Лекция 5б
Топологические пространства — 2. Направленности

1. Частичный порядок

Напомним

Определение. Говорят, что на множестве X задано *отношение частичного порядка*, если для некоторых пар (x, y) элементов множества X сказано, что $x \leqslant y$, причём выполнены следующие условия:
1) $\forall x \in X \; x \leqslant x$ (рефлексивность);
2) $\forall x, y \in X \; (x \leqslant y,\, y \leqslant x \Rightarrow x = y)$ (антисимметричность);
3) $\forall x, y, z \in X \; (x \leqslant y,\, y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z)$ (транзитивность).

Замечания.
1. Говорят о частичном порядке, потому что не обязательно любые два элемента $x, y \in R$ сравнимы, т. е. не для каждой пары элементов $x, y \in R$ верно хотя бы одно из соотношений $x \leqslant y$, $y \leqslant x$. Если в R сравнимы все пары элементов, то такое отношение порядка называется *линейным порядком.* Очевидно, линейный порядок представляет собой частный случай частичного порядка.
2. В дальнейшем без всяких оговорок будем употреблять запись $y \geqslant x$ в качестве синонима записи $x \leqslant y$.
3. Иногда говорят «x меньше y» и пишут «$x < y$», имея в виду, что $x \leqslant y$ и при этом $x \neq y$.

Примеры.

1. Множество натуральных чисел с обычным порядком является частично (и даже линейно) упорядоченным множеством.

2. То же верно для множества действительных чисел.

3. Введём отношение частичного порядка между числовыми функциями на некотором множестве X следующим образом: $f \leqslant g$, если при всех $x \in X$ верно числовое неравенство (понимаемое в обычном смысле) $f(x) \leqslant g(x)$. Проверьте, что все условия выполнены. Очевидно, что найдутся несравнимые функции: например, при $X = [0; 1]$ можно взять $f(x) = x$, $g(x) = 1 - x$.

3а. Аналогично можно ввести отношение частичного порядка на множестве функций с общей областью определения и со значениями в фиксированном частично упорядоченном множестве. (Проверка предоставляется читателям.)

4. Введём отношение частичного порядка между парами действительных чисел так: $(x_1, y_1) \leqslant \leqslant (x_2, y_2)$, если одновременно $x_1 \leqslant x_2$, $y_1 \leqslant y_2$. Снова легко проверить, что все условия выполняются; при этом, например, элементы $(0, 1)$ и $(1, 0)$ не сравнимы.

5. На том же множестве можно ввести и отношение линейного порядка. Например, положим $(x_1, y_1) \leqslant (x_2, y_2)$, если
1) либо $x_1 < x_2$,

2) либо $x_1 = x_2$, $y_1 \leqslant y_2$.
Такое отношение порядка называется лексикографическим (по такому принципу расположены слова в словарях).

6. (Спасибо слушателям!) Наконец, ещё один пример возможного построения отношения линейного порядка на $\mathbb{R}^2$ даёт следующая идея: установим взаимно однозначное соответствие φ между $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^2$ (это можно сделать) и примем для $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ то же соотношение, что имеет место для a и b.

7. Часто бывает полезно установить отношение частичного порядка между подмножествами некоторого множества, а именно, считать, что $A \leqslant B$, если $A \subset B$ (или, наоборот, если $A \supset B$). В первом случае говорят, что система подмножеств *упорядочена по включению*, во втором условимся говорить об упорядочении по обратному включению. В более сложном случае эти подмножества могут быть наделены некоторой структурой, которая, например, сохраняется при произвольном пересечении (подпространства линейного пространства, кольца подмножеств данного множества, топологии и т. п.) или объединении (открытые подмножества данного метрического или топологического пространства).

Обсудим теперь понятия наименьшего и минимального элементов в частично упорядоченном множестве.

Определение. Элемент a частично упорядоченного множества R называется *наименьшим элементом* в множестве R, если выполнены 2 условия:
1) a сравним со всеми элементами R;
2) для любого $x \in R$ верно $a \leqslant x$.
(Условие 1) следует из 2), но мы предпочли его явно выделить.)

