Лекция 1. Слабая, $*-$слабая и сильная сходимости.

Корпусов Максим Олегович

Курс лекций по нелинейному функциональному анализу

5 сентября 2012 г.

Определения

Итак, напомним, что действие линейного функционала $f \in X^*$ на элементе некоторого линейного пространства $u \in X$ мы обозначаем как

$$\langle f, x \rangle : X^* \times X \to \mathbb{R}^1.$$

Пусть $\mathbb{B}$ — это нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|$, с сопряженным $\mathbb{B}^*$ и скобками двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Дадим определение сильной сходимости.

Определение 1. *Сильной сходимостью последовательности* $\{u_n\}$ *в банаховом пространстве* $\mathbb{B}$ *к некоторому элементу* $u \in \mathbb{B}$ *называется сходимость по норме следующей числовой последовательности:*

$$\|u_n - u\| \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to +\infty \quad \textit{для некоторого} \quad u \in \mathbb{B}. \qquad (1)$$

Определения

Норма сопряженного пространства $\mathbb{B}^*$ вводится как

$$\|f\|_* \equiv \sup_{\|u\|=1} |\langle f, u\rangle| \,. \qquad (2)$$

Даже если исходное нормированное пространство X не является полным, его сопряженное пространство X^* полно относительно нормы (2). Это следствие теоремы Банаха–Штейнгауза.

Справедлива следующая полезная лемма:

Лемма

Пусть $u \in \mathbb{B}$ и $f \in \mathbb{B}^*$, тогда имеет место следующее неравенство

$$|\langle f, u\rangle| \leqslant \|f\|_* \|u\|. \qquad (3)$$

Определения

Перейдем теперь к понятию слабой сходимости последовательностей банахова пространства $\mathbb{B}$. Дадим следующее определение.

Определение 2. *Последовательность* $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$ *называется слабо сходящейся к некоторому элементу* $u \in \mathbb{B}$, *если для любого элемента* $f \in \mathbb{B}^*$ *имеем*

$$\langle f, u_n \rangle \to \langle f, u \rangle.$$

Слабую сходимость последовательности $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$ к некоторому элементу $u \in \mathbb{B}$ будем обозначать следующим образом:

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}.$$

Определения

Теперь мы можем ввести понятие $*-$слабой сходимости в пространстве $\mathbb{B}^*$. Дадим следующее определение:

Определение 3. *Последовательность элементов* $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$ $*-$*слабо сходится к некоторому элементу* $f \in \mathbb{B}^*$, *если для любого* $u \in \mathbb{B}$ *имеет место предельное равенство*

$$|\langle f_n, u\rangle - \langle f, u\rangle| \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to +\infty. \tag{4}$$

Обозначается $*-$слабая сходимость следующим образом:

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad * -\text{слабо в} \quad \mathbb{B}^* \tag{5}$$

Дважды сопряженное пространство

Дадим определение.

Определение 4. *Через* $\mathbb{B}^{**}$ *обозначено пространство линейных и непрерывных функционалов над пространством* $\mathbb{B}^{*}$, *относительно нормы*

$$\|v\|_{**} \equiv \sup_{\|f\|_{*}=1} |\langle v, f\rangle_{*}| \tag{6}$$

и в силу леммы 1 имеет место полезное неравенство

$$|\langle v, f\rangle_{*}| \leqslant \|v\|_{**}\|f\|_{*}, \tag{7}$$

где $\langle v, f\rangle_{*}$ — это скобки двойственностей между $\mathbb{B}^{*}$ и $\mathbb{B}^{**}$.

Дважды сопряженное пространство

Теперь понятна и связь скобок двойственности:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \quad \text{и} \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_*.$$

Действительно, имеем

$$\langle u, f \rangle_* = \langle f, u \rangle \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{B} \subset \mathbb{B}^{**} \quad \text{и} \quad f \in \mathbb{B}^*.$$

Поэтому в одном частном, но важном случае, когда $\mathbb{B}$ можно отождествить со всем пространством $\mathbb{B}^{**}$, получаем

$$\langle u, f \rangle_* = \langle f, u \rangle \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{B} = \mathbb{B}^{**} \quad \text{и} \quad f \in \mathbb{B}^*. \tag{8}$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема

Справедливы следующие два утверждения:

(i) *Всякая слабо сходящаяся последовательность* $\{u_n\}$ *из банахова пространства* $\mathbb{B}$ *ограничена, причем*

$$\textit{если} \quad u_n \rightharpoonup u_\infty \quad \textit{при} \quad n \to +\infty, \quad \textit{то} \quad \|u_\infty\| \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|;$$

(ii) *Всякая* $*-$*слабо сходящаяся последовательность* $\{f_n\}$ *из банахова пространства* $\mathbb{B}^*$ *ограничена, причем*

$$\textit{если} \quad f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f_\infty \quad \textit{при} \quad n \to +\infty, \quad \textit{то} \quad \|f_\infty\|_* \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_*.$$

Рефлексивность и сепарабельность

Определение 5. *Банахово пространство* $\mathbb{B}$, *которое можно отождествить со своим дважды сопряженным пространством* $\mathbb{B}^{**}$, *называется рефлексивным.*
Определение 6. *Банахово пространство* $\mathbb{B}$ *называется сепарабельным если в этом пространстве существует счетное всюду в* $\mathbb{B}$ *плотное множество* $\mathbb{M}$, *т. е. если любой элемент* $u \in \mathbb{B}$ *можно приблизить с любой наперед заданной точностью элементом из множества* $\mathbb{M} \subset \mathbb{B}$.
Приведем следующую полезную лемму.

