Распространение автоволны в среде с разрывными характеристиками

Левашова Н.Т.,Орлов А.О., Чунжук Е.А.

Кафедра Математики

2 июня 2022

Постановка задачи

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon^2 \dfrac{\partial u}{\partial t} := f\left(u,x,\varepsilon\right), x \in \left(-1;1\right), t \in (0;T] \\ u_x(-1,\varepsilon) = u_x(1,\varepsilon) = 0, \quad u\left(x,0,\varepsilon\right) = u^0\left(x,\varepsilon\right), \ x \in \left(-1;1\right), \end{cases}$$

где

$$f(u,x,\varepsilon) = \begin{cases} f^{(L)}(u,x,\varepsilon), & -1 \leq x \leq x_0, t \geq 0; \\ f^{(R)}(u,x,\varepsilon), & 0 \leq x_0 \leq 1, t \geq 0, \end{cases}$$

Условие 1 Пусть уравнение $f^{(L)}(u,x,0) = 0$ изолированный корень $\varphi^{(-)}(x)$, а уравнение $f^{(R)}(u,x,0) = 0$ имеет три корня $\varphi^{(-)}(x)$,$q(x)$,$\varphi^{(+)}(x)$,

$\varphi^{(-)}(x) < q(x) < \varphi^{(+)}(x)$, $x \in [-1;1]$,

$f_u^{(L)}(\varphi^{(-)}(x),x,0) > 0$, $f_u^{(R)}(\varphi^{(\mp)}(x),x,0) > 0$.

Первая задача

Стационирование к решению задачи

$$\varepsilon^2 \frac{d^2u}{dx^2} = f(u,x,\varepsilon), \quad -1 < x < 1; \quad \frac{du}{dx}(-1,x) = \frac{du}{dx}(1,x) = 0.$$

Дополнительные условия

Существует $p_0 \in (\varphi^{(-)}(x_0),\varphi^{(+)}(x_0))$:

$$\int\limits_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{p_0} f^{(L)}(u,x_0,0)du = \int\limits_{\varphi^{(+)}(x_0)}^{p_0} f^{(R)}(u,x_0,0)du.$$

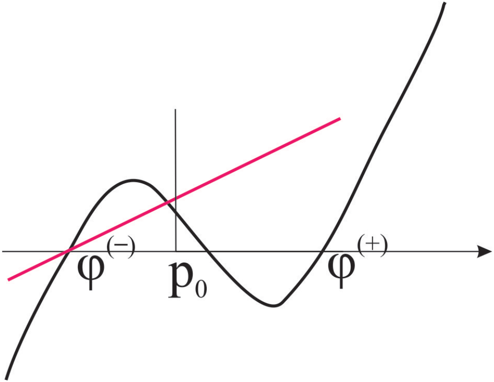
$f^{(L)}(p_0,x_0,0) > f^{(R)}(p_0,x_0,0)$ - устойчивость стационарного решения,

$\varphi_1(\mathrm{x}) < \varphi_2(\mathrm{x}) < 0.5\,(\varphi_1(\mathrm{x}) + \varphi_3(\mathrm{x}))$ — движение возрастающего фронта налево.

Пример I

$$f(u) = \begin{cases} f^{(L)}(u) = u - \varphi_1, & -1 \le x < x_0, t \ge 0; \\ f^{(R)}(u) = (u - \varphi_1)(u - \varphi_2)(u - \varphi_3), & x_0 \le x \le 1, t \ge 0, \end{cases}$$

φ_i, $i = 1,2,3$ – постоянные.



Вторая задача

Правая часть имеет вид

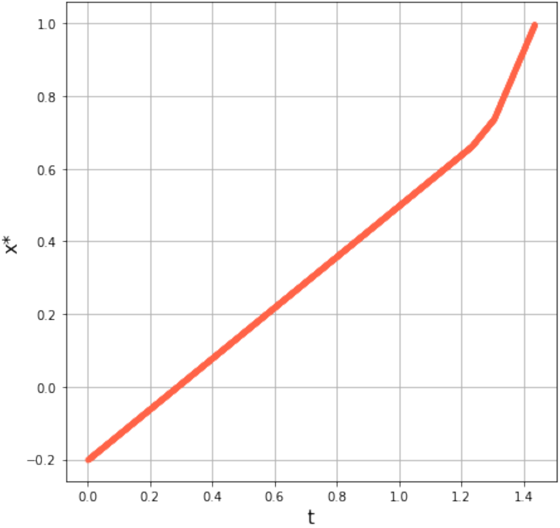
$$f(u,x,\varepsilon) = (u - \varphi^{(-)}(x))(u - q(x))(u - \varphi^{(+)}(x))$$

$$q(x) = 0 \begin{cases} q_l(x), & -1 \leq x \leq x_0, t \geq 0; \\ q_r(x), & 0 \leq x_0 \leq 1, t \geq 0, \end{cases}$$

