ЛЕКЦИЯ 4В
Теорема Коши

В этой лекции будет доказана теорема о существовании и единственности решения задачи Коши.

1. Определения

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

Пусть функция $f(t, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $\Pi = \{(t, y) \mid t \in [t_0; t_0 + a], y \in \in (y_0 - b; y_0 + b)\}$.

Определение 1. Пусть

$$\mathcal{T} = [t_0; t_1] \quad \text{или} \quad \mathcal{T} = [t_0; t_1), \quad \text{где} \quad t_0 < t_1. \tag{2}$$

Функцию $y(t)$, определённую на промежутке $\mathcal{T}$, будем называть *решением задачи Коши* (1) *на промежутке* $\mathcal{T}$, если:
1) $y(t) \in C^1(\mathcal{T})$;
2) $y(t_0) = y_0$;
3) $\forall t \in \mathcal{T}\ \ y'(t) = f(t, y(t))$,
причём в пп. 1 и 3 в соответствующих случаях подразумеваются односторонние производные.

Определение 2. Пусть $y_1(t)$ и $y_2(t)$ — решения задачи Коши (1) соответственно на промежутках $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$. Тогда решение y_2 называется *продолжением решения* y_1 *на промежуток* $\mathcal{T}_2$, если:
1) $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$;
2) $y_1(t) \equiv y_2(t)$ на $\mathcal{T}_1$.
В этом случае также решение y_1 называется *ограничением решения* y_2 *на промежуток* $\mathcal{T}_1$.

Замечание. В частности, нам удобно считать, что каждое решение является своим собственным продолжением и ограничением.

Определение 3. В условиях предыдущего определения продолжение и ограничение будем называть *нетривиальными*, если $\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T}_2$.

Определение 4. Решение $y(t)$ задачи Коши (1) называется *непродолжаемым*, если оно не имеет нетривиального продолжения.

Пример. Задача Коши (1) с $f(t, y) = y^2$, $t_0 = 0$, $y_0 = 1$ имеет решение $y(t) = \frac{1}{1-t}$ на промежутке $[0; 1)$, и это решение является непродолжаемым. Ограничение $\tilde{y}(t)$ этого решения на промежуток $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ является продолжаемым.

Пример. Пусть в предыдущем примере функция $f(t, y)$ определена (тем же выражением) лишь при $t \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$. Тогда решение $\tilde{y}(t)$ является непродолжаемым.

Пример. Пусть функция $f(t,y)$ определена тем же выражением, что и в первом примере, но лишь при $y \in (-2;2)$ (и при всех t). Тогда решение $\tilde{\tilde{y}}(t) = \frac{1}{1-t}$, $t \in \left[0; \frac{1}{2}\right)$, является непродолжаемым.

2. Формулировка основной теоремы

Теорема 1. Пусть функция $f(t,y)$ определена в прямоугольнике $\Pi = \{(t,y) \mid t \in [t_0; t_0 + a], y \in (y_0 - b; y_0 + b)\}$ и выполнены следующие условия:
i) $f(t,y) \in C(\Pi)$;
ii) $\exists M > 0 \ \forall (t,y) \in \Pi \ |f(t,y)| \leqslant M$;
iii) $\exists L > 0 \ \forall (t,y_1),(t,y_2) \in \Pi \ |f(t,y_1) - (t,y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|$.

Тогда:
1) существуют промежуток $\mathcal{T}$ и решение $y(t)$ задачи (1) на промежутке $\mathcal{T}$ такое, что $y(t)$ — непродолжаемое решение;
2) если $\tilde{y}(t)$ — некоторое решение задачи (1) на некотором промежутке $\widetilde{\mathcal{T}}$, то $\widetilde{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{T}$ и функция $\tilde{y}(t)$ является сужением решения $y(t)$ на промежуток $\widetilde{\mathcal{T}}$.

3. Доказательство теоремы

Доказательство разобьём на несколько лемм.

Лемма 1. Существует хотя бы один промежуток $\mathcal{T} = [t_0; s]$ такой, что существует решение $z(t)$ задачи (1) на промежутке $\mathcal{T}$.

