Физический факультет
Московского
государственного университета
имени М.В.Ломоносова

Актуальные проблемы математической физики

посвящается памяти профессора В. Ф. Бутузова

Асимптотика решения сингулярно возмущённой системы уравнений с одномасштабным внутренним слоем

Р. Е. Симаков, кафедра математики

Постановка задачи

и условия её рассмотрения

Рассматривается краевая задача для сингулярно возмущённой системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с разными степенями малого параметра при вторых производных:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2u}{dx^2} = F(u, v, x, \varepsilon), \qquad \varepsilon \frac{d^2v}{dx^2} = f(u, v, x, \varepsilon), \qquad 0 < x < 1,$$

$$\frac{du}{dx}(0, \varepsilon) = \frac{du}{dx}(1, \varepsilon) = 0, \qquad \frac{dv}{dx}(0, \varepsilon) = \frac{dv}{dx}(1, \varepsilon) = 0.$$

Особенность задачи состоит в том, что одно из двух уравнений вырожденной системы имеет двукратный корень, а другое — три непересекающихся простых (однократных) корня.

В данной работе ставится вопрос о существовании и асимптотике по параметру ε решения задачи с переходным слоем в окрестности некоторой внутренней точки x_* отрезка $[0;1]$ (точки перехода), где решение совершает быстрый переход из малой окрестности одного решения вырожденной системы в малую окрестность другого её решения. Такие решения называются контрастными структурами типа ступеньки (КСТС).

- Условие A1. Функция $F(u,v,x,\varepsilon)$ имеет вид
$$F(u,v,x,\varepsilon) = h(x)\big(u - \varphi(v,x)\big)^2 - \varepsilon F_1(u,v,x,\varepsilon),$$
где $h(x) > 0$.

- Условие A2. Уравнение
$$g(v,x) \coloneqq f(\varphi(v,x),v,x,0) = 0$$
имеет три простых корня $v = \psi_i(x)$, $i = 1,2,3$, причём
$$\psi_1(x) < \psi_2(x) < \psi_3(x).$$

- Условие A3. Функции $h(x)$, $\varphi(v,x)$, $\psi_i(x)$, $i = 1,2,3$, $f(u,v,x,\varepsilon)$ и $F_1(u,v,x,\varepsilon)$ являются достаточно гладкими.

- Условие A4. Уравнение
$$I(x_0) \coloneqq \int\limits_{\psi_1(x_0)}^{\psi_3(x_0)} g(v,x_0)\,dv = 0$$
имеет корень $x_0 = \bar{x}_0 \in (0;1)$, и $I'(\bar{x}_0) < 0$.

Чтобы сформулировать остальные условия, определим несколько кривых на плоскости переменных (v, x) и в пространстве переменных (u, v, x):

$$l_1 = \{(v, x): v = \psi_1(x), 0 \le x \le \bar{x}_0\},$$

$$l_2 = \{(v, x): \psi_1(\bar{x}_0) \le v \le \psi_3(\bar{x}_0), x = \bar{x}_0\},$$

$$l_3 = \{(v, x): v = \psi_3(x), \bar{x}_0 \le x \le 1\},$$

$$L_i = \{(u, v, x): u = \varphi(v, x), (v, x) \in l_i\}, \qquad i = 1,2,3,$$

$$l = l_1 \cup l_2 \cup l_3, \qquad L = L_1 \cup L_2 \cup L_3.$$

- Условие А5. $F_1(u, v, x, 0) > 0$ в точках кривых L_1 и L_3.
- Условие А6. $\frac{\partial g}{\partial v}(v, x) > 0$ в точках кривых l_1 и l_3.
- Условие А7. Выполнены неравенства

$$\int_{\psi_1(\bar{x}_0)}^{v} g(s, \bar{x}_0)\, ds > 0 \quad \text{при} \quad \psi_1(\bar{x}_0) < v \le \psi_2(\bar{x}_0),$$

$$\int_{\psi_3(\bar{x}_0)}^{v} g(s, \bar{x}_0)\, ds > 0 \quad \text{при} \quad \psi_2(\bar{x}_0) \le v < \psi_3(\bar{x}_0).$$

- Условие А8. Имеют место неравенства $G_1(v,\bar{x}_0) > 0$ при $\psi_1(\bar{x}_0) \le v \le \psi_2(\bar{x}_0)$ и $G_3(v,\bar{x}_0) > 0$ при $\psi_2(\bar{x}_0) \le v \le \psi_3(\bar{x}_0)$, где

$$G_i(v,x) := \frac{\partial\varphi}{\partial v}(v,x)g(v,x) + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}(v,x)\int\limits_{\psi_i(x)}^{v} g(s,x)\,ds + F_1(\varphi(v,x),v,x,0),$$

$$i = 1,3.$$

- Условие А9. $\frac{\partial\varphi}{\partial v}(v,x) > 0$ в точках кривой l.

