ЛЕКЦИЯ 11А
Гильбертовы пространства

0. Необходимое условие «евклидовости». Простейшее свойство скалярного произведения

Как следует из материала лекции 11, необходимым (а также и достаточным — см. Колмогорова, Фомина) условием возможности задать норму с помощью скалярного произведения является выполнение для этой нормы равенства параллелограмма. Отсюда, в частности, следует, что пространства $L^\infty[0;1]$, $C[0;1]$ не являются гильбертовыми (являясь банаховыми).

Отметим также правило вынесения числового множителя из первого аргумента скалярного произведения:

$$(\lambda x, y) = \overline{(y, \lambda x)} = \overline{\lambda (y, x)} = \bar{\lambda}\overline{(y, x)} = \bar{\lambda}(x, y),$$

или $(\lambda x, y) = \bar{\lambda}(x, y)$.

1. Поляризационное тождество

(В этом пункте для краткости будем называть полуторалинейную форму билинейной формой. Для вещественного гильбертова пространства, очевидно, эти понятия совпадают.)

Одним из различий комплексного и вещественного гильбертовых пространств является то, что в первом можно восстановить произвольную билинейную форму $B(x, y)$ по значениям её квадратичной формы $B(x) \equiv B(x, x)$, а во втором — только симметричную. Действительно, при том же, что и для скалярного произведения, соглашении о линейности по второму аргументу имеем легко проверяемое тождество (носящее название *поляризационного*)

$$B(x, y) = \frac{1}{4}[B(x + y) - B(x - y) + iB(x - iy) - iB(x + iy)]. \tag{1}$$

В вещественном пространстве, конечно, никакого домножения на i не будет, но из неприменимости формулы (1) ещё не следует невозможность восстановления квадратичной формы (а вдруг её можно восстановить как-либо иначе?). Однако в том, что произвольную билинейную форму в вещественном пространстве нельзя восстановить по значениям её квадратичной формы, нетрудно убедиться уже на простом примере в двумерном пространстве: если

$$B((x^1, x^2)^T, (y^1, y^2)^T) \equiv a_{11}x^1y^1 + a_{12}x^1y^2 + a_{21}x^2y^1 + a_{22}x^2y^2, \tag{2}$$

то

$$B((x^1, x^2)^T) \equiv a_{11}(x^1)^2 + (a_{12} + a_{21})x^1x^2 + a_{22}(x^2)^2,$$

откуда следует, что любые билинейные формы вида (2) будут задавать одну и ту же квадратичную форму, если для этих билинейных форм $a_{11} = \text{const}$, $a_{22} = \text{const}$, $a_{12} + a_{21} = \text{const}$.

2. Замкнутые и незамкнутые подпространства гильбертова пространства

(Сразу оговоримся, что возможная незамкнутость бесконечномерного подпространства характерна для любого банахова пространства, но мы рассмотрим эту проблему на примере гильбертова пространства.)

1. Рассмотрим в гильбертовом пространстве l^2 ограниченный линейный оператор

$$A : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots).$$

Рассмотрим его область значений. В силу общих свойств линейного оператора она образует линейное подпространство (многообразие), которое мы обозначим $R(A)$. Будет ли оно замкнутым? Чтобы ответить на этот вопрос, будем рассуждать «в обход».

1) Нетрудно заметить, что $R(A)$ всюду плотно в пространстве l^2. В самом деле, в пространстве l^2 плотны уже финитные последовательности, т. е. такие, у которых отлично от нуля лишь конечное число членов (почему?). А все финитные последовательности заведомо принадлежат $R(A)$. Итак, $\overline{R(A)} = l^2$.

2) С другой стороны, $R(A)$ не может совпадать со всем пространством l^2. В самом деле, пусть $y = (y_1, \dots) \in R(A)$, $x = (x_1, \dots)$ — прообраз y. (Для нас сейчас не существенно, единственным ли образом можно восстановить этот прообраз, важно лишь его существование, которое имеет место по смыслу области значений оператора.) Тогда имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |y_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty.$$

С другой стороны, не для всякого элемента $z \in l^2$ выполнено $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |z_n|^2 < +\infty$. Например, для $z = \{\frac{1}{n}\}$ данный ряд расходится. Таким образом, $R(A) \subsetneq l^2$.

