Глава 1. Некоторые сведения из тензорной алгебры

§1. Векторы и ковекторы.

Понятие вектора как направленного отрезка известно еще из школы. В случае, если в пространстве введена система координат (например, декартова $Oxyz$), то каждый вектор $\mathbf{a}$ может быть описан при помощи совокупности своих проекций на соответствующие координатные оси:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}.$$

В таком случае вектор можно записать в виде суммы следующего вида:

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z, \tag{1}$$

где $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ и $\mathbf{e}_z$ – единичные орты в соответствующих направлениях. Совокупность векторов $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ и $\mathbf{e}_z$ составляет *базис*: любой вектор из нашего трехмерного пространства может быть представлен в виде комбинации (1) [1].

В дальнейшем для нас будет удобно обозначать координаты не буквами x, y и z, а нумеровать их цифрами, расположенными сверху:

$$a_x \to a^1,\ a_y \to a^2,\ a_z \to a^3.$$

В свою очередь, то же самое можно сделать и для координатных ортов (в целях, которые будут понятны позднее, мы будем ставить цифровой индекс не сверху, а снизу):

$$\mathbf{e}_x \to \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_y \to \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_z \to \mathbf{e}_3.$$

Равенство (1) в таком случае может быть переписано так:

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} a^i\mathbf{e}_i. \tag{2}$$

Писать везде знак суммы $\sum$ было бы не очень рационально. По этой причине было принято соглашение, называемое *правилом суммирования Эйнштейна* [1]: если какой-то индекс повторяется в выражении дважды, причем первый раз он стоит вверху, а второй – внизу, то знак суммы можно не писать. Таким образом, (2) можно записать в намного более компактном виде:

$$\mathbf{a} = a^i\mathbf{e}_i.$$

Пока мы работаем в одной системе координат, разница между верхними и нижними индексами проявляется мало. Ситуация коренным образом меняется в том случае, если мы переходим в другую систему координат, в которой векторы базиса представляются в форме:

$$\mathbf{e'}_1 = \alpha_1^1\mathbf{e}_1 + \alpha_1^2\mathbf{e}_2 + \alpha_1^3\mathbf{e}_3;$$

$$\mathbf{e'}_2 = \alpha_2^1\mathbf{e}_1 + \alpha_2^2\mathbf{e}_2 + \alpha_2^3\mathbf{e}_3;$$

$$\mathbf{e'}_3 = \alpha_3^1\mathbf{e}_1 + \alpha_3^2\mathbf{e}_2 + \alpha_3^3\mathbf{e}_3;$$

Это выражение можно переписать в матричном виде:

$$\mathbf{e'} = \mathbf{e}P_{\mathbf{e}\to\mathbf{e'}}, \tag{3}$$

где

$$\mathbf{e'} = \{e'_1, e'_2, e'_3\},\ \mathbf{e} = \{e_1, e_2, e_3\},$$

а

$$P_{e\to e'} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 \end{pmatrix}$$

– *матрица перехода* от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{e'}$. Кроме того, с помощью правила суммирования Эйнштейна базисные векторы в новой системе координат можно представить так:

$$\mathbf{e'}_i = \alpha_i^j \mathbf{e}_j.$$

В свою очередь, возможно провести и обратную процедуру: осуществить переход от базиса $\mathbf{e}'$ к базису $\mathbf{e}$:

$$\mathbf{e}_1 = \beta_1^1\mathbf{e}_1 + \beta_1^2\mathbf{e}_2 + \beta_1^3\mathbf{e}_3;$$

$$\mathbf{e}_2 = \beta_2^1\mathbf{e}_1 + \beta_2^2\mathbf{e}_2 + \beta_2^3\mathbf{e}_3;$$

$$\mathbf{e}_3 = \beta_3^1\mathbf{e}_1 + \beta_3^2\mathbf{e}_2 + \beta_3^3\mathbf{e}_3;$$

Коэффициенты β_i^j будут составлять матрицу обратного перехода:

$$P_{e'\to e} = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_2^1 & \beta_3^1 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \beta_3^2 \\ \beta_1^3 & \beta_2^3 & \beta_3^3 \end{pmatrix}$$

Совершенно аналогично (3) можно написать, что

$$\mathbf{e} = \mathbf{e'}P_{\mathbf{e'}\to\mathbf{e}}, \tag{4}$$

или, пользуясь правилом суммирования Эйнштейна,

$$\mathbf{e}_i = \beta_i^j \mathbf{e'}_j. \tag{5}$$

Если подставить (4) в (3), то получим:

$$\mathbf{e'} = \mathbf{e'} P_{\mathbf{e'} \to \mathbf{e}} P_{\mathbf{e} \to \mathbf{e'}}.$$

Из этого с неизбежностью следует, что

$$P_{\mathbf{e'} \to \mathbf{e}} P_{\mathbf{e} \to \mathbf{e'}} = I,$$

или

$$P_{\mathbf{e'} \to \mathbf{e}} = P^{-1}_{\mathbf{e} \to \mathbf{e'}}.$$

Посмотрим теперь, как будет преобразовываться вектор $\mathbf{a}$. С одной стороны, он представляется в форме,

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i,$$

а в случае «штрихованного» базиса:

$$\mathbf{a} = a'^j \mathbf{e'}_j.$$

Совершенно естественно, что вне зависимости от системы координат, обе формулы должны давать один и тот же результат:

$$a^i \mathbf{e}_i = a'^j \mathbf{e'}_j \tag{6}$$

Подставим выражение для $\mathbf{e}_i$ согласно формуле (5) в (6). Тогда получится, что

$$a^i \beta_i^j \mathbf{e'}_j = a'^j \mathbf{e'}_j.$$

Приравнивая коэффициенты при каждом $textbfe'_j$, можно свести данное равенство к формуле:

$$a'^j = a^i \beta_i^j.$$

В матричном виде данное равенство можно переписать так:

$$\begin{pmatrix} a'^1 \\ a'^2 \\ a'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_2^1 & \beta_3^1 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \beta_3^2 \\ \beta_1^3 & \beta_2^3 & \beta_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'^1 \\ a'^2 \\ a'^3 \end{pmatrix}.$$

Иначе говоря, координаты преобразуются при помощи матрицы обратного перехода по правилу:

$$\begin{pmatrix} a'^1 \\ a'^2 \\ a'^3 \end{pmatrix} = P_{\mathbf{e'}\to\mathbf{e}} \begin{pmatrix} a'^1 \\ a'^2 \\ a'^3 \end{pmatrix}.$$

Если же мы, напротив, захотим выразить «старые» координаты через «новые», то нужно будет воспользоваться матрицей прямого перехода:

$$a^i = a^j \alpha_j^i.$$

Таким образом, существенное различие между составляющими базиса и координатами состоит в том, что базис преобразуется при помощи матрицы прямого перехода $P_{\mathbf{e}\to\mathbf{e'}}$, а координаты - с помощью матрицы обратного перехода $P_{\mathbf{e'}\to\mathbf{e}}$.

Возникает вопрос: может ли что-то кроме базиса преобразовываться с помощью матрицы прямого перехода? В математическом анализе хорошо известно понятие дифференциала функции. Если мы имеем функцию 3 переменных x^1, x^2 и x^3, то он будет выглядеть таким образом [2]:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial u}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial u}{\partial x^3}dx^3.$$

Иногда (мы еще вернемся к этой формуле и уточним в ней некоторые детали) дифференциал записывают с помощью скалярного произведения:

$$du = (\mathbf{G}, d\mathbf{x}),$$

где $d\mathbf{x}$ описывает дифференциалы переменных:

$$d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix}.$$

В свою очередь, $\mathbf{G}$ – градиент:

$$\mathbf{G} = (\frac{\partial u}{\partial x^1}, \frac{\partial u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial x^3}).$$

Посмотрим, что будет в случае, если мы переходим к другим координатам. Что касается дифференциала, то для него имеем:

$$dx'^1 = \beta^1_1 dx^1 + \beta^1_2 dx^2 + \beta^1_3 dx^3;$$

$$dx'^2 = \beta^2_1 dx^1 + \beta^2_2 dx^2 + \beta^2_3 dx^3;$$

$$dx'^3 = \beta^3_1 dx^1 + \beta^3_2 dx^2 + \beta^3_3 dx^3;$$

или же

$$dx'^i = \beta^i_j dx^j.$$

Таким образом, дифференциал преобразуется как «обычный» вектор. В случае с градиентом все выглядит несколько сложнее. Он содержит в себе частные производные, которые согласно правилам математического анализа могут быть посчитаны как производные сложных функций [2]:

$$\frac{\partial u}{\partial x'^1} = \frac{\partial x^1}{\partial x'^1}\frac{\partial u}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial x'^1}\frac{\partial u}{\partial x^2} + \frac{\partial x^3}{\partial x'^1}\frac{\partial u}{\partial x^3};$$
$$\frac{\partial u}{\partial x'^2} = \frac{\partial x^1}{\partial x'^2}\frac{\partial u}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial x'^2}\frac{\partial u}{\partial x^2} + \frac{\partial x^3}{\partial x'^2}\frac{\partial u}{\partial x^3};$$
$$\frac{\partial u}{\partial x'^3} = \frac{\partial x^1}{\partial x'^3}\frac{\partial u}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial x'^3}\frac{\partial u}{\partial x^2} + \frac{\partial x^3}{\partial x'^3}\frac{\partial u}{\partial x^3}.$$

Напомним, что «старые» координаты можно выразить через «новые» с помощью матрицы $P_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}}$, с коэффициентами α_i^j) [2]:

$$x^1 = \alpha_1^1 x'^1 + \alpha_2^1 x'^2 + \alpha_3^1 x'^3;$$

$$x^2 = \alpha_1^2 x'^1 + \alpha_2^2 x'^2 + \alpha_3^2 x'^3;$$

$$x^3 = \alpha_1^3 x'^1 + \alpha_2^3 x'^2 + \alpha_3^3 x'^3.$$

Вычисляя частные производные, получим что

$$\frac{\partial u}{\partial x'^1} = \alpha_1^1\frac{\partial u}{\partial x^1} + \alpha_1^2\frac{\partial u}{\partial x^2} + \alpha_1^3\frac{\partial u}{\partial x^3};$$
$$\frac{\partial u}{\partial x'^2} = \alpha_2^1\frac{\partial u}{\partial x^1} + \alpha_2^2\frac{\partial u}{\partial x^2} + \alpha_2^3\frac{\partial u}{\partial x^3};$$
$$\frac{\partial u}{\partial x'^3} = \alpha_3^1\frac{\partial u}{\partial x^1} + \alpha_3^2\frac{\partial u}{\partial x^2} + \alpha_3^3\frac{\partial u}{\partial x^3};$$

или сокращенно:

$$\frac{\partial u}{\partial x'^i} = \alpha_i^j\frac{\partial u}{\partial x^j}$$

Как видно, какие-то объекты, хотя и очень похожи на «обычные» векторы, при изменении координат преобразуются несколько по-другому – при помощи матрицы прямого перехода [3]. Мы будем называть их *ковекторами.* Индексы у них мы будем писать снизу, а если возникнет потребность записать все в матричном виде, то вместо столбцов будем использовать строки. В частности, для градиента можно записать:

$$\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3).$$

Его координаты будут преобразовываться по формуле:

$$G'_i = \alpha_i^j G_j$$

В мире ковекторов можно ввести свой базис. Он будет иметь индексы, стоящие сверху. Особое значение имеет так базис $\mathbf{e}^1,\ \mathbf{e}^2, ...$ называемый *взаимным* по отношению к $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ...$ Он характерен тем, что соответствующее скалярное произведение двух векторов базиса описывается с помощью символа Кронекера:

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j) = \delta_i^j.$$

Иногда векторы с верхними индексами (и соответствующим законом преобразования) называют *контравариантными*, а векторы с нижними индексами – *ковариантными* [**?**].

Конечно, вовсе не обязательно ограничиваться случаем, когда «старые» и «новые» координаты связаны друг с другом линейными законами преобразования. Вполне допустимо брать и произвольную зависимость переменных друг от друга:

$$x'^1 = x'^1(x^1, x^2, x^3);$$

$$x'^2 = x'^2(x^1, x^2, x^3);$$

$$x'^3 = x'^3(x^1, x^2, x^3).$$

Аналогичные формулы будем иметь для обратного перехода:

$$x^1 = x^1(x'^1, x'^2, x'^3);$$

$$x^2 = x^2(x'^1, x'^2, x'^3);$$

$$x^3 = x^3(x'^1, x'^2, x'^3).$$

Тогда ковариантные и контравариантные векторы можно будет преобразовывать с помощью частных производных [3]:

$$a'^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} a^j;$$

$$b'_i = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} b_i.$$

Кроме того, для удобства в дальнейшем мы иногда будем сокращенно писать частные производные в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial x^k} = \partial_k u;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \partial^k u.$$

§2. Полилинейные формы

Из линейной алгебры [1] известно понятие линейной формы. Она определяется как скалярная функция векторного аргумента $F(\mathbf{a})$, обладающая следующими свойствами:

$$F(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) = \lambda F(\mathbf{a}) + \mu F(\mathbf{b}),$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – произвольные векторы, λ и μ – произвольные числа.

Если вектор представим в форме:

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i,$$

то линейная форма перепишется таким образом:

$$F(\mathbf{a}) = F(a^i \mathbf{e}_i) = a^i F(\mathbf{e}_i).$$

В таком случае, можно ввести коэффициенты линейной формы:

$$F_i = F(\mathbf{e}_i).$$

В таком случае значение формы выразится по формуле:

$$F(\mathbf{a}) = F_i a^i.$$

Если мы перейдем к другой системе координат, то каждый из векторов базиса преобразуется с помощью коэффициентов, соответствующих матрице перехода:

$$\mathbf{e'}_j = \alpha^i_j \mathbf{e'}_i.$$

Согласно определению линейной формы, коэффициенты в «новых» координатах будут выглядеть так:

$$F'_j = F(\mathbf{e'}_j) = F(\alpha^i_j \mathbf{e}_i) = \alpha^i_j F(\mathbf{e}_i) = \alpha^i_j F_i.$$

Как видно, линейная форма на пространстве векторов является типичным примером ковектора. Отметим важное свойство линейной формы. Вне зависимости от того, в какой системе координат мы работаем, она всегда будет давать одно и то же числовое значение. Действительно, если вспомнить, что сами координаты векторов преобразуются по закону:

$$a'^j = \beta^j_k a^k,$$

то в новом базисе форма запишется так:

$$F(\mathbf{a}) = F'_j a'^j = F_i \alpha^i_j \beta^j_k a^k.$$

Произведение $\alpha^i_j \beta^j_k$ представляет из себя элементы произведения матриц прямого и обратного перехода:

$$\begin{pmatrix} \alpha^1_1 & \alpha^1_2 & \alpha^1_3 \\ \alpha^2_1 & \alpha^2_2 & \alpha^2_3 \\ \alpha^3_1 & \alpha^3_2 & \alpha^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^1_1 & \beta^1_2 & \beta^1_3 \\ \beta^2_1 & \beta^2_2 & \beta^2_3 \\ \beta^3_1 & \beta^3_2 & \beta^3_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому получается, что $\alpha^i_j \beta^j_k = \delta^i_k$, и

$$F(\mathbf{a}) = F_i \delta^i_k a^k.$$

В качестве примера линейной формы можно привести дифференциал скалярной функции. Как уже говорилось, дифференциал координат представляет из себя вектор:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{e}_i dx^i.$$

В свою очередь, приращение самой функции представимо в форме:

$$du = \partial_i u dx^i.$$

Ковектором, соответствующим данной линейной форме, будет градиент:

$$\mathbf{G} = \partial_i u \mathbf{e}^i.$$

Совершенно аналогично можно ввести линейные формы на пространстве ковекторов. Если у нас имеется функция от ковектора $H(\mathbf{p})$, то она также представима в виде:

$$H(\mathbf{p}) = H^i p_i.$$

Из коэффициентов H^i можно составить вектор, преобразуемый по закону:

$$H'^j = \beta^i_j H^i.$$

Полученные представления можно развить и на более сложные случаи. Так, существует понятие билинейной формы [1], которая представляет из себя скалярную функцию $K(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ от двух векторов, линейную по каждому из аргументов:

$$K(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{c}, \mathbf{b}) = \lambda K(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \mu K(\mathbf{c}, \mathbf{b});$$

$$K(\mathbf{a}, \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}) = \lambda K(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \mu K(\mathbf{a}, \mathbf{c}).$$

Если векторы представляются в форме:

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i,\ \ \mathbf{b} = b^j \mathbf{e}_j;$$

то билинейная форма запишется так:

$$K(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = K(a^i \mathbf{e}_i, b^j \mathbf{e}_j) = a^i b^j K(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j).$$

Можно ввести коэффициенты билинейной формы:

$$K_{ij} = K(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j).$$

Тогда билинейная форма может быть переписана как:

$$K(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = K_{ij} a^i b^j.$$

С учетом того, что при переходе от одной системы координат к другой базис можно преобразовать по закону:

$$\mathbf{e}'_i = \alpha_i^k \mathbf{e}_k,\ \mathbf{e}'_j = \alpha_j^l \mathbf{e}_l;$$

коэффициенты билинейной формы преобразуются так:

$$K(\mathbf{e'}_i, \mathbf{e'}_j) = (\alpha_i^k \mathbf{e}_k, \alpha_j^l \mathbf{e}_l) = \alpha_i^k \alpha_j^l (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l).$$

$$K'_{ij} = \alpha_i^k \alpha_j^l K_{kl} \tag{7}$$

Объект, характеризуемый координатами, преобразуемыми по закону (7) с помощью элементов матрицы прямого перехода, будем называть *ковариантным тензором второго ранга*. Нетрудно убедиться в том, что выражение $K_{ij}a^i b^j$ не будет меняться при переходе от одних координат к другим.

Похожим образом можно ввести билинейную форму $K(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ на пространстве ковекторов, которая тоже будет характеризоваться с помощью коэффициентов: $K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = K^{ij} p_i q_j$; где

$$K^{ij} = K(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j);$$

$$\mathbf{p} = p_i \mathbf{e}^i,\ \mathbf{q} = q_j \mathbf{e}^j.$$

Коэффициенты билинейной формы при переходе к новому базису преобразуются так:

$$K'^{ij} = \beta_k^i \beta_l^j K^{kl}. \tag{8}$$

Объект, характеризуемый координатами, преобразуемыми по закону (8) с помощью элементов матрицы обратного перехода, будем называть *контравариантным тензором второго ранга*.

Наконец, можно рассмотреть смешанную билинейную форму $B(\mathbf{a}, \mathbf{p})$, задающую функцию от вектора $\mathbf{a}$ и ковектора $\mathbf{p}$. Для нее можно ввести коэффициенты: $K(\mathbf{a}, \mathbf{p}) = K_i^j a^i p_j$; где

$$K_i^j = K(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j);$$

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i, \; \mathbf{p} = p_j \mathbf{e}^j.$$

Ее коэффициенты преобразуются по более сложному закону, с использованием элементов матрицы как прямого, так и обратного перехода:

$$K_i^{\prime j} = \alpha_i^k \beta_l^j K_k^l. \tag{9}$$

Соответствующий объект будем называть *1 раз ковариантным, 1 раз контравариантным тензором второго ранга.*

Обобщим введенные понятия на произвольное число переменных. Пусть у нас имеется полилинейная форма $D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, ..., \mathbf{c}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, ..., \mathbf{r})$, являющаяся скалярной функцией N векторов и M ковекторов:

$$D(\lambda \mathbf{a}_1 + \mu \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, ..., \mathbf{c}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, ..., \mathbf{r}) = \lambda D(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, ..., \mathbf{c}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, ..., \mathbf{r}) + \mu D(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, ..., \mathbf{c}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, ..., \mathbf{r});$$

$$...;$$

$$D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, ..., \mathbf{c}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, ..., \lambda \mathbf{r}_1 + \mu \mathbf{r}_2) = \lambda D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, ..., \mathbf{c}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, ..., \mathbf{r}_1) + \mu D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, ..., \mathbf{c}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, ..., \mathbf{r}_2).$$

Полилинейная форма может быть представлена с помощью коэффициентов:

$$D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, ..., \mathbf{c}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, ..., \mathbf{r}) = D_{ij...k}^{lm...n} a^i b^j ... c^k p_l q_m ... r_n;$$

которые преобразуются так:

$$D'^{lm...n}_{ij...k} = \alpha^{i_1}_i \alpha^{j_1}_j ... \alpha^{k_1}_k \beta^l_{l_1} \beta^m_{m_1} ... \beta^n_{n_1} D'^{l_1 m_1 ... n_1}_{i_1 j_1 ... k_1}.$$

Такой объект называется *N раз ковариантным, M раз контравариантным тензором $(N+M)$-го ранга.*

§3. Алгебра тензоров. Метрический тензор

Выше мы обсудили основные характеристики тензоров. Если мы не интересуемся переходом от одной системы координат к другой, достаточно представления о них как о «многомерном массиве», каждый из элементов которого описывает какую-либо необходимую нам величину.

Особую роль играют различные комбинации из тензоров, используемые на практике. Введем понятие суммы и произведения тензоров. Мы будем использовать конкретные примеры, естественно подразумевая, что все результаты могут быть без труда обобщены на произвольный случай.

