ЛЕКЦИЯ 2А

Системы множеств. Элементы общей теории меры

1. Системы множеств

Как вы помните, в лекции 2 построение общей теории меры велось исходя из алгебры измеримых множеств, а прямоугольники, исходя из которых велось построение классической меры на плоскости, алгебры не образуют (почему?). Есть и другие примеры, когда исходное множество задания меры не является алгеброй. В связи с этим имеет смысл рассмотреть другие системы множеств. Дадим несколько определений.

Определение 1. Система множеств S называется *полукольцом*, если:
1) $\varnothing \in S$;
2) $\forall A \in S$, $\forall B \in S$ $A \cap B \in S$;
3) $\forall A \in S$, $\forall A_1 \in S$, $A_1 \subset A$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $\exists A_2, \dots A_n \in S$: $A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n = A$.

Последнее требование проще всего пояснить на примере прямоугольников. Действительно, прямоугольник с прямоугольным вырезом — уже не прямоугольник, однако его можно разрезать на прямоугольники (следя за тем, какие границы куда входят).

Итак, полукольцо — это наиболее «слабая» система множеств в нашем рассмотрении. Будем постепенно усиливать требования. При этом каждое следующее понятие (кроме σ-кольца) будет частным случаем предыдущего. (См. задачу 1.)

Определение 2. Непустая система множеств R называется *кольцом*, если:
1) $\forall A \in R$, $\forall B \in R$ $A \cap B \in R$;
2) $\forall A \in R$, $\forall B \in R$ $A \triangle B \in R$.

Следствие 1. Всякое кольцо множеств R содержит $\varnothing$. В самом деле, по условию непустоты R существует некоторое $A \in R$. Но тогда по 2) имеем $\varnothing = A \triangle A \in R$.

Следствие 2. Всякое кольцо множеств R вместе с множествами A и B содержит не только их пересечение и симметрическую разность, но и объединение и обе разности. В самом деле, $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$, $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$.

Определение 3. Множество X называется *единицей* системы множеств T, если:
1) $X \in T$;
2) $\forall A \in T$ верно $A \cap X = A$.

Очевидно, такое название оправдывается ролью множества X при «умножении» (т. е. пересечении) множеств.

Определение 4. Кольцо множеств с единицей называется *алгеброй множеств*.

Легко видеть, что не всякое кольцо (или полукольцо) множеств содержит единицу. В качестве примеров рассмотрим а) семейство всех конечных подмножеств бесконечного множества; б) семейство всех ограниченных подмножеств числовой прямой (или плоскости); в) множество всех промежутков с рациональными концами, содержащихся в отрезке $[0; \pi]$ (последнее — не кольцо, а полукольцо). (См. задачу 4.)

Однако мы пока ещё ничего не сказали о часто встречающихся счётных объединениях множеств. Дадим соответствующее определение.

Определение 5. Система множеств R называется *σ-кольцом*, если:
1) R — кольцо;
2) $\forall A_1, \ldots, A_n, \ldots \in R \ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in R$.

Определение 6. σ-кольцо множеств с единицей называется *σ-алгеброй множеств.*

Рассмотрим ещё некоторые примеры.
1. Очевидно, что семейство всех подмножеств данного множества A (даже пустого, т. к. $\varnothing \subset \varnothing$) является каждой из перечисленных здесь систем множеств.
2. Система всех промежутков на прямой (включая и бесконечные) образует полукольцо с единицей. (Почему не кольцо?)
3. Система всех интервалов на прямой **не** образует даже полукольца. В самом деле, полуинтервал $(0;2) \setminus (0;1) = [1;2)$ нельзя разбить на конечное семейство непересекающихся интервалов.
4. Семейство всех прямоугольников на плоскости со сторонами, параллельными осям координат (с различными границами, как в лекции 1), образует полукольцо; а если потребовать, чтобы все прямоугольники входили в один фиксированный прямоугольник (стороны которого также должны быть параллельны осям координат), мы получим полукольцо с единицей. (Вопрос: а что образуют прямоугольники, содержащиеся в некотором фиксированном круге?)