Определение. Элемент a частично упорядоченного множества R называется *минимальным элементом* в множестве R, если
для любого $x \in R$ из $x \leqslant a$ следует $x = a$.
Как видно, последнее условие можно переформулировать так: в R нет элементов, (сравнимых с a и) меньших a.

Очевидно:
1) всякий наименьший элемент есть минимальный (обратное неверно);
2) наименьший элемент единствен (для минимального, вообще говоря, неверно).

Аналогичным образом определяются наибольший и максимальный элементы.

Построим пример, иллюстрирующий возможную ситуацию. На рис. 1 изображено 6 точек, соединённых стрелками. Будем считать, что точка x меньше точки y, если из x в y можно дойти по стрелкам (в указанном направлении). При этом, как обычно, $x \leqslant y$ допускает, кроме указанного «меньше», и равенство. Тогда мы получим отношение частичного порядка. Легко видеть, что элемент a является наименьшим (и, тем самым, минимальным), причём других наименьших и даже минимальных элементов нет. Элементы b и c являются максимальными, и ни один из них не является наибольшим. Однако если (вновь спасибо слушателям!) соединить стрелкой b и c (в направлении от b к c), то c станет наибольшим элементом (оставаясь при этом, конечно, максимальным), а b статус максимального элемента утратит (см. рис. 2).

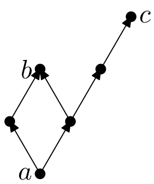

Рис. 1

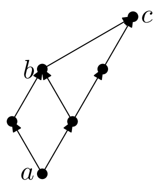

Рис. 2

Заметим в отношении приведённых ранее примеров, что в тех случаях, когда мы имеем дело с системой подмножеств (подпространств, колец и т. п.), замкнутой относительно пересечения и упорядоченной по включению, всегда имеется наименьший элемент — пересечение. Действительно, при любом $\gamma \in \Gamma$ имеем $\cap_\gamma A_\gamma \subset A_\gamma$. Наоборот, для системы всех открытых подмножеств множества X имеем наибольший элемент — объединение (совпадающее с X).

Обсудим теперь один интересный с точки зрения топологических пространств пример. Как мы уже отмечали (см. лекцию 5а), пересечение (но не объединение!) топологий есть снова топология. Далее, пусть имеются множество X и топологическое пространство T_3. Рассмотрим некоторое фиксированное отображение $f : X \to T_3$. Можно ли ввести топологию на X так, чтобы f было непрерывным? Конечно: достаточно ввести на X дискретную топологию. Тогда прообраз любого открытого множества в T_3, будучи некоторым подмножеством X, автоматически будет открытым.

Сделаем теперь следующий шаг. Заметим, что если $f : (X, \tau_1) \to T_3$ непрерывно и $\tau_2 \supset \tau_1$, то и $f : (X, \tau_2) \to T_3$ непрерывно. Действительно, все прообразы открытых множеств пространства T_3 как были открытыми в τ_1, так и остались таковыми в более сильной топологии τ_2. Поэтому если в какой-то топологии в пространстве X отображение f непрерывно, то оно будет непрерывно и во всякой более сильной топологии. Возникает вопрос: а нельзя ли найти в X самую слабую топологию, в которой f ещё непрерывно? Можно! Рассмотрим класс $\mathfrak{T}$ всех топологий в X, в которых f непрерывно. Он не пуст: в нём содержится по крайней мере дискретная топология. Рассмотрим теперь топологию

$$\tau = \cap_{\tau_\alpha \in \mathfrak{T}} \tau_\alpha.$$

По ранее доказанному τ — топология. Очевидно и то, что τ — наименьший по включению элемент в классе $\mathfrak{T}$. Наконец, $f : (X, \tau) \to T_3$ непрерывно. В самом деле, если каждая топология τ_α содержит прообразы всех открытых в T_3 множеств, то же верно и для пересечения всех топологий τ_α. Тем самым мы установили, что в (непустом!) классе топологий на множестве X, для которых отображение $f : X \to T_3$ непрерывно, имеется наименьший по включению элемент, который естественно назвать *слабейшей топологией, в которой отображение f непрерывно.*

2. Направленное множество. Направленность

Определение. Множество A называется *направленным множеством*, если на нём введено отношение частичного порядка $\leqslant$, удовлетворяющее следующему условию:
для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ существует $\alpha \in A$ такое, что $\alpha_1 \leqslant \alpha$, $\alpha_2 \leqslant \alpha$.