Легко видеть, что из 1) и 2) следует незамкнутость $R(A)$.

2. Оказывается, сумма замкнутых линейных подпространств может быть незамкнутым подпространством (линейным многообразием). Пусть

$$M = \{x_1, 0, x_3, 0, x_5, 0, \dots\}, \quad N = \{x_1, x_1, x_3, \frac{x_3}{3}, x_5, \frac{x_5}{5}, \dots\}.$$

Установим замкнутость этих подпространств.

1) Замкнутость M следует из того соображения, что оно изоморфно l^2 и поэтому полно как метрическое пространство.

2) Пусть $x^{(n)} \equiv (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots)$ — фундаментальная последовательность элементов подпространства N. Тогда в силу полноты l^2 имеем

$$x^{(n)} \to x = (x_1, x_2, \dots) \in l^2. \tag{3}$$

Остаётся доказать лишь, что $x \in N$. Заметим прежде всего, что из (3) следует, в частности: $x_j^{(n)} \to x_j$, $j \in \mathbb{N}$. В самом деле, ведь $|x_j^{(n)} - x_j| \leqslant \|x^{(n)} - x\|$. Но арифметические соотношения $x_{2k}^{(n)} = \frac{x_{2k-1}^{(n)}}{2k-1}$, определяющие подпространство N, сохраняются при переходе к пределу. Поэтому $x \in N$.

С другой стороны,
$$M + N \neq \overline{M + N} = l^2.$$
Действительно, все финитные последовательности лежат в $M + N$ (последовательно решаем систему уравнений.) Следовательно, $\overline{M + N} = l^2$. С другой стороны, для всех элементов из $M + N$ имеем $\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^2|x_{2k-1}|^2 < +\infty$, откуда аналогично предыдущему примеру получаем, что $M + N \neq l^2$. Итак,
$$\overline{M + N} = l^2 \neq M + N.$$

Замечание. Поскольку все сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны пространству l^2, то многие общие свойства первых могут быть изучены на примере последнего (чем мы будем пользоваться и в дальнейшем по ходу семинара). В то же время, случаи, где существенна связь той или иной дополнительной структуры на исходном пространстве (например, связь предела по мере или почти всюду с пределом по норме $L^2[0;1]$), мы вынуждены рассматривать исходное пространство.

3. Гильбертов сопряжённый оператор. Простейшие свойства и примеры

Непосредственно можно доказать следующие элементарные свойства сопряжённого оператора.

1. $(AB)^* = B^*A^*$. (Обратим внимание на сходство этой формулы с формулой оператора, обратного к произведению. Следует только иметь в виду, что, в отличие от обратного, сопряжённый оператор имеется у каждого ограниченного линейного оператора.)
2. $(\lambda A)^* = \bar{\lambda}A$.
3. Совершенно произвольный ограниченный линейный оператор A в гильбертовом пространстве может быть представлен в виде $A = B + iC$, где $B = \frac{A+A^*}{2}$, $C = \frac{A-A^*}{2i}$ — самосопряжённые операторы.

В следующих задачах требуется построить гильбертов сопряжённый оператор A^* к данному оператору A в данном гильбертовом пространстве l^2 (примеры 1)—5)), $L^2(\mathbb{R})$ (примеры 6), 7)), $L^2[0;1]$ (примеры 8), 9)).

1) $A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$, $A^*(y_1, y_2, y_3, \ldots) = (y_2, y_3, y_4, \ldots)$ (уже знакомые нам операторы правого и левого сдвига).

2) $A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3 \ldots)$, $A^*(y_1, y_2, y_3, \ldots) = (\bar{\alpha}_1 y_1, \bar{\alpha}_2 y_2, \bar{\alpha}_3 y_3, \ldots)$, причём $A = A^*$ тогда и только тогда, когда все числа α_i вещественны.