Складывать можно только тензоры одного и того же ранга (они должны быть одинаковое количество раз ковариантны и контравариантны). Под суммой двух тензоров A^k_{ij} и B^k_{ij} будем понимать тензор C^k_{ij}:

$$C^k_{ij} = A^k_{ij} + B^k_{ij}.$$

Обратная операция – разность тензоров D^k_{ij} может быть введена абсолютно аналогично:

$$D^k_{ij} = A^k_{ij} - B^k_{ij}.$$

Можно ввести произведение двух тензоров. Эта операция возможна для тензоров любой структуры; произведением тензоров A^k_{ij} и B^m_l будем считать величину:

$$C^{km}_{ijl} = A^k_{ij} \cdot B^m_l.$$

Как видно, при перемножении тензоров их ранги будут складываться [5]. Еще со школьных времен известно, что есть операция деления, обратная к умножению. В случае с тензорами все немного сложнее, чем обычно. Посмотрим, что будет в случае деления на вектор. Пусть нам нужно разделить тензор A^j_i на вектор b^k. Постараемся определить природу того, что получится в результате. Если есть «нечто» $C^?_?$, являющееся частным A^j_i и b^k, то получится:

$$C^?_? b^k = A^j_i.$$

Чтобы в левой и правой части совпали индексы, нужно иметь тензор C^j_{ik}. Тогда мы получим произведение вида $C^j_{ik} b^k$, где по индексу k можно провести суммирование, и тогда получится 1 раз ковариантный и 1 раз контравариантный тензор, как и в правой части. Сформулируем полученный результат в виде *правила частного* [3]: если произведение некоторого объекта C и вектора b^k – тензор вида A^j_i, то C является тензором вида C^j_{ik}.

Схематически это можно представить так:

$$C^j_{ik} = \frac{A^j_i}{b^k}.$$

Аналогичным образом возможно ввести частное и для деления тензора на ковектор:

$$D^{jk}_i = \frac{A^j_i}{p_k}.$$

Немалую важность имеют тензоры, обладающие определенной симметрией. Тензор называется *симметричным* по индексам i и j, если выполнено условие:

$$A_{ij}^{k} = A_{ji}^{k}.$$

Антисимметричный тензор удовлетворяет другому условию:

$$B_{ij}^{k} = -B_{ji}^{k}.$$

Если тензор не является симметричным, то его можно сделать таковым:

$$A_{(ij)} = \frac{1}{2}\left(A_{ij} + A_{ji}\right).$$

Точно также можно провести так называемое *альтернирование*, или сделать тензор антисимметричным:

$$A_{[ij]} = \frac{1}{2}\left(A_{ij} - A_{ij}\right).$$

Из элементарной геометрии известно, что при использовании прямоугольных декартовых координат расстояние между двумя точками может быть вычислено по формуле:

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2,$$

где Δx, Δy и Δz – проекции соединяющего их вектора на соответствующие координатные оси. Если, как мы говорили выше, использовать «нумерованные» координаты и дифференциально малые приращения, получится:

$$ds^2 = \left(dx^1\right)^2 + \left(dx^2\right)^2 + \left(dx^3\right)^2.$$

Эту формулу можно записать в более общем виде, используя так называемый симметричный *метрический тензор* g_{ij}. В таком случае расстояние между двумя дифференциально близкими точками может быть записано так:

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j.$$

Метрический тензор в случае прямоугольных координат представим с помощью следующей матрицы:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Конечно, на первый взгляд использование метрического тензора кажется ненужным усложнением. Однако возьмем косоугольную систему координат $x^1 - x^2 - x^3$, связанную со стандартными координатами $x - y - z$ по формулам (рис. 1):

$$x = x^1 + \cos\varphi x^2;$$

$$y = \sin\varphi x^2;$$

$$z = x^3;$$

где φ – угол между осями x^2 и x. Тогда дифференциальные приращения координат запишутся так:

$$dx = dx^1 + \sin\varphi dx^2;$$

$$dy = \cos\varphi dx^2;$$

$$dz = dx^3.$$

Если возвести эти приращения в квадрат и сложить, то для расстояния между точками мы получим следующее:

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dy)^2 = \left(dx^1 + \sin\varphi dx^2\right)^2 + \left(\sin\varphi dx^2\right)^2 + (dz)^2 =$$

$$= dx^1dx^1 + 2\sin\varphi dx^1dx^2 + dx^2dx^2 + dx^3dx^3.$$

В качестве метрического тензора придется выбирать следующий

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & \sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

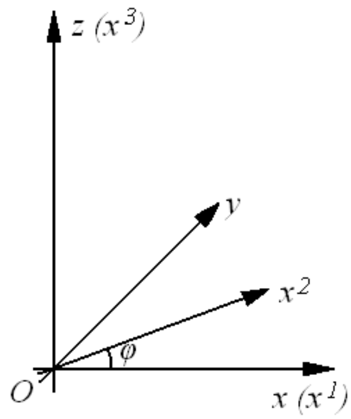

Рис. 1: Косоугольная система координат.

В ряде случаев компоненты метрического тензора могут зависеть от самих координат. Так, если мы используем цилиндрическую систему координат $r - \varphi - z$, то расстояние между дифференциально близкими точками будет записано так:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

Если ввести обозначения $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$, то данная формула перепишется в форме:

$$ds^2 = \left(dx^1\right)^2 + \left(x^1\right)^2 \left(dx^2\right)^2 + \left(dx^3\right)^2.$$

Метрический тензор будет записан так:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если мы имеем два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, то их скалярное произведение можно представить в форме:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = g_{ij} a^i b^j.$$

Поскольку векторы могут быть представлены в форме $\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{b} = b^j \mathbf{e}_j$, то их скалярное произведение будет выглядеть так:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left(a^i \mathbf{e}_i, b^j \mathbf{e}_j\right) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)\, a^i b^j.$$

Поэтому получается, что компоненты метрического тензора представляются с помощью скалярного произведения:

$$g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j).$$

Аналогичным образом можно ввести и метрический тензор для ковекторов:

$$g^{ij} = \left(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j\right).$$

Можно показать, что скалярное произведение ковариантного и контравариантного метрического тензоров будет представлять из себя символ Кронекера:

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k.$$

Кроме этого, метрический тензор можно использовать для того, чтобы поднимать и опускать индексы других тензоров, например [5]:

$$g^{ij} A_i = A^j;$$

$$g_{ij}A^i = A_j.$$

Глава 2. Основные уравнения гидродинамики

§1. Базовые понятия

Гидродинамика описывает движение жидкостей и газов. Чтобы можно было это сделать, необходимо знать такие величины, как плотность, температуру, скорость и т.д.

Еще в школе известно понятие плотности как отношения массы к объему:

$$\rho = \frac{M}{V}.$$

Если тело неоднородно, то можно рассмотреть достаточно малый элемент объема V_1:

$$\rho_1 = \frac{M_1}{V_1}.$$

Сократив объем возможно ближе описать свойства среды:

$$\rho_2 = \frac{M_2}{V_2}.$$

Казалось бы, рассмотрев последовательность объемов $V_1 > V_2 > ... > V_n > ...$, такую что $\lim_{n\to\infty} V_n = 0$, возможно получить значение плотности:

$$\rho_n = \frac{M_n}{V_n};$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \rho_n.$$

Тем не менее, при бесконечном уменьшении изучаемого объема оказывается, что размеры области становятся сопоставимыми с расстояниями между молекулами, из которых состоит жидкость или газ. По этой причине оказывается, что типичный линейный размер l данной области должен быть хотя и сильно меньше макроскопических размеров L, которые они заполняют, но заметно превышающим расстояния между частицами λ:

$$\lambda << l << L.$$

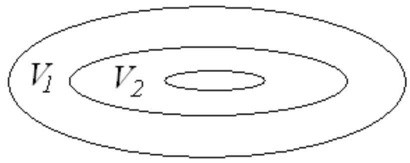

Рис. 2: К вопросу о гипотезе сплошности.

Возможные значения l зависят от конкретных условий задачи. Как правило, в «комнатных» условиях типичное расстояние между молекулами составляет величину порядка $\lambda \sim 10^{-7}$ см. Если мы говорим о межзвездном газе в галактиках, то $\lambda \sim 1$ см.

Конечно, конечность расстояний между молекулами несколько обесценивает возможность использования производных по пространственным координатам. Тем не менее, в гидродинамике используется так называемая *гипотеза сплошности*: жидкость или газ представляет из себя сплошную среду, т.е. заполняет предоставленный ей объем без каких-либо промежутков [6].

При изучении движения жидкости возможны два различных подхода. С одной стороны, мы можем взять какую-либо частицу в жидкости и отслеживать ее движение в течение необходимого нам промежутка времени. В таком случае каждая точка будет характеризоваться своими начальными координатами ξ^1, ξ^2 и ξ^3. Со временем она будет двигаться по закону:

$$x^1 = x^1(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3); \tag{10}$$

$$x^2 = x^2(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3); \tag{11}$$

$$x^3 = x^3(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3). \tag{12}$$

Точно также можно задать температуру T, плотность ρ, скорость v^i и другие характеристики среды в том месте, где располагается данная частица:

$$T = T(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3);$$

$$\rho = \rho(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3);$$

$$v^1 = v^1(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3);$$

$$v^2 = v^2(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3);$$

$$v^3 = v^3(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3).$$

Такой подход называется *лагранжевым* [6].

Возможно воспользоваться и другим подходом. Вовсе необязательно интересоваться вопросом о том, где располагалась частица в начальный момент. Можно взять обычные координаты в пространстве, и посмотреть, какие скорости, температуры и т.д. соответствуют им в данный момент:

$$T = T(t, x^1, x^2, x^3);$$

$$\rho = \rho(t, x^1, x^2, x^3);$$

$$v^1 = v^1(t, x^1, x^2, x^3);$$

$$v^2 = v^2(t, x^1, x^2, x^3);$$

$$v^3 = v^3(t, x^1, x^2, x^3).$$

Такой подход называется *эйлеровым* [6].

Встает вполне логичный вопрос о том, как связаны между собой эти два подхода. Конечно, если положить $t = 0$, то эйлеровы координаты x^i совпадут с лагранжевыми ξ^i. Соответствие между ними устанавливается формулами (10)–(12). Возможно также установление обратного соответствия:

$$\xi^1 = \xi^1(t, x^1, x^2, x^3);$$

$$\xi^2 = \xi^2(t, x^1, x^2, x^3);$$

$$\xi^3 = \xi^3(t, x^1, x^2, x^3).$$

Чтобы соответствие было взаимно однозначным, необходимо потребовать, чтобы якобиан преобразования, характеризующий, к примеру, закон (10)–(12)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \xi^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \xi^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \xi^3}{\partial x^1} & \frac{\partial \xi^3}{\partial x^2} & \frac{\partial \xi^3}{\partial x^3} \end{pmatrix}.$$

был конечным (не обращался в нуль или бесконечность)

$$0 < \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right) < \infty.$$

Отметим, что при использовании скорости в эйлеровых переменных:

$$\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$$

речь идет не о дифференцировании по времени независимых эйлеровых координат, а об изменении координат конкретной частицы в жидкости, т.е. о лагранжевых переменных [7].

Как правило, все функции, характеризующие свойства сплошной среды, так или иначе зависят от времени. Поэтому рано или поздно приходится их дифференцировать. В случае лагранжева подхода мы имеем полные производные (иногда их называют *субстанциональными*). Посмотрим, как лагранжева производная некоторой функции $f(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ (по вкусу читателя это может быть температура, плотность или нечто другое) по времени $\frac{df}{dt}$ связана с эйлеровой производной той же самой функции $f(t, x^1, x^2, x^3)$. В соответствии с правилами дифференцирования сложной функции (напомним, мы имеем:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dx^1}{dt}\frac{\partial f}{\partial x^1} + \frac{dx^2}{dt}\frac{\partial f}{\partial x^2} + \frac{dx^3}{dt}\frac{\partial f}{\partial x^3}.$$

Заменив производные на скорости:

$$\frac{dx^i}{dt} = v^i,$$

можно (с использованием правила суммирования Эйнштейна) получить выражение:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Если вспомнить, что есть символический вектор «набла», определяемый следующим образом:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right),$$

то данная формула может быть переписана так:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) f.$$

§2. Основные уравнения движения жидкости

При изучении процессов, происходящих в жидкости или газе, необходимо уметь описывать скорости движения, плотность и другие величины, характеризующие их свойства. Рассмотрим небольшой объем жидкости. Не ограничивая общности, будем полагать, что он имеет форму куба со стороной a (рис. 3). В таком случае разность потоков через правую и левую стороны будет равна:

$$\rho(x^1 + a, x^2, x^3, t)v^1(x^1 + a, x^2, x^3, t)a^2 - \rho(x^1 + dx^1, x^2, x^3, t)v^1(x^1 + dx^1, x^2, x^3, t)a^2 \cong$$
$$\cong \frac{\partial(\rho v^1)}{\partial x^1}a^3.$$

Заметим, что аналогичные равенства можно записать для потоков через каждую из граней куба. Их сумма будет характеризовать изменение массы m жидкости или газа внутри данного куба в единицу времени:

$$\frac{dm}{dt} \cong -\left(\frac{\partial(\rho v^1)}{\partial x^1} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial(\rho v^3)}{\partial x^3}\right)a^3. \tag{13}$$

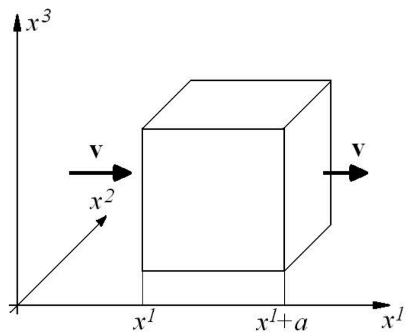

Рис. 3: Вывод условия неразрывности.

Учитывая, что массу можно представить через плотность как $m = \rho a^3$, а в правой части (13) стоит дивергенция произведения массы на скорость:

$$\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = \frac{\partial(\rho v^1)}{\partial x^1} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial(\rho v^3)}{\partial x^3},$$

получаем равенство:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} a^3 \cong -\operatorname{div}(\rho \mathbf{v})\, a^3.$$

Если сократить обе части на a^3, и устремить $a \to 0$, мы получим так называемое *условие неразрывности*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Используя формулы векторного анализа, можно записать, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + (\mathbf{v}, \operatorname{grad} \rho) = 0.$$

В том случае, если жидкость является несжимаемой (ее плотность не меняется ни в пространстве, ни со временем), в условии неразрывности останется лишь дивергентная часть:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Условие неразрывности налагает условие на изменение плотности и скорости жидкости. Кроме этого, необходимо записать уравнения движения для жидкости. В механике известен второй закон Ньютона, который позволяет вычислить изменение скорости тела:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}.$$

Точно также, как и раньше, рассмотрим небольшой кубик в жидкости со стороной a, масса которого выражается как $m = \rho a^3$ (рис. 4) Силу можно разделить на две части:

$$\mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathbf{G}.$$

Сила $\mathbf{P}$ носит *поверхностный* характер и описывает давление, которое действует на поверхность кубика. Ее можно рассчитать как разность сил $\mathbf{F}_p$, действующих на противоположные грани кубика. К примеру, проекция $\mathbf{P}$ на ось x^1 может быть вычислена так:

$$P^1 = F_p^1(x^1 + a, x^2, x^3, t) - F_p^1(x^1, x^2, x^3, t) \cong \frac{\partial F_p^1}{\partial x^1} a.$$

В свою очередь, сила $\mathbf{F}_p$ может быть выражена через давление и площадь поверхности куба следующим образом:

$$F_p^1 = pa^2.$$

Тогда

$$P^1 \cong \frac{\partial pa^2}{\partial x^1} a = \frac{\partial p}{\partial x^1} a^3.$$

Аналогичные условия можно записать и для других компонент силы $\mathbf{P}$:

$$P^2 \cong= \frac{\partial p}{\partial x^2} a^3.$$

$$P^3 \cong= \frac{\partial p}{\partial x^3} a^3.$$

Сила $\mathbf{G}$ носит *внутренний* характер. В простейшем случае можно полагать, что она пропорциональна массе:

$$\mathbf{G} = m\mathbf{f}, \tag{14}$$

где $\mathbf{f}$ – удельная сила, приходящаяся на единицу массы. К примеру, в случае, если единственная сила, действующая на жидкость – сила тяжести, то $\mathbf{f}$ будет соответствовать вектору ускорения свободного падения. Учитывая, что $m = \rho a^3$, покомпонентно (14) можно записать так:

$$G^1 = \rho a^3 f^1;$$

$$G^2 = \rho a^3 f^2;$$

$$G^3 = \rho a^3 f^3.$$

Таким образом, суммарная сила, действующая на кубик, будет выражаться следующей формулой:

$$F^1 \cong \frac{\partial p}{\partial x^1} a^3 + \rho a^3 f^1;$$

$$F^2 \cong \frac{\partial p}{\partial x^2} a^3 + \rho a^3 f^2;$$

$$F^3 \cong \frac{\partial p}{\partial x^2} a^3 + \rho a^3 f^2.$$

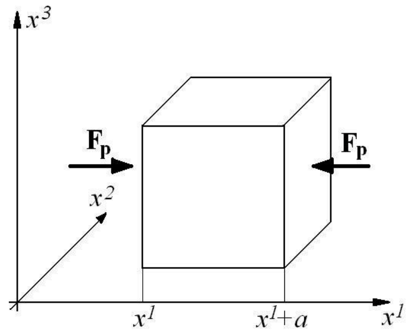

Рис. 4: Поверхностные силы.

Тогда уравнение движения кубика запишется следующим образом:

$$\rho a^3 \frac{dv^i}{dt} \cong \frac{\partial p}{\partial x^i} a^3 + \rho a^3 f^i.$$

Устремив размеры к нулю $a \to 0$, можно получить что:

$$\rho \frac{dv^i}{dt} = \frac{\partial p}{\partial x^i} + \rho f^i.$$

Вспомнив, что

$$\nabla p = \operatorname{grad} p = \left(\frac{\partial p}{\partial x^1}, \frac{\partial p}{\partial x^2}, \frac{\partial p}{\partial x^3} \right),$$

мы можем переписать данное уравнение в векторном виде:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}.$$

Можно также учесть, что субстанциональная производная скорости представима в виде:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v}.$$

Тогда мы получим *уравнение Эйлера*:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{f}.$$

Его также можно считать основным уравнением движения жидкости или газа в простейшем случае. Условия его применимости мы обсудим чуть позже, упомянем вкратце, что в данном случае мы пренебрегаем вязкостью.

На данный момент мы имеем одно векторное уравнение Эйлера (равносильное, по сути, системе из трех скалярных уравнений) и одно скалярное условие неразрывности. Таким образом, в нашем распоряжении четыре уравнения, описывающих эволюцию пяти величин: трех компонент скорости $\mathbf{v}$ (v^1, v^2 и v^3), плотности жидкости ρ и ее давления p. Как видно, уравнений пока что недостаточно для того, чтобы найти выражения для этих функций.

Тем не менее, из молекулярной физики известно [8], что макроскопические характеристики газа (такие как давление, температура и т.д.) связаны друг с другом с помощью уравнения состояния. В простейшем случае это уравнение Менделеева – Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{\mu}RT,$$

где V – объем фрагмента газа, m – его масса, μ – молярная масса, R – универсальная газовая постоянная, T – термодинамическая температура. В таком случае давление можно выразить следующим образом:

$$p = \frac{1}{\mu}\frac{m}{V}RT,$$

$$p = \frac{1}{\mu}\rho RT.$$

Если полагать, что температура газа постоянна, то получается жесткая связь между плотностью ρ и давлением p, и система уравнений становится полной. Вообще говоря, процессы, для которых можно считать, что давление является функцией лишь плотности:

$$p = f(\rho),$$

называются *баротропными* [6].

Сформулированные предположения описывают так называемую *идеальную* жидкость или газ. Это среда, в которой можно пренебречь процессами, связанными с вязкостью и теплопроводностью. В таком случае полная система уравнений будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0; \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{f}; \\ p = f(\rho). \end{cases}$$

Кроме этого, необходимо сформулировать условия на границе, которые позволят найти решения данной системы уравнений. Если мы рассмотрим течение жидкости на границе, то логично предположить, что жидкость не течет через границу. Это сводится к так называемому условию непротекания на границе [6]:

$$v_n = 0.$$

Что касается давления, то оно должно соответствовать тому, что задано на границе исходя из внешних факторов:

$$p = p_0.$$

Например, если речь идет о воде в стакане, то около поверхности давление жидкости должно быть равно атмосферному. Наконец, если можно говорить о баротропности, т.е. давление и плотность связаны с помощью алгебраического соотношения, то условия на плотность ρ получаются автоматически.

§3. Уравнение Навье – Стокса.

Как уже было сказано выше, модель идеальной жидкости или газа не предусматривает наличия вязкости и теплопроводности. Естественно, что в реальных жидкостях и газах есть и внутреннее трение, и процессы передачи тепла. Это ставит нас перед необходимостью сформулировать систему уравнений, учитывающую данные эффекты.