Доказательство. Положим $s = t_0 + \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{2L}\right)$. Рассмотрим банахово пространство $C[t_0; s]$ с нормой $\|z\|_C = \sup_{\tau \in [t_0;s]} |z(\tau)|$ и выделим в нём замкнутое (см. задачу 1) множество

$$B_b = \{z(s) \in C[t_0; s] \mid \|z(s) - y_0\|_C \leqslant b\}. \tag{3}$$

Рассмотрим на множестве B_b интегральный оператор

$$z \mapsto (Az)(t) \equiv y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, z(\tau))\, d\tau. \tag{4}$$

Благодаря условию (3) правая часть действительно определена для всех функций из множества B_b. В силу очевидной оценки

$$|(Az)(t) - y_0| \leqslant \int_{t_0}^{t} |f(\tau, z(\tau))| d\tau \leqslant \frac{b}{M} M = b$$

оператор A отображет множество B_b в себя, а в силу оценки

$$|(Az_1)(t) - (Az_2)(t)| \leqslant \int_{t_0}^{t} |f(\tau, z_1(\tau)) - f(\tau, z_2(\tau))| ds \leqslant \frac{1}{2L} L |z_1(t) - z_2(t)| \leqslant \frac{1}{2} \|z_1 - z_2\|_C$$

он является на этом множестве сжимающим отображением. С учётом полноты множества B_b как замкнутого подмножества полного метрического пространства $C[t_0; s]$ из принципа сжимающих отображений заключаем, что оператор A имеет неподвижную точку, т. е. существует такая функция $z(t) \in C[t_0; s]$, удовлетворяющая условию $|z(t) - y_0| \leqslant b$ при всех $t \in [t_0; s]$, что

$$z(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, z(\tau))\, d\tau, \quad t \in [t_0; s].$$

В силу непрерывности функции $F(t) := f(t, z(t))$ (см. задачу 2) из теоремы об интеграле с переменным верхним пределом делаем вывод о том, что функция $z(t)$ дифференцируема на $[t_0; s]$, причём её производная равна $z'(t) = f(t, z(t))$ и непрерывна и $z(t_0) = y_0$. ▲

Хотя принцип сжимающих отображений гарантирует единственность неподвижной точки, непосредственно из леммы 1 единственность решения задачи Коши (1) мы выводить не будем. Дело в том, что если правая часть решения определена на множестве, большем, чем исходный прямоугольник, возникает вопрос, а не могли ли мы потерять решения, не попадающие в полосу (3). Аккуратное и одновременно универсальное решение этого вопроса требует довольно утомительных рассуждений, поэтому мы поступим иначе — предположим, что решения где-то «разветвляются», и докажем, что это невозможно.

Лемма 2. Пусть $y_1(t)$ и $y_2(t)$ — решения задачи Коши (1) соответственно на промежутках $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$. Тогда хотя бы одно из них является продолжением другого. (В частности, если они совпадают, то каждое является продолжением другого.)

Доказательство. Предположим противное. Очевидно, из двух промежутков вида (2) (с одним и тем же t_0 и, вообще говоря, разными t_1) один с необходимостью является продолжением другого. Будем для определённости считать, что $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Поскольку по нашему предположению y_2 не является продолжением y_1, то существуют точки $t \in \mathcal{T}_1$ такие, что $y_1(t) \neq y_2(t)$. Рассмотрим точную нижнюю грань t^* множества $\mathcal{T}^*$ таких точек. В силу непрерывности функций y_1 и y_2 можно утверждать, что $y_1(t^*) = y_2(t^*)$ (устойчивость знака непрерывной функции $y_2 - y_1$!). Следовательно, $t^* \notin \mathcal{T}^*$. Поэтому случай $t^* = \sup \mathcal{T}_1$ исключается и по определению точки t^* в любой её правой полуокрестности найдутся точки t такие, что $y_1(t) \neq y_2(t)$. Положим теперь $t_0' = t^*$, $y_0' = y_1(t^*) = y_2(t^*)$, $a' = t_0 + a - t^*$, $b' = \min(y_0 + b - y(t^*), y(t^*) - (y_0 - b))$, $s' = t_0' + \min\left(a', \frac{b'}{M}, \frac{1}{2L}\right)$. Тогда, строя интегральный оператор (4) из предыдущей леммы с заменой соответствующих параметров на штрихованные, мы можем применить теорему о сжимающих отображениях, и тогда наше предположение приведёт нас к противоречию с единственностью неподвижной точки. ▲