Теперь приступим к доказательству некоторых важных свойств этих систем множеств, которые понадобятся в дальнейшем для обоснования различных свойств меры.

Лемма 1 (о конечном разложении). Пусть:
1) S — полукольцо,
2) $A, A_1, A_2, \ldots, A_n \in S$,
3) $\forall i = \overline{1,n} \ A_i \subset A$,
4) $\forall i,j = \overline{1,n} \ A_i \cap A_j = \varnothing$.
Тогда $\exists A_{n+1}, \ldots, A_m \in S$ такие, что $A = \bigsqcup_{i=1}^{m} A_i$.

Доказательство. Докажем это утверждения по индукции. При $n = 1$ утверждение леммы составляет часть определения полукольца. Пусть теперь утверждение доказано для $n = k$, докажем его для $n = k + 1$. Итак, пусть $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_k \sqcup B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_l$ (здесь мы переобозначили «дополняющие» множества, чтобы не возникло путаницы с A_k). Пусть также A_{k+1} не пересекается с $A_1, \ldots A_k$. Для каждого B_i ($i = \overline{1,l}$) рассмотрим $B_{i0} \equiv A_{k+1} \cap B_i$ и построим, пользуясь требованием 3 определения полукольца, конечные разложения $B_i = \bigsqcup_{j=0}^{J_i} B_{ij}$. Тогда исходное множество A можно представить в виде

$$A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_k \sqcup B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_l = \left(\bigsqcup_{i=1}^{k} A_i\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{j=0}^{J_1} B_{1j}\right) \sqcup \ldots \sqcup \left(\bigsqcup_{j=0}^{J_l} B_{lj}\right).$$

Легко видеть, что построенное разложение действительно дизъюнктное. А теперь заметим, что $A_{k+1} = \bigsqcup_{i=1}^{l} B_{i0}$, поскольку множества B_i дают разложение $A \setminus \left(\bigsqcup_{i=1}^{k} A_i\right)$ и $A_i \cap A_{k+1} = \varnothing$,

$i = \overline{1,k}$. Поэтому можно перегруппировать разложение и получить:

$$A = \left(\bigsqcup_{i=1}^{k} A_i\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{i=1}^{l} B_{i0}\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{J_1} B_{1j}\right) \sqcup \ldots \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{J_l} B_{lj}\right) = \left(\bigsqcup_{i=1}^{k} A_i\right) \sqcup A_{k+1} \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{J_1} B_{1j}\right) \sqcup \ldots \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{J_l} B_{lj}\right).$$

Лемма доказана.

Замечание. Настоятельно рекомендуется при изучении доказательства проиллюстрировать его случаем прямоугольников.

Лемма 2 («о кирпичиках»). Пусть:

1) S — полукольцо,

2) $A_1, A_2, \ldots, A_n \in S$.

Тогда существуют такие попарно непересекающиеся множества $B_1, \ldots, B_k \in S$, что каждое из множеств A_i является объединением некоторых из B_j.

(Доказательство провести самостоятельно.)

2. Аддитивность и счётная аддитивность меры

Теперь приступим к рассмотрению меры на системах множеств. Для этого нам придётся дать ещё несколько определений.

Определение 7. Пусть S — полукольцо множеств, а m — функция, $m : S \to [0; +\infty) \cup \{+\infty\}$, причём $m \not\equiv +\infty$. Назовём её *мерой* (на полукольце S), если для любого конечного представления

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i, \quad \text{где} \quad A, A_1, \ldots, A_n \in S,$$

верно равенство

$$m(A) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i). \tag{1}$$

При этом если ряд расходится или если хотя бы одно из слагаемых бесконечно, то его сумма полагается равной $+\infty$.