Как и раньше, рассмотрим небольшой фрагмент в форме куба со стороной длины a в жидкости или в газе (рис. 5). Из молекулярной физики известно [8], что на единицу площади левого ребра куба действует удельная сила, пропорциональная частной производной скорости и направленная в противоположную сторону:

$$\mathbf{L}_1 = -\eta \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^1},$$

где η – коэффициент динамической вязкости. Можно показать [8], что

$$\eta = \frac{\rho l w}{3},$$

где l – длина свободного пробега частиц, из которых состоит жидкость, w – скорость их турбулентных движений. Сила, действующая на левую грань, выражается следующим образом:

$$\mathbf{F}_{L1l} = \mathbf{L}_1(x^1, x^2, x^3, t)a^2.$$

На правую грань будет действовать аналогичная сила:

$$\mathbf{F}_{L1r} = -\mathbf{L}_1(x^1 + a, x^2, x^3, t)a^2.$$

Сумма этих сил окажется следующей:

$$\mathbf{F}_{L1} = \mathbf{F}_{L1l} - \mathbf{F}_{L1r} =$$

$$= a^2 \left(\mathbf{L}_1(x^1, x^2, x^3, t) - \mathbf{L}_1(x^1 + a, x^2, x^3, t)\right) =$$

$$= a^2 \left(-\eta\frac{\partial \mathbf{v}(x^1, x^2, x^3, t)}{\partial x^1} + \eta\frac{\partial \mathbf{v}(x^1 + a, x^2, x^3, t)}{\partial x^1}\right) =$$

$$= \eta a^2 \left(\frac{\partial \mathbf{v}(x^1 + a, x^2, x^3, t)}{\partial x^1} - \frac{\partial \mathbf{v}(x^1, x^2, x^3, t)}{\partial x^1}\right)$$

Разность, стоящую в скобках, можно представить следующим образом:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}(x^1 + a, x^2, x^3, t)}{\partial x^1} - \frac{\partial \mathbf{v}(x^1, x^2, x^3, t)}{\partial x^1}\right) \cong \eta a^3 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial (x^1)^2}.$$

Таким образом, сила будет следующей:

$$\mathbf{F}_{L1} = \eta a^3 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial (x^1)^2}.$$

Аналогичные действия можно проделать и для сил, действующих на переднюю и заднюю, а также верхнюю и нижнюю грани:

$$\mathbf{F}_{L2} = \eta a^3 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial (x^2)^2}.$$

$$\mathbf{F}_{L3} = \eta a^3 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial (x^3)^2}.$$

Если сложить все эти силы, то получаем выражение, описывающее «вязкую» составляющую силы, действующей на элемент жидкости:

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{F}_{L1} + \mathbf{F}_{L2} + \mathbf{F}_{L3} =$$

$$= \eta a^3 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial (x^1)^2} + \eta a^3 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial (x^1)^2} + \eta a^3 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial (x^3)^2} = \eta a^3 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial (x^2)^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial (x^3)^2} \right) =$$

$$= \eta a^3 \Delta \mathbf{v}.$$

Тогда для элемента жидкости можно составить уравнение движения:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla p a^3 + m\mathbf{f} + \eta a^3 \Delta \mathbf{v}.$$

Если учесть, что $m = \rho a^3$, мы получим:

$$\rho a^3 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla p a^3 + \rho a^3 \mathbf{f} + \eta a^3 \Delta \mathbf{v}.$$

Поделив обе части на ρa^3, мы получим:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}.$$

Если ввести так называемую кинематическую вязкость $\nu = \frac{\eta}{\rho}$, и раскрыть субстанциональную производную, то мы получим *уравнение Навье – Стокса*:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f} + \nu \Delta \mathbf{v}.$$

По сути, уравнение Навье – Стокса является самым употребляемым уравнением, применяемым в гидродинамике, которое достаточно полно описывает различные процессы, происходящие в жидкостях.

Наконец, как говорилось выше, модель идеальной жидкости не учитывает процессов теплопроводности. Чтобы система уравнений, описывающих жидкость, была более полной, необходимо рассмотреть также тепловые процессы. Полная энергия элемента жидкости или газа выражается по формуле:

$$E = U + \frac{mv^2}{2} = U + \frac{\rho a^3 v^2}{2}.$$

Согласно первому закону термодинамики [9], можно записать, что

$$dE = dQ - dA,$$

где dQ – приток количества теплоты в элемент, dA – совершаемая работа.

Что касается теплоты, то она, с одной стороны, связана с какими-то внутренними источниками теплоты в системе, например, связанными с химическими реакциями. Если не оговорено иное, то будем полагать в единице объема за единицу времени выделяется количество теплоты, равное q:

$$dQ_1 = qmdt;$$

Кроме того, в системе могут присутствовать потоки тепла $\mathbf{W}$. Вновь рассматривая кубик со стороной a, получим, что за единицу времени в него через левую грань поступает теплота:

$$W^1(x^1, x^2, x^3, t)a^2 dt.$$

Через правую грань из него уходит теплота:

$$W^1(x^1 + a, x^2, x^3, t)a^2 dt.$$

Тогда поток теплоты через левую и правую грани будет следующим:

$$W^1(x^1, x^2, x^3, t)a^2 dt - W^1(x^1 + a, x^2, x^3, t)a^2 dt =$$

$$= \left(W^1(x^1,x^2,x^3,t) - W^1(x^1+a,x^2,x^3,t)\right) a^2 dt \cong$$

$$\cong -\frac{\partial W^1}{\partial x^1} a^3 dt.$$

Если сложить потоки через все грани кубика, то мы получим выражение:

$$dQ_2 \cong -\frac{\partial W^1}{\partial x^1} a^3 dt - \frac{\partial W^2}{\partial x^2} a^3 dt - \frac{\partial W^3}{\partial x^3} a^3 dt =$$

$$= -\left(\frac{\partial W^1}{\partial x^1} + \frac{\partial W^2}{\partial x^2} + \frac{\partial W^3}{\partial x^3}\right) a^3 dt = -\operatorname{div} \mathbf{W} a^3 dt.$$

Складывая выражения для количеств теплоты, мы получим:

$$dQ = dQ_1 + dQ_2 = qmdt - \operatorname{div} \mathbf{W} a^3 dt =$$

$$= q\rho a^3 dt - \operatorname{div} \mathbf{W} a^3 dt = \left(q + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{W}\right) \rho a^3 dt.$$

Что касается работы, то ее можно разделить на то, что совершается за счет изменения размеров кубика. К примеру, при перемещении левой границы совершается работа:

$$-p(x^1,x^2,x^3,t)a^2 dx = -p(x^1,x^2,x^3,t)a^2 v^1 dt.$$

При перемещении правой границы совершается работа:

$$p(x^1+a,x^2,x^3,t)a^2 dx = p(x^1,x^2,x^3+a,t)a^2 v^1(x^1+a,x^2,x^3,t)dt.$$

Суммарная работа составит величину:

$$p(x^1+a,x^2,x^3,t)a^2 v^1(x^1+a,x^2,x^3,t)dt - p(x^1,x^2,x^3,t)a^2 v^1 dt = \frac{\partial(pv^1)}{\partial x^1} a^3 dt.$$

Если учесть также работу для двух других пар граней:

$$p(x^1,x^2+a,x^3,t)a^2 v^1(x^1,x^2+a,x^3,t)dt - p(x^1,x^2,x^3,t)a^2 v^1 dt = \frac{\partial(pv^2)}{\partial x^2} a^3 dt,$$

$$p(x^1, x^2, x^3 + a, t)a^2 v^1(x^1, x^2, x^3 + a, t)dt - p(x^1, x^2, x^3, t)a^2 v^1 dt = \frac{\partial(pv^3)}{\partial x^3} a^3 dt,$$

то мы получим работу:

$$dA_1 = \frac{\partial(pv^1)}{\partial x^1} a^3 dt + \frac{\partial(pv^2)}{\partial x^2} a^3 dt + \frac{\partial(pv^3)}{\partial x^3} a^3 dt =$$

$$= \left(\frac{\partial(pv^1)}{\partial x^1} + \frac{\partial(pv^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial(pv^3)}{\partial x^3} \right) a^3 dt = \operatorname{div}(p\mathbf{v}) a^3 dt.$$

Наконец, есть работа, совершаемая внешними массовыми силами уже над самим объемом:

$$-dA_2 = (\mathbf{F}, d\mathbf{x}) = (m\mathbf{f}, \mathbf{v}dt) =$$

$$= (\mathbf{f}, \mathbf{v})\rho a^3 dt.$$

Таким образом,

$$dA = dA_1 + dA_2 = \operatorname{div}(p\mathbf{v}) a^3 dt - (\mathbf{f}, \mathbf{v})\rho a^3 dt.$$

Общее уравнение для баланса энергии будет выглядет так:

$$dE \cong \left(q + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{W} \right) \rho a^3 dt - \operatorname{div}(p\mathbf{v}) a^3 dt + (\mathbf{f}, \mathbf{v})\rho a^3 dt;$$

Если ввести объемную плотность энергии:

$$\epsilon = \frac{E}{a^3} = u + \rho v^2,$$

то можно записать приращение энергии так:

$$dE = a^3(u + \rho v^2) = a^3 \frac{d}{dt}(u + \rho v^2) dt.$$

Тогда:

$$a^3 \frac{d}{dt}(u + \rho v^2) dt \cong \left(q - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{W} \right) \rho a^3 dt - \operatorname{div}(p\mathbf{v}) a^3 dt + (\mathbf{f}, \mathbf{v})\rho a^3 dt.$$

Устремляя размеры кубика к нулю ($a \to 0$), получим:

$$\frac{d}{dt}(u + \rho v^2) = -\operatorname{div}(p\mathbf{v}) + q + (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\mathbf{W}.$$

Раскрывая субстанциональную производную, можно записать это равенство так [7]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u + \rho v^2) + (\mathbf{v}, \nabla)(u + \rho v^2) = -\frac{1}{\rho}\operatorname{div}(p\mathbf{v}) + q + (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\mathbf{W}.$$

Наконец, в данном случае уже необязательно ограничиваться баротропными процессами, можно записать уравнение состояния в общем виде:

$$p = p(\rho, T).$$

Также можно записать взаимосвязь между внутренней энергией, плотностью и температурой:

$$u = u(\rho, T).$$

Таким образом, полная система уравнений может быть записана так [7]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0; \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{f} + \nu\Delta\mathbf{v}; \\ \frac{\partial}{\partial t}(u + \rho v^2) + (\mathbf{v}, \nabla)(u + \rho v^2) = -\frac{1}{\rho}\operatorname{div}(p\mathbf{v}) + q + (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\mathbf{W}; \\ p = p(\rho, T); \\ u = u(\rho, T). \end{cases}$$

Условие непротекания для вязкой жидкости обычно заменяют условием прилипания:

$$\mathbf{v}_\tau = \mathbf{v},$$

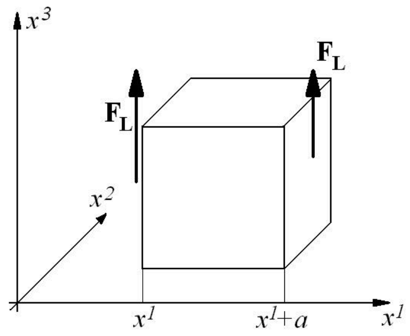

Рис. 5: Вязкость.

где $\mathbf{v}_\tau$ – скорость жидкости в направлении по касательной к поверхности раздела сред.

§4. Безразмерные числа и подобие в гидродинамике.

Достаточно часто в гидродинамике требуется понять, насколько похожи процессы, происходящие с телами и потоками разных размеров. К примеру, при экспериментальном исследовании колебаний моста удобно применять небольшие макеты. Их можно обдувать с помощью вентилятора, моделирующего ветер, перемещать по ним «игрушечные» автомобили. Тем не менее, неясно, насколько такая модель будет соответствовать реальному мосту и позволит предсказать поведение реальных сооружений. Аналогично дела обстоят и с авиационной техникой: как правило, прежде чем построить реальные опытные экземпляры, уменьшенные модели запускают летать в так называемой аэродинамической трубе, где моделируются различные ситуации, в том числе и внештатные. Само собой, что проводить такие опыты с полноразмерными экземплярами крайне опасно. Поэтому важно понимать, действительно ли такие уменьшенные эксперименты будут описывать соответствующие явления.

Кроме того, единицы измерения в каждой области физики желательно использовать с оглядкой на то, какие типичные значения принимают соответствующие величины. К примеру, расстояния в галактиках разумно измерять не в метрах или сантиметрах (тогда все величины будут с огромными множителями), а в парсеках и килопарсеках. В связи с этим имеет смысл говорить о так называемых характерных величинах. К примеру, в случае движения в жидкости шара диаметром 12 см характерным линейным размером можно считать $L = 12$ см или даже $L = 10$ см. Если тот же самый шар перемещается по трубе диаметром 12.4 см, то в качестве характерного размера можно считать расстояние от шара до стенки трубки, т.е. тогда следует использовать $L = 0.2$ см.

Можно использовать эти характерные значения как единицы для измерения координат (индекс по возможности будем опускать индекс, обозначающий номер координаты):

$$x = \tilde{x}L.$$

В таком случае частную производную можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial(\tilde{x}L)} = \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}.$$

То же самое можно записать и для оператора «набла», используемого при записи градиента и дивергенции:

$$\nabla = \frac{1}{L}\tilde{\nabla}.$$

Аналогичное соотношение возможно записать и для второй производной:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial(\tilde{x}L)^2} = \frac{1}{L^2}\frac{\partial^2}{\partial\tilde{x}^2}.$$

Точно также можно выразить и оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{1}{L^2}\tilde{\Delta}.$$

Точно так же, как мы вводили характерные значения для длин, можно ввести характерные значения времени T:

$$t = \tilde{t}T.$$

В таком случае частные производные по времени запишутся так:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}T} = \frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}.$$

Посмотрим, как в таком случае будет записываться уравнение Навье – Стокса:

$$\frac{1}{T}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{L}(\mathbf{v}, \tilde{\nabla})\mathbf{v} = -\frac{1}{L}\frac{1}{\rho}\tilde{\nabla}p + \mathbf{f} + \nu\frac{1}{L^2}\tilde{\Delta}\mathbf{v}.$$

Домножим обе части уравнения на L:

$$\frac{L}{T}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tilde{t}} + (\mathbf{v}, \tilde{\nabla})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\tilde{\nabla}p + L\mathbf{f} + \nu\frac{1}{L}\tilde{\Delta}\mathbf{v}.$$

Кроме этого, можно точно также ввести характерную величину скорости V. В таком случае, измеряя скорость в этих характерных величинах, возможно записать следующее:

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}}V.$$

Тогда уравнение Навье – Стокса будет выглядеть так:

$$\frac{LV}{T}\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} + V^2(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\nabla})\tilde{\mathbf{v}} = -\frac{1}{\rho}\tilde{\nabla}p + L\mathbf{f} + \nu\frac{V}{L}\tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{v}}.$$

Разделим обе части на V^2, поэтому уравнение запишется так:

$$\frac{L}{VT}\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\nabla})\tilde{\mathbf{v}} = -\frac{1}{V^2}\frac{1}{\rho}\tilde{\nabla}p + \frac{L}{V^2}\mathbf{f} + \nu\frac{1}{VL}\tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{v}}.$$

Плотность точно также возможно измерять в характерных величинах ρ_0:

$$\rho = \tilde{\rho}\rho_0.$$

Тогда:

$$\frac{L}{VT}\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\nabla})\tilde{\mathbf{v}} = -\frac{1}{\rho_0 V^2}\frac{1}{\tilde{\rho}}\tilde{\nabla}p + \frac{L}{V^2}\mathbf{f} + \nu\frac{1}{VL}\tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{v}}.$$

Что касается величины $\mathbf{f}$, характеризующей внутренние силы, то будем считать, что она направлена вдоль оси x^3. В таком случае:

$$\mathbf{f} = -g\mathbf{e}_3,$$

и:

$$\frac{L}{VT}\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\nabla})\tilde{\mathbf{v}} = -\frac{1}{\rho_0 V^2}\frac{1}{\tilde{\rho}}\tilde{\nabla}p - \frac{gL}{V^2}\mathbf{e}_3 + \nu\frac{1}{VL}\tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{v}}.$$

Наконец, можно измерять давление в таких же характерных величинах P:

$$p = \tilde{p}P.$$

Тогда:

$$\frac{L}{VT}\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\nabla})\tilde{\mathbf{v}} = -\frac{}{\rho_0 V^2}\frac{1}{\tilde{\rho}}\tilde{\nabla}\tilde{p} - \frac{gL}{V^2}\mathbf{e}_3 + \nu\frac{1}{VL}\tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{v}}.$$

Как видно, все величины теперь измеряются в безразмерных единицах. В связи с этим можно использовать целый ряд коэффициентов, характеризующих движение жидкости.

Первый – это число Струхала:

$$St = \frac{LV}{T}.$$

Тогда уравнение запишется так:

$$St\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\nabla})\tilde{\mathbf{v}} = -\frac{}{\rho_0 V^2}\frac{1}{\tilde{\rho}}\tilde{\nabla}\tilde{p} - \frac{gL}{V^2}\mathbf{e}_3 + \nu\frac{1}{VL}\tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{v}}.$$

В первую очередь оно характеризует типичные времена процессов. Для медленных процессов характерное время T достаточно велико и $St \ll 1$. В таком случае производной по времени можно пренебречь, и тогда основную роль в правой части уравнения Навье – Стокса играет конвективная часть:

$$(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\nabla})\tilde{\mathbf{v}} = -\frac{P}{\rho_0 V^2}\frac{1}{\tilde{\rho}}\tilde{\nabla}\tilde{p} - \frac{gL}{V^2}\mathbf{e}_3 + \nu\frac{1}{VL}\tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{v}}.$$

Если же типичные времена T малы, то число Струхала напротив огромно $St \gg 1$, и можно учитывать лишь производную по времени (пренебрегая конвективными слагаемыми в уравнении Навье – Стокса):

$$St\frac{\partial\tilde{\mathbf{v}}}{\partial\tilde{t}} = -\frac{P}{\rho_0 V^2}\frac{1}{\tilde{\rho}}\tilde{\nabla}\tilde{p} - \frac{gL}{V^2}\mathbf{e}_3 + \nu\frac{1}{VL}\tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{v}}.$$

Еще одно безразмерное число – число Рейнольдса:

$$Re = \frac{LV}{\nu}.$$

С его введением коэффициент при операторе Лапласа можно переписать:

$$St\frac{\partial\tilde{\mathbf{v}}}{\partial\tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\nabla})\tilde{\mathbf{v}} = -\frac{P}{\rho_0 V^2}\frac{1}{\tilde{\rho}}\tilde{\nabla}\tilde{p} - \frac{gL}{V^2}\mathbf{e}_3 + \frac{1}{Re}\tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{v}}.$$

Число Рейнольдса характеризует роль вязкости по сравнению с инерционными эффектами в жидкости. В том случае, если число Рейнольдса достаточно велико ($Re \gg 1$), то «вязким» слагаемым можно пренебречь:

$$St\frac{\partial\tilde{\mathbf{v}}}{\partial\tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\nabla})\tilde{\mathbf{v}} = -\frac{P}{\rho_0 V^2}\frac{1}{\tilde{\rho}}\tilde{\nabla}\tilde{p} - \frac{gL}{V^2}\mathbf{e}_3.$$

В таком случае обычно принято считать, что течение жидкости будет носить турбулентный характер. Тем не менее, стоит отметить так называемый *парадокс нулевой* *вязкости.* Если число Рейнольдса полагается бесконечным, а вязкость ν – нулевой, то в таком случае вихри в жидкости будут существовать в течение бесконечного времени. Тем не менее, при отсутствии вязкости ни один вихрь просто не может возникнуть в силу причин базового характера. Поэтому для реалистичной картины и возникновения вихрей в жидкости вязкость должна быть хотя и достаточно небольшой, но конечной.

Как правило, для каждой конфигурации течения (в различных трубах, плавающих телах разной формы и т.д.) вводят критические значения чисел Рейнольдса. Если число Рейнольдса превышает критическое значение, то движение переходит от ламинарного режима к турбулентному. Как правило, критическое значение числа Рейнольдса составляет величины порядка $10^{2..3}$.

Для того, чтобы охарактеризовать роль внутренних сил, вводят так называемое число Фруда:

$$Fr = \frac{V^2}{gL}.$$

С его учетом уравнение Навье-Стокса запишется так:

$$St\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\nabla})\tilde{\mathbf{v}} = -\frac{P}{\rho_0 V^2}\frac{1}{\tilde{\rho}}\tilde{\nabla}\tilde{p} - \frac{1}{Fr}\mathbf{e}_3 + \frac{1}{Re}\tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{v}}.$$

Если $Fr \gg 1$, то силы инерции превалируют над внутренними силами (например, силой тяжести), и в таком случае можно записать уравнение Навье – Стокса так:

$$St\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\nabla})\tilde{\mathbf{v}} = -\frac{P}{\rho_0 V^2}\frac{1}{\tilde{\rho}}\tilde{\nabla}\tilde{p} + \frac{1}{Re}\tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{v}}.$$

Наконец, вводят число Эйлера:

$$Eu = \frac{\rho_0 V^2}{2P}.$$

Оно описывает соотношение между плотностью энергии турбулентных движений жидкости и ее давлением. В таком случае уравнение Навье – Стокса перепишется следующим образом:

$$St\frac{\partial\tilde{\mathbf{v}}}{\partial\tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\nabla})\tilde{\mathbf{v}} = -\frac{1}{2Eu}\tilde{\nabla}\tilde{p} - \frac{1}{Fr}\mathbf{e}_3 + \frac{1}{Re}\tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{v}}.$$

Если число Эйлера велико

$$Eu \gg 1,$$

то:

$$St\frac{\partial\tilde{\mathbf{v}}}{\partial\tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\nabla})\tilde{\mathbf{v}} = -\frac{1}{Fr}\mathbf{e}_3 + \frac{1}{Re}\tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{v}}.$$

Довольно часто, когда уравнения записывают в безразмерных переменных, тильды над переменными и операторами опускают и записывают уравнения следующим образом:

$$St\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\tilde{t}} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{2Eu}\nabla p - \frac{1}{Fr}\mathbf{e}_3 + \frac{1}{Re}\Delta\mathbf{v}.$$

Как видно, в случае процессов, имеющих разные размеры, но одинаковые безразмерные коэффициенты St, Re, Eu, Fr, все явления будут происходить одинаково. Это позволяет проводить опыты с уменьшенными мостами, «игрушечными самолетами» в аэродинамических трубах и т.д. Они действительно воспроизводят процессы, соответствующие натурным образцам. В связи с этим подобные эксперименты можно считать надежным обоснованием для постройки больших конструкций.