3) $A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$, $A^* = A$.

4) $A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, x_1, 0, 0, \ldots)$, $A^*(y_1, y_2, y_3, \ldots) = (y_n, 0, 0, \ldots)$.

5) $A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (\alpha_n x_n, \alpha_{n+1} x_{n+1}, \alpha_{n+2} x_{n+2} \ldots)$, $A^*(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, \bar{\alpha}_n y_n, \bar{\alpha}_{n+1} y_{n+1}, \ldots) = (y_2, y_3, y_4, \ldots)$.

6) $(Ax)(t) = x(t+h)$, $(A^*y)(t) = y(t-h)$. (Здесь и в следующем примере доказательство использует замену переменной в интеграле, представляющем скалярное произведение.)

7) $(Ax)(t)=x(-t)$, $(A^*y)(t)=y(-t)$.
8) $(Ax)(t)=\varphi(t)x(t)$, $\varphi(t)\in L^\infty[0;1]$, $(A^*y)(t)=\overline{\varphi(t)}y(t)$.
9) $(Ax)(t)=\int_0^t x(s)\,ds$ в $L^2[0;l]$. В данном случае приведём решение подробно. Прежде всего следует показать, что данный оператор действительно является ограниченным оператором в $L^2[0;1]$ (что заранее не очевидно). Имеем

$$|(Ax)(t)|=\left|\int_0^t 1\cdot x(s)\,ds\right|\leqslant\sqrt{\int_0^t 1^2\,ds\int_0^t x^2(s)\,ds}\leqslant\|x(t)\|_{L^2[0;1]}.$$

Теперь собственно вычислим сопряжённый оператор. Итак, пусть $x(t)$, $y(t)$ — произвольные функции из $L^2[0;1]$. Нам требуется найти такую функцию $z(t)$ (зависящую от $y(t)$), что $(y,Ax)=$ $=(z,x)$ при всех $x(t)\in L^2[0;1]$. Ясно, что придётся воспользоваться интегрированием по частям. Корректность интегрирования по частям, которое мы сейчас проведём, нуждается в дополнительном обосновании (поскольку мы имеем дело не с непрерывно дифференцируемыми функциями), которое мы отложим до более подробного изучения функциональных пространств. Для удобства интегрирования по частям введём функцию $v(t)$ по формуле

$$v(t)=-\int_t^1\overline{y(s)}\,ds.$$

Тогда

$$\int_0^1\left(\int_0^t x(s)\,ds\right)\overline{y(t)}\,dt=\left(\int_0^t x(s)\,ds\right)v(t)\Big|_0^1-\int_0^1 x(t)v(t)\,dt=\int_0^1 x(t)\int_t^1\left(\overline{y(s)}\,ds\right)dt,$$

где верхняя подстановка обратилась в ноль в силу специального выбора первообразной для $y(t)$ в виде $v(t)$. Таким образом, имеем $\int_0^1 x(t)\left[\overline{z(t)}-\int_t^1\overline{y(s)}\,ds\right]dt=0$. Полагая $x(t)=z(t)-$ $-\int_t^1 y(s)\,ds$, получим $z(t)=\int_t^1 y(s)\,ds$ почти всюду, откуда

$$(A^*y)(t)=\int_t^1 y(s)\,ds.$$

4. Ортогональная проекция на конечномерное подпространство. Ортопроекторы

1. Чтобы ортогонально спроецировать вектор на конечномерное подпространство L, достаточно спроецировать его на векторы ортонормированного базиса $\{e_k\}_{k=1}^n$ в L и сложить результаты:

$$\text{Пр}_L x=\sum_{k=1}^n (x,e_k)e_k. \tag{4}$$

Ортогональность существенна, как показывает простой пример. Пусть мы проецируем вектор $(1;1;1)^T$ на плоскость Oxy. Очевидно, результат равен $(1;1;0)^T$. Однако если применить формулу (4), взяв неортогональный нормированный базис $(0;1;0)^T$, $(1;1;0)^T/\sqrt{2}$, мы получим $(1;2;0)^T$.