Легко видеть, что это условие всегда выполняется, если A — линейно упорядоченное множество: достаточно взять больший из двух элементов. Условие также будет выполнено, если в A имеется наибольший элемент. Однако в общем случае для частичного порядка оно, вообще говоря, не выполнено: в примере на рис. 1 нет элемента x такого, что $a \leqslant x$, $b \leqslant x$. В то же время, семейство всех подмножеств данного множества X является направленным множеством, поскольку для любых A, B верно $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$, т. е. $A \leqslant A \cup B$, $B \leqslant A \cup B$. Если бы мы ввели отношение порядка вторым способом (обратное включение), то имели бы $A \leqslant A \cap B$, $B \leqslant A \cap B$.

Замечание. Вовсе не требуется, чтобы α было отлично от α_1 и α_2! В частности, не для всякого α_0 найдётся $\alpha > \alpha_0$. И это не противоречит определению, ибо если положить $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0$, то можно взять $\alpha = \alpha_0$). Более того, направленное множество может состоять из одного элемента. В этом случае отношение порядка тривиально: $x \leqslant x$.

С учётом замечания легко видеть, что каждое из следующих числовых множеств (с обычным порядком) является направленным: $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $[0; 1)$, $[0; 1]$, $-\mathbb{N}$, $\{0; 1\}$. Также направленным множеством является множество $\mathbb{R}^2$ с любым из трёх введённых в примерах 4—6 отношений порядка.

Введём теперь понятие, играющее для топологических пространств приблизительно ту же роль, какую для метрических играет понятие последовательности, и являющееся его обобщением.

Определение. Функция $\{x_\alpha\} : A \to X$, где A — направленное множество, X — произвольное множество, называется *направленностью.*

В качестве простейшего примера направленности, разумеется, годится последовательность. Однако чуть позже мы увидим, почему последовательностей при построении теории топологических пространств недостаточно.

Введём теперь понятие предела направленности в топологическом пространстве. Но прежде модифицируем определение предела последовательности:

Определение. Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ в топологическом пространстве T стремится к элементу $x \in T$, если для любой окрестности $U_x \in \tau_x$ точки x найдётся такое N, что при всех $n \geqslant N$ верно $x_n \in U_x$.

Замечание. Обычно вместо $n \geqslant N$ пишут $n > N$. Для последовательностей это неважно, ведь $n \geqslant N \Leftrightarrow n + 1 > N$. Однако, как мы выяснили, направленное множество может не иметь элемента, большего данного. Поэтому для предела направленности имеем

Определение. Говорят, что направленность $\{x_\alpha\}$ в топологическом пространстве T стремится к элементу $x \in T$, если для любой окрестности $U_x \in \tau_x$ точки x найдётся такое $\alpha_0 \in A$, что при всех $\alpha \geqslant \alpha_0$ верно $x_\alpha \in U_x$.

Приведём простой пример. Направленность $x_\alpha = \frac{1}{\alpha}$, где $A = (0; +\infty)$ с обычным порядком, $T = [0; +\infty)$ с обычной топологией, сходится к 0 (проверить!).

Докажем ключевую теорему этой лекции.

Теорема. Точка x в топологическом пространстве T является точкой касания для множества M тогда и только тогда, когда найдётся направленность точек множества M, сходящаяся к x.

