О формировании решения со слабым погранслоем в задачах реакция-диффузия

Булатов Павел Евгеньевич[1]

[1]МГУ им. М. В. Ломоносова, физический факультет

2 июня 2022 г.

Постановка задачи

$$
\begin{aligned}
&L_\varepsilon(u) := \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - f(u, x, \varepsilon) = 0;\\
&x \in X := (0,1)\,,\ \ t \in (0, +\infty)\,;\\
&\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = h_0;\\
&\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = h_1;\\
&u(x, 0, \varepsilon) = u_{init}(x, \varepsilon)\,.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь ε – малый параметр. Функции, входящие в задачу (1), считаются достаточно гладкими.
Правые части граничных условий Неймана h_0 и h_1 являются константами, то есть задача имеет слабые погранслои.

Дополнительные соглашения

(A1) Вырожденное уравнение

$$f\left(u, x, 0\right) = 0 \tag{2}$$

имеет на некотором отрезке $[a, b]$ ровно три корня $\varphi^{(0,\pm)}\left(x\right)$, обращающих (2) в корректное тождество $\forall x \in X$ и упорядоченных следующим образом:

$$a < \varphi^{(-)}\left(x\right) < \varphi^{(0)}\left(x\right) < \varphi^{(+)}\left(x\right) < b \quad \forall x \in X. \tag{3}$$

(A2) Производная правой части по u удовлетворяет следующему условию:

$$f_u\left(\varphi^{(\pm)}\left(x\right), x, 0\right) > 0, \quad f_u\left(\varphi^{(0)}\left(x\right), x, 0\right) < 0 \quad \forall x \in \overline{X}. \tag{4}$$

(A3) Функция

$$I\left(x\right) := \int\limits_{\varphi^{(-)}(x)}^{\varphi^{(+)}(x)} f\left(u, x, 0\right) du \tag{5}$$

определена и знакопостоянна на $\overline{X}$.

Дополнительные соглашения

(A4) Решение в начальный момент времени удовлетворяет условию

$$a \leq u_{init}\left(x,\varepsilon\right) \leq b \tag{6}$$

и пересекает $\varphi^{(0)}\left(x\right)$ в точках x_k^{init}, $k = \overline{1, K}$, причём

$$\forall k = \overline{1, K-1}\ x_k^{init} < x_{k+1}^{init}$$

и для каждой из этих точек существует такое $\delta_k > 0$, что выполняется одно из двух условий:

$$\begin{aligned} &u_{init}\left(x,\varepsilon\right) < \varphi^{(0)}\left(x\right) \quad \forall x \in \left(x_k^{init} - \delta_k, x_k^{init}\right), \\ &u_{init}\left(x,\varepsilon\right) > \varphi^{(0)}\left(x\right) \quad \forall x \in \left(x_k^{init}, x_k^{init} + \delta_k\right); \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &u_{init}\left(x,\varepsilon\right) > \varphi^{(0)}\left(x\right) \quad \forall x \in \left(x_k^{init} - \delta_k, x_k^{init}\right), \\ &u_{init}\left(x,\varepsilon\right) < \varphi^{(0)}\left(x\right) \quad \forall x \in \left(x_k^{init}, x_k^{init} + \delta_k\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Разбиение на подзадачи

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - f\left(u, x, \varepsilon\right) = 0;\\
&x \in X_k^{(l)} := \left(c_{k-1}, x_k\right), \;\; t > 0;\\
&\frac{\partial u}{\partial x}\left(c_{k-1}, t, \varepsilon\right) = 0;\\
&u\left(x_k, t, \varepsilon\right) = \varphi^{(0)}\left(x_k\right);\\
&u\left(x, 0, \varepsilon\right) = u_{init}\left(x, \varepsilon\right).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - f\left(u, x, \varepsilon\right) = 0;\\
&x \in X_k^{(r)} := \left(x_k, c_k\right), \;\; t > 0;\\
&u\left(x_k, t, \varepsilon\right) = \varphi^{(0)}\left(x_k\right);\\
&\frac{\partial u}{\partial x}\left(c_k, t, \varepsilon\right) = 0;\\
&u\left(x, 0, \varepsilon\right) = u_{init}\left(x, \varepsilon\right).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Точки c_k, $k = \overline{1, K-1}$ и $x_k(t, \varepsilon)$ ищутся в виде асимптотических разложений, члены которых можно найти из условия C^1-гладкого сшивания. При этом мы полагаем, что $c_0 = 0$, $c_K = 1$, и в них заданы граничные условия исходной задачи.

