказывает, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$O(a, 1/n_0) \bigcap A \neq \varnothing \Rightarrow a \text{ -- предельная}.$$

Пусть теперь

$$\{x_n\} \subset A \quad \text{и} \quad x_n \xrightarrow{d} a.$$

Докажем, что $a \in \overline{A}$. Действительно,

$$\{x_n\} \subset A \subset A_\alpha \text{ -- произвольное замкнутое множество}.$$

Тогда $a \in A_\alpha$. Следовательно,

$$a \in \bigcap_{\alpha} A_\alpha = \overline{A}.$$

Лемма доказана.

Дадим определение образа множества при отображении g.

Определение 18. *Образом* $V \subset Y$ *множества* $U \subset X$ *при отображении*

$$g : X \to Y$$

называется множество

$$V \equiv \{y \in Y: \ y = g(x), \ x \in U\}.$$

Определение 19. *Полным прообразом* $U \subset X$ *множества* $V \subset Y$ *при отображении*

$$g : X \to Y$$

называется множество

$$U \equiv \{x \in X: \ g(x) = y \in V \subset Y\}, \quad y - \text{пробегает все} \quad Y.$$

Докажем теорему *об открытом отображении.*

Теорема 1. *Отображение*

$$g : (X, d) \to (Y, \rho)$$

является непрерывным, тогда и только тогда, когда полный прообраз $G \subset X$ *открытого множества* $\Sigma \subset Y$ *открыт в* X.

Доказательство.

Пусть g — непрерывное отображение по Коши и пусть S открытое множество в (Y, ρ). Если полный прообраз множества S пуст, то он, очевидно, открытое множество. Пусть прообраз $S \neq \varnothing$. Для всякой точки

$$x_0 \in g^{-1}(S)$$

в силу непрерывности g (поскольку $g(x_0) \in S$) найдется такая открытая окрестность $\Sigma_{x_0} \ni x_0$, что

$$g(\Sigma_{x_0}) \subset S.$$

Рассмотрим множество

$$\bigcup_{x_0 \in g^{-1}(S)} \Sigma_{x_0},$$

которое, очевидно, является открытым и является согласно определению полным прообразом.

Теперь докажем утверждение в обратную сторону. Пусть $\Sigma_{g(x_0)}$ — это открытая окрестность точки $g(x_0)$. Тогда

$$g^{-1}(\Sigma_{g(x_0)})$$

это открытое множество метрического пространства (X, d), образ которого содержится в $\Sigma_{g(x_0)}$. Следовательно, $g(x)$ непрерывное отображение.

Теорема доказана.

Теперь мы можем доказать теорему об эквивалентности определений по Коши и по Хайне.

Теорема 2. *Определение по Коши эквивалентно определению по Хайне.*

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что это достаточно сильное утверждение, поскольку в более общих топологических пространствах, которые мы скоро будем изучать из определения по Хайне, вообще говоря, не следует определение по Коши, хотя из определения по Коши всегда следует определение по Хайне.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть
$$g : (X, d) \to (Y, \rho)$$
есть непрерывное отображение по Коши. Докажем, что оно непрерывно по Хайне. Действительно, пусть
$$x_n \to x_0 \quad \text{в} \quad (X, d),$$
тогда для любой окрестности $\Sigma_{g(x_0)} \subset Y$ найдется такая окрестность $S_{x_0} \subset X$ точки x_0, что
$$g(S_{x_0}) \subset \Sigma_{g(x_0)}.$$
Но $x_n \in S_{x_0}$ начиная с некоторого номера и поэтому
$$g(x_n) \subset g(S_{x_0}) \subset \Sigma_{g(x_0)}.$$
Значит, последовательность $\{g(x_n)\}$ сходится к $g(x_0)$.

Докажем теперь утверждение в обратную сторону. Итак, пусть Σ — это открытое множество метрического пространства (Y, ρ). Докажем, что его полный прообраз
$$G = \{x \in X : \ g(x) \in \Sigma\}$$
является открытым множеством. Пусть нет. Тогда *найдется такая точка* x_0, *что*
$$x_0 \in G \quad \textit{и} \quad x_0 \in \overline{X \backslash G}.$$

☐ Действительно, согласно определению не открытого множества G. Для любого шара $U(x_0, r)$ имеем одновременно
$$x_0 \in G \quad \text{и} \quad U(x_0, r) \cap (X \backslash G) \neq \varnothing.$$
Следовательно,
$$x_0 - \text{предельная точка множества } X \backslash G \Rightarrow x_0 \in \overline{X \backslash G}. \boxtimes$$

Но тогда найдется такая последовательность $\{x_n\} \notin G$, что
$$x_n \xrightarrow{d} x_0 \quad \text{в} \quad (X, d).$$

З а м е ч а н и е. В этом месте существенно, что топология окрестностей точки $x_0 \in X$ может быть задана счетным системой окрестностей
$$O(x_0, 1/n) \stackrel{def:}{=} \left\{x \in X : \ d(x, x_0) < \frac{1}{n}\right\}.$$

В случае общих топологических пространств локально в некоторой точке $x_0 \in X$ ее система окрестностей не может быть задана счетным семейством окрестностей. Поэтому в случае топологических пространств это место доказательство не проходит — нельзя выделить сходящуюся к точке x_0 последовательность и теорема неверна.