- Условие А10. $\frac{\partial f}{\partial u}(u,v,x,0) < 0$ в точках кривой L.

Построение асимптотики

регулярная часть
погранслойная часть
внутрислойная часть

Будем искать решение, удовлетворяющее предельным равенствам

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,\varepsilon) = \begin{cases} \varphi(\psi_1(x),x), & 0 \le x < \bar{x}_0, \\ \varphi(\psi_3(x),x), & \bar{x}_0 < x \le 1, \end{cases} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} v(x,\varepsilon) = \begin{cases} \psi_1(x), & 0 \le x < \bar{x}_0, \\ \psi_3(x), & \bar{x}_0 < x \le 1. \end{cases}$$

Асимптотику искомого решения будем строить раздельно слева и справа от точки перехода $x = x_*$ в виде

$$U^{(\mp)}(x,\varepsilon) = \bar{u}^{(\mp)}(x,\varepsilon) + \Pi^{(\mp)}u(\xi_{\mp},\varepsilon) + P^{(\mp)}u(\zeta_{\mp},\varepsilon) + Q^{(\mp)}u(\tau,\varepsilon),$$
$$V^{(\mp)}(x,\varepsilon) = \bar{v}^{(\mp)}(x,\varepsilon) + \Pi^{(\mp)}v(\xi_{\mp},\varepsilon) + P^{(\mp)}v(\zeta_{\mp},\varepsilon) + Q^{(\mp)}v(\tau,\varepsilon).$$

Определим точку перехода равенствами

$$V^{(-)}(x_*,\varepsilon) = V^{(+)}(x_*,\varepsilon) = \psi_2(x_*).$$

Регулярная часть асимптотики

$$\bar{u}^{(\mp)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \bar{u}_i^{(\mp)}(x), \qquad \bar{v}^{(\mp)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \bar{v}_i^{(\mp)}(x)$$

Уравнения для определения функций $\bar{u}_i^{(\mp)}(x)$ и $\bar{v}_i^{(\mp)}(x)$ извлекаются стандартным способом из равенств

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 \bar{u}^{(\mp)}}{dx^2} = F\left(\bar{u}^{(\mp)}, \bar{v}^{(\mp)}, x, \varepsilon\right), \qquad \varepsilon \frac{d^2 \bar{v}^{(\mp)}}{dx^2} = f\left(\bar{u}^{(\mp)}, \bar{v}^{(\mp)}, x, \varepsilon\right).$$

В нулевом порядке имеем вырожденные системы уравнений

$$F\left(\bar{u}_0^{(\mp)}, \bar{v}_0^{(\mp)}, x, 0\right) = 0, \qquad f\left(\bar{u}_0^{(\mp)}, \bar{v}_0^{(\mp)}, x, 0\right) = 0,$$

из которых находим

$$\bar{u}_0^{(-)}(x) = \varphi(\psi_1(x), x), \qquad \bar{v}_0^{(-)}(x) = \psi_1(x),$$
$$\bar{u}_0^{(+)}(x) = \varphi(\psi_3(x), x), \qquad \bar{v}_0^{(+)}(x) = \psi_3(x).$$

При $i = 1,2,\dots$ функции $\bar{u}_i^{(\mp)}, \bar{v}_i^{(\mp)}$ определяются из СЛАУ вида

$$\begin{gathered}\bar{u}_i^{(\mp)} - \bar{\varphi}_v^{(\mp)}(x)\bar{v}_i^{(\mp)} = a_i^{(\mp)}(x),\\ \bar{f}_u^{(\mp)}(x)\bar{u}_i^{(\mp)} + \bar{f}_v^{(\mp)}(x)\bar{v}_i^{(\mp)} = b_i^{(\mp)}(x),\end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered}\bar{\varphi}_v^{(\mp)}(x) \coloneqq \frac{\partial\varphi}{\partial v}\left(\bar{v}_0^{(\mp)}(x), x\right),\\ \bar{f}_u^{(\mp)}(x) \coloneqq \frac{\partial f}{\partial u}\left(\bar{u}_0^{(\mp)}(x), \bar{v}_0^{(\mp)}(x), x, 0\right),\\ \bar{f}_v^{(\mp)}(x) \coloneqq \frac{\partial f}{\partial v}\left(\bar{u}_0^{(\mp)}(x), \bar{v}_0^{(\mp)}(x), x, 0\right),\end{gathered}$$

а правые части $a_i^{(\mp)}(x), b_i^{(\mp)}(x)$ выражаются рекуррентно через $\bar{u}_j^{(\mp)}(x)$, $\bar{v}_j^{(\mp)}(x)$ с номерами $j < i$.