Если же, кроме того, для любых таких $A, A_1, A_2, \ldots \in S$, что

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

верно равенство

$$m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i), \tag{2}$$

то такая мера называется σ-аддитивной.

Замечание. Поскольку кольцо и алгебра (а также σ-кольцо и σ-алгебра) являются частными случаями полукольца, приведённые определения распространяются на них без изменения. (Хотя некоторые требования в условиях становятся излишними. Какие и в каких случаях?)

Заметим, что требование (1) нельзя заменить на парное сложение

$$m(A \sqcup B) = m(A) + m(B) \quad \text{при} \quad A, B, A \sqcup B \in S, \tag{3}$$

поскольку полукольцо не обязано содержать произвольное объединение множеств — своих элементов и наличие в нём, скажем, множеств $A, B, C, A \sqcup B \sqcup C$ не гарантирует наличия $A \sqcup B$, через которое мы могли бы «пройти» от A, B, C к $A \sqcup B \sqcup C$. Поэтому если мы рассмотрим полукольцо, состоящее из множеств $[0; 3)$, $[0; 1)$, $[1; 2)$, $[2; 3)$, то условие (3) не помешает положить $m[0; 3) = 4$, $m[0; 1) = 1$, $m[1; 2) = 1$, $m[2; 3) = 1$ и условие (1) будет нарушено.

Обсудим некоторые простые следствия определения меры на полукольце.

1. Монотонность меры. Пусть $A, B \in S$ и $A \subset B$. Тогда $m(A) \leqslant m(B)$. Для доказательства достаточно воспользоваться конечным разложением B, включающим A, и аддитивностью меры.

2. Мера пустого множества равна 0. Действительно, поскольку $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$, имеем из свойства аддитивности меры $m(\varnothing \sqcup \varnothing) = m(\varnothing)$, или $2m(\varnothing) = m(\varnothing)$, откуда $m(\varnothing) = 0$.

3. Пусть $A, B, A \cup B \in S$ и $m(A \cap B) < +\infty$. Тогда

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B). \tag{4}$$

Действительно, $A = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B)$ и аналогично для множества B. Построим конечные разложения $(A \setminus B) = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$ и $(B \setminus A) = \bigsqcup_{j=1}^{m} B_j$. Тогда $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$ и

$$\begin{aligned} m(A \cup B) &= \left(\sum_{i=1}^{n} m(A_i)\right) + \left(\sum_{j=1}^{m} m(B_j)\right) + m(A \cap B) = \\ &= \left(\left(\sum_{i=1}^{n} m(A_i)\right) + m(A \cap B)\right) + \left(\left(\sum_{j=1}^{m} m(B_j)\right) + m(A \cap B)\right) - m(A \cap B) = \\ &= m(A) + m(B) - m(A \cap B). \end{aligned}$$

(Вопрос. Почему потребовалось разбивать $A \setminus B$ и $B \setminus A$?)

4. Пусть $A, B, A \triangle B \in S$ и $m(A \triangle B) = 0$. Тогда $m(A) = m(B)$. Действительно,

$$A = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B), \quad B = (B \setminus A) \sqcup (A \cap B). \tag{5}$$

При этом $(A \setminus B) \subset A \triangle B$ и поэтому в силу неотрицательности и монотонности меры в обозначениях предыдущего пункта имеем $0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} m(A_i) \leqslant m(A \triangle B) = 0$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} m(A_i) = 0, \quad \text{и аналогично} \quad \sum_{i=1}^{m} m(B_i) = 0. \tag{6}$$

Тогда из аддитивности меры и (5) и (6) получаем:

$$m(A) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i) + m(A \cap B) = m(A \cap B),$$
$$m(B) = \sum_{i=1}^{m} m(B_i) + m(A \cap B) = m(A \cap B),$$

или $m(A) = m(B)$. Заметим, что интуитивно это утверждение было очевидно с самого начала: если мера того, чем множества различаются, равна нулю, то и меры этих множеств равны.