Асимптотика решения

Метод пограничных функций [4]:

$$U_{n,k}^{(\pm)}(x,t,\varepsilon)=\sum_{m=0}^{n}\varepsilon^m\left(\bar{u}_{m,k}^{(\pm)}(x,\varepsilon)+Q_{m,k}^{(\pm)}(\xi_{m,k},\varepsilon)+\Pi_{m,k}^{(\pm)}\left(\zeta_k^{(\pm)},\varepsilon\right)\right),\tag{11}$$

где $\bar{u}_{m,k}^{(\pm)}$ – регулярные части, $Q_{m,k}^{(\pm)}$ и $\Pi_{m,k}^{(\pm)}$ – погранслойные части со стороны соответственно $x_k(t,\varepsilon)$ и c_k. Индекс $(-)$ соответствует задаче (9), а индекс $(+)$ – задаче (10).

Растянутые переменные определяются следующим образом:

$$\xi_{m,k}=\frac{x-x_k(t,\varepsilon)}{\varepsilon},\quad \zeta_k^{(-)}=\frac{c_{k-1}-x}{\varepsilon}<0,\quad \zeta_k^{(+)}=\frac{c_k-x}{\varepsilon}>0.\tag{12}$$

Члены асимптотического ряда (11) строятся по аналогии с [1].

Отметим, что члены нулевого порядка $\bar{u}_{m,k}^{(\pm)}(x,\varepsilon)$ равны $\varphi^{(-)}(x)$ или $\varphi^{(+)}(x)$. Кроме того, члены нулевого порядка $\Pi_{m,k}^{(\pm)}\left(\zeta_k^{(\pm)},\varepsilon\right)$, в том числе в крайних задачах, также равны нулю.

Формирование фронтов

Основной результат [2] можно сформулировать в виде леммы:

Лемма

*Пусть выполнены условия **(A1) – (A4)** с одной точкой пересечения x_1^{init}. Тогда за время $t_f = O\left(\varepsilon^2 \left|\ln \varepsilon\right|\right)$ погранслойная часть $Q^{(\pm)}(\xi, \varepsilon)$ примет вид быстро затухающей экспоненты и таким образом формирует резкий переходный слой (фронт) – область с большой по модулю положительной (если выполняется условие (7)) или отрицательной (в случае (8)) производной решения по координате.*

Точку $x_k(t)$ пересечения фронта с функцией $\varphi^{(0)}(x)$ будем называть ***точкой локализации*** фронта.

Замечание

С помощью разбиения (9), (10) лемма 1 обобщается на случай многих x_k.

Движение фронтов

Координата локализации k-го фронта выражается в виде асимптотического ряда

$$x_k = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m x_{m,k}, \tag{13}$$

члены которого являются решениями задачи Коши

$$\begin{gathered} \frac{dx_{m,k}}{dt} = V_{m,k}\left(x_{m,k}\right), \quad t \in [t_f, +\infty), \\ x_{m,k}\left(t_f\right) = \begin{cases} x_k^f, & m = 0, \\ 0, & m > 0. \end{cases} \end{gathered} \tag{14}$$

Величина x_k^f считается известной.

Движение фронтов

Скорость движения фронта в нулевом порядке [1, 2]

$$V_{0,k}\left(x_{0,k}\right) = \frac{\int_{\varphi^{(l)}\left(x_{0,k}\right)}^{\varphi^{(r)}\left(x_{0,k}\right)} f\left(u, x_{0,k}, \varepsilon\right) du}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\tilde{u}'\left(\xi\right)\right)^2 d\xi}. \qquad (15)$$

$$\tilde{u}\left(\xi\right) = \begin{cases} \varphi^{(l)}\left(x_{0,k}\right) + Q_0^{(l)}\left(\xi\right), & \xi \le 0, \\ \varphi^{(r)}\left(x_{0,k}\right) + Q_0^{(r)}\left(\xi\right), & \xi \ge 0. \end{cases} \qquad (16)$$

Для восходящих фронтов индекс (l) означает $(-)$, а (r) – $(+)$, а для нисходящих – наоборот.

Лемма

При достаточно малых ε направление движения фронта определяется знаком числителя (15)*, который по условию **(A3)** является знакопостоянным при $x \in \overline{X}$.*

Верхнее решение

См. [3].