Подобные безразмерные переменные широко используются и в других гидродинамических задачах. Так, в дальнейшем нам встретятся числа, характеризующие дифференциальное вращение в галактиках, альфа-эффект. Точно так же, как мы ввели число Рейнольдса, характеризующее гидродинамическую вязкость, можно ввести его магнитный аналог. Он характеризует так называемую магнитную вязкость.

Глава 3. Волны в жидкостях и газах

§1. Звуковые волны

Довольно часто необходимо изучать колебания и волны в жидкостях и газах. В значительной мере обмен информацией между людьми происходит путем речи, которая передается с помощью звуковых волн. Гидродинамические колебания играют важную роль и во многих других задачах как бытового, так и фундаментального плана.

Мы начнем изучение волн с самого простейшего случая. Будем использовать так называемое *акустическое приближение* [7]. В его рамках полагается, что колебания жидкости достаточно невелики, и можно представить такие величины, как плотность ρ и давление p в следующей форме:

$$\rho = \rho_0 + \tilde{\rho};$$

$$p = p_0 + \tilde{p}.$$

$$v = v_0 + \tilde{v};$$

причем масштаб возмущений намного меньше самих величин:

$$|\tilde{\rho}| \ll \rho_0;$$

$$|\tilde{p}| \ll p_0.$$

Скорости также будем полагать довольно малыми.

Кроме того, будем для удобства считать, что все величины зависят лишь от одной пространственной переменной x. (Отметим, что описанные рассуждения могут быть без особых затруднений развиты и на случай задач большей размерности.) В целях упрощения рассмотрим систему уравнений для идеальной жидкости, которая в одномерном случае и при отсутствии внешних сил примет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

В терминах малых возмущений данная система уравнений примет вид:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{\rho} v)}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0 + \tilde{\rho}}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}.$$

Пренебрегая нелинейными слагаемыми и считая, что

$$\frac{1}{\rho_0 + \tilde{\rho}} \cong \frac{1}{\rho_0};$$

можно получить что:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0\frac{\partial v}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}.$$

Домножим обе части второго равенства на ρ_0 и продифференцируем по x:

$$\rho_0\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2}.$$

Аналогично первое равенство можно продифференцировать по t и получить, что:

$$\rho_0\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2}.$$

Из этого следует, что

$$-\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2};$$

или

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} = 0.$$

В данном уравнении участвуют лишь производные давления и плотности, поэтому можно вернуться к изначальным величинам, опуская тильды:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0.$$

Если мы будем считать среду баротропной, полагая явную зависимость давления от плотности:

$$p = p(\rho);$$

то можно получить что:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}.$$

Тогда можно получить следующее волновое уравнение для плотности жидкости или газа:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \left(\frac{dp}{d\rho}\right) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0.$$

Сделав замену:

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}},$$

уравнение примет более привычную форму:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0.$$

Попытаемся определить скорость звука в типичном случае. Так, если процесс происходит при постоянной температуре, то плотность газа связана с его давлением следующим соотношением:

$$p = \frac{1}{\mu}\rho RT.$$

Для скорости звука в таком случае имеем:

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{RT}{\mu}}.$$

Например, для воздуха при нормальных условиях, полагая, что $R = 8.3 \cdot 10^7$ эрг К$^{-1}$, $T = 300$ К, $\mu = 29$ г можно получить:

$$c = 29300 \text{ см с}^{-1}.$$

Тем не менее, опыт показывает, что реальные звуковые колебания гораздо лучше описываются в предположении того, что процесс является адиабатическим. В таком случае:

$$pV^\gamma = \text{const},$$

где γ – показатель адиабаты. Тогда:

$$p = p_0 \left(\rho/\rho_0\right)^{-gamma},$$

$$\frac{dp}{d\rho} = -\gamma p_0 \rho^{-gamma-1}\rho_0^\gamma.$$

При $\rho = \rho_0$ мы получим:

$$\frac{dp}{d\rho} = -\gamma p_0/\rho_0 = -\frac{\gamma RT}{\mu};$$

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = -\sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}};$$

С учетом того, что воздух состоит преимущественно из двухатомных молекул, показатель адиабаты для него составляет величину $\gamma = 7/5$ [8]. Поэтому скорость звука:

$$c = 34700 \text{ см с}^{-1},$$

что гораздо ближе к значениям, наблюдаемым в опыте.

§2. Ударные волны. Соотношения Гюгонио

Выше мы рассматривали волны, распространяющиеся достаточно медленно, когда плотность меняется плавным образом. Тем не менее, достаточно часто встречается ситуация быстро распространяющихся волн. Это бывает в случае движения тел со сверхзвуковой скоростью, взрывов и т.д. В таком случае различные параметры жидкости или газа меняются скачкообразно: так, плотность, скорость движения и другие характеристики испытывают разрывы.

Важно понимать, какую величину могут иметь данные скачки. Предположим, что жидкость течет в направлении оси x, и в ходе движения образуется разрыв. Рассмотрим элемент поверхности разрыва площадью S. В таком случае поток вещества с левой стороны можно охарактеризовать с помощью величины:

$$N_1 = \rho_1 v_1 S,$$

где ρ_1 – плотность вещества слева от поверхности разрыва, v_1 – его скорость. Поток вещества слева от поверхности разрыва может быть описан с помощью формулы:

$$N_2 = \rho_2 v_2 S,$$

где ρ_2 и v_2 – соответственно плотность и скорость справа от поверхности разрыва (рис. 6). Естественно, что данные потоки должны быть равны друг другу (т.к.

жидкость не возникает и не исчезает на поверхности разрыва):

$$N_1 = N_2;$$

$$\rho_1 v_1 S = \rho_2 v_2 S;$$

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2.$$

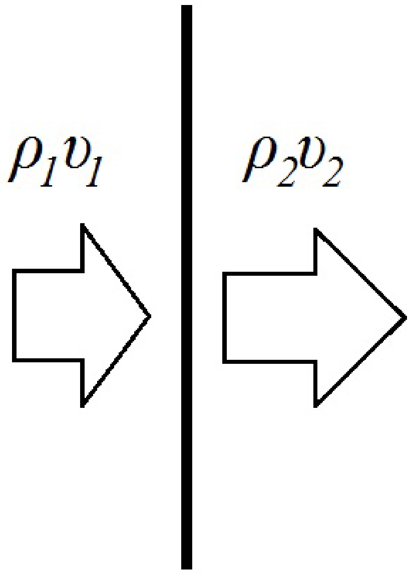

Рис. 6: Потоки вещества.

Рассмотрим теперь небольшой слой жидкости площадью S левее поверхности разрыва. Пусть его толщина h_1 такова, что за время dt он полностью «перетекает» за поверхность разрыва:

$$h_1 = v_1 dt.$$

В таком случае объем жидкости составит:

$$V_1 = Sh_1 = Sv_1 dt;$$

а ее масса:

$$m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1 S v_1 dt.$$

Импульс данного фрагмента жидкости составляет величину:

$$P_1 = m_1 v_1 = \rho_1 S v_1^2 dt.$$

В течение времени dt свое место ему освобождает аналогичный фрагмент жидкости за поверхностью разрыва с массой:

$$m_2 = \rho_2 S v_2 dt$$

и импульсом:

$$P_2 = m_2 v_2 = \rho_2 S v_2^2 dt.$$

Таким образом, изменение импульса составляет:

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \rho_2 S v_2^2 dt - \rho_1 S v_1^2 dt = (\rho_2 v_2^2 - \rho_1 v_1^2) S dt.$$

С другой стороны, оно происходит под действием двух сил. Первая из них действует слева:

$$F_1 = p_1 S;$$

вторая – справа:

$$F_2 = p_2 S.$$

В течение малого промежутка времени dt они вызывают изменение импульса:

$$\Delta P = (F_1 - F_2) dt = (p_1 - p_2) S dt.$$

Приравнивая данные выражения, получим:

$$(p_1 - p_2) S dt = (\rho_2 v_2^2 - \rho_1 v_1^2) S dt.$$

Из этого сразу же следует, что:

$$p_1 - p_2 = \rho_2 v_2^2 - \rho_1 v_1^2;$$

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2.$$

Наконец, на поверхности разрыва не может выделяться никакой теплоты (конечно, если там не происходит каких-либо химических реакций или других явлений, сильно меняющих свойства среды. Напомним, что согласно первому закону термодинамики изменение внутренней энергии dE составляет величину:

$$dE = dQ - dA;$$

где dA – совершаемая газом работа, $dQ = 0$ – получаемая теплота. Таким образом, можно записать, что

$$dE + dA = 0.$$

В нашем случае более актуально говорить о работе dA', которая совершается над газом и которая связана с dA соотношением:

$$dA' = -dA.$$

Таким образом, должно выполняться соотношение:

$$dE - dA' = 0$$

Вновь рассмотрим слева от поверхности разрыва некоторый тонкий слой толщины $h_1 = v_1 dt$ и объемом $V_1 = h_1 S = v_1 S dt$. Его внутренняя энергия составляет величину:

$$E_1 = \rho_1 (u_1 + \frac{v_1^2}{2}) V_1 = \rho v_1 (u_1 + \frac{v_1^2}{2}) S dt.$$

Энергия аналогичного слоя справа от поверхности разрыва толщины $h_1 = v_1 dt$ и объемом $V_1 = h_1 S = v_1 S dt$ составляет:

$$E_2 = \rho_2 (u_2 + \frac{v_2^2}{2}) V_2 = \rho v_2 (u_2 + \frac{v_2^2}{2}) S dt.$$

Таким образом,

$$dE = E_2 - E_1 = \rho_2 v_2 (u_2 + \frac{v_2^2}{2}) S dt - \rho_1 (u_1 + \frac{v_1^2}{2}) S dt =$$

$$= (\rho_2 v_2 (u_2 + \frac{v_2^2}{2}) - \rho_1 (u_1 + \frac{v_1^2}{2})) S dt.$$

Что касается совершаемой над слоем газа работы, то с левой стороны над ним совершает работу газ с давлением p_1, которому соответствует сила:

$$F_1 = p_1 S.$$

В таком случае при перемещении слоя на расстояние $v_1 dt$ совершается работа:

$$dA'_1 = F_1 v_1 dt = p_1 S v_1 dt.$$

С правой стороны на слой газа действует сила

$$F_2 = p_2 S;$$

и совершается работа:

$$dA'_2 = -F_2 v_2 dt = -p_2 S v_2 dt.$$

Суммарная работа равна:

$$dA' = dA'_1 + dA'_2 = p_1 S v_1 dt - p_2 S v_2 dt = (p_1 v_1 - p_2 v_2) S dt.$$

Тогда уравнение для энергии преобразуется к виду:

$$(\rho_2 v_2 (u_2 + \frac{v_2^2}{2}) - \rho_1 (u_1 + \frac{v_1^2}{2})) S dt - (p_1 v_1 - p_2 v_2) S dt = 0.$$

Разделим обе части на Sdt :

$$\rho_2 v_2 (u_2 + \frac{v_2^2}{2}) - \rho_1 v_1 (u_1 + \frac{v_1^2}{2}) - p_1 v_1 + p_2 v_2 = 0$$

Это выражение можно переписать так:

$$\rho_1 v_1 (u_1 + \frac{v_1^2}{2}) + p_1 v_1 = \rho_2 v_2 (u_2 + \frac{v_2^2}{2}) + p_2 v_2;$$

или аналогично:

$$\rho_1 v_1 \left(u_1 + \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} \right) = \rho_2 v_2 \left(u_2 + \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} \right).$$

Выведенные выражения называются *соотношениями Гюгонио*:

$$\begin{cases} \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2; \\ p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2; \\ \rho_1 v_1 \left(u_1 + \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} \right) = \rho_2 v_2 \left(u_2 + \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} \right). \end{cases}$$

Они позволяют связать параметры жидкости или газа слева и справа от поверхности разрыва. Это позволяет решать задачи о распространении ударных волн, давая граничные условия для двух областей в жидкости.

Глава 4. Магнитная гидродинамика

§1. Основные уравнения

Нас будут интересовать магнитные поля в движущихся проводящих средах, их структура и эволюция. Соответствующие процессы играют важную роль на Солнце, в галактиках, при генерации магнитного поля Земли и т.д.

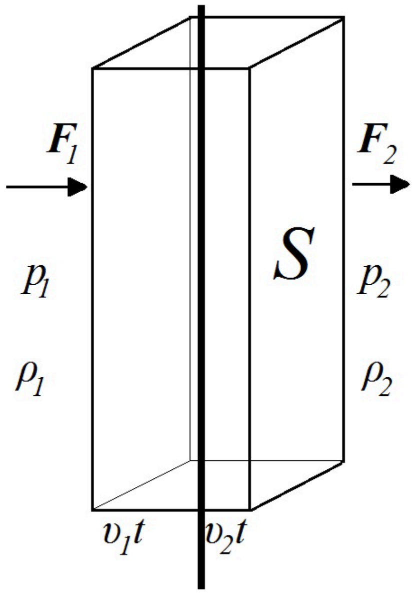

Рис. 7: Изменение давления и скорости.

Из курсов электромагнетизма [10] и электродинамики [11, 12] известна система уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}; \\ \operatorname{div}\mathbf{B} = 0; \\ \operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho_e; \end{cases}$$

где $\mathbf{E}$ – электрическое поле, $\mathbf{H}$ – магнитное поле, $\mathbf{D}$ – электрическая индукция, $\mathbf{B}$ – магнитная индукция, ρ_e – плотность заряда, $\mathbf{j}$ – плотность электрического тока, c – скорость света. Последнее из уравнений нас будет интересовать мало.

Мы будем считать электрическое поле квазистационарным, которое исходит из того, что токи проводимости в среде намного меньше токов смещения [12]:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \ll \mathbf{j};$$

Поэтому второе из уравнений Максвелла будет выглядеть так:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}.$$

Плотность тока связана связана с электрическим полем следующим образом [11]:

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E'};$$

где λ – проводимость жидкости или газа, **E'** – электрическое поле, измеренное в движущейся среде. Его можно вычислить следующим образом:

$$\mathbf{E'} = \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{B}],$$

где **v** – скорость среды. Магниное поле и его индукция связаны с помощью коэффициента магнитной проницаемости μ:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}.$$

Тогда система уравнений, описывающих поля, запишется так:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi\lambda}{c}\left(\mathbf{E} + \frac{\mu}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{H}]\right); \\ \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \end{cases}$$

Возьмем ротор от левой и правой частей второго уравнения:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi\lambda}{c}\left(\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\mu}{c}\operatorname{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}]\right).$$

Поскольку [13]

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{H} - \Delta\mathbf{H} = -\Delta\mathbf{H};$$

то

$$-\Delta\mathbf{H} = \frac{4\pi\lambda}{c}\left(\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{\mu}{c}\operatorname{rot}[\mathbf{v},\mathbf{H}]\right).$$

$\operatorname{rot}\mathbf{E}$ можно подставить из первого уравнения Максвелла:

$$-\Delta\mathbf{H} = \frac{4\pi\lambda}{c}\left(-\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} + \frac{\mu}{c}\operatorname{rot}[\mathbf{v},\mathbf{H}]\right);$$

$$-\Delta\mathbf{H} = \frac{4\pi\lambda\mu}{c^2}\left(-\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot}[\mathbf{v},\mathbf{H}]\right);$$

Домножим обе части на $\frac{c^2}{4\pi\lambda\mu}$:

$$-\frac{c^2}{4\pi\lambda\mu}\Delta\mathbf{H} = -\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot}[\mathbf{v},\mathbf{H}];$$

Введя магнитную вязкость

$$\eta_m = \frac{c^2}{4\pi\lambda\mu};$$

получим основное уравнение магнитной гидродинамики:

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{v},\mathbf{H}] + \eta_m\Delta\mathbf{H}.$$

В случае, если проводимость жидкости очень велика ($\lambda \to 0$), магнитная вязкость будет крайне малой ($\eta_m \to 0$) и уравнение сведется к виду:

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{v},\mathbf{H}].$$

Посмотрим, какие слагаемые добавятся в уравнение движения жидкости. Если мы имеем малый фрагмент жидкости объемом V, в котором присутствует плотность электрического тока $\mathbf{j}$, то на него будет действовать сила:

$$\mathbf{F} = \frac{V}{c}[\mathbf{j},\mathbf{H}].$$

Можно показать [11, 12], что сила тока связана с магнитным полем следующим образом:

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H};$$

т.е.

$$\mathbf{F} = -\frac{V}{c}[\mathbf{H}, \operatorname{rot} \mathbf{H}],$$

или

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{\rho}\frac{\rho V}{4\pi}[\mathbf{H}, \operatorname{rot} \mathbf{H}] = -\frac{1}{\rho}\frac{m}{4\pi}[\mathbf{H}, \operatorname{rot} \mathbf{H}],$$

Таким образом, данная сила является массовой с характерным вектором:

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{4\pi\rho}[\mathbf{H}, \operatorname{rot} \mathbf{H}].$$

Если мы считаем жидкость идеальной, то уравнение Эйлера будет выглядеть так:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{1}{4\pi\rho}[\mathbf{H}, \operatorname{rot} \mathbf{H}].$$

Если мы рассматриваем вязкую жидкость, то уравнение движения жидкости будет таким:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{1}{4\pi\rho}[\mathbf{H}, \operatorname{rot} \mathbf{H}] + \nu\Delta\mathbf{v}.$$

§2. Уравнения магнитной гидродинамики в безразмерном виде

Выше мы записывали уравнение Навье – Стокса в безразмерной форме. Аналогичную процедуру можно провести и с основным уравнением магнитной гидродинамики:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] + \eta_m \Delta\mathbf{H}.$$

Так же как и раньше, можно ввести характерные масштабы для времени T, расстояния L и скорости V:

$$t = \tilde{t}T;$$

$$x = \tilde{x}L;$$

$$v = \tilde{v}V.$$

Тогда можно заменить частную производную по времени следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial \tilde{t}};$$

по координате:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}};$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{L^2}\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2}.$$

Точно так же можно переписать операцию взятия ротора и оператор Лапласа:

$$\mathrm{rot} = \frac{1}{L}\tilde{\mathrm{rot}};$$

$$\Delta = \frac{1}{L^2}\tilde{\Delta}.$$

Тогда основное уравнение магнитной гидродинамики будет выглядеть так:

$$\frac{1}{T}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \tilde{t}} = \frac{V}{L}\tilde{\mathrm{rot}}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] + \frac{\eta_m}{L^2}\tilde{\Delta}\mathbf{H}.$$

Домножим обе части на L :

$$\frac{L}{T}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \tilde{t}} = V\tilde{\mathrm{rot}}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] + \frac{\eta_m}{L}\tilde{\Delta}\mathbf{H}$$

и разделим на V :

$$\frac{L}{VT}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \tilde{t}} = \tilde{\mathrm{rot}}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] + \frac{\eta_m}{VL}\tilde{\Delta}\mathbf{H}.$$

В левой части уравнения возникает число Струхала $St = \frac{L}{VT}$:

$$St\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \tilde{t}} = \tilde{\mathrm{rot}}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] + \frac{\eta_m}{VL}\tilde{\Delta}\mathbf{H}.$$

В правой части можно ввести так называемое магнитное число Рейнольдса:

$$Re_m = \frac{VL}{\eta_m}.$$

Тогда уравнение запишется так:

$$St\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \tilde{t}} = \tilde{\mathrm{rot}}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] + \frac{1}{Re_m}\tilde{\Delta}\mathbf{H}.$$

Далее будем опускать «тильды» над переменными:

$$St\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] + \frac{1}{Re_m}\Delta\mathbf{H}.$$

Точно так же, как и в случае с «обычной» гидродинамикой, оно характеризует диссипативные процессы. Рассмотрим случай, когда среда покоится, т.е.

$$\mathbf{v} = 0.$$

Тогда уравнение выглядит так:

$$St\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{1}{Re_m}\Delta\mathbf{H}.$$

Рассмотрим случай зависимости от одной переменной x и поле, направленное в одну сторону:

$$St\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{Re_m}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}. \tag{15}$$

Если расстояния измеряются в характерных величинах L, то граничные условия можно поставить так:

$$H|_{x=0} = H|_{x=1} = 0.$$

В качестве начальных условий возьмем самое простое:

$$H|_{t=0} = A_0 \sin(\pi x) .$$

Будем искать решение в форме:

$$H(t, x) = A(t) \sin(\pi x) .$$

Тогда:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = A'(t) \sin(\pi x) .$$
$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = -\pi^2 A(t) \sin(\pi x) .$$

Уравнение (15) перепишется в форме:

$$StA'(t) \sin(\pi x) = -\frac{\pi^2}{Re_m} A(t) \sin(\pi x)$$

или

$$A'(t) = -\frac{\pi^2}{Re_m St} A(t).$$

Решение данного уравнения выглядит так:

$$A(t) = A_0 \exp\left(-\frac{pi^2}{Re_m St} t\right)$$

или

$$A(t) = A_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

где

$$\tau = \frac{Re_m St}{\pi^2}.$$

Таким образом, магнитное поле будет затухать со временем, пропорциональным Re_m.