Доказательство. Докажем сначала достаточность. Если $x_\alpha \to x$ и при всех $\alpha \in A$ верно $x_\alpha \in M$, то согласно определению сходящейся направленности для всякой окрестности U_x точки x существует такое $\alpha_0 \in A$, что при всех $\alpha \geqslant \alpha_0$ верно $x_\alpha \in U_x$. Существенно, что для самого α_0 имеем $x_{\alpha_0} \in U_x$. В случае предела последовательности мы могли взять произвольное n, большее N. В данном же случае существенно, что можно взять α_0, потому что следующих за ним элементов направленного множества A может и не существовать.

Теперь докажем необходимость. И здесь, как ни странно, доказательство окажется идейно даже более простым, чем для последовательностей в метрических пространствах, где нам нужно было каким-то образом выбирать стягивающиеся к пределу последовательности окрестности. Теперь же мы можем в качестве «индекса», которым «нумеруются» точки направленности, возьмём не что иное, как окрестности U_x, т. е. положим $A = \tau_x$ (множество окрестностей точки x), упорядоченное по обратному включению: $U_{x,\alpha} \leqslant U_{x,\beta}$, если $U_{x,\alpha} \supset U_{x,\beta}$. Естественность такого упорядочения очевидна: нам хочется получить «стягивающиеся» к пределу окрестности. Следует убедиться, что τ_x — действительно направленное множество. В самом деле, частичная упорядоченность очевидна (как для любого семейства подмножеств, упорядоченного по включению или обратному включению). Далее, для любых окрестностей $U_{x,\alpha}$, $U_{x,\beta}$ точки x их пересечение $U_{x,\alpha} \cap U_{x,\beta}$ — снова окрестность точки x, т. к. является открытым множеством и содержит x. А согласно нашему упорядочению, $U_{x,\alpha} \leqslant U_{x,\alpha} \cap U_{x,\beta}$, $U_{x,\beta} \leqslant U_{x,\alpha} \cap U_{x,\beta}$.

Теперь определим направленность $x_{U(x)}$, взяв для каждой окрестности $U_x \in \tau_x$ точку $x_{U(x)} = y$ из пересечения $M \cap U_x$. Такое y существует, поскольку x – точка касания множества M. Осталось доказать, что построенная направленность (состоящая, заметим, из элементов множества M) сходится x. Но это непосредственно следует из построения, ибо для любой окрестности $U_{x,0}$ точки x можно положить $\alpha_0 = U_{x,0}$ и тогда для любой окрестности $U_x \geqslant U_{x,0}$ имеем в силу построения и введённого отношения порядка $x_{U_x} \in U_x \subset U_{x,0}$, т. е. $x_{U_x} \in U_{x,0}$, что и требовалось.

Теорема доказана.

Рассмотрим, к каким направленностям приводит доказательство теоремы в конкретных случаях.

1. Пусть $T = [0; 1]$ с обычной метрической топологией, $M = (0; 1]$, $x = 0$. Тогда имеем $A = \{[0; y) \mid 0 < y \leqslant 1\}$, причём можно положить $x_{[0;y)} = \frac{y}{2}$. Легко видеть, однако, что можно построить и последовательность элементов множества X, сходящуюся к 0: $x_n = \frac{1}{n}$.

2. Рассмотрим так называемое *связное двоеточие*, а именно пространство $T = (X, \tau)$, где $X = \{a, b\}$, $\tau = \{\varnothing, \{b\}, \{a, b\}\}$. Заметим, что в этом пространстве точка a является точкой ка-

сания множества $M = \{b\}$, поскольку единственным открытым множеством, содержащим a, является $X \ni b$. Тогда направленное множество A, построенное в теореме, имеет вид $A = \{X\}$. Соответствующая же направленность точек множества $\{b\}$, сходящаяся к точке a, представляет собой $x_X = b$. Действительно, любая окрестность точки a (а именно, X: других нет) содержит точку b при всех $U_a \geqslant X$ (т. е. при $U_a = X$). С первого взгляда может показаться, что уже в этом примере нет последовательности точек множества $\{b\}$, стремящейся к a. Однако это не так: последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = b$, сходится к a. (Заметим попутно, что и она, и построенная направленность, конечно сходятся и к b. Для пространства, не удовлетворяющего аксиоме отделимости Хаусдорфа, это неудивительно.)