При этом согласно определению полного прообраза G имеем

$$\{g(x_n)\} \notin \Sigma.$$

С другой стороны,

$$g(x_n) \xrightarrow{\rho} g(x_0).$$

Поскольку всякая точка открытого множества является согласно определению предельной, то в силу открытости множества Σ начиная с некоторого натурального числа n_0 последовательность

$$\{g(x_n)\}_{n=n_0}^{+\infty} \subset \Sigma.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема доказана.

§ 6. Компактные метрические пространства.

Определение 19. *Открытым покрытием множества A называется произвольное семейство $\{G_\alpha\}$ открытых множеств и такое, что*

$$A \subset \bigcup_\alpha G_\alpha.$$

Определение 20. *Метрическое пространство (X, d) называется компактным, если из всякого его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.*

Пример 11. Компактом в метрическом пространстве $(X = \mathbb{R}^1, d(x,y) = |x-y|)$ является, например, отрезок $[0,1]$.

Определение 21. *Метрическое пространство (X, d) называется локально–компактным, если всякая его точка имеет окрестность, замыкание которой компактно.*

Определение 22. *Произвольное семейство множеств $\{F_\alpha\}$ называется центрированным, если всякое его конечное подсемейство имеет непустое пересечение.*

Докажем важную теорему о необходимом и достаточном условии компактности метрического пространства.

Теорема 3. *Для того чтобы метрическое пространство (X, d) было компактным, необходимо и достаточно, чтобы всякая центрированная система его замкнутых подмножеств имела непустое пересечение.*

Доказательство.

Пусть (X, d) — компактно. А $\{F_\alpha\}$ — это произвольная центрированная система его замкнутых подмножеств. Тогда $G_\alpha = X \backslash F_\alpha$ — это семейство открытых множеств.

Предположим, что

$$X = \bigcup_\alpha G_\alpha \Rightarrow \text{найдется конечная подсистема } \{G_{\alpha_k}\}_{k=1}^n, \quad X = \bigcup_{k=1}^n G_{\alpha_n}.$$

Тогда

$$\varnothing = X \backslash X = X \backslash \bigcup_{k=1}^n G_{\alpha_n} = \bigcap_{k=1}^n X \backslash G_{\alpha_k} = \bigcap_{k=1}^n F_{\alpha_k}.$$

Следовательно, система $\{F_\alpha\}$ не является центрированной.

Теперь мы докажем утверждение в обратную сторону.

Итак, пусть всякая центрированная его система замкнутых множеств имеет непустое пересечение. Пусть $\{G_\alpha\}$ — открытое покрытие множества X, тогда

$$F_\alpha = X \backslash G_\alpha$$

— это система замкнутых множеств, причем

$$\bigcap_\alpha F_\alpha = \varnothing,$$

так как $\{G_\alpha\}$ покрывает X. Следовательно, $\{F_\alpha\}$ не является центрированной. Значит, некоторая его конечная подсистема

$$\{F_k\}_{k=1}^N$$

имеет пустое пересечение. Таким образом,

$$\{G_k\}_{k=1}^N, \quad G_k = X \backslash F_k \quad \text{покрывает} \quad X.$$

Значит, X — компакт.

Теорема доказана.

Лемма 5. *Справедливы следующие свойства компактов:*

(i) *Замкнутое подмножество компактного метрического пространства является компактом;*

(ii) *Образ компактного пространства при непрерывном отображении — компактное пространство;*

(iii) *Компактное подмножество метрического пространства, рассматриваемое как метрическое пространство замкнуто.*

Доказательство.

Докажем свойство (i). Действительно, пусть (X, d) — это компакт и A замкнуто в (X, d). Тогда

$$X_1 = X \backslash A - \text{открыто}.$$

Пусть $\{U_\alpha\}$ — это произвольное открытое покрытие множества A. Тогда

$$X = X_1 \bigcup \left(\bigcup_\alpha U_\alpha \right) \Rightarrow \text{найдется конечная подсистема } \{U_{\alpha_k}\}_{k=1}^n,$$

что

$$X = X_1 \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^n U_{\alpha_k} \right) \Rightarrow A \subset \bigcup_{k=1}^n U_{\alpha_k}.$$

Следовательно, A — это компакт.