Погранслойная часть асимптотики

$$\Pi^{(\mp)}u(\xi_{\mp},\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\Pi_i^{(\mp)}u(\xi_{\mp}), \qquad \Pi^{(\mp)}v(\xi_{\mp},\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\Pi_i^{(\mp)}v(\xi_{\mp}),$$

$$P^{(\mp)}u(\zeta_{\mp},\varepsilon) = \varepsilon^{3/4}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}P_i^{(\mp)}u(\zeta_{\mp}), \qquad P^{(\mp)}v(\zeta_{\mp},\varepsilon) = \varepsilon^{5/4}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}P_i^{(\mp)}v(\zeta_{\mp})$$

Построение этих функций производится так же, как и в работе [3].
Погранслойные переменные:

$$\xi_{-} = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}, \qquad \xi_{+} = \frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}, \qquad \zeta_{-} = \frac{x}{\varepsilon^{3/4}}, \qquad \zeta_{+} = \frac{1-x}{\varepsilon^{3/4}}.$$

Внутрислойная часть асимптотики

$$Q^{(\mp)}u(\tau,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} Q_i^{(\mp)}u(\tau), \qquad Q^{(\mp)}v(\tau,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} Q_i^{(\mp)}v(\tau), \qquad \tau = \frac{x - x_*}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Отличительной особенностью данной задачи является то, что внутренний переходный слой описывается функциями, зависящими от одной растянутой переменной τ, то есть является одномасштабным, что нехарактерно для систем ОДУ с различными степенями малого параметра при вторых производных.

Уравнения для функций $Q_i^{(\mp)}u, Q_i^{(\mp)}v$ извлекаются стандартным способом из равенств

$$\varepsilon\frac{d^2 Q^{(\mp)}u}{d\tau^2} = Q^{(\mp)}F, \qquad \frac{d^2 Q^{(\mp)}v}{d\tau^2} = Q^{(\mp)}f,$$

где

$$Q^{(\mp)}F := \left[F\left(\bar{u}^{(\mp)} + Q^{(\mp)}u, \bar{v}^{(\mp)} + Q^{(\mp)}v, x, \varepsilon\right) - F\left(\bar{u}^{(\mp)}, \bar{v}^{(\mp)}, x, \varepsilon\right)\right]\Big|_{x=x_*+\sqrt{\varepsilon}\tau},$$

функции $Q^{(\mp)}f$ имеют аналогичные выражения.

Граничные условия при $\tau = 0$ вытекают из равенств

$$\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\bar{v}_i^{(\mp)}(x_*) + \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}Q_i^{(\mp)}v(0) = \psi_2(x_*),$$

к ним добавляются стандартные условия на бесконечности

$$Q_i^{(\mp)}v(\mp\infty) = 0.$$

Уравнения для внутрислойных функций нулевого порядка интегрируются в квадратурах, а их решения имеют экспоненциальные оценки

$$\left|Q_0^{(-)}u(\tau)\right| \le c\exp(\kappa\tau), \qquad 0 < Q_0^{(-)}v(\tau) \le c\exp(\kappa\tau), \qquad \tau \le 0,$$
$$\left|Q_0^{(+)}u(\tau)\right| \le c\exp(-\kappa\tau), \qquad -c\exp(-\kappa\tau) \le Q_0^{(+)}v(\tau) < 0, \qquad \tau \ge 0.$$

Несложные вычисления показывают, что $Q_1^{(\mp)}u(\tau) = Q_1^{(\mp)}v(\tau) = 0$, а при $i = 2,3,\dots$ функции $Q_i^{(\mp)}u(\tau)$, $Q_i^{(\mp)}v(\tau)$ находятся в явном виде и имеют экспоненциальные оценки того же вида, что и $Q_0^{(\mp)}u(\tau)$.