Таким образом, при больших числах Рейнольдса магнитное поле (и соответствующая ему энергия) будет затухать медленнее.

Вообще говоря, основное уравнение магнитной гидродинамики является параболическим, поэтому при решении его в ограниченной области для него существует так называемый *принцип максимума*: максимальное по модулю значение магнитного поля может достигаться либо на границе данной области, либо в начальный момент времени [14, 15].

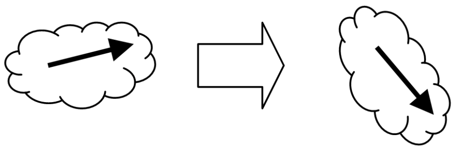

Рис. 8: Вмороженность линий поля в среду.

§3. Вмороженность линий магнитного поля в среду

Одним из характерных свойств высокопроводящей среды является то, что магнитное поле обладает свойством вмороженности. Это значит, что линии поля «приклеены» к среде (см. рис. 8). Если объем жидкости поворачивается или перемещается, то вектор магнитного поля перемещается вместе с ним.

Установим, каким свойствам должно удовлетворять поле (не обязательно магнитное), чтобы обладать свойством вмороженности. Рассмотрим две частицы жидкости, соединенные вектором $\mathbf{a}(t)$ (см. рис. 9). Спустя время Δt начало вектора переместится на расстояние $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\Delta t$, а его конец – расстояние $\mathbf{v}(\mathbf{r}+\mathbf{a},t)$. Вектор, соответствующий моменту времени $t+\Delta t$, выражается так [12]:

$$\mathbf{a}(t+\Delta t) = \mathbf{a}(t) + \mathbf{v}(\mathbf{r}+\mathbf{a},t) - \mathbf{v}(\mathbf{r},t),$$

или:

$$\mathbf{a}(t+\Delta t) - \mathbf{a}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}+\mathbf{a},t) - \mathbf{v}(\mathbf{r},t).$$

Разности можно переписать с помощью производных следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt}\Delta t \cong (\mathbf{a}, \nabla)\mathbf{v}\Delta t.$$

Разделим обе части на Δt и устремим его к нулю:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = (\mathbf{a}, \nabla)\mathbf{v}. \tag{16}$$

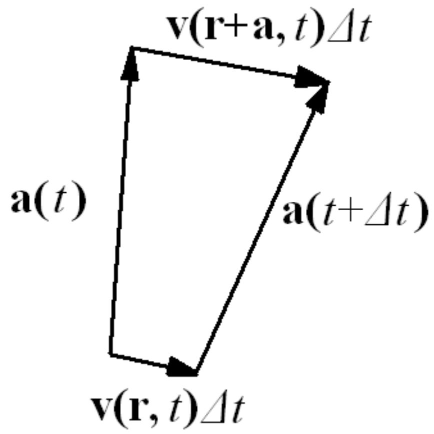

Рис. 9: Движение среды.

Таким образом, если мы хотим, чтобы некоторое поле **a** обладало свойством вмороженности, необходимо потребовать, чтобы оно удовлетворяло уравнению (16). Покажем, что таким свойством обладает $\mathbf{H}/\rho$, т.е. поле, кроме всего прочего, еще и «растягивается» при изменении плотности среды.

Рассмотрим основное уравнение магнитной гидродинамики при условии бесконечной проводимости:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}].$$

Его можно переписать так [13]:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = (\mathbf{H}, \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{H} + \mathbf{v}\,\mathrm{div}\,\mathbf{H} - \mathbf{H}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}. \tag{17}$$

В силу уравнений Максвелла $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$. Кроме того, мы имеем условие неразрывности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0;$$

в силу которого:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\operatorname{div}\mathbf{v} + (\mathbf{v},\nabla)\rho = 0.$$

Тогда:

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\mathbf{v},\nabla)\rho\right).$$

Тогда (17) запишется в виде:

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = (\mathbf{H},\nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v},\nabla)\mathbf{H} + \frac{\mathbf{H}}{\rho}(\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\mathbf{v},\nabla)\rho).$$

Это можно переписать:

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v},\nabla)\mathbf{H} - \frac{\mathbf{H}}{\rho}(\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\mathbf{v},\nabla)\rho) = (\mathbf{H},\nabla)\mathbf{v}.$$

В левой части явно выражаются полные производные:

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} - \frac{\mathbf{H}}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = (\mathbf{H},\nabla)\mathbf{v}.$$

Если разделить обе части на ρ, то можно получить дробь [12]:

$$\frac{\frac{d\mathbf{H}}{dt}\rho - \mathbf{H}\frac{d\rho}{dt}}{\rho^2} = (\frac{\mathbf{H}}{\rho},\nabla)\mathbf{v}.$$

В левой части в чистом виде появляется производная частного:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{H}}{\rho}\right) = (\frac{\mathbf{H}}{\rho},\nabla)\mathbf{v}.$$

Таким образом, поле $\frac{\mathbf{H}}{\rho}$ является действительно является вмороженным в среду. Данный факт будет играть важную роль при построении теории динамо и других уравнений магнитной гидродинамики.

§4. Магнитогидродинамические волны

Также, как и во многих других задачах, относящихся к жидкостям и газам, в магнитной гидродинамике возможно распространение волн. Они имеют самую различную природу. Для начала было бы интересно изучить самый простой случай линейных волн, распространяющихся в проводящей среде. Возьмем идеальную жидкость, описываемую уравнением Эйлера:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{1}{4\pi\rho}[\mathbf{H}, \operatorname{rot}\mathbf{H}]$$

и основным уравнением магнитной гидродинамики. Будем считать, что в жидкости существует магнитное поле:

$$\mathbf{H} = H_0\mathbf{e}_x + h\mathbf{e}_y,$$

причем

$$h \ll H_0.$$

Будем также полагать, что поле

$$H_0$$

постоянно и не меняется ни со временем, ни в пространстве.

Кроме того, будем считать, что скорость направлена вдоль оси y:

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_y$$

и достаточно мала, поэтому можно пренебречь конвективным слагаемым в уравнении Эйлера:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{1}{4\pi\rho}[\mathbf{H}, \operatorname{rot}\mathbf{H}].$$

Считая, что все величины зависят лишь от переменной x, можно получить уравнение для v :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi\rho}[\mathbf{H}, \operatorname{rot}\mathbf{H}]_y.$$

Ротор магнитного поля будет выглядеть так:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -\frac{\partial h}{\partial z}\mathbf{e}_x + \frac{\partial h}{\partial x}\mathbf{e}_z.$$

Векторное произведение запишется так:

$$[\mathbf{H}, \operatorname{rot}\mathbf{H}] = h\frac{\partial h}{\partial x}\mathbf{e}_x - H_0\frac{\partial h}{\partial x}\mathbf{e}_y + h\frac{\partial h}{\partial z}\mathbf{e}_z.$$

Отбрасывая слагаемые, квадратичные по h и ее производным, получим:

$$[\mathbf{H}, \operatorname{rot}\mathbf{H}] \cong -H_0\frac{\partial h}{\partial x}\mathbf{e}_y.$$

Тогда уравнение Эйлера приближенно сведется к:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{H_0}{4\pi\rho}\frac{\partial h}{\partial x}.$$

Возьмем основное уравнение магнитной гидродинамики в идеальном случае:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}].$$

Векторное произведение выглядит в наших предположениях так:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{H}] = -vH_0\mathbf{e}_z.$$

Для ротора получим:

$$\operatorname{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] = H_0\frac{\partial v}{\partial x}H_0\mathbf{e}_y.$$

Тогда в проекции на ось y:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = H_0 \frac{\partial v}{\partial x} H_0.$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{H_0}{4\pi\rho} \frac{\partial h}{\partial x}; \\ \\ \frac{\partial h}{\partial t} = H_0 \frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Продифференцируем обе части первого уравнения по x, считая что плотность меняется мало:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = \frac{H_0}{4\pi\rho} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}.$$

Обе части второго уравнения продифференцируем по t:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = H_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}.$$

Подставим $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}$ из первого уравнения во второе:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{H_0^2}{4\pi\rho} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2},$$

или

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - \frac{H_0^2}{4\pi\rho} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0.$$

Если ввести скорость по формуле

$$c_H = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho}},$$

то мы получим волновое уравнение [11]:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - c_H^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0.$$

Аналогичное уравнение можно получить и для скорости:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_H^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0.$$

Таким образом, возмущения магнитного поля и скорости среды распространяются со скоростью, пропорциональной величине магнитного поля.

Глава 5. Теория динамо

§1. Обшие вопросы. Униполярное динамо

В настоящее время надежно установлено, что ряд космических объектов обладает магнитными полями. Свои поля есть у Солнца, других звезд, галактик, у Земли и остальных планет. Довольно часто возникают вопросы о том, «кто их намагнитил» и откуда у тел в глубоком космосе в принципе может появиться магнитное поле. Оказывается, что генерация магнитного поля в небесных телах – самоподдерживающийся процесс, который обусловлен характером механических движений в среде. По сути, кинетическая энергия турбулентных движений проводящей жидкости переходит в энергию магнитного поля. Этот процесс называют *динамо* [16].

Конечно, описание этого процесса оказывается достаточно сложным. На первый взгляд, ввиду того, что основное уравнение магнитной гидродинамики является параболическим, оно может описывать лишь затухающие решения. Кроме того, поскольку эволюция магнитного поля описывается с помощью определенной конфигурации токов, то нельзя не вспомнить так называемое правило Ленца из электродинамики, согласно которому возникающее в таких случаях магнитное поле может лишь ослаблять вызвавшие их токи. Поэтому как поля, так и токи будут со временем затухать. По крайней мере, необходима некоторая специальная конфигурация течения, которую мы обсудим дальнейшем. Для начала рассмотрим наиболее простой пример – так называемое униполярное динамо, показывающий принципиальную возможность генерации магнитного поля [17]. Хотя это и довольно простой и на первый взгляд довольно искусственный пример, он демонстрирует все основные свойства, характерные для более сложных процессов генерации магнитного поля.

Рассмотрим диск, который соединен с катушкой индуктивностью L, навитой на ось вращения диска (рис. 10). Будем считать, что все сопротивление R сосредоточено в оси вращения, а диск вращается с угловой скоростью ω.

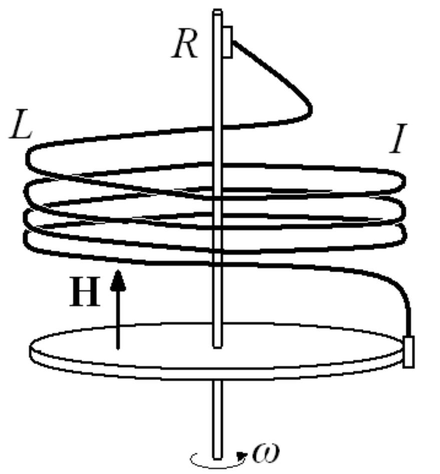

Рис. 10: Униполярное динамо.

Уравнение для электрического тока выглядит следующим образом [17]:

$$\frac{L}{c^2}\frac{dI}{dt} + RI = \epsilon,$$

где ϵ – возникающая ЭДС. Ее величина может быть вычислена с помощью интеграла от величины электрического поля [10]:

$$\epsilon = \int_0^a \mathbf{E} d\mathbf{l},$$

где a – радиус диска. Если во вращающемся диске присутствует магнитное поле величины $\mathbf{H}$, то в неподвижной системе отсчета будет присутствовать электрическое поле:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{H}],$$

где $\mathbf{v}$ – скорость, связанная с вращением диска, которую можно вычислить по формуле:

$$v = \omega r.$$

Электрическое поле будет направлено вдоль радиуса и равно:

$$E = \frac{1}{c}\omega r H.$$

Тогда:

$$\epsilon = \int_0^a \frac{1}{c}\omega r H dr.$$

Эту формулу можно переписать следующим образом:

$$\epsilon = \frac{\omega}{c}\int_0^a rHdr = \frac{\omega}{2\pi c}\int_0^a H 2\pi r dr.$$

Интеграл, по сути, представляет из себя поток магнитного поля через контур:

$$\Phi = \int_0^a H 2\pi r dr.$$

Его можно представить через коэффициент взаимной индукции катушки и диска M :

$$\Phi = \frac{1}{c}MI.$$

Тогда для ЭДС получим:

$$\epsilon = \frac{\omega}{2\pi c^2}MI.$$

Для электрического тока получаем уравнение:

$$\frac{L}{c^2}\frac{dI}{dt} + RI = \frac{\omega}{2\pi c^2}MI,$$

Его можно переписать следующим образом:

$$\frac{dI}{dt} = \left(-\frac{c^2R}{L} + \frac{\omega M}{2\pi L}\right) I,$$

Тогда сила тока будет зависеть от времени по закону:

$$I = I_0 \exp(\gamma t),$$

где I_0 – начальное значение силы тока, а скорость роста магнитного поля выражается так:

$$\gamma = -\frac{c^2R}{L} + \frac{\omega M}{2\pi L}.$$

Для магнитного потока мы можем получить:

$$\Phi = \frac{1}{c} M I_0 \exp(\gamma t).$$

В силу того, что $H \sim \Phi$, можно записать аналогичную формулу и для роста магнитного поля:

$$H = H_0 \exp(\gamma t).$$

Можно отметить, что в зависимости от значения параметров, возможен как рост магнитного поля, так и его затухание. Если

$$\frac{\omega M}{2\pi L} > \frac{c^2R}{L},$$

то будет наблюдаться рост магнитного поля. В противном случае оно будет затухать.

Отметим, что рост магнитного поля обусловлен тем, что диск вращается с определенной угловой скоростью, а подсоединенный к нему контакт покоится (или движется с нулевой угловой скоростью). Это является простейшим примером так называемого *дифференциального вращения*, когда разные части исследуемой системы обращаются с разными угловыми скоростями.

§2. Двухдисковое динамо.

Довольно близко по своей идее к униполярному динамо двухдисковое динамо, называемое также *динамо Рикитаке*. Несмотря на всю кажущуюся простоту, она оказывается применимой при моделировании целого ряда природных процессов, например при исследовании магнитного поля Земли.

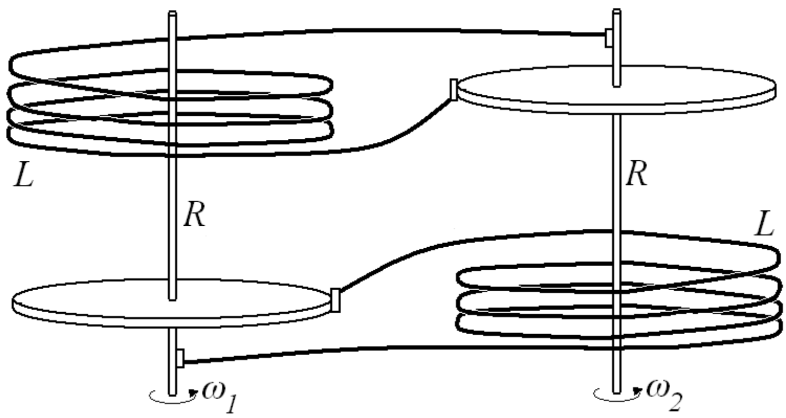

Рис. 11: Двухдисковое динамо.

Рассмотрим два диска, вращающихся вокруг своих осей и соединенных с катушками, причем они закручены не вокруг своих осей, а вокруг осей соседних дисков (см. рис. 11). Будем считать, что обе катушки обладают одинаковой индуктивностью L, а оба стержня - одинаковым сопротивлением R, тогда эволюция тока в них будет описываться с помощью уравнений [18]:

$$\frac{L}{c^2}\frac{dI_1}{dt} + RI_1 = \epsilon_1,$$

$$\frac{L}{c^2}\frac{dI_2}{dt} + RI_2 = \epsilon_2,$$

где

$$\epsilon_1 = \frac{\omega_1}{2\pi c^2} M I_2.$$

$$\epsilon_2 = \frac{\omega_2}{2\pi c^2} M I_1.$$

В таком случае система уравнений, описывающих токи, будет иметь следующий вид:

$$\frac{L}{c^2}\frac{dI_1}{dt} + RI_1 = \frac{\omega_1}{2\pi c^2} M I_2,$$

$$\frac{L}{c^2}\frac{dI_2}{dt} + RI_2 = \frac{\omega_2}{2\pi c^2} M I_1,$$

где M – коэффициент взаимной индукции контуров. Эту систему уравнений можно записать в следующем виде:

$$\frac{dI_1}{dt} = -\frac{c^2 R}{L} I_1 + \frac{M}{2\pi L}\omega_1 I_2,$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \frac{M}{2\pi L}\omega_2 I_1 - \frac{c^2 R}{L} I_2.$$

На данном этапе для более удобного анализа имеет смысл рассматривать безразмерные переменные. Будем измерять времена в единицах $T = \frac{L}{c^2 R}$:

$$t = \tilde{t} T,$$

а частоты – в единицах $1/T$:

$$\omega = \tilde{\omega}/T.$$

Кроме того, введем коэффициент k, характеризующий соотношение между собственными и взаимными индуктивностями:

$$k = \frac{M}{2\pi L}.$$

В таком случае система уравнений сведется к виду:

$$\frac{dI_1}{d\tilde{t}} = -I_1 + k\tilde{\omega_1}I_2, \tag{18}$$

$$\frac{dI_2}{d\tilde{t}} = k\tilde{\omega_2}I_1 - I_2. \tag{19}$$

В дальнейшем мы будем опускать «тильды» над величинами, подразумевая, что все величины измеряются в безразмерных переменных.

Будем искать решение системы уравнений в виде:

$$I_1(t) = I_{01}\exp\left(\gamma t\right);$$

$$I_2(t) = I_{02}\exp\left(\gamma t\right).$$

Тогда все сведется к системе алгебраических уравнений:

$$\gamma I_{01} = -I_{01} + k\omega_1 I_{02},$$

$$\gamma I_2 = k\omega_2 I_{01} - I_{02},$$

или

$$(\gamma+1)I_{01} - k\omega_1 I_{02} = 0,$$

$$-k\omega_2 I_{01} + (\gamma+1)I_{02} = 0.$$

Условием ее разрешимости будет равенство нулю определителя системы:

$$\det\begin{pmatrix} (\gamma+1) & -k \\ -k & (\gamma+1) \end{pmatrix} = 0.$$

Иначе говоря,

$$(\gamma+1)^2 - k^2 = 0,$$

или

$$\gamma = -1 \pm k.$$

Можно видеть, что данная система имеет два собственных значения, одно из которых – всегда затухающее (соответствующее знаку «минус»), а второе зависит от величины k и растет в случае, если $k > 1$.

Выше мы не учитывали того, что по мере роста магнитного поля движение дисков будет замедляться. Действительно, если через контур с током I_1 проходит магнитный поток:

$$\Phi_2 = MI_2,$$

то возникает момент силы:

$$Q = \frac{1}{c}\Phi I_1 = \frac{1}{c}MI_1I_2,$$

который замедляет движение диска. Кроме этого, на диск может действовать некоторый внешний момент сил Q_0, и тогда уравнение для его вращения запишется так:

$$J\frac{d\omega_1}{dt} = Q_0 - \frac{1}{c}MI_1I_2,$$

где J – момент инерции диска. Аналогичную формулу можно записать и для второго диска (мы предполагаем, что диски и стержни аналогичны по своим параметрам):

$$J\frac{d\omega_2}{dt} = Q_0 - \frac{1}{c}MI_1I_2.$$

Если вычесть одно уравнение вращения диска из другого, то получится, что:

$$J\frac{d\omega_2}{dt} - J\frac{d\omega_1}{dt} = 0.$$

Иначе говоря,

$$\frac{d\omega_2}{dt} - \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\omega_2 - \omega_1\right) = 0.$$

Это означает, что разность между скоростями дисков можно считать постоянной:

$$\omega_2 - \omega_1 = \omega_0.$$

По этой причине разумной будет использовать лишь одно из уравнений для движения дисков, например:

$$J\frac{d\omega_1}{dt} = Q_0 - \frac{1}{c}MI_1I_2.$$

Если измерять времена в единицах $T = L/c^2R$, то данное уравнение можно записать так:

$$\frac{Jc^2R}{L}\frac{d\omega_1}{dt} = Q_0 - \frac{1}{cJ}MI_1I_2;$$

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{Q_0L}{Jc^2R} - \frac{LM}{J^2c^3R}I_1I_2.$$

Если измерять частоты в единицах $\frac{1}{T} = c^2R/L$, то:

$$\frac{c^2R}{L}\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{Q_0L}{Jc^2R} - \frac{LM}{J^2c^3R}I_1I_2,$$

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{Q_0L^2}{Jc^6R^2} - \frac{L^2M}{J^2c^5R^2}I_1I_2.$$

Будем измерять силы тока в единицах $\frac{Jc^{5/2}R}{LM^{1/2}}$. Кроме этого, введем безразмерное число:

$$A = \frac{Q_0L^2}{Jc^6R^2}.$$

Тогда уравнение для угловой скорости запишется так:

$$\frac{d\omega_1}{dt} = A - I_1I_2.$$

Полная система уравнений динамо Рикитаке в нелинейном случае запишется так:

$$\frac{dI_1}{dt} = -I_1 + k\omega_1I_2; \tag{20}$$

$$\frac{dI_2}{dt} = k(\omega_1 + \omega_0)I_1 - I_2; \qquad (21)$$

$$\frac{d\omega_1}{dt} = A - I_1 I_2. \qquad (22)$$

Характерная зависимость сил токов (и пропорциональных им магнитных полей) от времени для случая $k = 5$, $\omega_0 = 0.5$, $A = 1$, $I_1(0) = I_2(0) = 0.1$ показана на рис.12–13.