Докажем свойство (ii). Пусть

$$g(x) : (X, d) \to (Y, \rho) - \text{непрерывное отображение.}$$

Пусть

$$Y = \bigcup_\alpha V_\alpha, \quad V_\alpha - \text{открыто в } (Y, \rho).$$

По теореме об открытом отображении

$$U_\alpha = g^{-1}(V_\alpha) - \text{открыто в } (X, d).$$

Следовательно,

$$X = g^{-1}(Y) = g^{-1}\left(\bigcup_\alpha V_\alpha \right) = \bigcup_\alpha g^{-1}(V_\alpha).$$

Поскольку (X, d) — компакт, то найдется конечная подсистема

$$\left\{ g^{-1}(V_{\alpha_k}\}_{k=1}^n \right), \quad X = \bigcup_{k=1}^n g^{-1}(V_{\alpha_k}) = g^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^n V_{\alpha_k} \right) \Rightarrow Y = \bigcup_{k=1}^n V_{\alpha_k}.$$

Следовательно, (Y, ρ) — это компакт.

Докажем свойство (iii). Действительно, пусть A — компакт в (X, d) и $y \notin A$. Тогда для любой точки $x \in A$ найдутся такие открытые окрестности $x \in U_x$ и $y \in V_x(y)$, что

$$U_x \bigcap V_x(y) = \varnothing.$$

Кроме того,

$$A \subset \bigcup_{x \in A} U_x \Rightarrow A \subset \bigcup_{k=1}^n U_{x_k} \Rightarrow \left(\bigcap_{k=1}^n V_{x_k}(y) \right) \bigcap \left(\bigcup_{k=1}^n U_{x_k} \right) = \varnothing.$$

Следовательно,

$$y \in \bigcap_{k=1}^n V_{x_k} \subset X \backslash A \Rightarrow A - \text{замкнуто.}$$

Лемма доказана.

§ 7. База топологии метрического пространства.

Дадим определение базы топологии метрического пространства.

Определение 23. *Базой топологии $\mathfrak{B}$ метрического пространства (X, d) называется такая система открытых множеств, что любое открытое множество Σ можно представить в виде*

$$\Sigma = \bigcup_{\alpha} B_\alpha, \quad B_\alpha \in \mathfrak{B}.$$

Справедлива следующая лемма:

Лемма 6. *Для того чтобы система открытых множеств $\mathfrak{B}$ было базой топологии метрического пространства (X, d), необходимо и достаточно, чтобы для всякого открытого множества G и его точки $a \in G$ нашлось такое множество $\Sigma_a \in \mathfrak{B}$, что $a \in \Sigma_a \subset G$.*

Доказательство.

Пусть $\mathfrak{B}$ — база топологии. Тогда для любого открытого множества G и его точки $a \in G$ найдется такая, подсистема

$$\{\Sigma_\alpha\} \in \mathfrak{B},$$

что

$$G = \bigcup_{\alpha} \Sigma_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0, \ a \in \Sigma_{\alpha_0} \subset G.$$

Пусть теперь для всякого открытого множества G и его точки $a \in G$ найдется такое $\Sigma_a \in \mathfrak{B}$, что

$$a \in \Sigma_a \subset G.$$

Но тогда

$$G = \bigcup_{a \in G} \Sigma_a.$$

Значит, $\mathfrak{B}$ — база топологии.

Лемма доказана.

Определение 24. *Метрическое пространство называется пространством со счетной базой, если существует хотя бы одна база топологии, состоящая из счетного числа множеств.*

Пример 12. Примером пространства со счетной базой является пространство $(X = \mathbb{R}^1, d(x, y) = |x - y|)$. Действительно, в качестве базы топологии возьмем следующую счетную систему множеств:

$$\mathfrak{B} = \{(a_n - 1/m, a_n + 1/m)\}, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Справедлива следующая лемма, обобщающая этот результат:

Лемма 7. *Метрическое пространство является пространством со счетной базой, если в нем существует счетное всюду плотное множество, т. е. если это метрическое пространство сепарабельно.*

§ 8. Полнота метрических пространств.

Определение 25. *Последовательность* $\{x_n\}$ *метрического пространства* (X,d) *называется фундаментальной, если*

$$d(x_n,x_m)\to 0 \quad \text{\textit{при}} \quad n,m\to+\infty.$$

Пример 13. В метрическом пространстве $(X=[0,1],d(x,y)=$ $=|x-y|)$ всякая фундаментальная последовательность сходится. С другой стороны, приведем пример метрического пространства, в котором не всякая фундаментальная последовательность сходится. Действительно, пример такой

$$X=\mathbb{C}^{(1)}([0,1]),\quad d(f,g)=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|\,.$$

Пример 14. Рассмотрим следующую последовательность:

$$f_n(x)=\begin{cases} x, & \text{если} \quad x\in[0,1/2-\frac{1}{2+n}];\\ \omega_n(x), & \text{если} \quad x\in[0,1/2-\frac{1}{2+n}];\\ 1-x, & \text{если} \quad x\in[1/2+\frac{1}{2+n},1],\end{cases}$$

где

$$\omega_n(x)\in\mathbb{C}^{(1)}\left(\left[1/2-\frac{1}{2+n},1/2+\frac{1}{2+n}\right]\right),$$

$$\omega_n(\frac{1}{2}-\frac{1}{2+n})=1/2-\frac{1}{2+n},\quad \omega_n(\frac{1}{2}+\frac{1}{2+n})=1/2+\frac{1}{2+n},$$

$$\omega_n^{'}\left(1/2-\frac{1}{2+n}\right)=1,\quad \omega_n^{'}\left(1/2+\frac{1}{2+n}\right)=-1.$$

Такая гладкая функция $\omega_n(x)$ существует.