Лемма

Если сепарабельно банахово пространство $\mathbb{B}^*$, *то сепарабельно и нормированное пространство* $\mathbb{B}$.

Критерий слабой сходимости

Теорема

Пусть $\{u_n\}$ *— ограниченная по норме последовательность элементов рефлексивного банахова пространства* $\mathbb{B}$*. Тогда из* $\{u_n\}$ *можно выделить слабо сходящуюся в* $\mathbb{B}$ *подпоследовательность* $\{u_{n_n}\}$:

$$u_{n_n} \rightharpoonup u \quad \textit{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

Критерий $*-$слабой сходимости

Теперь мы можем получить аналогичный результат в случае пространства $\mathbb{B}^*$.

Теорема

Пусть $\mathbb{B}$ — есть сепарабельное банахово пространство и $\{f_n\}$ — ограниченная по норме последовательность элементов банахова пространства $\mathbb{B}^*$. Тогда из $\{f_n\}$ можно выделить $*-$слабо сходящуюся в $\mathbb{B}^*$ подпоследовательность $\{f_{n_n}\}$:

$$f_{n_n} \xrightarrow{*} f \quad * - \text{слабо в} \quad \mathbb{B}^* \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Равномерно выпуклые банаховы пространства

Дадим определение. **Определение 7.** *Пространство* $\mathbb{B}$ *называется равномерно выпуклым, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что из неравенств* $\|u\| \leqslant 1$, $\|v\| \leqslant 1$ *и* $\|u - v\| \geqslant \varepsilon > 0$ *следует*

$$\|u + v\| \leqslant 2(1 - \delta(\varepsilon)). \tag{9}$$

Теперь важное утверждение.

Теорема

Всякое равномерно выпуклое банахово пространство $\mathbb{B}$ *рефлексивно.*

Критерий сильной сходимости

Теорема

Если $\mathbb{B}$ — это равномерно выпуклое банахово пространство, то из того условия, что

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

и

$$\|u_n\| \to \|u\|$$

вытекает, что

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Доказательство этого критерия

Без ограничения общности можно считать, что $\|u\| = 1$ и $\|u_n\| \neq 0$. Введем следующее обозначение:

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}.$$

Ясно, что $\|v_n\| = 1$ и $v_n \rightharpoonup u$ при $n \to +\infty$. Теперь возьмем $\varepsilon_n = \|v_n - u\|$, тогда по определению 7 найдется такая неубывающая функция $\delta(\varepsilon)$ и $\delta(0) = 0$, что

$$\|v_n + u\| \leqslant 2\left(1 - \delta\left(\|v_n - u\|\right)\right). \tag{10}$$

Поскольку в силу теоремы Мильмана банахово пространство $\mathbb{B}$ рефлексивно, поэтому имеем

$$\begin{aligned}\|v_n + u\| = \|v_n + u\|_{**} = \sup_{\|f\|_*=1} |\langle v_n + u, f\rangle_*| = \\ = \sup_{\|f\|_*=1} |\langle f, v_n + u\rangle| \geqslant |\langle f, v_n + u\rangle|\end{aligned} \tag{11}$$

Доказательство этого критерия

Переходя к нижнему пределу в неравенстве (10) с учетом неравенства (11), получим следующее неравенство:

$$2 \liminf_{n\to+\infty} \left(1 - \delta\left(\|v_n - u\|\right)\right) \geqslant \liminf_{n\to+\infty} \left|\langle f, v_n + u\rangle\right| = 2\left|\langle f, u\rangle\right|, \tag{12}$$

поскольку $v_n \rightharpoonup u$ слабо в $\mathbb{B}$. Левая часть неравенства (12) не зависит от $f \in \mathbb{B}^*$, поэтому можно перейти к supremum по всем $f \in \mathbb{B}^* : \ \|f\|_* = 1$ и получить неравенство

$$2 \liminf_{n\to+\infty} \left(1 - \delta\left(\|v_n - u\|\right)\right) \geqslant 2\|u\|_{**} = 2\|u\| = 2.$$

Которое возможно только в том случае, когда

$$\lim_{n\to+\infty} \|v_n - u\| = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$u_n = \|u_n\| v_n \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

поскольку $\|u_n\| \to \|u\| = 1$.

Пример — пространства Лебега. Определения.