Сшивание асимптотик

и отыскание точки перехода

По построению V-компонента асимптотики удовлетворяет в точке перехода формальному равенству

$$V^{(-)}(x_*,\varepsilon) = V^{(+)}(x_*,\varepsilon)$$

при произвольном x_* из достаточно малой окрестности точки $\bar{x}_0$. Теперь x_* выбирается так, чтобы также выполнялось формальное равенство

$$\frac{dV^{(-)}}{dx}(x_*,\varepsilon) = \frac{dV^{(+)}}{dx}(x_*,\varepsilon).$$

Условие А4 позволяет искать точку перехода x_* в виде ряда

$$x_* = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} x_i\,,$$

при этом оказывается, что $x_0 = \bar{x}_0$, то есть $x_* = \bar{x}_0 + O\left(\varepsilon^{1/4}\right)$.

Ключевой особенностью рассматриваемой задачи является тот факт, что из гладкого сшивания V-компоненты асимптотики в точке перехода следует гладкое сшивание её U-компоненты.

Именно это свойство обеспечивает существование решения задачи с одномасштабным внутренним слоем несмотря на то, что уравнения имеют разные степени малого параметра при старших производных.

Данный эффект не наблюдался в исследованных ранее задачах с кратными корнями.

Обоснование асимптотики

и основная теорема

Асимптотика n-го порядка берётся в виде

$$U_n^{(\mp)}(x,\varepsilon,x_*) = \\ = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i/2}\bar{u}_i^{(\mp)}(x) + \sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{2n}\varepsilon^{i/4}\Pi_i^{(\mp)}u(\xi_\mp) + \varepsilon^{3/4}\sum_{i=0}^{2n}\varepsilon^{i/4}P_i^{(\mp)}u(\zeta_\mp) + \\ + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/4}Q_i^{(\mp)}u(\tau,x_*),$$

$$V_n^{(\mp)}(x,\varepsilon,x_*) = \\ = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i/2}\bar{v}_i^{(\mp)}(x) + \sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{2n}\varepsilon^{i/4}\Pi_i^{(\mp)}v(\xi_\mp) + \varepsilon^{5/4}\sum_{i=0}^{2n-2}\varepsilon^{i/4}P_i^{(\mp)}v(\zeta_\mp) + \\ + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/4}Q_i^{(\mp)}v(\tau,x_*).$$

Обоснование асимптотики проводится методом дифференциальных неравенств. Верхнее и нижнее решения строятся раздельно слева и справа от точек $\overline{x}$ и $\underline{x}$ соответственно в виде

$$\overline{U}^{(\mp)}(x,\varepsilon) = U_n^{(\mp)}(x,\varepsilon,\overline{x}) + \varepsilon^{(n+1)/2}\left(\alpha^{(\mp)}(x) + e^{-\xi_{\mp}} + \overline{Q}^{(\mp)}u(\overline{\tau}) + \overline{\Lambda}_{\mp}e^{\pm\gamma\overline{\sigma}}\right),$$

$$\underline{U}^{(\mp)}(x,\varepsilon) = U_n^{(\mp)}(x,\varepsilon,\underline{x}) - \varepsilon^{(n+1)/2}\left(\alpha^{(\mp)}(x) + e^{-\xi_{\mp}} + \underline{Q}^{(\mp)}u(\underline{\tau}) + \underline{\Lambda}_{\mp}e^{\pm\gamma\underline{\sigma}}\right),$$

$$\overline{V}^{(\mp)}(x,\varepsilon) = V_n^{(\mp)}(x,\varepsilon,\overline{x}) + \varepsilon^{(n+1)/2}\left(\beta^{(\mp)}(x) + e^{-\xi_{\mp}} + \overline{Q}^{(\mp)}v(\overline{\tau}) + \sqrt{\varepsilon}k\overline{\Lambda}_{\mp}\left(1 - e^{\pm\gamma\overline{\sigma}}\right)\right),$$

$$\underline{V}^{(\mp)}(x,\varepsilon) = V_n^{(\mp)}(x,\varepsilon,\underline{x}) - \varepsilon^{(n+1)/2}\left(\beta^{(\mp)}(x) + e^{-\xi_{\mp}} + \underline{Q}^{(\mp)}v(\underline{\tau}) + \sqrt{\varepsilon}k\underline{\Lambda}_{\mp}\left(1 - e^{\pm\gamma\underline{\sigma}}\right)\right),$$

где

$$\overline{x} = X_n - \varepsilon^{(n+1)/2}\delta, \qquad \underline{x} = X_n + \varepsilon^{(n+1)/2}\delta, \qquad X_n = \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/4}\overline{x}_i,$$

$$\overline{\tau} = \frac{x-\overline{x}}{\sqrt{\varepsilon}}, \qquad \overline{\sigma} = \frac{x-\overline{x}}{\varepsilon^{3/4}}, \qquad \underline{\tau} = \frac{x-\underline{x}}{\sqrt{\varepsilon}}, \qquad \underline{\sigma} = \frac{x-\underline{x}}{\varepsilon^{3/4}},$$