Теперь заметим, что построенная последовательность $\{f_n(x)\}$ является фундаментальной в $\mathbb{C}^{(1)}([0,1])$ и сходится к функции

$$f_n(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x\in[0,1/2];\\ 1-x, & \text{если } x\in[1/2,1],\end{cases}$$

которая не является дифференцируемой в точке $x=1/2$.

С другой стороны, метрической пространство

$$X=\mathbb{C}^{(1)}([0,1]),\quad d(f,g)=\sup_{x\in[0,1]}\left[|f(x)-g(x)|+\left|f^{'}(x)-g^{'}(x)\right|\right]$$

уже обладает тем свойством, что всякая фундаментальная в нем последовательность сходится к некоторой функции из $\mathbb{C}^{(1)}[0,1]$.

Определение 26. *Метрическое пространство является полным, если каждая его фундаментальная последовательность сходится.*

Пример 15. В качестве примера, рассмотрим линейное метрическое пространство $\mathbb{C}[0,1]$ относительно метрики

$$d(f,g)=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|.$$

Итак, пусть $\{f_n(x)\}$ — это фундаментальная последовательность относительно указанной метрики. Это значит, что для всякого $\varepsilon>0$ найдется такое натуральное $N\in\mathbb{N}$, что для всех $n,m\geqslant N$ имеет место неравенство

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon.$$

Т.е. последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к непрерывной функции. Теперь осталось перейти к пределу при $m\to+\infty$ и получить полноту этого пространства.

§ 9. Изометрия метрических пространств.

Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{B}(X)$ ограниченных функций относительно метрики

$$d_0(f,g)=\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)| \tag{9.1}$$

является полным метрическим пространством $(\mathbb{B}(X),d_0)$.

Определение 27. *Отображение*

$$\mathrm{J}:(X_1,d_1)\to(X_2,d_2)$$

двух метрических пространств называется изометрией, если

$$d_2(\mathrm{J}f,\mathrm{J}g)=d_1(f,g)\quad \textit{для всех}\quad f,g\in X_1.$$

Замечание. Заметим, что изометрия является взаимно однозначным отображением на свой образ. Действительно, поскольку мы рассматриваем только однозначные отображения, то осталось доказать инъективность, что следует из равенств

$$y=\mathrm{J}(x_1)=\mathrm{J}(x_2),\quad d_1(x_1,x_2)=d_2(\mathrm{J}(x_1),\mathrm{J}(x_2))=d_2(y,y)=0\Rightarrow x_1=x_2.$$

Справедлива следующая лемма об изометрии метрических пространств:

Лемма 8. *Пусть (X_1,d_1) и (X_2,d_2) — это два полных метрических пространства и*

$$E_1\overset{ds}{\subset}X_1,\quad E_2\overset{ds}{\subset}X_2,$$

где между E_1 и E_2 имеется изометрия J, причем $\mathrm{J}E_1=E_2$. Тогда изометрия J продолжается единственным образом до изометрии между (X_1,d_1) и (X_2,d_2).

З а м е ч а н и е 3. Здесь и всюду далее мы обозначаем символом

$$E \overset{ds}{\subset} X$$

всюду плотное вложение, т.е. для любой точки $x \in X$ найдется такая последовательность $\{x_n\} \subset E_1$, что

$$x_n \overset{d}{\to} x.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Итак, пусть $x \in X_1 \backslash E_1$. Тогда в силу плотности E_1 в X_1 существует последовательность $\{x_n\} \subset E_1$, которая

$$x_n \overset{d_1}{\to} x.$$

Но тогда последовательность $\{\mathrm{J}x_n\}$ фундаментальна в (X_2, d_2), поскольку

$$d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(x_m)) = d_1(x_n, x_m) \to +0 \quad \text{при} \quad n, m \to +\infty.$$

и в силу полноты метрического пространства (X_2, d_2) найдется такое $y \in X_2$, что

$$\mathrm{J}(x_n) \overset{d_2}{\to} y.$$

Обозначим через

$$\widehat{\mathrm{J}}(x) = \begin{cases} y, & \text{если} \quad x \in X_1 \backslash E_1; \\ \mathrm{J}(x), & \text{если} \quad x \in E_1 \end{cases}$$

некоторое продолжение оператора изометрии J, определенного на множестве E_1, на множество X_1.