3. В следующем примере не существует последовательности точек множества X, сходящейся к некоторой его точке касания (но, в силу доказанной теоремы, существует направленность). Положим снова $X = [0; 1]$, выбрав в качестве открытых все множества, получающиеся выбрасыванием из X не более чем счётного множества точек (в частности, само X), а также пустое множество. Легко проверить, что полученное семейство множеств действительно удовлетворяет всем аксиомам топологии (удобнее проверять условия, предъявляемые к замыканиям, для их дополнений). Убедимся, что и в такой «странной» топологии 0 — точка касания множества $(0; 1]$. В самом деле, любая окрестность U_0 точки 0 (как открытое множество) или пуста (что невозможно, ибо $0 \in U_0$), или содержит все точки отрезка, кроме конечного или счётного их числа. Но тогда она обязательно содержит хотя бы одну точку из $(0; 1]$, что и требовалось. Теперь заметим, что в рассматриваемой топологии сходиться могут лишь последовательности, стационарные с некоторого номера. В самом деле, пусть $y_n \to y$. Положим Y_0 равным множеству значений последовательности y_n за вычетом самой точки y. Легко видеть, что Y_0 не более чем счётно, а поэтому $[0; 1] \setminus Y_0$ открыто; а т. к. $[0; 1] \setminus Y_0 \ni y$, то оно является окрестностью точки y. С другой стороны, если последовательность y_n не является стационарной ни с какого номера, то, сколь бы велико ни было N, найдётся $n > N$, для которого $y_n \neq y$. Но тогда $y_n \notin [0; 1] \setminus Y_0$, т. е. y_n не лежит в рассматриваемой окрестности точки y. Итак, не найдётся такого N, после которого все члены последовательности лежали бы в окрестности $[0; 1] \setminus Y_0$ точки y. Следовательно, $y_n \not\to y$. Значит, стремиться к 0 в нашем пространстве могут лишь те последовательности, которые с некоторого номера принимают только значения 0. Но такие последовательности не лежат в $(0; 1]$.

Замечание. Нетрудно видеть, что топологическое пространство, рассмотренное в предыдущем примере, не удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа, однако последовательности в нём могут иметь не более одного предела. Таким образом, аксиома отделимости Хаусдорфа является достаточным, но не необходимым условием единственности предела последовательности.

Отметим в заключение ещё некоторые факты.

1. Всякая подпоследовательность некоторой последовательности есть её поднаправленность, но не всякая поднаправленность последовательности есть её подпоследовательность: рассмот-

рим последовательность $\{x_1, x_1, x_2, x_3, \ldots\}$.

2. Как и в лекции 5, отметим без доказательства важнейшую теорему о компактности, обобщающее соответствующее утверждение для метрических пространств.

Теорема. Топологическое пространство компактно тогда и только тогда, когда всякая направленность в нём имеет сходящуюся поднаправленность.

Задачи для самостоятельного решения

1. Проверить, что введённые в примерах 3—7 отношения действительно удовлетворяют аксиомам отношения порядка. Проверить, что в примере 5 мы имеем дело с отношением линейного порядка.

2. Убедиться, что замкнутые подмножества данного множества X, содержащие заданное множество $A \subset X$, образуют множество, частично упорядоченное по включению. Убедиться, что оно содержит наименьший элемент и что он равен $\overline{A}$.

3. Построить пример, показывающий, что объединение двух топологий может не быть топологией.

4. Решить задачи 15—16 из лекции 2а.

5*. Решить задачи 19—20 из лекции 5а.

6. 1) Показать, что в метрическом пространстве для множества A и его точки касания x найдётся последовательность $\{x_n\}$ точек из A, сходящаяся к x.
2) Можно ли утверждать, что такую последовательность можно выбрать не содержащей точку x?
3) Те же вопросы для случая, когда x — предельная точка множества A.

7*. Выяснить, может ли какая-либо направленность (не обязательно являющаяся последовательностью) в топологическом пространстве из последнего примера иметь более одного предела.