Теперь для каждого $t > t_0$ рассмотрим множество $C_t = C^1[t_0; t]$. В силу леммы 1 для всех достаточно малых $t - t_0$ множество C_t содержит хотя бы одно решение задачи Коши (1). В силу леммы 2 можно утверждать, что если $y_1 \in C_{t_1}$, $y_2 \in C_{t_2}$ суть решения задачи Коши (1) при $t_1 < t_2$, то y_2 — продолжение решения y_1. Докажем теперь существование непродолжаемого решения.

Пусть

$$T = \sup \mathbb{T}, \quad \mathbb{T} = \{s \in (t_0; t_0 + t] \mid \text{существует решение задачи (1) } y(t) \in C_s\}.$$

Прежде всего рассмотрим случай, когда $T \notin \mathbb{T}$. Рассмотрим последовательность $t_n \uparrow t$, $t_n \in \mathbb{T}$. По определению множества $\mathbb{T}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует решение $y_n(t)$ задачи Коши (1) на промежутке $[t_0; t_n]$. В силу леммы 2 каждое следующее решение является продолжением предыдущего. Поэтому, если на полуинтерале $[t_0; T)$ определить «составную» функцию

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t), & t \in [t_0; t_1], \\ y_n(t), & t \in (t_{n-1}; t_n], \quad n = 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

то эта функция окажется непрерывно дифференцируемой на всём полуинтервале $[t_0; T)$ и будет решением задачи Коши (1) на этом промежутке. Действительно, на любом отрезке $[t_0; s] \subset [t_0; T)$ она является ограничением на отрезок $[t_0; s]$ любого из решений $y_n(t)$ при достаточно больших n. В силу уравнения задачи (1) верна оценка $|y'(t)| \leqslant M$. Следовательно, функция $y(t)$ является липшиц-непрерывной в проколотой левой полуокрестности точки T, а следовательно (критерий Коши!) непрерывно продолжима в эту точку. Тогда получаем

$$\lim_{t \to T-0} y(t) =: Y. \tag{5}$$

Если

$$|Y - y_0| = b, \tag{6}$$

то построенное решение $y(t)$ является непродолжаемым: его единственно возможное непрерывное продолжение с полуинтервала $[t_0; T)$ на отрезок $[t_0; T]$ (а значит, и на любой больший промежуток) выходит из области определения функции $f(t, y)$. Если же $|Y - y_0| < b$, то $f(T, Y)$ определено. Доопределим функцию $y(t)$ в точке T по непрерывности и обозначим полученную функцию через $\bar{y}(t)$:

$$\bar{y}(t) = \begin{cases} y(t), & t \in [t_0; T), \\ Y, & t = T. \end{cases}$$

В силу непрерывности функции $f(t, y)$ на прямоугольнике Π функция $F(t) := f(t, \bar{y}(t))$ непрерывна на отрезке $[t_0; T]$, а следовательно, существует предел

$$\lim_{t \to T-0} f(t, y(t)) = F(T),$$

но тогда в силу уравнения задачи Коши (1) сразу же получаем

$$\lim_{t \to T-0} y'(t) = F(T),$$

Отсюда следует (см. задачу 3), что функция $\bar{y}(t)$ имеет в точке T левую производную, равную $F(T)$, и, таким образом, уравнение выполнено и в точке T, причём производная функции $\bar{y}(t)$ непрерывна в точке T слева. Следовательно, существует решение $\bar{y}(t)$ задачи (1) на отрезке $[t_0; T]$ и $T \in \mathbb{T}$.