$\alpha^{(\mp)}(x)$ и $\beta^{(\mp)}(x)$ — решения СЛАУ

$$\alpha^{(\mp)} - \bar{\varphi}_v^{(\mp)}(x)\beta^{(\mp)} = A,$$
$$\bar{f}_u^{(\mp)}(x)\alpha^{(\mp)} + \bar{f}_v^{(\mp)}(x)\beta^{(\mp)} = A,$$

а числа $A, \gamma, \delta, k, \overline{\Lambda}_{\mp}, \underline{\Lambda}_{\mp}$ и функции $\overline{Q}^{(\mp)}u, \overline{Q}^{(\mp)}v, \underline{Q}^{(\mp)}u, \underline{Q}^{(\mp)}v$ выбираются так, чтобы две пары функций

$$\overline{U}(x,\varepsilon) = \begin{cases} \overline{U}^{(-)}(x,\varepsilon), & 0 \le x \le \overline{x}, \\ \overline{U}^{(+)}(x,\varepsilon), & \overline{x} \le x \le 1; \end{cases} \qquad \overline{V}(x,\varepsilon) = \begin{cases} \overline{V}^{(-)}(x,\varepsilon), & 0 \le x \le \overline{x}, \\ \overline{V}^{(+)}(x,\varepsilon), & \overline{x} \le x \le 1 \end{cases}$$

и

$$\underline{U}(x,\varepsilon) = \begin{cases} \underline{U}^{(-)}(x,\varepsilon), & 0 \le x \le \underline{x}, \\ \underline{U}^{(+)}(x,\varepsilon), & \underline{x} \le x \le 1; \end{cases} \qquad \underline{V}(x,\varepsilon) = \begin{cases} \underline{V}^{(-)}(x,\varepsilon), & 0 \le x \le \underline{x}, \\ \underline{V}^{(+)}(x,\varepsilon), & \underline{x} \le x \le 1 \end{cases}$$

были соответственно верхним и нижним решениями задачи.

Основная теорема

Пусть выполнены условия A1–A10. Тогда для любого целого $n \geq 0$ при всех достаточно малых ε существует решение $u(x,\varepsilon)$, $v(x,\varepsilon)$ исследуемой задачи, для которого справедливы асимптотические равенства

$$u(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{(n+1)/2}\right), \qquad v(x,\varepsilon) = V_n(x,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{(n+1)/2}\right),$$

где

$$U_n(x,\varepsilon) = \begin{cases} U_n^{(-)}(x,\varepsilon,X_n), & 0 \leq x \leq X_n, \\ U_n^{(+)}(x,\varepsilon,X_n), & X_n < x \leq 1; \end{cases} \qquad V_n(x,\varepsilon) = \begin{cases} V_n^{(-)}(x,\varepsilon,X_n), & 0 \leq x \leq X_n, \\ V_n^{(+)}(x,\varepsilon,X_n), & X_n < x \leq 1. \end{cases}$$

Следствия

- Предельным положением при $\varepsilon \to 0$ кривой
$$l_\varepsilon = \{(u, v, x): u = u(x, \varepsilon), v = v(x, \varepsilon), 0 \leq x \leq 1\}$$
(то есть графика решения) является кривая L.

- Для производных решения справедливы асимптотические представления
$$\frac{du}{dx}(x, \varepsilon) = \frac{dU_n}{dx}(x, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{n/2}\right), \qquad \frac{dv}{dx}(x, \varepsilon) = \frac{dV_n}{dx}(x, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{n/2}\right).$$

Список литературы

[1] Нефёдов Н. Н. Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакции-диффузии-адвекции: теория и применение // Журнал вычисл. математики и матем. физики. 2021. Т. 61, № 12. С. 2074–2094. DOI: 10.31857/S0044466921120103

[2] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.

[3] Бутузов В. Ф., Симаков Р. Е. Асимптотика решения сингулярно возмущённой системы уравнений с многозонным внутренним слоем // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57, № 4. С. 435–465. DOI: 10.31857/S0374064121040014

[4] Нефёдов Н. Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущённых задач с внутренними слоями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 7. С. 1132–1139.

[5] Бутузов В. Ф., Левашова Н. Т., Мельникова А. А. Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе уравнений с различными степенями малого параметра // Журнал вычисл. математики и матем. физики. 2012. Т. 52, № 11. С. 1983–2003.