2. Ортогональный проектор P в общем случае обладает двумя свойствами: $P^2 = P$, $P^* = P$. Докажем это.

Итак, ортогональный проектор P — это оператор, ставящий каждому элементу $x \in H$ вектор $y \in L$, где

$$x = y + z, \quad y \in L, z \in L^{\perp}.$$

Такое разложение единственно, а соответствующий оператор действительно линейный и ограниченный, как легко проверить: в силу теоремы Пифагора имеем $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$, откуда $\|P\| \leqslant 1$. На самом деле $\|P\| = 1$, если только подпространство L нетривиально.

Легко видеть, что $P^2 = P$. Действительно, проекция элемента y на подпространство L равна самому y. Теперь докажем самосопряжённость ортопроектора. Пусть $w \in H$ — произвольный элемент. Запишем ортогональное разложение и для него:

$$w = w_L + w_{\perp}, \quad w_L \in L, \quad w_{\perp} \in L^{\perp}.$$

Тогда получим:

$$(w, Px) = (w, y) = (w_L + w_{\perp}, y) = (w_L, y) = (w_L, y + z) = (Pw, x). \tag{5}$$

Обратно, любой ограниченный линейный оператор, обладающий указанными двумя свойствами, является ортопроектором. В самом деле, рассмотрим $L = PH \equiv R(P)$. Тогда, во-первых,

$$\forall x, w \in H \quad (w - Pw, Px) = (Pw - P^2 w, x) = (Pw - Pw, x) = 0.$$

Тем самым, оператор P действительно ставит в соответствие каждому элементу x его ортогональную проекцию на $L = R(P)$, где L — замкнутое подпространство, поскольку L можно рассматривать как ортогональное дополнение к $L^{\perp} \equiv (E - P)H$.

Замечание. Конечно, не всякий проектор является ортогональным. Можно рассмотреть пример

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Некоторые замечания о слабой сходимости

Рассмотрим сепарабельное гильбертово пространство H. Как следует из лекционного материала, в нём существует полная ортонормированная система, или ортонормированный базис $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Нетрудно видеть, что $e_n \rightharpoonup \theta$. В самом деле, слабая сходимость $x_n \rightharpoonup x$ в гильбертовом пространстве равносильна условию

$$\forall y \in H \ (y, x_n) \to (y, x).$$

Но тогда имеем

$$\forall y \in H \ (y, e_n) = y_n \to 0 = (y, \theta),$$

где y_n суть коэффициенты Фурье элемента $y \in H$, которые стремятся к нулю в силу равенства Парсеваля.

Задачи для самостоятельного решения

1. Показать, что скалярное произведение непрерывно по норме по совокупности переменных, т. е. если $x_n \to x, y_n \to y$, то $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

2. (Продолжение.) Можно ли в условии предыдущей задачи заменить сильную сходимость на слабую:
1) для одной из последовательностей?
2) для обеих последовательностей?

3. Доказать, что если $x_n \rightharpoonup x$ и $\|x_n\| \to \|x\|$, то $x_n \to x$. Показать, что отказаться от второго условия нельзя.

4. Доказать единственность слабого предела: если $x_n \rightharpoonup x$ и $x_n \rightharpoonup y$, то $x = y$.

5. 1) Доказать n-мерную теорему Пифагора: если в наборе $\{x_k\}_{k=1}^n$ все элементы попарно ортогональны, то $\|x_1 + \ldots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \ldots + \|x_n\|^2$.
2) Доказать, что попарно ортогональные элементы (среди которых нет нулевого!) линейно независимы. В каком месте не пройдёт доказательство при наличии нулевого элемента?