Определение

Функция $\beta(x,t,\varepsilon)$ *из класса* $C[0,1] \cap C^2(0,1) \setminus \{x_k^*\}$ *по переменной* x *и из класса* $C[0,+\infty) \cap C^1(0,+\infty)$ *по переменной* t*, где* $x_k^*(t) \in (0,1)$ *– гладкая функция при* $t \in [0,+\infty)$, $k = \overline{1,K}$ *называется* ***верхним*** *решением задачи* (1)*, если*

$$L_\varepsilon(\beta) \leq 0 \quad \forall x \in (0,1) \setminus \{x_k^*\} \quad \forall t \in (0,+\infty); \tag{17}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\beta(x_k^*+0,t,\varepsilon) - \frac{\partial}{\partial x}\beta(x_k^*-0,t,\varepsilon) \leq 0 \quad \forall t \in (0,+\infty); \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\beta(0,t,\varepsilon) \leq h_0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\beta(1,t,\varepsilon) \geq h_1 \quad \forall t \in (0,+\infty); \tag{19}$$

$$\beta(x,0,\varepsilon) \geq u_{init}(x,\varepsilon) \quad \forall x \in [0,1]. \tag{20}$$

Нижнее решение

См. [3].

Определение

Функция $\alpha(x,t,\varepsilon)$ *из класса* $C[0,1] \cap C^2(0,1) \setminus \{x_k^*\}$ *по переменной* x *и из класса* $C[0,+\infty) \cap C^1(0,+\infty)$ *по переменной* t*, где* $x_k^*(t) \in (0,1)$ *– гладкая функция при* $t \in [0,+\infty)$*,* $k = \overline{1,K}$ *называется* ***нижним*** *решением задачи* (1)*, если*

$$L_\varepsilon(\alpha) \geq 0 \quad \forall x \in (0,1) \setminus \{x_k^*\} \quad \forall t \in (0,+\infty)\,; \tag{21}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\alpha(x_k^* + 0, t, \varepsilon) - \frac{\partial}{\partial x}\alpha(x_k^* - 0, t, \varepsilon) \geq 0 \quad \forall t \in (0,+\infty)\,; \tag{22}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\alpha(0,t,\varepsilon) \geq h_0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\alpha(1,t,\varepsilon) \leq h_1 \quad \forall t \in (0,+\infty)\,; \tag{23}$$

$$\alpha(x,0,\varepsilon) \leq u_{init}(x,\varepsilon) \quad \forall x \in [0,1]\,. \tag{24}$$

Теорема существования и единственности

См. [3].

Определение

Нижнее и верхнее решение называются ***упорядоченными****, если*

$$\alpha(x,t,\varepsilon) \le \beta(x,t,\varepsilon) \quad \forall x \in [0,1] \quad \forall t \in (0,+\infty)\,. \tag{25}$$

Теорема

Пусть существуют верхнее и нижнее решения задачи (1) *– соответственно функции* $\beta(x,t,\varepsilon)$ *и* $\alpha(x,t,\varepsilon)$*. Тогда задача* (1) *имеет единственное классическое решение* $u(x,t,\varepsilon)$*, причём*

$$\alpha(x,t,\varepsilon) \le u(x,t,\varepsilon) \le \beta(x,t,\varepsilon) \quad \forall x \in [0,1] \quad \forall t \in (0,+\infty)\,. \tag{26}$$

Построение верхнего и нижнего решений

Модификация асимптотики [1]:

$$\beta_n(x,t,\varepsilon) = U_n^{\beta}(x,t,\varepsilon) + \\ + \varepsilon^{n+1}\left(\bar{u}_{n+1}(x) + q_0 + Q_{n+1}^{\beta}(\xi_\beta, t)\right) + \\ + \varepsilon^{n+1}\left(e^{\kappa\zeta^{(-)}} + e^{-\kappa\zeta^{(+)}}\right), \quad (27)$$

$$\alpha_n(x,t,\varepsilon) = U_n^{\alpha}(x,t,\varepsilon) + \\ + \varepsilon^{n+1}\left(\bar{u}_{n+1}(x) - q_0 + Q_{n+1}^{\alpha}(\xi_\alpha, t)\right) - \\ - \varepsilon^{n+1}\left(e^{\kappa\zeta^{(-)}} + e^{-\kappa\zeta^{(+)}}\right), \quad (28)$$

где $U_n^{\beta,\alpha}(x,t,\varepsilon)$ – частичная сумма асимптотического ряда.

$$x_k^{\beta,\alpha}(t,\varepsilon) = \sum_{m=0}^{n} \varepsilon^m x_{m,k}^{\beta,\alpha}(t) + \varepsilon^{n+1} x_{n+1,k}^{\beta,\alpha}(t), \quad (29)$$

Поправки $Q_{n+1}^{\beta,\alpha}(\xi_\beta, t)$ и $x_{n+1,k}^{\beta,\alpha}(t)$ можно получить с любым знаком.