1. *Корректность.* Проверим корректность определения $\mathrm{J}(x)$. Пусть существует другая последовательность $\{v_n\} \subset E_1$, которая сходится к x. Но тогда последовательность $\{\mathrm{J}(v_n)\}$ тоже сходится к $\mathrm{J}(x)$, поскольку последовательность

$$\{z_n\} = x_1, v_1, x_2, v_2, ..., x_n, v_n, ...$$

сходится к x. Действительно, $z_{2n-1} = x_n$ и поэтому

$$d_2(\mathrm{J}(z_n), \widehat{\mathrm{J}}(x)) \leqslant d_2(\mathrm{J}(z_n), \mathrm{J}(z_{2n-1})) + d_2(\mathrm{J}(z_{2n-1}), \widehat{\mathrm{J}}(x)) \to +0$$

при $n \to +\infty$.

2. *Изометрия.* Проверим, что так определенное продолжение изометрии J является изометрией на X_1.

$\square$ Действительно, пусть $x, z \in X_1$, тогда найдутся такие последовательности $\{x_n\} \subset E_1$ и $\{z_n\} \subset E_1$, что

$$x_n \overset{d_1}{\to} x, \quad z_n \overset{d_1}{\to} z,$$

тогда

$$d_2(\widehat{\mathrm{J}}(x), \widehat{\mathrm{J}}(z)) = \lim_{n \to +\infty} d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(z_n)) = \lim_{n \to +\infty} d_1(x_n, z_n) = d_1(x, z).$$

Действительно, это следствие следующих рассуждений:

$$d_2(\widehat{\mathrm{J}}(x), \widehat{\mathrm{J}}(z)) \leqslant d_2(\widehat{\mathrm{J}}(x), \mathrm{J}(x_n)) + d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(z_n)) + d_2(\mathrm{J}(z_n), \widehat{\mathrm{J}}(z)).$$

Отсюда получаем, что

$$d_2(\widehat{\mathrm{J}}(x), \widehat{\mathrm{J}}(z)) \leqslant \lim_{n\to+\infty} d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(z_n)).$$

Кроме того, имеет место следующая цепочка неравенств:

$$d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(z_n)) \leqslant d_2(\mathrm{J}(x_n), \widehat{\mathrm{J}}(x)) + d_2(\widehat{\mathrm{J}}(x), \widehat{\mathrm{J}}(z)) + d_2(\widehat{\mathrm{J}}(z), \mathrm{J}(z_n)),$$

из которой сразу же получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty} d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(z_n)) \leqslant d_2(\widehat{\mathrm{J}}(x), \widehat{\mathrm{J}}(z)).$$

Значит,

$$d_2(\widehat{\mathrm{J}}(x), \widehat{\mathrm{J}}(z)) = \lim_{n\to+\infty} d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(z_n)).$$

Аналогичным образом устанавливается, что

$$d_1(x, z) = \lim_{n\to+\infty} d_1(x_n, z_n).\boxtimes$$

3. *Отображение на* X_2. Наконец, докажем, что

$$\widehat{\mathrm{J}}(X_1) = X_2.$$

Действительно, для каждой точки $z \in X_2$ найдется такая последовательность $\{z_n\} \subset E_2$, что

$$d_2(z_n, z) \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Поскольку на E_1 отображение J обладает обратным, то это в свою очередь означает, что найдется такая последовательность $\{x_n\} \subset E_1$, что $z_n = \mathrm{J}(x_n)$

$$d_2(\mathrm{J}(x_n), z) \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Но в силу изометрии J последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной в (X_1, d_1).

$\square$ Действительно, имеет место следующее неравенство:

$$d_1(x_n, x_m) = d_2(J(x_n), J(x_m)) \leqslant$$
$$\leqslant d_2(J(x_n), z) + d_2(z, J(x_m)) \to +0 \quad \text{при} \quad n, m \to +\infty.\boxtimes$$

И, значит, сходится к $x \in X_1$ в силу полноты (X_1, d_1).

Стало быть, для каждого $z \in X_2$ найдется такое $x \in X_1$, что

$$\widehat{\mathrm{J}}(x) = z.$$

4. *Инъективность*. Пусть для некоторого $y \in X_2$ найдутся две точки такие, что $\widehat{\mathrm{J}}(x_1) = \widehat{\mathrm{J}}(x_2) = y$, тогда

$$d_1(x_1, x_2) = d_2(\widehat{\mathrm{J}}(x_1), \widehat{\mathrm{J}}(x_2)) = d_2(y, y) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Лемма доказана.

Справедлива следующее утверждение:

Теорема 4. *Всякое метрическое пространство* (X, d) *изометрично некоторой части метрического пространства* $(\mathbb{B}(X), d_0)$.

Доказательство.

Итак, пусть метрическое пространство (X, d) не пусто. Тогда найдется точка $x_0 \in X$. Определим функцию на метрическом пространстве (X, d) следующим образом:

$$f_x(y) = d(y, x) - d(x_0, y), \tag{9.2}$$

где точки $x, x_0 \in X$ фиксированные, а точка $y \in X$ произвольная.