Теперь приступим к рассмотрению чуть менее легко доказываемых, но не менее важных свойств меры. Ниже предполагаем, что m — мера на полукольце S, а множества $A, A_1, \ldots, A_n$ (или $A, A_1, \ldots, A_n, \ldots$) принадлежат полукольцу S.

5. (Свойство, в каком-то смысле обратное конечной полуаддитивности.) Пусть при сформулированных выше условиях ещё

$$\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \subset A.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} m(A_i) \leqslant m(A).$$

Это совершенно очевидно, если воспользоваться леммой о конечном разложении, неотрицательностью и аддивностью меры. Действительно, по лемме 1 имеем

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{m} A_i, \quad m \geqslant n.$$

Но тогда

$$\sum_{i=1}^{n} m(A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{m} m(A_i) = m(A).$$

6. (Конечная полуаддитивность.) Пусть теперь

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Тогда

$$m(A) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m(A_i). \tag{7}$$

Для доказательства достаточно применить к семейству множеств $A, A_1, \ldots, A_n$ «лемму о кирпичиках» и заметить, что в левую часть (7) мера (а она неотрицательна!) каждого «кирпичика» войдёт не более одного одного раза, тогда как в правую — не менее одного (а может быть, и несколько раз). (Возможен и несколько другой ход доказательства. Например, Вы рассматриваете вместо A_i множества $A \cap A_i$ — они тоже принадлежат полукольцу — и пользуетесь не только аддитивностью, но и монотонностью меры.)

А можно ли обобщить свойства 5 и 6 меры на счётный случай? Оказывается, для обобщения свойства 5 достаточно рассматривать меру, удовлетворяющую всего лишь требованию (1), тогда как для обобщения свойства 6 (получится счётная полуаддитивность) требуется счётная аддитивность (2). Проведём соответствующие рассуждения.

7. Пусть

$$\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset A.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) \leqslant m(A). \tag{8}$$

Действительно, для любой конечной подсистемы $A_1, \ldots, A_k$ имеем

$$\bigsqcup_{i=1}^{k} A_i \subset A.$$

Поэтому применимо свойство 5, в силу которого

$$\sum_{i=1}^{k} m(A_i) \leqslant m(A). \tag{9}$$

Но тогда, во-первых, ряд в левой части сходится (если $m(A) < +\infty$), а во-вторых, для его суммы после перехода к пределу в неравенстве (9) имеем (8).

8. (Равносильность счётной полуаддитивности и счётной аддивности.) Мера является σ-аддитивной тогда и только тогда, когда для любых таких множеств $A, A_1, A_2, \ldots \in S$, что

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

верно неравенство

$$m(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i). \tag{10}$$

Докажем сначала необходимость. Именно, пусть для любых таких множеств $A, A_1, A_2, \ldots \in S$, что

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

верно неравенство

$$m(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

Тогда мера является σ-аддитивной. Рассмотрим множества такие $B, B_1, B_2, \ldots \in S$, что

$$B = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Тогда, с одной стороны, для них выполнено

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,$$

и поэтому
$$m(B) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i). \tag{11}$$
С другой же стороны, верно обратное вложение
$$B \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,$$
и поэтому в силу свойства 7 (*для доказательства которого счётная аддитивность меры не требовалась*) имеем
$$m(B) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i). \tag{12}$$
Объединяя (11) и (12), имеем
$$m(B) = \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i),$$
что и доказывает счётную аддитивность меры.

Теперь докажем достаточность. Для этого положим
$$B_1 = A_1, \quad B_i = A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k \text{ при } \quad i \geqslant 1, B_{ij} \in S, \quad B_i = \bigsqcup_{j=1}^{J_i} B_{ij}, \quad C_{ij} = B_{ij} \cap A.$$
Имеем $C_{ij} \in S$, $A = B_1 \sqcup \sqcup_{i=2}^{\infty} \sqcup_{j=1}^{J_i} C_{ij}$. Поэтому в силу счётной аддитивности меры $m(A) = m(B_1) + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{J_i} C_{ij}$, но $\sum_{j=1}^{J_i} C_{ij} \leqslant m(A_i)$, поскольку $B_i \subset A_i$. Утверждение доказано.