Взаимное уничтожение фронтов

Построим два верхних решения $\beta_n^{(l)}(x,t,\varepsilon)$ и $\beta_n^{(r)}(x,t,\varepsilon)$ вида (27). Они будут двигаться навстречу друг другу вслед за фронтами исходного решения. Справедлива оценка

$$\beta_n^{(l,r)}(x,t,\varepsilon) - u(x,t,\varepsilon) = O(\varepsilon^n) \geq 0 \quad \forall x \in X \setminus [x_1, x_2],$$

где $[x_1, x_2]$ – отрезок между точками локализации фронтов верхних решений. В некоторый момент времени t_{st} они встречаются в общей точке локализации x^*, после чего данный отрезок перестаёт существовать, и вышеупомянутая оценка становится справедливой на всём X. Обозначим

$$\beta_n(x,t,\varepsilon) = \min\left\{\beta_n^{(l)}(x,t,\varepsilon), \beta_n^{(r)}(x,t,\varepsilon)\right\}. \tag{30}$$

В дальнейшем эти фронты [2] выкатятся за пределы X за время $O(\varepsilon)$.

Взаимное уничтожение фронтов

Нижнее решение $\alpha(x, t, \varepsilon)$ будем строить по аналогии с (28), но с тем отличием, что у него не будет фронта. Это стационарное решение, близкое к $\varphi^{(-)}(x)$. Соответственно, оно не будет содержать компоненты $Q_{(n+1)\beta}(\xi_\beta, t)$. Из построения асимптотик нижнего и верхнего решений

$$\beta_n(x, t, \varepsilon) - \varphi^{(-)}(x) = O(\varepsilon) \geq 0;$$

$$\alpha_n(x, t, \varepsilon) - \varphi^{(-)}(x) = O(\varepsilon) \leq 0.$$

Из этого следует, что при $t > t_{st}$

$$\left| u(x, t, \varepsilon) - \varphi^{(-)}(x) \right| = O(\varepsilon). \tag{31}$$

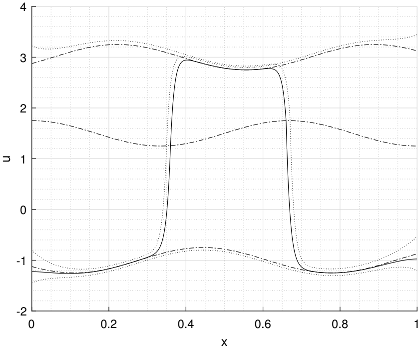

Рис.: Схлопывание при $I(x) > 0$.

Взаимное уничтожение фронтов

Лемма

Пусть выполнены условия ***(A1) – (A4)*** *с двумя точками пересечения* x_k^{init}. *Пусть выполнено одно из двух условий:*

1. $\left.\frac{\partial u_{init}}{\partial x}\right|_{x=x_1^{init}} \cdot I(x) > 0$, $\left.\frac{\partial u_{init}}{\partial x}\right|_{x=x_2^{init}} \cdot I(x) < 0$ *и* $I(x) > 0$;
2. $\left.\frac{\partial u_{init}}{\partial x}\right|_{x=x_1^{init}} \cdot I(x) < 0$, $\left.\frac{\partial u_{init}}{\partial x}\right|_{x=x_2^{init}} \cdot I(x) > 0$ *и* $I(x) < 0$.