Отметим, что имеет место следующее неравенство:

$$|d(y, x) - d(x_0, y)| \leqslant d(x, x_0) \tag{9.3}$$

□ Действительно, имеют место следующие неравенства:

$$d(y, x) \leqslant d(y, x_0) + d(x_0, x), \quad d(y, x_0) \leqslant d(x_0, x) + d(x, y).$$

Из этих двух неравенств вытекает неравенство (9.3) ⊠

Значит,

$$|f_x(y)| \leqslant d(x, x_0),$$

т. е. функция $f_x(y)$ для каждого фиксированного $x \in X$ принадлежит метрическому пространству $\mathbb{B}(X)$ как функция $y \in X$. Для фиксированных $x_1, x_2 \in X$ имеют место следующие цепочки выражений:

$$|f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)| = |d(y, x_1) - d(y, x_2)| \leqslant d(x_1, x_2).$$

Отсюда получаем, что

$$d_0(f_{x_1}, f_{x_2}) = \sup_{y \in X} |f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)| \leqslant d(x_1, x_2). \tag{9.4}$$

Докажем, что на самом деле в неравенстве (9.4) имеет место равенство. С этой целью достаточно указать такое $y \in X$, что имеет место равенство. Действительно, пусть $y = x_1$, тогда имеем

$$|f_{x_1}(x_1) - f_{x_2}(x_1)| = d(x_1, x_2).$$

Итак,

$$d_0(f_{x_1}, f_{x_2}) = d(x_1, x_2).$$

Таким образом, установлена изометрия между всем метрическим пространством (X, d) и частью метрического пространства $\mathbb{B}(X)$.

Теорема доказана.

§ 10. Пополнение метрических пространств.

Как мы уже говорили, не всякое метрическое пространство полно относительно заданной метрики. Однако, для всякого метрического пространства существует операция пополнения — добавления всех предельных точек последовательностей, после которой пополненное метрическое пространство уже полно относительно заданной метрики.

Пример 15. Пусть $X = \mathbb{C}^{(1)}([0,1])$ и

$$d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|,$$

тогда пополнением этого пространства относительно метрики $d(f,g)$ будет пространство $\mathbb{C}[0,1]$. С другой стороны, рассмотрим метрическое пространство $X = \mathbb{C}^{(1)}[0,1]$ с другой метрикой

$$d_p(f,g) = \left(\int_0^1 |f(x) - g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Тогда при пополнении мы получим пространство Лебега $L^p(0,1)$.

Определение 28. *Пополнением $(\widetilde{X}, d)$ метрического пространства (X,d) называется полное метрическое пространство, в котором (X,d) изометрично некоторому всюду плотному подмножеству в $(\widetilde{X}, d)$.*

Замечание. Здесь нужно понять, что можно было бы «попросту» сказать, что операция пополнения — это операция добавления всех предельных точек фундаментальных последовательностей $\{x_n\} \subset$ $\subset (X,d)$ в более «широкое» множество $(\widetilde{X}, d)$ и писали бы

$$(X,d) \overset{ds}{\subset} (\widetilde{X}, d).$$

Однако, хоть эта операция «понятная», но может быть не реализована, поскольку для этого нужно точно знать объемлющее полное относительно той же метрики пространство $(\widetilde{X}, d)$. И тогда замыкание множества X в этом метрическом пространстве и дает пополнение.

При доказательстве ниже следующей теоремы мы предлагаем другой подход пополнения, при котором исходное пространство (X,d) лишь изометрично некоторой плотной части в пополненном пространстве $(\widetilde{X}, d)$ и пишем

$$(\mathrm{J}X, d) \overset{ds}{\subset} (\widetilde{X}, d).$$

Теорема 5. *Всякое метрическое пространство имеет единственное с точностью до изометрии пополнение.*

Доказательство.

1. По доказанной ранее теоремы об изометрии метрическое пространство (X,d) изометрично некоторому подмножеству полного метрического пространства $\mathbb{B}(X)$ и пусть J — это изометрия, о которой идет речь. Тогда рассмотрим

$$\mathrm{J}X \subset \mathbb{B}(X).$$

Замыкание множества $\mathrm{J}(X)$ в полном метрическом пространстве $\mathbb{B}(X)$, очевидно, является полным метрическим пространством. Обозначим это замыкание через $\widetilde{\mathbb{B}}(X)$.

2. Заметим, что поскольку $(\widetilde{\mathbb{B}}(X), d_0)$ замкнуто в $(\mathbb{B}(X), d_0)$, то $(\widetilde{\mathbb{B}}(X), d_0)$ содержит все свои предельные точки и, следовательно, является полным метрическим пространством.