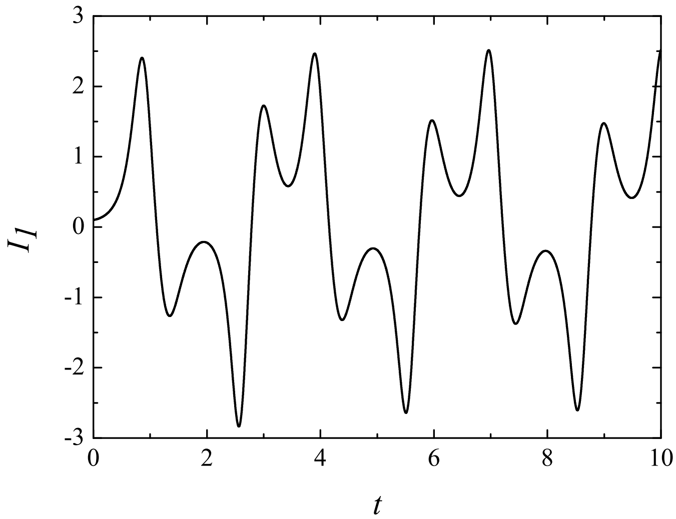

Рис. 12: Зависимость $I_1(t)$ для двухдискового динамо.

§3. Теорема запрета для плоского течения.

Выше мы обсудили возможность генерации магнитного поля в простейших случаях, сводимых к аналогиям из электрических цепей. Хотя они и имеют вполне четкие аналоги в природе, сходство между ними и реально действующими процессами генерации магнитного поля лишь качественное. Для того, чтобы описать генерацию магнитного поля более точно, необходимо рассматривать явно все гидродинамические течения, решая уравнения движения жидкости и основное уравнение магнитной

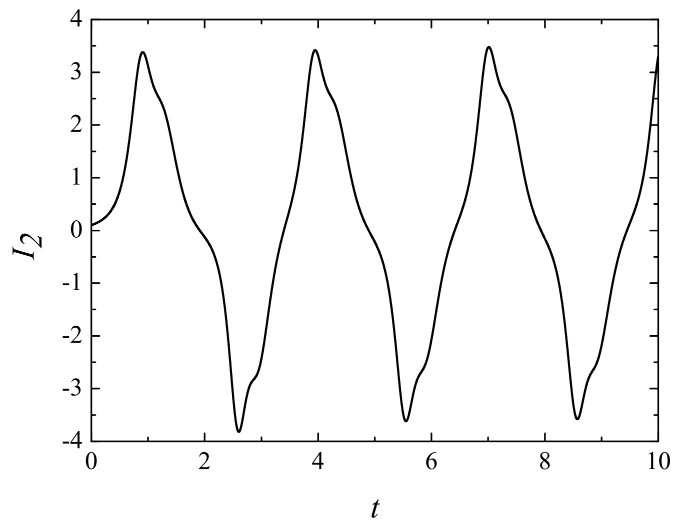

Рис. 13: Зависимость $I_2(t)$ для двухдискового динамо.

гидродинамики. Прежде чем перейти к рассмотрению конкретных примеров, желательно оградить себя от возможных ошибок – случаев, для которых невозможно получить растущие решения для магнитного поля по принципиальным причинам. Соответствующие утверждения называются *теоремами запрета* – поскольку они «запрещают» генерацию магнитного поля для некоторых конфигураций течений.

Поскольку в науке всегда есть стремление свести сложные явления к простым закономерностям, одной из первых идей при рассмотрении генерации магнитного поля было рассмотрения плоского течения:

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_y.$$

Будем считать, что жидкость несжимаема, поэтому можно считать что $\rho = \rho_0$ и условие неразрывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) = 0.$$

сведется к следующему:

$$\mathrm{div}(\mathbf{v}) = 0.$$

Покоординатно это можно записать так:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Основное уравнение магнитной гидродинамики:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] + \eta_m \Delta \mathbf{H}$$

можно переформулировать так:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = (\mathbf{H}, \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{H} + \eta_m \Delta \mathbf{H}.$$

В силу того, что жидкость течет в плоскости Oxy, логично предположить, что магнитное поле будет направлено вдоль оси z. Перепишем данное уравнение, считая ненулевой лишь компоненту магнитного поля H_z :

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = H_z \frac{\partial v_z}{\partial z} - v_x \frac{\partial H_z}{\partial x} - v_y \frac{\partial H_z}{\partial y} + \eta_m \Delta H_z.$$

В силу двумерного характера течения, первое слагаемое в правой части обнулится и уравнение примет вид:

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial H_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial H_z}{\partial y} = +\eta_m \Delta H_z.$$

В правой части мы получаем лагранжеву производную:

$$\frac{dH_z}{dt} = \eta_m \Delta H_z.$$

Домножим обе части уравнения на H_z :

$$H_z \frac{dH_z}{dt} = \eta_m H_z \Delta H_z;$$

$$\frac{dH_z^2}{dt} = \eta_m H_z \Delta H_z;$$

Проинтегрируем по всему интересующему нас объему V:

$$\int\int\int_V \frac{dH_z^2}{dt} dV = \eta_m \int\int\int_V H_z \Delta H_z dV.$$

Согласно первой формуле Грина

$$\int\int\int_V H_z \Delta H_z dV + \int\int\int_V (\nabla H_z)^2 dV = \int\int_S H_z \frac{\partial H_z}{\partial n} dS,$$

где S – поверхность, ограничивающая интересующую нас область. Расширяя границы, мы можем добится выполнения условий Дирихле:

$$H_z|_S = 0,$$

или условий Неймана:

$$\frac{\partial H_z}{\partial n}|_S = 0.$$

Тогда интеграл в правой части обнулится, и можно записать, что:

$$\int\int\int_V H_z \Delta H_z dV = -\int\int\int_V (\nabla H_z)^2 dV.$$

Тогда для эволюции магнитного поля получим:

$$\int\int\int_V \frac{dH_z^2}{dt} dV = -\eta_m \int\int\int_V (\nabla H_z)^2 dV.$$

Таким образом, энергия магнитного поля будет затухать с ростом времени. Это означает, что плоское течение принципиально не может вызывать устойчивую генерация магнитного поля. Сформулированное утверждение называется *диссипационной теоремой* и было впервые сформулировано Зельдовичем [17].

Из этого мы можем сделать вывод, что механизм динамо может функционировать лишь в существенно трехмерных течениях. Конечно, в ряде случаев рассматривают различные двумерные модели, но все они являются в той или иной степени результатом усреднения движений проводящей среды по некоторым малым масштабам.

§4. Уравнение Штеенбека – Краузе – Рэдлера.

При исследовании магнитных полей в космических объектах, в центре Земли и т.д. обнаруживается довольно важный факт. Прослеживается четкое разделение поля на мелкомасштабную составляющую **b**, и крупномасштабную часть **B**, получающуюся после усреднения магнитного поля по некоторому объему:

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} + \mathbf{b},$$

где

$$\mathbf{B} =< \mathbf{H} > .$$

Как правило, магнитное поле усредняется по линейным масштабам, сопоставим с размерами турбулентных ячеек. По этой причине логично было бы точно так же разделить и скорость на две составляющие:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{u},$$

где

$$\mathbf{V} =< \mathbf{v} > .$$

Посмотрим, к чему преобразуется в таком случае уравнение для магнитного поля (для простоты рассмотрим его идеализированный вариант):

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}].$$

Усредним обе части по тем же пространственным масштабам:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} =< \mathrm{rot}[\mathbf{V}+\mathbf{u}, \mathbf{B}+\mathbf{b}] >;$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}[\mathbf{V}, \mathbf{B}] + \mathrm{rot} < [\mathbf{u}, \mathbf{B}] > + \mathrm{rot} < [\mathbf{V}, \mathbf{b}] > + \mathrm{rot} < [\mathbf{u}, \mathbf{b}] > .$$

При усреднении слагаемых, содержащих только одну из случайных величин ($\mathbf{u}$ или $\mathbf{b}$) получится нулевое значение:

$$\mathrm{rot} < [\mathbf{u}, \mathbf{B}] >= 0;$$

$$\mathrm{rot} < [\mathbf{V}, \mathbf{b}] >= 0.$$

Что касается слагаемого $\mathrm{rot} < [\mathbf{u}, \mathbf{b}] >$, то с ним дело обстоит сложнее. Оно содержит произведение мелкомасштабного магнитного поля и мелкомашстабной скорости. Скорость мелкомасштабных движений и мелкомасштабное поле так или иначе связаны с величиной крупномасштабного магнитного поля $\mathbf{B}$. В самом грубом случае можно считать, что зависимость среднего векторного произведения будет линейной:

$$< [\mathbf{u}, \mathbf{b}] >= \alpha \mathbf{B}.$$

Тем не менее, кроме самого магнитного поля, данное произведение может зависеть и от производной поля. Поскольку мы имеем дело с векторными величинами, то единственной известной комбинацией из производных будет ротор, поэтому более точно можно записать так:

$$< [\mathbf{u}, \mathbf{b}] >= \alpha \mathbf{B} - \beta\, \mathrm{rot}\, \mathbf{B}.$$

Тогда:

$$\mathrm{rot} < [\mathbf{u}, \mathbf{b}] >= \mathrm{rot}\, (\alpha \mathbf{B}) - \beta\, \mathrm{rot}\, \mathrm{rot}\, \mathbf{B};$$

$$\mathrm{rot} < [\mathbf{u}, \mathbf{b}] >= \mathrm{rot}\,(\alpha\mathbf{B}) + \beta\Delta\mathbf{B};$$

Уравнение для среднего магнитного поля перепишется в форме [19, 20]:

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,(\alpha\mathbf{B}) + \mathrm{rot}[\mathbf{V}, \mathbf{B}] + \beta\Delta\mathbf{B}.$$

Данное уравнение называют *уравнением Штеенбека – Краузе – Рэдлера.* Оно играет ключевую роль в исследовании генерации магнитных полей при помощи механизма динамо в жидкостях и газах.

Обсудим смысл входящих в него коэффициентов. Коэффициент при лапласиане характеризует значение диффузии. Поскольку она связана с наличием турбулентных движений, можно предположить (и этот факт возможно обосновать), что это будет примерно то же, что и встречашийся нам ранее коэффициент ν, имеющий смысл вязкости:

$$\nu = \beta.$$

Что касается α, то оно характеризует так называемый альфа-эффект, который характеризует закрученность турбулентных движений среды. Для него можно получить выражение:

$$\alpha = \frac{\tau}{3} < (\mathbf{u}, \mathrm{rot}\,\mathbf{u}) > .$$

§5. Динамо Паркера.

Как правило, важную роль играют вполне конкретные конфигурации движений жидкости или газа, вызывающие генерацию магнитного поля. Один из характерных примеров – механизм динамо, действующий на Солнце, или так называемое динамо Паркера [21].

Ввиду того, что Солнце представляет из себя шар, удобно использовать сферические координаты $r-\theta-\varphi$. Генерация магнитного поля происходит в довольно узком диапазоне изменения расстояния до центра Солнца:

$$r_{min} < r < r_{max}.$$

Представим магнитное поле в виде комбинации тороидального (направленного в направлении вращения галактики) и полоидального поля:

$$\mathbf{B} = B\mathbf{e}_\varphi + \mathrm{rot}\left(A\mathbf{e}_\varphi\right).$$

Раскроем ротор в правой части:

$$\mathrm{rot}\left(A\mathbf{e}_\varphi\right) = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A\sin\theta\right)\mathbf{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA)}{\partial r}\mathbf{e}_\theta.$$

Далее везде будем считать, что основную роль играет тороидальная составляющая. Оценим все слагаемые в уравнении Штеенбека – Краузе – Рэдлера:

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}\left(\alpha\mathbf{B}\right) + \mathrm{rot}[\mathbf{v},\mathbf{B}] + \eta\Delta\mathbf{B}.$$

Производная по времени записывается проще всего:

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial t}\mathbf{e}_\varphi + \mathrm{rot}\left(\frac{\partial A}{\partial t}\mathbf{e}_\varphi\right).$$

Учитывая малость A, можно считать что:

$$\mathrm{rot}\left(\alpha\mathbf{B}\right) \cong \mathrm{rot}\left(\alpha B\mathbf{e}_\varphi\right).$$

Оценим теперь векторное произведение скорости и магнитного поля. Угловая скорость в случае Солнца – скорость его вращения вокруг своей оси. Она зависит от угла θ :

$$\mathbf{v} = r\Omega\sin\theta\mathbf{e}_\varphi$$

Тогда:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{B}] = \Omega \sin\theta \frac{\partial (rA)}{\partial r}\mathbf{e}_r + \Omega \frac{\partial (A\sin\theta)}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta$$

Возьмем ротор от данного выражения:

$$\mathrm{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{B}] = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\Omega\frac{\partial (A\sin\theta)}{\partial\theta})\right)\mathbf{e}_\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\Omega\sin\theta\frac{\partial (rA)}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\varphi$$

Если мы положим, что $A = A(\theta)$, то данное выражение заметно упростится:

$$\mathrm{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{B}] = \frac{1}{r}\Omega\frac{\partial (A\sin\theta)}{\partial\theta}\mathbf{e}_\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A\Omega\sin\theta\right)\mathbf{e}_\varphi;$$

$$\mathrm{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{B}] = -\frac{\Omega}{r}\frac{\partial A}{\partial\theta}\sin\theta\mathbf{e}_\varphi;$$

Для оператора Лапласа можно записать:

$$\Delta\left(B\mathbf{e}_\varphi + \mathrm{rot}(A\mathbf{e}_\varphi)\right) = \Delta B\mathbf{e}_\varphi + \mathrm{rot}(\Delta A\mathbf{e}_\varphi).$$

В таком случае:

$$\frac{\partial B}{\partial t}\mathbf{e}_\varphi + \mathrm{rot}\left(\frac{\partial A}{\partial t}\mathbf{e}_\varphi\right) = \mathrm{rot}\left(\alpha B\mathbf{e}_\varphi\right) - \frac{\Omega}{r}\frac{\partial A}{\partial\theta}\sin\theta\mathbf{e}_\varphi + \eta\Delta B\mathbf{e}_\varphi + \mathrm{rot}(\eta\Delta A\mathbf{e}_\varphi)$$

Если разделить слагаемые, стоящие под знаком ротора, и те, что домножаются на $\mathbf{e}_\varphi$, то мы получим:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \alpha B + \eta\Delta A;$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\Omega}{r}\frac{\partial A}{\partial\theta}\sin\theta + \eta\Delta B.$$

С учетом того, что расстояние до центра меняется мало, можно выбрать некоторое характерное значение R:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \alpha B + \eta\Delta A;$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\Omega}{R}\frac{\partial A}{\partial\theta}\sin\theta + \eta\Delta B.$$

Указанная система уравнений описывает так называемое динамо Паркера.

§6. Галактическое динамо. Планарное приближение

Другая распространенная модель, используемая при описании генерации магнитных полей, связана с галактиками. Она также позволяет свести задачу для магнитного поля, зависящего от трех пространственных переменных, к случаю зависимости от двух переменных [22, 23].

Галактика представляет из себя в грубом приближении достаточно тонкий диск, полутолщина h которого значительно меньше его радиуса R. Для рассмотрения логично использовать цилиндрические координаты $r - \varphi - z$. Будем считать, что магнитное поле не зависит от угловой координаты φ. Кроме того, часть магнитного поля, перпендикулярная к диску, считается достаточно малой. Зависимость поля от координаты z предполагается косинусоидальной:

$$\mathbf{B}(r, z, t) = \mathbf{B}(r, 0, t) \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right).$$

Для альфа-эффекта предполагается, что он зависит только от координаты z по закону синуса:

$$\alpha = \alpha(0) z.$$

Для скорости крупномасштабных движений логично предположить, что она связана с вращением галактического диска:

$$\mathbf{V} = r\Omega \mathbf{e}_{\varphi}.$$

Отметим, что галактический диск вращается с угловой скоростью $\Omega(r)$, зависящей от расстояния до центра галактики. В этом заключается так называемое дифференциальное вращение.

Запишем основные слагаемые в уравнении Штеенбека – Краузе – Рэдлера, если говорить про плоскость диска ($z = 0$):

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\alpha \mathbf{B}) + \operatorname{rot}[\mathbf{V}, \mathbf{B}] + \eta_m \Delta \mathbf{B}.$$

Радиальная компонента первого ротора выглядит так:

$$\operatorname{rot}_r(\alpha \mathbf{B}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(\alpha B_z)}{\partial \varphi} - \frac{\partial(\alpha B_\varphi)}{\partial z} = -\frac{\partial(\alpha B_\varphi)}{\partial z} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial z}(\alpha(0) B_\varphi(r,0,t) z \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right)) =$$

$$= -\alpha(0) B_\varphi(r,0,t).$$

Для угловой компоненты имеем:

$$\operatorname{rot}_\varphi(\alpha \mathbf{B}) = \frac{\partial(\alpha B_r)}{\partial z} - \frac{\partial(\alpha B_z)}{\partial r} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha(0) B_r(r,0,t) z \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right)\right) - \frac{\partial(\alpha B_z)}{\partial r} =$$

$$= \alpha(0) B_r(r,0,t) - \frac{\partial(\alpha B_z)}{\partial r}.$$

Из физических соображений можно считать, что z-компонента магнитного поля достаточно мала, поэтому:

$$\operatorname{rot}_\varphi(\alpha \mathbf{B}) = \frac{\pi}{2h}\alpha B_r.$$

Что касается части ротора, перпендикулярной к диску, то она выглядит так:

$$\operatorname{rot}_z(\alpha \mathbf{B}) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\alpha B_r) - \frac{\partial(\alpha B_r)}{\partial \varphi}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\alpha B_r).$$

Рассмотрим теперь векторное произведение:

$$[\mathbf{V}, \mathbf{B}] = r\Omega B_z \mathbf{e}_r - r\Omega B_r \mathbf{e}_z.$$

Для радиальной компоненты его ротора получим:

$$\mathrm{rot}_r[\mathbf{V},\mathbf{B}] = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(-r\Omega B_r\right) = 0;$$

для угловой:

$$\mathrm{rot}_\varphi[\mathbf{V},\mathbf{B}] = \frac{\partial}{\partial z}\left(r\Omega B_z\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(r\Omega B_r\right).$$

Данное выражение можно переписать следующим образом:

$$\mathrm{rot}_\varphi[\mathbf{V},\mathbf{B}] = r\Omega\frac{\partial B_z}{\partial z} + \Omega\frac{\partial}{\partial r}\left(rB_r\right) + r\frac{d\Omega}{dr}B_r.$$

Первые два слагаемых преобразуются так:

$$r\Omega\frac{\partial B_z}{\partial z} + \Omega\frac{\partial}{\partial r}\left(rB_r\right) = r\Omega\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\right) = \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0.$$

Тогда:

$$\mathrm{rot}_\varphi[\mathbf{V},\mathbf{B}] = r\frac{d\Omega}{dr}B_r.$$

Наконец, запишем компоненту ротора, направленную перпендикулярно к галактическому диску:

$$\mathrm{rot}_z[\mathbf{V},\mathbf{B}] = \frac{1}{r}\frac{\partial(rB_\varphi}{\partial r}.$$

Система уравнений для компонент магнитного поля, лежащих в плоскости диска, выглядит так:

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -\frac{\alpha}{h}B_\varphi + \eta\left(\frac{\partial^2 B_r}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r))\right);$$
$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = r\frac{d\Omega}{dr}B_r + \eta\left(\frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi))\right).$$

Вторые производные магнитного поля вдоль направления, перпендикулярного к диску, можно заменить на алгебраические выражения:

$$\frac{\partial^2 B_r}{\partial z^2} = -\frac{\pi^2 B_r}{4h^2};$$

$$\frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\pi^2 B_\varphi}{4h^2}.$$

Тогда система уравнений перепишется так:

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -\frac{\alpha}{h} B_\varphi - \frac{\eta \pi^2 B_r}{4h^2} + \eta \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) \right) \right);$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = r \frac{d\Omega}{dr} B_r - \frac{\eta \pi^2 B_\varphi}{4h^2} + \eta \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) \right) \right).$$

Приведенная система уравнений выглядит достаточно громоздко. Было бы достаточно удобно перейти к безразмерным переменным. Будем измерять расстояния в единицах радиуса галактики R :

$$r = \tilde{r} R,$$

а времена – в единицах h^2/η :

$$t = \tilde{t} \frac{h^2}{\eta}.$$

Тогда:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\eta_m}{h^2} \frac{\partial B}{\partial \tilde{t}};$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 B}{\partial \tilde{r}}.$$

В таком случае система уравнений преобразуется:

$$\frac{\eta_m}{h^2} \frac{\partial B_r}{\partial \tilde{t}} = -\frac{\alpha}{h} B_\varphi - \frac{\eta \pi^2 B_r}{4h^2} + \frac{\eta}{R^2} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r} B_r) \right) \right);$$

$$\frac{\eta_m}{h^2} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \tilde{t}} = \tilde{r} \frac{d\Omega}{d\tilde{r}} B_r - \frac{\eta \pi^2 B_\varphi}{4h^2} + \frac{\eta}{R^2} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r} B_\varphi) \right) \right).$$

Домножим обе части на $\frac{h^2}{\eta_m}$, тогда:

$$\frac{\partial B_r}{\partial \tilde{t}} = -\frac{h\alpha}{\eta} B_\varphi - \frac{\pi^2 B_r}{4} + \frac{h^2}{R^2} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r} B_r) \right) \right);$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial \tilde{t}} = \tilde{r}\frac{d\Omega}{d\tilde{r}}\frac{h^2}{\eta}B_r - \frac{\pi^2 B_\varphi}{4} + \frac{h^2}{R^2}\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}(\frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}(\tilde{r}B_\varphi))\right).$$

Наконец, будем измерять угловую скорость вращения в характерных для нее величинах Ω_0 :

$$\Omega = \tilde{\Omega}\Omega_0.$$

Поэтому:

$$\frac{\partial B_r}{\partial \tilde{t}} = -\frac{h\alpha}{\eta}B_\varphi - \frac{\pi^2 B_r}{4} + \frac{h^2}{R^2}\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}(\frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}(\tilde{r}B_r))\right);$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial \tilde{t}} = \tilde{r}\frac{d\tilde{\Omega}}{d\tilde{r}}\frac{\Omega_0 h^2}{\eta}B_r - \frac{\pi^2 B_\varphi}{4} + \frac{h^2}{R^2}\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}(\frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}(\tilde{r}B_\varphi))\right).$$

Для сокращения записи введем следующие безразмерные параметры:

$$R_\alpha = \frac{h\alpha}{\eta};$$

$$R_\omega = \frac{\Omega_0 h^2}{\eta};$$

$$\lambda = \frac{h^2}{R^2}.$$

Как правило, принято считать что $R_\alpha \sim -1$, $R_\omega \sim 10$, $\lambda \sim 10^{-2}$.