Замечание. Использованный в лекции термин «субаддитивность» является синонимом термина «полуаддитивность».

Приведём пример, показывающий, что для меры, не являющейся σ-аддитивной, неравенство (10) может нарушаться. В самом деле, рассмотрим полукольцо множеств, состоящих из всех рациональных точек промежутков $\lfloor \alpha; \beta \rceil$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$. Положим $m(\lfloor \alpha; \beta \rceil) = \beta - \alpha$ Тогда, с одной стороны, $m([0; 1] \cap \mathbb{Q}) = 1$, а с другой, оно является счётным объединением одноточечных множеств, и поэтому неравенство (10) нарушается: мы имеем
$$1 = m([0; 1] \cap \mathbb{Q}) > \sum_{i=1}^{\infty} m(\{r_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} 0 = 0,$$
где последовательность $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ перечисляет все рациональные числа отрезка $[0; 1]$.

Задачи для самостоятельного решения

0. Ответить на все вопросы по ходу текста.

1. Доказать, что всякое кольцо есть полукольцо, всякая алгебра есть кольцо, всякая σ-алгебра есть σ-кольцо и алгебра, всякое σ-кольцо есть кольцо.

2. Доказать, что множество X является единицей для данного кольца R (полукольца S) тогда и только тогда, когда $X = \bigcup_{A\in R} A$ ($X = \bigcup_{A\in S} A$).

3. Образуют ли полукольцо все прямоугольники, стороны которых параллельны осям координат и вложенные в некоторый фиксированный круг? Имеет ли это полукольцо единицу?

4. Доказать аналоги формулы (4) для конечных множеств. Именно, если $|X|$ — число элементов множества X, то для любых конечных множеств X, Y верно равенство $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$.

5. Доказать, что:

1) семейство всех конечных подмножеств бесконечного множества образует кольцо, но не образует алгебры;

2) семейство всех ограниченных подмножеств прямой или плоскости образует кольцо, но не образует алгебры;

3) семейство всех промежутков с рациональными концами, содержащихся в отрезке $[0;\pi]$, образует полукольцо (почему не кольцо?);

4) семейство всех промежутков (конечных и бесконечных) числовой прямой образует полукольцо с единицей.

5) Пусть A — бесконечное множество, Y — система всех его не более чем счётных подмножеств. Доказать, что Y — σ-кольцо.

6) Какое условие нужно наложить, чтобы Y было σ-алгеброй?

6. Доказать, что следующие множества являются полукольцами с единицей, и указать соответствующие единицы:

1) $\{[\alpha;\beta) \mid a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b\}$ (включая пустой промежуток);

2) система всех промежутков, вложенных в отрезок $[a;b]$.

7. Доказать «лемму о кирпичиках».

8. Пусть $X = \mathbb{N}$, $A = P(\mathbb{N})$.

1) Является ли A σ-алгеброй?

2) Построить на A счётно-аддитивную меру, принимающую положительные значения на любом непустом множестве из $P(\mathbb{N})$.

3) Тот же вопрос, если мера должна быть конечной.

9*. Доказать, что семейство множеств, введённое в контрпримере в конце семинара, — действительно полукольцо, а функция m — действительно мера на нём.

10*. Пусть m — σ-аддитивная мера на полукольце S, принимающая только конечные значения, множества $A, A_1, A_2, \ldots$ принадлежат S, причём $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ и

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Доказать, что

$$m(A) = \lim_{i\to\infty} m(A_i).$$

Это свойство меры называется *непрерывностью.*

11*. Пусть m — мера на кольце R и для любых таких множеств $A, A_1, A_2, \ldots$ из R, что $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ и

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i,$$

выполнено равенство

$$m(A) = \lim_{i \to \infty} m(A_i).$$

Доказать, что m является σ-аддитивной мерой на R.