3. Теперь воспользуемся результатом леммы 8 о продолжении изометрии. Возьмем

$$E_2 = X, \quad E_1 = \mathrm{J}X, \quad X_2 = \widetilde{X}, \quad X_1 = \widetilde{\mathbb{B}}(X),$$

где (X_2, d) — это и есть искомое полное метрическое пространство по условию. Причем

$$E_1 \overset{ds}{\subset} X_1, \quad E_2 \overset{ds}{\subset} X_2 \quad \text{и} \quad \mathrm{J}^{-1} : (E_1, d) \to (E_2, d_0) - \text{изометрия.}$$

Следовательно, по лемме 8 существует продолжение $\widehat{\mathrm{J}}^{-1}$ со множества E_1 до множества X_1. Причем

$$\widehat{\mathrm{J}}^{-1} : (X_1, d) \to (X_2, d_0) - \text{это изометрия.}$$

4. Теперь в качестве $(\widetilde{X}, d)$ возьмем следующее метрическое пространство

$$(\widetilde{X}, d) \overset{def:}{=} (\widehat{\mathrm{J}}^{-1} X_1, d).$$

Докажем, что $(\widetilde{X}, d)$ и есть пополнение метрического пространства (X, d).

□ Действительно, докажем замкнутость $(\widetilde{X}, d)$. Пусть $\{x_n\} \subset \widetilde{X}$ и

$$x_n \overset{d}{\to} x.$$

Докажем, что $x \in \widetilde{X}$. Действительно, в силу изометрии $\widehat{\mathrm{J}}$ и полноты X_2 имеем

$$\widehat{\mathrm{J}} x_n \overset{d_0}{\to} \widehat{\mathrm{J}} x = y \in X_2 \Rightarrow \exists\, x = \widehat{\mathrm{J}}^{-1} y \in X_1,$$

поскольку по определению X_1 имеет вид $X_1 = \widehat{\mathrm{J}}^{-1} X_2$. ⊠

5. По построению $(\widetilde{X}, d)$ имеет в качестве плотного подмножества метрическое пространство (X, d). А в силу единственности замыкания множества пополнение $(\widetilde{X}, d)$ однозначно определено с точностью до процедуры построения через изометрию $\widehat{\mathrm{J}}$ и, следовательно, пополнение единственно с точностью до изометрии.

Теорема доказана.

§ 11. Теорема Банаха–Штейнгауза.

Теорема 6. *Пусть (X, d) — это полное метрическое пространство и $\{B_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — семейство замкнутых шаров, причем $B_{n+1} \subset B_n$ и радиусы шаров стремятся к 0, тогда*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{a\},$$

где a некоторая точка из X.

Доказательство. Действительно, возьмем последовательность $\{a_n\}$ такую, что $a_n \in B_n$. Поскольку шары вложены и их радиусы стремятся к нулю, то эта последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна.

☐ Это следует из того, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное $N \in \mathbb{N}$, что при $n, m > N$

$$a_n, a_m \in B_{\min\{n,m\}},$$

а радиус шара $B_{\min\{n,m\}}$ стремиться к нулю при $N \to +\infty$. ⊠

Следовательно, в силу полноты (X, d) сходится к a, которая в силу замкнутости шаров B_n, принадлежит их пересечению.

Докажем, что в точности пересечение этих шаров состоит из одной точки.

☐ Действительно, пусть

$$a, b \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n - \text{замкнуто}.$$

Тогда найдутся такие две последовательности

$$\{a_m\},\ \{b_m\} \subset \bigcap_{n=1}^{m} B_n, \quad a_m \xrightarrow{d} a,\ b_m \xrightarrow{d} b, \quad d(a_m, b_m) \leqslant r_m \to +0$$

при $m \to +\infty$. Справедливо следующее неравенство:

$$d(a, b) \leqslant d(a, a_m) + d(a_m, b_m) + d(b_m, b) \to +0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Следовательно, $a = b$.

Теорема доказана.

Справедлива важная теорема Бэра о категориях.

Теорема 7. *Пусть (X, d) — это полное метрическое пространство, которое представимо в виде*

$$X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} X_n, \quad X_n = \overline{X}_n,$$

тогда хотя бы одно множество X_{n_0} содержит открытый шар положительного радиуса.

Доказательство.

Доказательство, проведем по индукции.

1. Если $X = X_1$, то доказывать нечего, поскольку тогда X_1 содержит все открытые шары.

2. Пусть $X \neq X_1$, тогда $X \backslash X_1$ — открыто и тогда найдется такой непустой открытый шар $O(x_1, \varepsilon_1) \subset X \backslash X_1$, причем

$$O(x_1, \varepsilon_1) \cap X_1 = \varnothing.$$

Теперь либо $O(x_1, \varepsilon_1) \subset X_2$ и тогда утверждение доказано либо

$$O(x_1, \varepsilon_1) \cap (X \backslash X_2) \neq \varnothing$$

и, поскольку $X \backslash X_2$ открыто, тогда найдется открытый шар

$$O(x_2, \varepsilon_2) \subset O(x_1, \varepsilon_1) \cap X \backslash X_2, \quad \varepsilon_2 < \frac{\varepsilon_1}{4}.$$