Тогда система уравнений планарного приближения (тильды мы будем опускать) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -R_\alpha B_\varphi - \frac{\pi^2 B_r}{4} + \lambda^2\left(\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r))\right);$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = R_\omega r\frac{d\Omega}{dr}B_r - \frac{\pi^2 B_\varphi}{4} + \lambda^2\left(\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi))\right).$$

Определим, при каких параметрах будет генерироваться магнитное поле. Для этого рассмотрим случай, когда $\lambda = 0$. Тогда поле зависит только от времени, частные производные превращаются в полные, и уравнения переходят к виду:

$$\frac{dB_r}{dt} = -R_\alpha B_\varphi - \frac{\pi^2 B_r}{4};$$

$$\frac{dB_\varphi}{dt} = -R_\omega B_r - \frac{\pi^2 B_\varphi}{4}.$$

Будем искать магнитное поле в виде:

$$B_r(t) = B_{0r}\exp(\gamma t);$$

$$B_\varphi(t) = B_{0\varphi}\exp(\gamma t).$$

Уравнения для магнитного поля сведутся к следующим:

$$\gamma B_{0r} = -R_\alpha B_{0\varphi} - \frac{\pi^2 B_{0r}}{4};$$

$$\gamma B_{0\varphi} = -R_\omega r\frac{d\Omega}{dr}B_{0r} - \frac{\pi^2 B_{0\varphi}}{4}.$$

Перепишем их в следующем виде:

$$(-\gamma - \frac{\pi^2}{4})B_{0r} - R_\alpha B_{0\varphi} = 0;$$

$$-R_\omega r\frac{d\Omega}{dr}B_{0r} + (-\gamma - \frac{\pi^2}{4})B_{0\varphi} = 0.$$

Для разрешимости системы уравнений необходимо потребовать обращения в нуль определителя системы:

$$\det\begin{pmatrix} -\gamma - \frac{\pi^2}{4} & -R_\alpha \\ -R_\omega r\frac{d\Omega}{dr} & -\gamma - \frac{\pi^2}{4} \end{pmatrix} = 0.$$

Иначе говоря,

$$(\gamma + \frac{\pi^2}{4})^2 - R_\alpha R_\omega r\frac{d\Omega}{dr} = 0;$$

$$\gamma + \frac{\pi^2}{4} = \pm\sqrt{R_\alpha R_\omega r\frac{d\Omega}{dr}};$$

$$\gamma = -\frac{\pi^2}{4} \pm \sqrt{R_\alpha R_\omega r\frac{d\Omega}{dr}}.$$

Как видно, существуют два решения, одно из которых всегда отрицательно. Второе больше нуля, если

$$\sqrt{R_\alpha R_\omega r \frac{d\Omega}{dr}} > \frac{\pi^2}{4}.$$

Возведем обе части в квадрат:

$$R_\alpha R_\omega r \frac{d\Omega}{dr} > \frac{\pi^4}{16}.$$

Как правило, галактики обладают так называемой плоской кривой вращения: начиная с определенного момента скорость вращения постоянна:

$$V = \mathrm{const}\,.$$

По этой причине:

$$\Omega = \frac{V}{r}.$$

Тогда

$$\frac{d\Omega}{dr} = -\frac{V}{r^2} = -\frac{\Omega}{r};$$

$$r\frac{d\Omega}{dr} = -\Omega.$$

С учетом того, что Ω измеряется в характерных единицах,

$$r\frac{d\Omega}{dr} = -1.$$

Можно полагать, что $\alpha = -\frac{\Omega_0 l^2}{h}$, где l – размер турбулентных ячеек, тогда с учетом того что $\eta = lv/3$:

$$R_\alpha = -\frac{3\Omega_0 l}{v}.$$

Для второго коэффициента можно получить:

$$R_\omega = \frac{3\Omega_0 h^2}{lv}.$$

Условие генерации таково:

$$\frac{3\Omega_0 l}{v}\frac{3\Omega_0 h^2}{lv} > \frac{\pi^4}{16};$$

или

$$\frac{9h^2\Omega_0^2}{v^2} > \frac{\pi^4}{16}.$$

Иначе говоря, можно ввести произведение

$$D = |R_\alpha R_\omega| = \frac{9h^2\Omega_0^2}{v^2}.$$

Если $D > D_{cr}$, то возможен рост магнитного поля. В противном случае оно затухает. Нами было получено, что

$$D_{cr} \approx 6.$$

Более точные оценки показывают, что $D_{cr} \approx 7$. Определим соотношение между различными составляющими магнитного поля. С учетом вышесказанного,

$$\gamma = -\frac{\pi^2}{4} + \sqrt{-R_\alpha R_\omega}.$$

Иначе говоря,

$$(\frac{\pi^2}{4} - \sqrt{-R_\alpha R_\omega} - \frac{\pi^2}{4})B_{0r} - R_\alpha B_{0\varphi} = 0.$$

Тогда:

$$-\sqrt{-R_\alpha R_\omega}B_{0r} - R_\alpha B_{0\varphi} = 0.$$

$$B_{0\varphi} = -B_{0r}\sqrt{-R_\omega/R_\alpha}.$$

Если $R_\omega = 9$, $R_\alpha = -1$, то

$$B_{0\varphi} = -3B_{0r}.$$

Рост магнитного поля обусловлен переходом кинетической энергии турбулентных движений в энергию магнитного поля. Если плотности этих энергий становятся одинаковы:

$$\frac{B^{*2}}{8\pi} = \frac{\rho v^2}{2};$$

то рост магнитного поля должен останавливаться. Это можно учесть путем следующей модификации коэффициента альфа-эффекта:

$$R_\alpha \to R_\alpha(1 - B^2/B^{*2}).$$

Если измерять магнитное поле в единицах B^*, то можно свести систему уравнений к следующему:

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -R_\alpha(1 - B_r^2 - B_\varphi^2)B_\varphi - \frac{\pi^2 B_r}{4} + \lambda^2\left(\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r))\right);$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = R_\omega r\frac{d\Omega}{dr}B_r - \frac{\pi^2 B_\varphi}{4} + \lambda^2\left(\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi))\right).$$

§7. Эволюция спиральности магнитного поля

Из других разделов теоретической физики известен ряд законов сохранения: так, сохраняются энергия, импульс, момент импульса и другие важные величины. В магнитной гидродинамике мы сталкиваемся с еще одной величиной, которая тоже сохраняется. Речь идет о так называемой магнитной спиральности, которая сохраняется при условии отсутствия диффузии. Отметим, что даже в том случае, когда коэффициент турбулентной диффузии отличен от нуля, в большинстве случаев спиральность меняется крайне медленно, и этим изменением можно пренебречь.

Спиральностью магнитного поля называется скалярное произведение векторного потенциала магнитного поля $\mathbf{A}$ и напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$:

$$\chi = (\mathbf{A}, \mathbf{H}).$$

Иногда также употребляют равносильный термин – *магнитная спиральность*.

Определим закон изменения спиральности магнитного поля. Вычислим ее частную производную по времени [24]:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \mathbf{H}\right) + \left(\mathbf{A}, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right).$$

Вспомним, что электрическое поле выражается через совокупность градиента скалярного потенциала и производной по времени векторного:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Домножим обе части на скорость света c :

$$c\mathbf{E} = -c\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Иначе говоря, производная векторного потенциала по времени выражается так [24]:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -c\left(\operatorname{grad}\varphi + \mathbf{E}\right).$$

Кроме того, можно вспомнить первое из уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Из него следует, что

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\mathbf{E}.$$

Умножим обе части на скорость света c:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}.$$

Тогда уравнение для магнитной спиральности будет выглядеть так [24]:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = -c\left((\operatorname{grad}\varphi + \mathbf{E}), \mathbf{H}\right) - c\left(\mathbf{A}, \operatorname{rot}\mathbf{E}\right),$$

или

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = -c\left((\operatorname{grad}\varphi, \mathbf{H}) + (\mathbf{E}, \mathbf{H}) + (\mathbf{A}, \operatorname{rot}\mathbf{E})\right).$$

Рассмотрим каждое из слагаемых в скобках по отдельности. Вспомним, что согласно правилам векторного анализа [13],

$$\operatorname{div}(\varphi\mathbf{H}) = \varphi \operatorname{div}\mathbf{H} + (\operatorname{grad}\varphi, \mathbf{H}).$$

В силу того, что согласно третьему уравнению Максвелла $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$, можно получить что:

$$\operatorname{div}(\varphi\mathbf{H}) = (\operatorname{grad}\varphi, \mathbf{H}).$$

Из формул векторного анализа [13] также следует, что

$$\operatorname{div}[\mathbf{A}, \mathbf{E}] = (\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{A}) - (\mathbf{A}, \operatorname{rot}\mathbf{E}) = (\mathbf{E}, \mathbf{H}) - (\mathbf{A}, \operatorname{rot}\mathbf{E}).$$

Иначе говоря,

$$(\mathbf{A}, \operatorname{rot}\mathbf{E}) = (\mathbf{E}, \mathbf{B}) - \operatorname{div}[\mathbf{A}, \mathbf{E}].$$

Уравнение для спиральности тогда запишется следующим образом:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = -\left(\operatorname{div}(\varphi\mathbf{H}) + 2(\mathbf{E}, \mathbf{H}) + \operatorname{div}[\mathbf{A}, \mathbf{E}]\right). \tag{23}$$

Проинтегрируем обе части по интересующей нас области пространства V, предполагая, что на ее границе $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$:

$$\int\int\int_V \frac{\partial \chi}{\partial t} dV = -c\int\int\int_V \left(\mathrm{div}(\varphi \mathbf{H}) + 2(\mathbf{E}, \mathbf{H}) + \mathrm{div}[\mathbf{A}, \mathbf{E}]\right) dV$$

Вынесем операцию дифференцирования за знак интегрирования:

$$\frac{d}{dt}\int\int\int_V \chi dV = -c\int\int\int_V \left(\mathrm{div}(\varphi \mathbf{H}) + 2(\mathbf{E}, \mathbf{H}) + \mathrm{div}[\mathbf{A}, \mathbf{E}]\right) dV$$

Выделим дивергентные слагаемые:

$$\frac{d}{dt}\int\int\int_V \chi dV = -\int\int\int_V \mathrm{div}\left(\varphi \mathbf{H} + [\mathbf{A}, \mathbf{E}]\right) dV - 2c\int\int\int_V (\mathbf{E}, \mathbf{H}) dV.$$

Объемный интеграл от дивергенции можно заменить на интеграл по поверхности, ограничивающей данный объем:

$$\int\int\int_V \mathrm{div}\left(\varphi \mathbf{H} + [\mathbf{A}, \mathbf{E}]\right) dV = \int\int_S \left(\varphi \mathbf{H} + [\mathbf{A}, \mathbf{E}]\right)_n dS.$$

В силу того, что на границе поля равны нулю,

$$\int\int_S \left(\varphi \mathbf{H} + [\mathbf{A}, \mathbf{E}]\right)_n dS = 0.$$

Тогда для интеграла магнитной спиральности получим:

$$\frac{d}{dt}\int\int\int_V \chi dV = -2c\int\int\int_V (\mathbf{E}, \mathbf{H}) dV.$$

Оценим интеграл в правой части. Плотность тока связана с напряженностью электрического поля и индукцией магнитного поля следующим соотношением:

$$\mathbf{j} = \lambda \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{H}]\right).$$

Если мы будем рассматривать среду с бесконечной проводимостью, то $\lambda \to \infty$. По этой причине конечный ток в левой части можно получить при единственном условии: если

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] = 0.$$

Тогда:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{H}].$$

Для скалярного произведения, стоящего в подынтегральном выражении, мы можем получить:

$$(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = -\frac{1}{c}([\mathbf{v}, \mathbf{H}], \mathbf{H}) = -\frac{1}{c}(\mathbf{v}, [\mathbf{H}, \mathbf{H}]) = 0.$$

В таком случае мы получаем:

$$\frac{d}{dt}\int\int\int_V \chi dV = 0.$$

Иначе говоря,

$$\int\int\int_V \chi dV = \mathrm{const}\,.$$

Получается, что при бесконечной проводимости интеграл от спиральности магнитного поля является постоянной величиной и не меняется со временем. Это значит, что он является интегралом движения [24].

Отметим, что реальная проводимость сред, в которых изучается генерация магнитного поля, хотя и достаточно велика, но все-таки конечна. Исследуем, как преобразуется (23) в случае, когда среда обладает конечной проводимостью. Так же, как это делалось ранее, разделим магнитное поле на крупномасштабную и мелкомасштабную компоненты:

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} + \mathbf{b}.$$

То же самое можно сделать и для электрического поля:

$$\mathbf{E} = \mathcal{E} + \mathbf{e},$$

где $\mathcal{E}$ – крупномасштабное электрическое поле, $\mathbf{e}$ – мелкомасштабная составляющая электрического поля. Для векторного потенциала магнитного поля можно взять аналогичное представление:

$$\mathbf{A} = \mathcal{A} + \mathbf{a},$$

где $\mathcal{A}$ – крупномасштабная составляющая потенциала, $\mathbf{a}$ – его мелкомасштабная компонента. То же самое можно записать и для скалярного потенциала электрического поля:

$$\phi = \Phi + \psi,$$

где Φ – потенциал крупномасштабного поля, ψ – потенциал мелкомасштабной части. Уравнение (23) в таком случае запишется так [25, 26]:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = -c\left(\operatorname{div}((\Phi + \psi)(\mathbf{B} + \mathbf{b})) + 2((\mathcal{E} + \mathbf{e}), (\mathbf{B} + \mathbf{b})) + \operatorname{div}[(\mathcal{A} + \mathbf{a}), (\mathcal{E} + \mathbf{e})]\right).$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = -c(\operatorname{div}(\Phi\mathbf{B}) + \operatorname{div}(\Phi\mathbf{b}) + \operatorname{div}(\psi\mathbf{B}) + \operatorname{div}(\psi\mathbf{b}) +$$

$$+2(\mathcal{E}, \mathbf{B}) + 2(\mathcal{E}, \mathbf{b}) + 2(\mathbf{e}, \mathbf{B}) + 2(\mathbf{b}, \mathbf{e}) +$$

$$+\operatorname{div}(\mathcal{A}, \mathcal{E}) + \operatorname{div}(\mathcal{A}, \mathbf{e}) + \operatorname{div}(\mathbf{a}, \mathcal{E}) + \operatorname{div}(\mathbf{a}, \mathbf{e})).$$

Отметим, что крупномасштабные величины меняются медленно, поэтому, к примеру, для магнитного поля можно считать:

$$\frac{\partial B}{\partial x} \ll \frac{\partial b}{\partial x}.$$

По этой причине дивергенцией от величин, содержащих только крупномасштабные компоненты, допустимо пренебречь:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = -c(\mathrm{div}(\Phi \mathbf{b}) + \mathrm{div}(\psi \mathbf{B}) + \mathrm{div}(\psi \mathbf{b}) + 2(\mathcal{E}, \mathbf{B}) + 2(\mathcal{E}, \mathbf{b}) +$$

$$+2(\mathbf{e}, \mathbf{B}) + 2(\mathbf{b}, \mathbf{e}) + \mathrm{div}(\mathcal{A}, \mathbf{e}) + \mathrm{div}(\mathbf{a}, \mathcal{E}) + \mathrm{div}(\mathbf{a}, \mathbf{e})).$$

Усредним теперь уравнение по областям, характерный размер которых соответствует масштабу турбулентности, а на границе которой можно положить:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{e} = \psi = 0.$$

В таком случае слагаемые, содержащие лишь одну из мелкомасштабных величин, должны будут исчезнуть, т.к.

$$< \mathbf{a} >=< \mathbf{b} >=< \mathbf{e} >=< \psi >= 0.$$

Уравнение для спиральности запишется так:

$$\frac{\partial < \chi >}{\partial t} = -c(< \mathrm{div}(\psi \mathbf{b}) > +2(\mathcal{E}, \mathbf{B}) + 2(\mathbf{b}, \mathbf{e}) + < \mathrm{div}(\mathbf{a}, \mathbf{e}) >).$$

Для оценки среднего от дивергенции нужно воспользоваться тем, что под процедурой усреднения по пространству обычно понимается следующий интеграл по нашей ячейке объемом $\mathcal{V}$:

$$< \mathrm{div}(\psi \mathbf{b}) >= \frac{1}{\mathcal{V}} \int\int\int_{\mathcal{V}} \mathrm{div}(\psi \mathbf{b}) dV = \frac{1}{\mathcal{V}} \int\int_{\mathcal{S}} (\psi \mathbf{b})_n dS,$$

где $\mathcal{S}$ – граница ячейки. В силу обозначенных предположений получится:

$$< \mathrm{div}(\psi \mathbf{b}) >= 0.$$

Точно также можно записать и для второй дивергенции:

$$< \mathrm{div}(\mathbf{a}, \mathbf{e}) >= \int \int_{\mathcal{S}} (\psi \mathbf{b})_n dS = 0.$$

Тогда для спиральности магнитного поля будем иметь уравнение:

$$\frac{\partial < \chi >}{\partial t} = -2(\mathcal{E}, \mathbf{B}) - 2(\mathbf{b}, \mathbf{e}).$$

Оценим теперь среднюю спиральность:

$$< \chi >=< ((\mathcal{A} + \mathbf{a}), (\mathbf{B} + \mathbf{b})) >=< (\mathcal{A}, \mathbf{B}) > + < (\mathcal{A}, \mathbf{b}) > + < (\mathbf{a}, \mathbf{B}) > + < (\mathbf{a}, \mathbf{b}) > .$$

Далее мы будем опускать символ усреднения:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = -2(\mathcal{E}, \mathbf{B}) - 2(\mathbf{b}, \mathbf{e}).$$

Оценим величину электрического поля, полагая, что в неподвижной системе отсчета электрическое поле отсутствует. В случае учета движений среды мы должны получить при переходе к движущейся системе отсчета следующее выражение:

$$\mathcal{E} =< \frac{1}{c}[\mathbf{u}, \mathbf{H}] >$$

Вновь представляя поле в виде суммы:

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} + \mathbf{b},$$

мы можем получить:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{c} < [\mathbf{u}, \mathbf{B}] > + \frac{1}{c} < [\mathbf{u}, \mathbf{b}] > .$$

Первое слагаемое обратится в нуль. поэтому:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{c} < [\mathbf{u}, \mathbf{b}] > .$$

Это выражение нам уже встречалось и мы получали для него линейное приближение

$$< [\mathbf{u}, \mathbf{b}] >= \alpha \mathbf{B} - \beta \operatorname{rot} \mathbf{B}.$$

Тогда:

$$-2(\mathcal{E}, \mathbf{B}) = -2\alpha(\mathbf{B}, \mathbf{B}) + 2\beta(\mathbf{B}, \operatorname{rot} \mathbf{B}).$$

Наконец, оценим случайную составляющую. Для случайного тока можно полагать:

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{e},$$

или

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{j};$$

$$2(\mathbf{b}, \mathbf{e}) = \frac{2c}{\lambda}(\mathbf{b}, \mathbf{j}).$$

Вспомним, что

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{b},$$

Тогда можно по порядку величины считать:

$$j \approx \frac{b}{l},$$

где l – характерный линейный масштаб. В свою очередь, мелкомасштабное магнитное поле можно представить так:

$$\mathbf{b} = \operatorname{rot} \mathbf{a},$$

или

$$b \approx \frac{a}{l}.$$

Для скалярного произведения можно приближенно считать, что:

$$(\mathbf{b}, \mathbf{j}) \approx bj \approx \frac{c}{4\pi} \frac{ab}{l^2} \approx \frac{c}{4\pi} \frac{\chi}{l^2}.$$

Тогда мы получаем, что:

$$2c(\mathbf{b}, \mathbf{e}) = \frac{2c^2}{4\pi\lambda}\frac{\chi}{l^2}.$$

При условии, что $\mu = 1$, мы можем получить для магнитной вязкости следующее:

$$\eta_m = \frac{c^2}{4\pi\mu\lambda} = \frac{c^2}{4\pi\lambda}.$$

Это значит, что

$$2c(\mathbf{b}, \mathbf{e}) = 2\eta_m\chi/l^2.$$

Уравнение для изменения спиральности магнитного поля с учетом указанных соображений запишется следующим образом [**?**]:

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} = -2\alpha(\mathbf{B}, \mathbf{B}) + 2\beta(\mathbf{B}, \operatorname{rot}\mathbf{B}) - 2\eta_m\chi/l^2.$$

Выше мы неявно предполагали, что крупномасштабные движения в среде отсутствуют. В реальности это не всегда так: с одной стороны, есть потоки спиральности, пропорциональные дивергенции ее произведения на крупномасштабную скорость $\operatorname{div}(\chi\mathbf{V}$. Наконец, есть турбулентное «размазывание», пропорциональное лапласиану. С учетом этого, уравнение для спиральности запишется так:

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} + \operatorname{div}(\chi\mathbf{V}) = -2\alpha B^2 + 2\beta(\mathbf{B}, \operatorname{rot}\mathbf{B}) - 2\eta_m\chi/l^2 + \eta_m\Delta\chi.$$

Уравнение для эволюции спиральности магнитного поля играет важную роль в изучении эволюции магнитного поля и механизма динамо в целом. В ряде случаев можно полагать, что спиральность может соответствовать определенной добавке к коэффициенту альфа-эффекта и заметно менять характер роста магнитного поля. Это позволяет ввести процесс насыщения роста магнитного поля по мере его приближения к уровню равнораспределения по энергии без учета «эмпирических» соотношений, как это делалось в предыдущем параграфе.