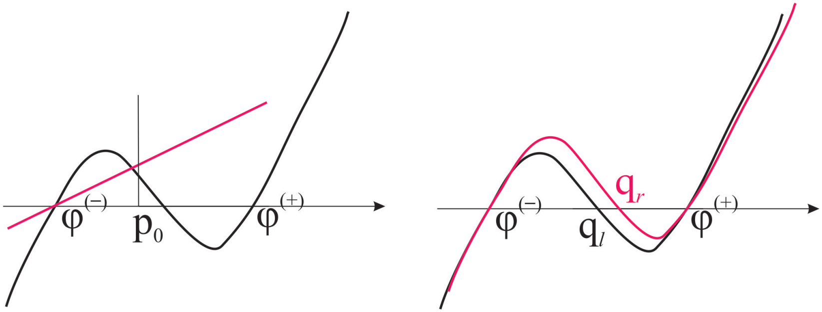
$0{,}5(\varphi^{(-)}(x) + \varphi^{(+)}(x)) < q(x) < \varphi^{(+)}(x),\ \ x \in [-1;1]$ — движение возрастающего фронта направо.

$\varphi^{(-)}(x_0) < q_l(x_0) < \varphi^{(+)}(x_0)$ — фронт проходит через точку x_0

Движение точки локализации фронта



Пример II



Обозначения

$x = x_0$ – точка разрыва функции $f(u,x,\varepsilon)$,

$x = \hat{x}(t)$ – точка, характеризующая положение движущегося фронта в момент времени t,

растянутые переменные:

$$\xi_0 = \frac{x - x_0}{\varepsilon}, \xi = \frac{x - \hat{x}(t)}{\varepsilon}.$$

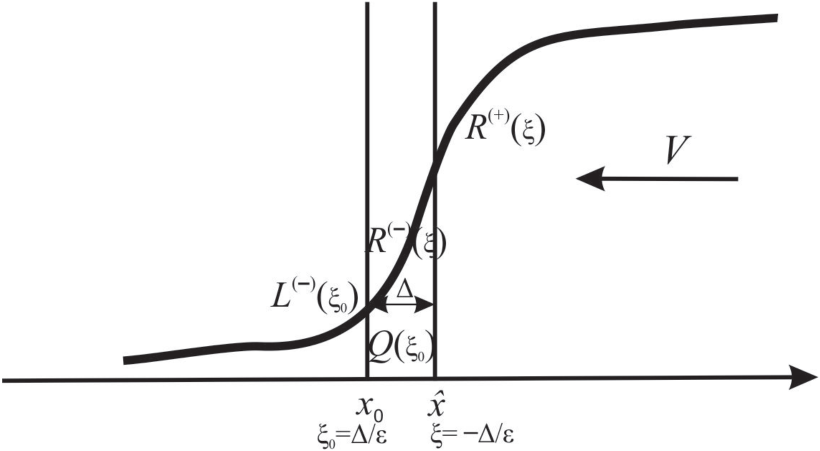
расстояние от точки положения фронта до точки разрыва сред

$$\Delta(t) = \hat{x}(t) - x_0$$

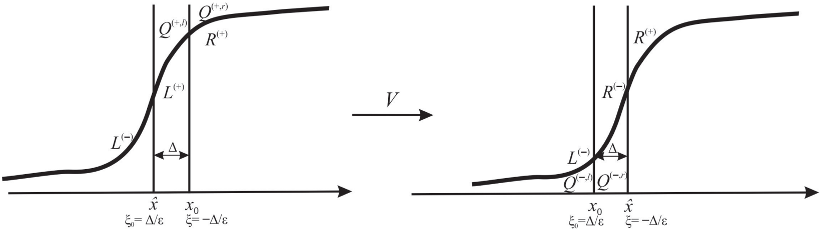
.

Скорость движения фронта $V = \dfrac{d\Delta}{dt}$.