6. Найти сопряжённые к следующим операторам в l^2:
1) $A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$;
2) $A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, 0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots)$;
... в $L^2(\mathbb{R})$:
3) $(Ax)(t) = \varphi(t)x(t + h)$, $\varphi(t) \in L^\infty(\mathbb{R})$;
4) $(Ax)(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$.
Те из операторов, которые не совпали со своими сопряжёнными, представить в виде $C + iD$, где C и D — самосопряжённые.

7. 1) Как выглядит матрица оператора A^* в конечномерном пространстве, если дана матрица оператора A? Рассматриваются матрицы относительно фиксированного ортонормированного базиса.
2) Останется ли результат верным, если снять условие ортонормированности базиса?
3) Убедиться, что этот результат согласуется с результатами задач 6.1), 6.2) (предварительно рассмотрев эти задачи для конечномерного случая).

8. Пусть $A \in L(H)$ — обратимый оператор. Доказать, что существует $(A^*)^{-1}$ и он равен $(A^{-1})^*$. (Тем самым, оператор обратим тогда и только тогда, когда его сопряжённый обратим.)

9. Пусть M — произвольное множество в гильбертовом пространстве. Пусть $M^\perp \equiv \equiv \{x \in H \mid \forall y \in M \ (y, x) = 0\}$ (ортогональное дополнение множества). Доказать следующие факты:

1) $M^\perp$ — (замкнутое!) подпространство;
2) $M^{\perp\perp} \supset M$, причём равенство имеет место тогда и только тогда, когда M — замкнутое подпространство;
3) если $M \subset N$, то $N^\perp \subset M^\perp$;
4) $M^\perp = M^{\perp\perp\perp}$;
5) если M — линейное многообразие, то $\overline{M} = H$ тогда и только тогда, когда из $x \perp M$ следует, что $x = \theta$.

10. Доказать, что если M, N суть (замкнутые) подпространства и $M \perp N$, то $M + N$ — замкнутое подпространство.

11*. (Продолжение.) Пусть M, N суть (замкнутые) подпространства и при некотором $\varepsilon > 0$

$$\sup\{|(x, y)| \mid \|x\| = \|y\| = 1,\, x \in N,\, y \in M\} < 1 - \varepsilon.$$

Доказать, что $M + N$ — замкнутое подпространство.

12. С помощью ортогонализации Грама—Шмидта получить (с точностью до нормировочного коэффициента) первые 3 многочлена Лежандра.

13. Для функции $x(t) = e^t$ найти такие многочлены степеней 0, 1, 2, что норма $\|e^t - p_n(t)\|$ в $L^2[0; 1]$ минимальна.

14. (Продолжение.) Тот же вопрос для $x(t) = t^3$ в $L^2[-1; 1]$. Объяснить особенность полученного результата.

15. 1) В $L^2[-1; 1]$ построить проекцию любой функции на подпространства чётных/нечётных функций.
2*) Как проще всего доказать, что линейные многообразия чётных и нечётных функций действительно образуют (замкнутые) подпространства?

16. 1) Убедиться, что оператор Q (в самом конце основного текста) является проектором и что он не самосопряжён. Описать соответствующее проецирование геометрически.
2) Те же вопросы для оператора Q^T.

17. Доказать, что если $A \in L(H)$, $A = A^*$, то оператор $E + iA$ обратим.

18*. Будем говорить, что множество M в гильбертовом пространстве *слабо замкнуто*, если из $x_n \in M$, $x_n \rightharpoonup x$ следует $x_n \to x$. Слабым замыканием множества M будем называть множество, состоящее из слабых пределов всевозможных слабо сходящихся последовательностей $\{x_n\} \subset M$.
1) Доказать, что замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве слабо замкнуто.
2) Найти слабое замыкание единичной сферы в l^2.

19*. Показать, что на бесконечномерном гильбертовом пространстве нельзя нетривиальным образом ввести меру. Именно, если потребовать от меры выполнения стандартных свойств (неотрицательность, счётная аддитивность), а также естественной для линейного пространства инвариантности относительно переносов и строгой положительности для любого непустого открытого множества, то окажется, что мера любого непустого открытого множества будет бесконечной.