Глава 6. Течения в жидких металлах

§1. Основные уравнения

Описанные выше задачи, посвященные эволюции магнитного поля, относились как правило к астрофизическим приложениям. Подобные проблемы имеют свою специфику. Так, скорости движения среды там достаточно велики, поэтому во многих случаях можно пренебрегать турбулентной диффузией и другими подобными эффектами. Кроме того, как правило считается, что движения среды жестко заданы, и влиянием магнитного поля на них можно пренебречь. Затем, довольно часто речь идет о газах, которые является хорошо сжимаемыми.

Тем не менее, задачи магнитной гидродинамики не ограничиваются астрофизикой. Магнитные эффекты играют большую роль при изучении эффектов, возникающих при переплавке металлов, электросварке и т.д. Движение расплавов жидких металлов обнаруживает целый ряд специфических признаков, не свойственным магнитогидродинамическим процессам на Солнце или в галактиках. Так, как правило скорости течений там достаточно малы, и имеет смысл рассматривать не большие, а малые числа Рейнольдса. Наконец, здесь приходится считать, что магнитные поля очень значительно влияют на характер движений. Как ни странно, в таких задачах часто имеет смысл напротив пренебрегать влиянием характера течений на магнитное поле.

Напомним, что течение жидкости описывается с помощью уравнения Навье – Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{f} + \nu\Delta\mathbf{v},$$

где $\mathbf{v}$ – скорость движений, p – давление, ν – коэффициент диффузии, $\mathbf{f}$ – плотность массовых сил.

В качестве силы при наличии магнитного поля $\mathbf{H}$ будет фигурировать сила Лоренца, плотность которой будет выглядеть так:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c\rho}[\mathbf{j}, \mathbf{H}],$$

где $\mathbf{j}$ – плотность тока. Тогда уравнение Навье – Стокса запишется следующим образом [27]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{c\rho}[\mathbf{j}, \mathbf{H}] + \nu\Delta\mathbf{v}.$$

Наконец, жидкости (особенно жидкие металлы) являются с большой степенью точности несжимаемыми. Поэтому уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0,$$

поэтому

$$\rho = \mathrm{const}$$

и уравнение сводится к виду

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0.$$

То же самое можно сказать и про токи:

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = 0.$$

Кроме того, не стоит забывать про выражение для плотности тока:

$$\mathbf{j} = \lambda(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{H}]) \tag{24}$$

и про основное уравнение магнитной гидродинамики:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] + \eta_m \Delta \mathbf{H}.$$

§2. Уравнения для течения жидких металлов в безразмерном виде

Как и в других задачах, описанные выше уравнения имеет смысл записать в безразмерном виде. Поскольку для уравнения Навье – Стокса и основного уравнения магнитной гидродинамики похожая процедура уже делалась, обозначим лишь основные моменты. Скорости, координаты, времена, плотности и давления измеряются в характерных величинах:

$$v = \tilde{v}V;$$

$$x = \tilde{x}L;$$

$$t = \tilde{t}T;$$

$$\rho = \tilde{\rho}\rho_0;$$

$$p = \tilde{p}P.$$

Уравнение Навье – Стокса для жидкого металла будет таким:

$$\frac{V}{T}\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} + \frac{V^2}{L}(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\nabla})\tilde{\mathbf{v}} = -\frac{P}{\rho_0 L}\frac{1}{\tilde{\rho}}\tilde{\nabla}\tilde{p} + \frac{1}{\rho_0}\frac{1}{c\tilde{\rho}}[\mathbf{j}, \mathbf{H}] + \nu\frac{V}{L^2}\tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{v}}.$$

Кроме того, будем измерять магнитное поле в некоторых характерных величинах H_0:

$$H = \tilde{H}H_0.$$

Плотность электрического тока будем измерять в единицах:

$$j_0 = \frac{c}{4\pi}\frac{H_0}{L},$$

т.е.

$$j = \tilde{j} j_0 = \tilde{j}\frac{c}{4\pi}\frac{H_0}{L}.$$

Тогда уравнение Навье – Стокса с учетом магнитного поля будет таковым:

$$\frac{V}{T}\frac{\partial\tilde{\mathbf{v}}}{\partial\tilde{t}} + \frac{V^2}{L}(\tilde{\mathbf{v}},\tilde{\nabla})\tilde{\mathbf{v}} = -\frac{P}{\rho_0 L}\frac{1}{\tilde{\rho}}\tilde{\nabla}\tilde{p} + \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0 L}\frac{1}{\tilde{\rho}}[\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\mathbf{H}}] + \nu\frac{V}{L^2}\tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{v}}.$$

Домножим обе части уравнения на $\frac{L}{V^2}$, тогда получится:

$$\frac{L}{VT}\frac{\partial\tilde{\mathbf{v}}}{\partial\tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{v}},\tilde{\nabla})\tilde{\mathbf{v}} = -\frac{P}{\rho_0 V^2}\frac{1}{\tilde{\rho}}\tilde{\nabla}\tilde{p} + \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0 V^2}\frac{1}{\tilde{\rho}}[\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\mathbf{H}}] + \frac{\nu}{LV}\tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{v}}.$$

В силу несжимаемости жидкости можно полагать, что $\tilde{\rho} = 1$, поэтому:

$$\frac{L}{VT}\frac{\partial\tilde{\mathbf{v}}}{\partial\tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{v}},\tilde{\nabla})\tilde{\mathbf{v}} = \frac{P}{\rho_0 V^2}\tilde{\nabla}\tilde{p} + \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0 V^2}[\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\mathbf{H}}] + \frac{\nu}{LV}\tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{v}}.$$

Введя число Струхала $St = \frac{L}{VT}$, число Эйлера $Eu = \frac{\rho_0 V^2}{2P}$ и число Рейнольдса $Re = \frac{LV}{\nu}$, уравнение может быть записано так:

$$St\frac{\partial\tilde{\mathbf{v}}}{\partial\tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{v}},\tilde{\nabla})\tilde{\mathbf{v}} = -\frac{1}{2Eu}\tilde{\nabla}\tilde{p} + \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0 V^2}[\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\mathbf{H}}] + \frac{1}{Re}\tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{v}}.$$

Можно ввести еще одну безразмерную величину – число Альфвена:

$$Al = \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0 V^2}.$$

По смыслу оно характеризует соотношение между характерной плотностью энергии магнитного поля:

$$E_{\text{магн}} = \frac{H_0^2}{8\pi}$$

и характерной плотностью кинетической энергии турбулентных движений:

$$E_{\text{кин}} = \frac{\rho_0 V^2}{2}.$$

Легко видеть, что

$$Al = \frac{E_{\text{магн}}}{E_{\text{кин}}}.$$

Опуская тильды, получим выражение:

$$St\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{2Eu}\nabla p + Al[\mathbf{j}, \mathbf{H}] + \frac{1}{Re}\Delta \mathbf{v}. \tag{25}$$

Рассмотрим теперь выражение для плотности электрического тока (24), используя безразмерные величины:

$$\tilde{\mathbf{j}} j_0 = \lambda(\mathbf{E} + \frac{VB_0}{c}[\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{H}}]);$$

$$\tilde{\mathbf{j}}\frac{cH_0}{4\pi L} = \lambda(\mathbf{E} + \frac{VH_0}{c}[\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{H}}]).$$

В качестве единицы измерения для электрического поля будем использовать

$$E_0 = \frac{VH_0}{c}.$$

Тогда:

$$E = \tilde{E}E_0 = \tilde{E}\frac{VH_0}{c}.$$

В таком случае:

$$\tilde{\mathbf{j}}\frac{cH_0}{4\pi L} = \frac{\lambda VB_0}{c}(\tilde{\mathbf{E}} + [\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{H}}]);$$

$$\tilde{\mathbf{j}} = \frac{4\pi\lambda LV}{c^2}(\tilde{\mathbf{E}} + [\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{H}}]).$$

Вспомним, что существует такая величина, как магнитная вязкость:

$$\eta_m = \frac{c^2}{4\pi\lambda};$$

тогда:

$$\tilde{\mathbf{j}} = \frac{LV}{\eta_m}(\tilde{\mathbf{E}} + [\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{H}}]).$$

Здесь явно возникает магнитное число Рейнольдса $Re_m = \frac{LV}{\eta_m}$. Без указания «тильд» выражение для плотности тока будет таково:

$$\mathbf{j} = Re_m(\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{H}]).$$

Уравнение (25) в таком случае будет выглядеть так:

$$St\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{2Eu}\nabla p + Al \cdot Re_m[(\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{H}]), \mathbf{H}] + \frac{1}{Re}\Delta \mathbf{v}.$$

Удобно ввести число Стюарта:

$$N = Al \cdot Re_m = \frac{H_0^2 L\lambda}{c^2\rho_0 V}.$$

Уравнение для скорости будет таким:

$$St\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{2Eu}\nabla p + N[(\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]), \mathbf{H}] + \frac{1}{Re}\Delta \mathbf{v}.$$

Наконец, не стоит забывать про основное уравнение магнитной гидродинамики, которое в безразмерном виде записывается следующим образом [27]:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] + \frac{1}{Re_m}\Delta \mathbf{H}.$$

§3. Плоскопараллельное течение

Большой интерес в прикладных задачах представляет так называемое плоскопараллельное течение [27]. Рассмотрим жидкость, скорости течений в которой направлены параллельно плоскости Oxy, а магнитное поле направлено вдоль оси z. Кроме того, будем полагать, что линейные размеры невелики по сравнению с произведением скорости на характерное время, т.е. $St \ll 1$ и можно приближенно считать:

$$(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{2Eu}\nabla p + N[(\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]), \mathbf{H}] + \frac{1}{Re}\Delta\mathbf{v}. \tag{26}$$

Представим скорость в следующем виде:

$$\mathbf{v} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y.$$

Для магнитного поля будем считать, что оно направлено вдоль оси z и равно своему характерному значению:

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_z.$$

Для векторного произведения скорости течения и магнитного поля имеем:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{H}] = v\mathbf{e}_x - u\mathbf{e}_y.$$

Электрическое поле записывается так:

$$\mathbf{E} = E_x\mathbf{e}_x + E_y\mathbf{e}_y.$$

Для силы Лоренца мы получим:

$$[(\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{H}]), \mathbf{H}] = [(E_x + v)\mathbf{e}_x + (E_y - u)\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z] = (E_y - u)\mathbf{e}_x - (E_x + v)\mathbf{e}_y.$$

Электрическое поле ввиду постоянства магнитного поля (и независимости его векторного потенциала от времени) может быть представлено с помощью градиента потенциала:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{e}_x - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{e}_y.$$

Таким образом:

$$[(\mathbf{E}+[\mathbf{v},\mathbf{H}]),\mathbf{H}]=(-\frac{\partial\varphi}{\partial y}-u)\mathbf{e}_x+(-\frac{\partial\varphi}{\partial x}-v)\mathbf{e}_y.$$

Тогда (26) будет таковым:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{e}_x+v\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{e}_x+u\frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{e}_y+v\frac{\partial v}{\partial y}\mathbf{e}_y=$$

$$=-\frac{1}{2Eu}\frac{\partial p}{\partial x}\mathbf{e}_x-\frac{1}{2Eu}\frac{\partial p}{\partial y}\mathbf{e}_y+N(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-u)\mathbf{e}_x+N(-\frac{\partial\varphi}{\partial x}-v)\mathbf{e}_y+\frac{1}{Re}\Delta u\mathbf{e}_x+\frac{1}{Re}\Delta v\mathbf{e}_y.$$

Движение среды будет в таком случае описываться системой из двух уравнений:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{2Eu}\frac{\partial p}{\partial x}+N(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-u)+\frac{1}{Re}\Delta u; \tag{27}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{2Eu}\frac{\partial p}{\partial y}+N(-\frac{\partial\varphi}{\partial x}-v)+\frac{1}{Re}\Delta v. \tag{28}$$

§4. Течение Гартмана

Одним из важных примеров течений жидких металлов является так называемое течение Гартмана [27]. Рассмотрим жидкость, текущую между двумя параллельными плоскостями. Пусть единицы измерения выбраны так, что уравнения плоскостей выглядят следующим образом:

$$z=\pm 1.$$

Пусть магнитное поле, как и раньше, направлено вдоль оси z :

$$\mathbf{B}=\mathbf{e}_z.$$

Кроме того, предположим, что течение жидкости направлено вдоль оси x, т.е. $v=0$. Скорость течения зависит только от координаты z, поэтому $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ и (27) преобразуется к виду:

$$0=-\frac{1}{2Eu}\frac{\partial p}{\partial x}+N(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-u)+\frac{1}{Re}\Delta u.$$

Оператор Лапласа приведется к виду:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Для электрического поля будем полагать, что оно постоянно, т.е.:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = E_0.$$

Тогда частные производные поля станут полными, а уравнение запишется так:

$$0 = -\frac{1}{2Eu}\frac{\partial p}{\partial x} + N(E_0 - u) + \frac{1}{Re}\frac{d^2 u}{dz^2};$$

Домножив обе части на Re, мы можем получить:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - N \cdot Re(u + \frac{1}{2Eu}\frac{\partial p}{\partial x} - E_0) = 0;$$

В качестве граничных условий, ввиду того, что мы учитываем вязкость, возникнет

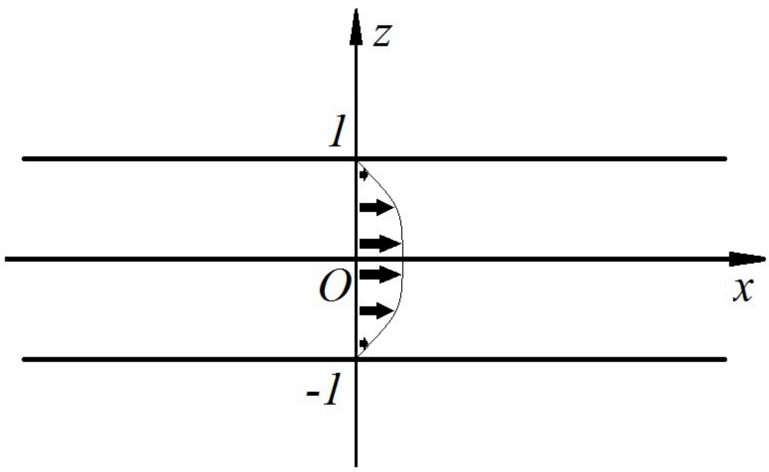

Рис. 14: Течение Гартмана.

условие прилипания, которое для такой упрощенной задачи выглядит так (ввиду того, что плоскости неподвижны):

$$u|_{z=\pm 1} = 0.$$

Удобно ввести так называемое число Гартмана:

$$Ha = \sqrt{N \cdot Re}.$$

Введем новую функцию:

$$\xi = u + \frac{1}{2Eu}\frac{\partial p}{\partial x} - E_0.$$

Для нее мы будем иметь уравнение:

$$\frac{d^2\xi}{dz^2} - Ha^2\xi(z) = 0.$$

Граничным условием для него будет:

$$\xi|_{z=\pm 1} = +\frac{1}{2Eu}\frac{\partial p}{\partial x} - E_0.$$

В качестве его решения будем иметь:

$$\xi = C_1 \operatorname{ch}(Ha \cdot z) + C_2 \operatorname{sh}(Ha \cdot z),$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования. Течение должно быть симметрично, поэтому нужно выбрать лишь гиберболический косинус:

$$\xi = C_1 \operatorname{ch}(Ha \cdot z).$$

Удовлетворим теперь граничным условиям при $z = \pm 1$:

$$\frac{1}{2Eu}\frac{\partial p}{\partial x} - E_0 = C_1 \operatorname{ch}(Ha).$$

В таком случае:

$$C_1 = \frac{\frac{1}{2Eu}\frac{\partial p}{\partial x} - E_0}{\operatorname{ch}(Ha)}.$$

Для решения мы получим

$$\xi = \left(\frac{1}{2Eu}\frac{\partial p}{\partial x} - E_0\right)\frac{\mathrm{ch}(Ha \cdot z)}{\mathrm{ch}(Ha)}.$$

Скорость будет следующей:

$$u = E_0 - \frac{1}{2Eu}\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{1}{2Eu}\frac{\partial p}{\partial x} - E_0\right)\frac{\mathrm{ch}(Ha \cdot z)}{\mathrm{ch}(Ha)};$$

$$u = \left(E_0 - \frac{1}{2Eu}\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{ch}(Ha \cdot z)}{\mathrm{ch}(Ha)}\right).$$

Список литературы

[1] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: Учеб.: Для вузов. – 6-е изд., стер. – М., ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 280 с.

[2] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть I: Учеб.: Для вузов. – 7-е изд., стер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

[3] Сокольников И.С. Тензорный анализ: Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. Пер. с англ. / Под ред. В.В.Лохина. Изд. 3-е – М.: КомКнига, 2010. – 376 с.

[4] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: В 10 т. Т. II. Теория поля. – 8-е изд., стереот. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 536 с.

[5] Логунов А.А. Теория гравитационного поля. - М.: Наука, 2000. – 235 с.

[6] Седов Л.И. Механика сплошной среды. Том 1. – М.: Наука, 1972. – 492 с.

[7] Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики: Учеб. пособие: Для вузов. – 3-е изд., доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ. мат. лит., 1992. – 424 с.

[8] Кикоин А.К., Кикоин И.К. Молекулярная физика: Учеб. пособие: Для вузов. – 2-е изд., перераб. – М.: Наука. Гл. ред. физ. мат. лит., 1976. – 480 с.

[9] Ландау Л.Д., Ахиезер А.И., Лифшиц Е.М. Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. – М.: МГУ, 1965. – 405 с.

[10] Калашников С.Г. Электричество: Учебн. пособие. – 6-е изд., стереот. – М., ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 624 с.

[11] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: В 10 т. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. – 4-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 656 с.

[12] Денисов В.И. Введение в электродинамику материальных сред: Учебное пособие. – М.: Изд-во Моск.ун-та, 1989. – 168 с.

[13] Тамм И.Е. Основы теории электричества: Учеб. пособие для вузов. – 11-е изд., испр. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 616 с.

[14] Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике: Учеб. пособие. – М.: Изд-во МГУ, 1993. – 352 с.

[15] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: Учеб. пособие. – 6-е изд., испр. и доп. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 799 с.

[16] Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Кинематическое динамо в случайном потоке. // 1985, Успехи физических наук, т. 145, 4, стр. 593 – 628.

[17] Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Магнитные поля в астрофизике. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. – 384 с.

[18] Кук А.Е., Робертс А.Х. Система двухдискового динамо Рикитаке. // Математика. Новое в зарубежной науке. Серия 22. Странные аттракторы. Сборник статей. – М.: Мир, 1981. – 251 с. С. 160 – 188.

[19] Моффат Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир, 1980. – 342 с.

[20] Краузе, Ф., Рэдлер, К.-Х. Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо. - Москва, 1984.

[21] Попова Е.П., Соколов Д.Д. Солнечный цикл по данным о поверхностном крупномасштабном магнитном поле и теория солнечного динамо // 2010, Астрономический журнал, т.87, 4, стр. 1130-1134.

[22] Moss D. On the generation of bisymmetric magnetic field structures in spiral galaxies by tidal interactions // 1995, Mon. Not. R. Astron. Soc., 275, p. 191–194.

[23] Phillips A. A comparison of the asymptotic and no-z approximations for galactic dynamos. // 2001, Geophys. Astrophys. Fluid Dynam. 94, 135–150.

[24] Ахметьев П.М., Кунаковская О.В., Кутвицкий В.А. Замечание о диссипации интеграла магнитной спиральности. // 2009, Теор. и матем. физ., 158, стр.150 – 160.

[25] Shukurov A., Sokoloff D., Subramanian K., Brandenburg A. Galactic dynamo and helicity losses through fountain flow. //2006, Astron. Astrophys., 448, L33 – L36.

[26] Sur S., Shukurov A., Subramanian K. Galactic dynamos supported by magnetic helicity fluxes. // 2007, Mon. Not. R. Astr. Soc., 377, 2, pp. 874 – 882.

[27] Брановер Г.Г., Цинобер А.Б. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1970.