Асимптотическое приближение. Задача I



Асимптотическое приближение. Задача II



Непрерывное сшивание

В точка локализации фронта:

$$\varphi^{(-)}(\hat{x}) + R_0^{(-)}(0) + \textstyle\sum_{i=1}^{3} \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{r,(-)}(\hat{x}) + R_i^{(-)}(0) + Q_i(\Delta/\varepsilon) \right) =$$

$$= \varphi^{(+)}(\hat{x}) + R_0^{(+)}(0) + \textstyle\sum_{i=1}^{3} \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{r,(+)}(\hat{x}) + R_i^{(+)}(0) + Q_i(\Delta/\varepsilon) \right) = s.$$

I: s – уровень сшивания стационарного решения(Орлов и др. 2018).
II: $s = 0{,}5(\varphi^{(-)}(\hat{x}) + \varphi^{(+)}(\hat{x}))$.

В точке разрыва

$$\varphi^{(-)}(x_0) + L_0(0,t) + \sum_{i=1}^{3} \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^l(x_0) + L_i(0,t) \right) =$$

$$= \varphi^{(-)}(x_0) + R_0^{(-)}(-\Delta/\varepsilon,t) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{r,(-)}(x_0) + R_i^{(-)}(-\Delta/\varepsilon,t) + \varepsilon Q_i(0,t) \right) = p(t)\ .$$

Нулевой порядок

Определим функции нулевого приближения из следующих задач

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 L_0}{\partial \xi_0^2} = f^{(L)}\left(\varphi^{(-)}(x_0) + L_0, x_0\right), \; \xi_0 < 0, \; t > 0; \\ L_0(-\infty, t) = 0, \; L_0(0, t) = p(t) - \varphi^{(-)}(x_0), \end{cases}$$

Обозначим $\tilde{u}^l(\xi_0, t) = \varphi^{(-)}(x_0) + L_0(\xi_0, p(t))$, $\Psi(\xi_0, p(t)) := \dfrac{\partial L_0}{\partial \xi_0}$.

$$\Psi(\xi_0, p(t)) = \sqrt{2 \int_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{\tilde{u}^l(\xi_0)} f^{(L)}(u, x_0, 0) du}.$$

Нулевой порядок

Задачу для $R_0^{(-)}(\xi,t)$ будем решать на отрезке $\xi \in \left[-\frac{\Delta}{\varepsilon},0\right]$, $t>0$

$$\frac{\partial^2 R_0^{(-)}}{\partial \xi^2} + V\frac{\partial R_0^{(-)}}{\partial \xi} = f^{(R)}\left(\varphi^{(-)}(\hat{x}) + R_0^{(-)},\hat{x}\right),$$
$$R_0^{(-)}(-\Delta/\varepsilon,t) = p(t) - \varphi^{(-)}(\hat{x}),\ \ R_0^{(-)}(0,t) = s - \varphi_1(\hat{x}).$$

Задачу для $R_0^{(+)}(\xi,t)$ будем решать при $\xi>0$, $t>0$

$$\frac{\partial^2 R_0^{(+)}}{\partial \xi^2} + V\frac{\partial R_0^{(+)}}{\partial \xi} = f^{(R)}(\varphi^{(+)}(\hat{x}) + R_0^{(+)},\hat{x}),$$
$$R_0^{(+)}(0,t) = s - \varphi^{(+)}(\hat{x}),\ \ R_0^{(+)}(+\infty,t) = 0.$$

Введем обозначение

$$\tilde{u}^r(\xi,t) = \begin{cases} \varphi^{(-)}(\hat{x}) + R_0^{(-)}(\xi,t), & \xi \leq 0; \\ \varphi^{(+)}(\hat{x}) + R_0^{(+)}(\xi,t), & \xi \geq 0. \end{cases}$$

Тогда задачи для $R_0^{(\mp)}$ можно переписать в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \tilde{u}^r}{\partial \xi^2} + V \dfrac{\partial \tilde{u}^r}{\partial \xi} = f^{(R)}\left(\tilde{u}^r, \hat{x}\right), \xi \geq -\dfrac{\Delta}{\varepsilon} \\ \tilde{u}^r(-\Delta/\varepsilon, t) = p(t),\ \tilde{u}^r\left(+\infty, t\right) = \varphi^{(+)}(\hat{x}). \end{cases}$$