Теперь мы проиллюстрируем полученные в этой лекции общие результаты на примере пространств Лебега. Прежде всего дадим определения сильной, слабой и $*-$слабой сходимостей для пространств $L^p(\Omega)$, где Ω область эвклидова пространства $\mathbb{R}^N$, а $p \in [1, +\infty]$. Итак, дадим определения.

Определение 8. *Последовательность* $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$ *называется сильно сходящейся к элементу* $u \in L^p(\Omega)$ *при* $p \in [1, +\infty]$, *если имеет место следующее предельное равенство*:

$$\lim_{n \to +\infty} \|u_n - u\|_p = \left(\int\limits_{\Omega} |u_n - u|^p \, dx \right)^{1/p} = 0.$$

Определение 9. *Последовательность* $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$ *называется слабо сходящейся к элементу* $u \in L^p(\Omega)$ *при* $p \in [1, +\infty)$, *если имеет место следующее предельное равенство:*

$$\lim_{n\to+\infty} \langle f, u_n\rangle_p = \langle f, u\rangle_p \quad \text{для всех} \quad f \in (L^p(\Omega))^*,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *— это скобки двойственности между банаховыми пространствами* $L^p(\Omega)$ *и* $(L^p(\Omega))^*$ *при* $p \in [1, +\infty)$.

Определение 10. *Последовательность* $\{f_n\} \subset L^\infty(\Omega)$ *называется* $*-$*слабо сходящейся к функции* $f \in L^\infty(\Omega)$, *если для всех* $u \in L^1(\Omega)$ *имеет место следующее предельное равенство*:

$$\lim_n \langle f_n, u \rangle_\infty = \langle f, u \rangle_\infty \quad \text{для всех} \quad u \in L^1(\Omega),$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_\infty$ *— это скобки двойственности между банаховыми пространствами* $L^\infty(\Omega)$ *и* $L^1(\Omega)$.

Пример — пространства Лебега. Сопряженные пространства.

Заметим, что в определении 10 фигурирует пространство $(L^p(\Omega))^*$ при $p \in [1, +\infty)$. Оказывается справедлива следующая теорема о явном выражении этого банахова пространства.

Теорема

Банахово пространство $(L^p(\Omega))^*$ при $p \in (1, +\infty)$ совпадает с банаховым пространством $L^q(\Omega)$ при $q = p/(p-1)$, а в случае $p = 1$ банахово пространство $\left(L^1(\Omega)\right)^*$ совпадает с пространством $L^\infty(\Omega)$.

Пример — пространства Лебега. Свойства сходимостей.

Теорема

Справедливы следующие два утверждения:

(i) *Всякая слабо сходящаяся последовательность* $\{u_n\}$ *из банахова пространства* $L^p(\Omega)$ *при* $p \in [1, +\infty)$ *ограничена, причем*

$$\text{если} \quad u_n \rightharpoonup u_\infty \quad \text{при} \quad n \to +\infty, \quad \text{то} \quad \|u_\infty\| \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|;$$

(ii) *Всякая* $*-$*слабо сходящаяся последовательность* $\{f_n\}$ *из банахова пространства* $L^\infty(\Omega)$ *ограничена, причем*

$$\text{если} \quad f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f_\infty \quad \text{при} \quad n \to +\infty, \quad \text{то} \quad \|f_\infty\|_* \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_*.$$

Пример — пространства Лебега. Критерий слабой сходимости.

Теорема

Пусть $\{u_n\}$ *— ограниченная по норме последовательность элементов рефлексивного банахова пространства* $L^p(\Omega)$ *при* $p \in (1, +\infty)$. *Тогда из* $\{u_n\}$ *можно выделить слабо сходящуюся в* $L^p(\Omega)$ *подпоследовательность* $\{u_{n_n}\}$:

$$u_{n_n} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad L^p(\Omega) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Пример — пространства Лебега. Критерий $*-$слабой сходимости.

Теорема

Пусть $\{f_n\}$ — ограниченная по норме последовательность элементов банахова пространства $L^\infty(\Omega)$. Тогда из $\{f_n\}$ можно выделить $*-$слабо сходящуюся в $L^\infty(\Omega)$ подпоследовательность $\{f_{n_n}\}$:

$$f_{n_n} \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad *-\text{слабо в} \quad L^\infty(\Omega) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Пример — пространства Лебега. Равномерная выпуклость.

Теперь рассмотрим вопрос о равномерной выпуклости пространств Лебега $L^p(\Omega)$ при $p \in (1, +\infty)$. Действительно, имеет место утверждение:

Теорема

Банаховы пространства $L^p(\Omega)$ равномерно выпуклы при $p \in (1, +\infty)$.

Пример — пространства Лебега. Критерий сильной сходимости.

Таким образом, в силу общего результата приходим к следующему утверждению:

Теорема

Из того условия, что при $p \in (1, +\infty)$

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad L^p(\Omega) \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

и

$$\|u_n\|_p \to \|u\|_p$$

вытекает, что

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$