Тогда

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t,\varepsilon) = u_{st}(x,\varepsilon) = \begin{cases} \varphi^{(-)}(x) + O(\varepsilon), & (1); \\ \varphi^{(+)}(x) + O(\varepsilon), & (2). \end{cases}$$

Замечание

Так как все функции непрерывны, то любые два соседних фронта будут иметь противоположные ориентации. Если точек x_k^{init} *много, то, пользуясь разбиением* (9), (10), *задачу можно разбить на несколько подзадач, удовлетворяющих условию (1) или (2) леммы 3.*

Выкат фронта

Главный член $x_{0,k}(t,\varepsilon)$ определяется задачей Коши (14). Функция (15) по условию **(A4)** является знакопостоянной $\forall x \in \overline{X}$, а значит, фронт верхнего решения пройдёт точку $x = 1$ и выйдет дальше. Ввиду непрерывности всех функций существует такое $\Delta > 0$, что на отрезке $[1, 1+\Delta]$ фронт будет продолжать движение вправо. Выкат произойдёт [2] за время $O(\varepsilon)$. Поправка $\varepsilon^{n+1}\left(e^{\kappa\zeta^{(-)}} + e^{-\kappa\zeta^{(+)}}\right)$ при достаточно больших κ обеспечивает выполнение (19). После выката в главном члене асимптотики решения на $\overline{X}$ останется только регулярная часть $\bar{u}_{0,k} = \varphi^{(\pm)}(x)$. Выкат влево и при $I(x) > 0$ рассматривается аналогично.

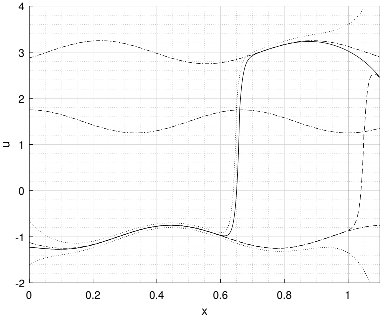

Рис.: Выкат вправо при $I(x) > 0$.

Выход фронта на границу

Результат предыдущего слайда можно сформулировать в виде леммы:

Лемма

*Пусть выполнены условия **(A1) – (A4)** с одной точкой пересечения x_1^{init}. Тогда*

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t,\varepsilon) = u_{st}(x,\varepsilon) = \begin{cases} \varphi^{(-)}(x) + O(\varepsilon), & \left.\frac{\partial u_{init}}{\partial x}\right|_{x=x_1^{init}} \cdot I(x) > 0; \\ \varphi^{(+)}(x) + O(\varepsilon), & \left.\frac{\partial u_{init}}{\partial x}\right|_{x=x_1^{init}} \cdot I(x) < 0. \end{cases}$$

Замечание

Так как все функции непрерывны, то очевидно, что любые два соседних фронта будут иметь противоположные ориентации, а значит они будут двигаться навстречу друг другу и схлопываться. Из этого следует, что выкатываться могут только крайние фронты.

Результат

Пользуясь разбиением (9), (10), задачу можно разбить на несколько подзадач, удовлетворяющих условиям лемм 3 и 4.

Теорема

Пусть для задачи (1) *выполнены условия* ***(A1) – (A4)****. Тогда за время порядка* $O(\varepsilon)$ *решение стабилизируется к* $\varphi^{(-)}(x)$ *или* $\varphi^{(+)}(x)$*:*

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t,\varepsilon) = u_{st}(x,\varepsilon) = \begin{cases} \varphi^{(-)}(x) + O(\varepsilon), & \left.\dfrac{\partial u_{init}}{\partial x}\right|_{x=x_1^{init}} \cdot I(x) > 0; \\ \varphi^{(+)}(x) + O(\varepsilon), & \left.\dfrac{\partial u_{init}}{\partial x}\right|_{x=x_1^{init}} \cdot I(x) < 0. \end{cases}$$

Замечание

Формирование фронтов произойдёт [2] за время $t_f = O\left(\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|\right)$*, а выкат – за время* $O(\varepsilon)$*. Процесс взаимного уничтожения фронтов можно рассмотреть как выкат фронтов на подзадачах* (9), (10)*, а это значит, что он тоже проходит за время* $O(\varepsilon)$*. Таким образом, время стабилизации решения можно оценить как* $t_{st} = O(\varepsilon)$*.*

- Ю. В. Божевольнов, Н. Н. Нефёдов. Движение фронта в параболической задаче реакция-диффузия // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2010, том 50, № 2, с. 276 – 285.
- В. Ф. Бутузов, Н. Н. Нефёдов, К. Р. Шнайдер. О формировании и распространении резких переходных слоев в параболических задачах // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2005. № 1. С. 9 – 13.
- Н. Н. Нефедов. Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 7. С. 1142 – 1149.
- А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.