Итак, случай $T \notin \mathbb{T}$ возможен лишь тогда, когда верно равенство (6). Вернёмся к ситуации, когда (6) не выполнено и, следовательно, $T \in \mathbb{T}$. Если $T = t_0 + a$, то решение, очевидно, является непродолжаемым. В противном случае точка $(t, \bar{y}(t))$ является внутренней точкой прямоугольника П, и решение продолжаемо в силу леммы 1 (применённой к соответствующему прямоугольнику, вложенному в прямоугольник П). «Составное» решение является непрерывно дифференцируемым, поскольку в точке сшивки T левая и правая производные равны $f(T, y(T))$. Итак, мы продолжили решение за точку T, что приводит к противоречию с её определением.

Окончательно получаем, что или $T = t_0 + a$, или для предела решения при $t \to T - 0$ (см. (5)) верно условие (6). В обоих случаях решение является непродолжаемым.

Теорема доказана.

Замечание. Строго говоря, формулировка теоремы Коши, приводимая обычно в учебниках, не исключает существования, помимо решения на отрезке длины $\min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, непродолжаемого решения с длиной существования меньше этого отрезка. В нашем доказательстве это исключается леммой 2.

Замечание. Условие открытости прямоугольника П сверху и снизу, странное с точки зрения классической теоремы, нужно нам, чтобы избежать сложных случаев с непродолжаемостью, когда решение, дойдя до границы прямоугольника, то ли «повернёт» обратно внутрь (или пойдёт по границе), и тогда в случае замкнутого прямоугольника будет продолжаемым, но в рамках леммы 1 этого уже не установить, то ли «захочет» выйти из прямоугольника и будет тогда непродолжаемым. Кроме того, ситуация открытой области определения правой части возникает и тогда, когда правая часть определена всюду: всё пространство является открытым множеством.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Показать, что множество B_b замкнуто в банаховом пространстве $C[t_0; z]$.

Задача 2. Пусть $z(t) \in C[t_0; z]$, причём при всех $t \in [t_0; s]$ верно $|z(t) - y_0| \leqslant b$ пусть функция $f(t, y)$ определена и непрерывна на прямоугольнике $\{(t, y) \mid t_0 \leqslant t \leqslant s, |y - y_0| \leqslant b\}$. Доказать, что функция $F(t) := f(t, z(t))$ непрерывна на отрезке $[t_0; s]$.

Задача 3. Пусть функция $x(t)$ определена и дифференцируема в некоторой проколотой левой полуокрестности точки T, и пусть существует конечный предел $\lim_{t \to T-0} x'(t) = a$. Доказать, что в этом случае:

1) функция $x(t)$ имеет конечный левый предел b в точке T;

2) после доопределения функции $x(t)$ значеним b в точке T полученная функция будет иметь левую прозводную в точке T, причём эта производная будет равна a.

Задача 4*. Введя другую норму на пространстве непрерывных функций, обойтись без необходимости продолжать решение.

Задача 5*. Продолжив функцию $f(t, y)$ «вверх и вниз», обойтись без необходимости продолжать решение.

Задача 6*. Сформулировать и доказать аналогичную теорему для бесконечного промежутка. Привести пример решения, отличного от константы и существуюшего на прямой.

Задача 7*. Сформулировать и доказать аналогичную теорему для локально липшицевой функции. Именно, пусть правая часть зависит лишь от y и определена при всех $y \in \mathbb{R}$ (для простоты), но известно лишь, что для любого $\bar{y}$ существуют такие $\delta > 0$ и $L_{\bar{y}} > 0$, что $f(y)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L_{\bar{y}}$ в интервале $|y - \bar{y}| < \delta$. Какмогут быть устроены непродолжаемые решения в этом случае?

Задача 8*. 1) Сформулировать и доказать теорему, аналогичную исходной, для банахова пространства.
2) Сформулировать и доказать для банахова пространства теорему, аналогичную теореме предыдущей задачи, при дополнительном условиии ограниченности функции $f(y)$ на любом ограниченном подмножестве банахова пространства. (Почему понадобилось это условие?)

Задача 9*. Как известно, если снять условие локальной липшицевости правой части $f(y)$ (но оставив условие непрерывности), на любом сколь угодно малом промежутке решение может уже не быть единственным ($y' = 2\sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$: решения $y = 0$ и $y = t^2$). Показать, что локальная единственность решения восстанавливается, если потребовать $f(y_0) \neq 0$.