Сшивание производных в нулевом порядке

$$H_0^{(L)}(V,p) := \frac{\partial L_0}{\partial \xi_0}(0,t) - \frac{\partial R_0^{(-)}}{\partial \xi}(-\frac{\Delta}{\varepsilon},t),$$

$$H_0^{(R)}(V,p) := \frac{\partial R_0^{(-)}}{\partial \xi}(0,t) - \frac{\partial R_0^{(+)}}{\partial \xi}(0,t).$$

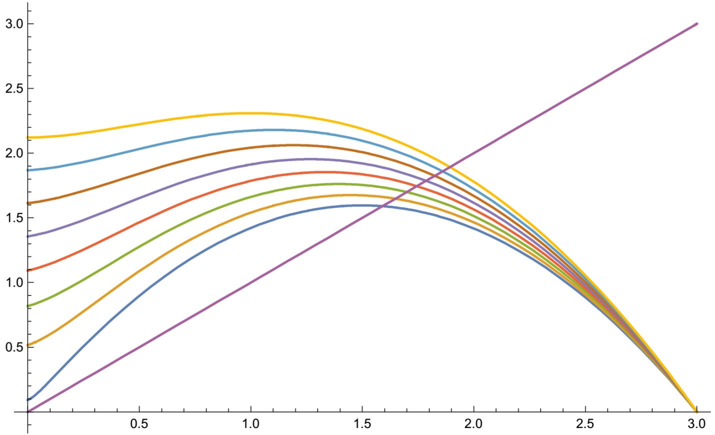
Гладкое сшивание

$$H_0^{(L)}(V_0,p_0) = 0, \;\; H_0^{(R)}(V_0,p_0) = 0.$$

Требование:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial H_0^{(L)}}{\partial p}(V_0,p_0) & \frac{\partial H_0^{(L)}}{\partial V}(V_0,p_0) \\ \frac{\partial H_0^{(R)}}{\partial p}(V_0,p_0) & \frac{\partial H_0^{(R)}}{\partial V}(V_0,p_0) \end{vmatrix} > 0 \tag{1}$$

Пересечение сепаратрис



Первый порядок

Функция $L_1(\xi_0,t)$ находится из задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 L_1}{\partial \xi_0^2} - \dfrac{\partial L_0}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial t} = f_u^{(L)}(\varphi^{(-)}(x_0) + L_0, x_0)L_1 + L_1 f(\xi_0), \;\; \xi_0 < 0, t > 0; \\ L_1(-\infty,t) = 0,\; L_1(0,t) = 0, \end{cases}$$

Задача для $Q_1(\xi_0,t)$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \xi_0^2} = f_u^{(R)}(\varphi^{(-)}(x_0), x_0)Q_1, \;\; \xi_0 > 0$$

$$Q_1(x_0) = Q^1 := -\bar{u}_1(x_0) - R_1^{(-)}(-\Delta/\varepsilon, t)$$

Первый порядок

Задачу для $R_1^{(-)}(\xi,t)$ будем решать при $\xi \in (-\infty,0)$, $t > 0$.

$$\frac{\partial^2 R_1^{(-)}}{\partial \xi^2} + V\frac{\partial R_1^{(-)}}{\partial \xi} - f_u^{(R)}(\varphi^{(-)}(\hat{x}) + R_0^{(-)},\hat{x},0)R_1^{(-)} =$$

$$= \left(f_u^{(R)}(\varphi^{(-)}(\hat{x}) + R_0^{(-)},\hat{x},0) - f_u^{(R)}(\varphi^{(-)}(\hat{x}),\hat{x},0)\right) Q_1(\xi + \Delta/\varepsilon) +$$

$$+ R_1^{(-)} f(\xi) + \frac{\partial R_0^{(-)}}{\partial t} + \frac{\partial R_0^{(-)}}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t},$$

$$R_1^{(-)}(-\infty,t) = 0, \;\; R_1^{(-)}(0,t) = 0.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 R_1^{(+)}}{\partial \xi^2} + V\dfrac{\partial R_1^{(+)}}{\partial \xi} - f_u^{(R)}(\varphi^{(+)}(\hat{x}) + R_0^{(+)},\hat{x},0)R_1^{(+)} = \\ = \dfrac{\partial R_0^{(+)}}{\partial t} + \dfrac{\partial R_0^{(+)}}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial t} + R_1 f^{(+)}(\xi), \\ R_1^{(+)}(0,t) = 0, \;\; R_1^{(+)}(\infty,t) = 0. \end{cases}$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