Понятно, что

$$O(x_2, \varepsilon_2) \cap (X_1 \cup X_2) = \varnothing.$$

n. Таким образом, на n-ом шаге мы либо найдем непустой открытый шар $O(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1}) \subset X_n$ либо получим цепочку вложенных открытых шаров

$$O(x_n, \varepsilon_n) \subset O(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1}) \subset \cdots \subset O(x_2, \varepsilon_2) \subset O(x_1, \varepsilon_1), \quad \varepsilon_n < \frac{\varepsilon_{n-1}}{4},$$

$$O(x_n, \varepsilon_n) \cap (X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n) = \varnothing.$$

При этом

$$d(x_n, x_{n+m}) \leqslant d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \leqslant \\ \leqslant \frac{\varepsilon_n}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{4} + \ldots\right) < \frac{\varepsilon_n}{3}. \quad (11.1)$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной и сходящейся к некоторому элементу $x_0 \in X$ в силу полноты (X, d).

Теперь перейдем к пределу при $m \to +\infty$ в неравенстве (11.1) и получим, что

$$d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon_n}{3} \Rightarrow x_0 \in O(x_n, \varepsilon_n) \Rightarrow x_0 \notin \bigcup_{k=1}^{n} X_n.$$

В пределе получим, что $x_0 \notin X$. Противоречие.

Теорема доказана.

Следующая теорема, которая называется *принцип равномерной ограниченности* или *теорема Банаха–Штейнгауза*, имеет важное значение при рассмотрении сопряженных пространств.

Прежде всего дадим определение равностепенной непрерывности последовательности функций $\{f_n(x)\}$.

Определение 28. *Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ называется равностепенно непрерывной на метрическом пространстве (X, d), если для любой последовательности $\{x_m\} \subset (X, d)$ такой, что*

$$x_m \xrightarrow{d} x \in X \Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x) - f_n(x_m)| \to +0.$$

З а м е ч а н и е . Отличие равностепенной непрерывности последовательности $\{f_n(x)\}$ от непрерывности каждой функции $f_n(x)$ заключается в свойстве

$$x_m \xrightarrow{d} x \in X \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_m)| \to +0 \quad \text{при фиксированном} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Дадим определение равностепенной ограниченности последовательности функций $\{f_n(x)\}$.

О п р е д е л е н и е 2 9 . *Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ называется равностепенно по $n \in \mathbb{N}$ ограниченной на метрическом пространстве (X, d), если выполнено неравенство*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| \leqslant K < +\infty, \quad x \in X, \quad K = K(x).$$

Т е о р е м а 8. *Пусть (X, d) — это полное метрическое пространство и выполнены следующие свойства:*

1. последовательность функций

$$f_n(x) : (X, d) \to \mathbb{R}^1$$

является непрерывной на (X, d) при каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$;

2. последовательность $\{f_n(x)\}$ равностепенно по $n \in \mathbb{N}$ ограничена для всякого фиксированного $x \in X$.

Тогда найдется такой замкнутый шар $K \subset X$ положительного радиуса, что

$$\sup_{x\in K} \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| < +\infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о .

Введем множества

$$X_N = \left\{ x \in X : \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| \leqslant N \right\}.$$

1. В силу непрерывности $f_n(x)$ множества X_N замкнуты.

□ Действительно, пусть $\{x_m\} \in X_N$ и

$$x_m \xrightarrow{d} x.$$

Докажем, что $x \in X_N$. Справедливо следующее неравенство для каждого $n \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(x)| \leqslant |f_n(x) - f_n(x_m)| + |f_n(x_m)|. \tag{11.2}$$

Поскольку функции $f_n(x)$ непрерывны на X для каждого $n \in \mathbb{N}$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $m_1 \in \mathbb{N}$, что

$$|f_n(x_{m_1}) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Поэтому из неравенства (11.2), мы получим неравенство

$$|f_n(x)| \leqslant \varepsilon + |f_n(x_{m_1})| \leqslant \varepsilon + N \quad \text{при} \quad x \in X_N.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получим неравенство

$$|f_n(x)| \leqslant N \Rightarrow x \in B_N^{(n)} \equiv \{x \in X : \ |f_n(x)| \leqslant N\} \Rightarrow x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_N^{(n)} = X_N.$$

2. Поскольку $\{f_n(x)\}$ равностепенно по $n \in \mathbb{N}$ ограничена, то

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_N.$$

□ Действительно, для каждого $x \in X$ имеет место неравенство

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| \leqslant K(x) < +\infty \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ \exists \, N \in \mathbb{N}, \quad K(x) \leqslant N \Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| \leqslant K(x) \leqslant N \Rightarrow x \in X_N. \boxtimes$$

3.Следовательно, в силу теоремы Бэра о категориях найдется такое $N_0 \in N$, что X_{N_0} содержит внутренние точки, а следовательно, некоторый замкнутый шар K. И, следовательно,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| \leqslant N_0 < +\infty \quad \text{для всех} \quad x \in K \Rightarrow \sup_{x \in K} \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| \leqslant N_0 < +\infty.$$

Теорема доказана.