12*. Указать пример меры на кольце, которая не является σ-аддитивной.

Дальнейшие задачи (**кроме обязательной задачи 15**) предназначены лишь для особо интересующихся и не включаются в общий счёт. При решении следует иметь в виду, что они распадаются на 2 цикла. Один из них (13—19) описывает продолжение меры с полукольца на минимальное порождённое им кольцо, а второй (20—21) — конструирует меры Лебега—Стилтьеса, находящие применение в спектральной теории линейных операторов и в теории вероятностей.

13*. Пусть S — полукольцо. Доказать, что система

$$R = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} A_i \mid A_i \in S, i = \overline{1, n} \right\}$$

является кольцом.

14*. Пусть S — полукольцо. Доказать, что система

$$R = \left\{ \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \mid A_i \in S, i = \overline{1, n} \right\}$$

совпадает с кольцом R, введённым в предыдущей задаче.

15. Доказать, что:

1) пересечение произвольной непустой системы колец является кольцом (возможно, состоящим лишь из пустого множества);

2) пересечение произвольной непустой системы σ-колец является σ-кольцом;

3) пересечение непустой системы алгебр с одной и той же единицей является алгеброй.

(*Указание.* Почему пересечение линейных подпространств фиксированного линейного пространства — снова линейное подпространство?)

16*. Пусть T — система множеств. Доказать, что существует такое кольцо $R(T)$, что

1) $T \subset R(T)$ и

2) для любого кольца R_1, содержащего T, верно $R(T) \subset R_1$.

(Такое кольцо называется *минимальным кольцом*, содержащим систему T, или кольцом, порождённым системой T.)

17*. (Продолжение.) Доказать, что если система T содержит единицу, то $R(T)$ является алгеброй.

18*. (Продолжение.) Пусть S — полукольцо. Доказать, что $R(S)$ совпадает с кольцом, построенным в задачах 13 и 14.

19*. (Продолжение.) Пусть S — полукольцо. Построить продолжение меры m с полукольца S на порождённое им кольцо $R(S)$. (Для простоты рассмотреть ситуацию, когда полукольцо содержит едииницу, а мера принимает только конечные значения.)

1) Дать определение продолжения меры с полукольца на содержащее его кольцо.

2) Построить продолжение меры с S на $T(S)$ и доказать его корректность.

3) Доказать единственность возможного продолжения меры с полукольца на порождённое им кольцо.

4) Доказать, что если исходная мера на полукольце S была σ-аддитивной, то её продолжение на кольцо $R(S)$ тоже будет таковой.

Итак, мы рассмотрели продолжение меры с полукольца на кольцо. Дальнейшим продолжением этого процесса (если кольцо обладает единицей) будет то, что описано в лекции 2.

20*. Пусть $[A;B] \subset \mathbb{R}$, S — полукольцо всех промежутков, вложенных в $[A;B]$ (включая пустой). Доказать, что функция $m : S \to [0;+\infty)$, где $m(\lfloor a;b \rceil) = b - a$, является σ-аддитивной мерой на S. (Она называется классической мерой на $[A;B]$.) (*Указание.* Для доказательства σ-аддитивности воспользоваться леммой Гейне—Бореля.) При продолжении этой меры по Лебегу получается классическая мера Лебега на прямой.

21*. Пусть дано полукольцо $S = \{[a;b) \mid -\infty < a < b < +\infty\} \cup \{\varnothing\}$, $g(x)$ — неубывающая непрерывная слева функция на $\mathbb{R}$, а функция $m_g : S \to [0;+\infty)$ определена формулой $m_g([a;b)) = g(b) - g(a)$. Доказать, что m_g — σ-аддитивная мера на S. (Такая мера называется мерой Стилтьеса.) При продолжении этой меры по Лебегу получается мера Лебега—Стилтьеса на прямой.