Гл. 6. Сферические функции

1. Определение сферических функций

Во втором параграфе первой главы, рассматривая применение метода разделения переменных в шаре, при отделении радиальной части решения от угловой для угловой части мы получили следующую задачу на собственные функции и собственные значения (задачу Штурма-Лиувилля):

$$\begin{cases} \Delta_{\theta,\varphi} Y(\theta,\varphi) + \lambda Y(\theta,\varphi) = 0, & (1) \\ Y(\theta,\varphi) = Y(\theta,\varphi+2\pi), & (2) \\ \left| Y(\theta,\varphi) \right\|_{\theta=0,\pi} < \infty, & (3) \end{cases}$$

где угловая часть трехмерного оператора Лапласа в сферической системе координат имеет следующий вид:

$$\Delta_{\theta,\varphi} Y(\theta,\varphi) \equiv \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial Y(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}.$$

Определение. Ограниченные на единичной сфере решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям периодичности по φ и обладающие непрерывными производными до второго порядка, называются сферическими функциями.

2. Свойства сферических функций

Решая задачу (1)-(2) методом разделения переменных, полагая

$$Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi),$$

получим

$$\frac{\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{d\Theta}{d\theta}\right)}{\Theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\Phi''}{\Phi}+\lambda=0,\quad \frac{\Phi''}{\Phi}=-\nu^2, \tag{4}$$

откуда следует задача Штурма_ Лиувилля для функции $\Theta(\theta)$:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left(\lambda-\dfrac{\nu^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0,\ 0<\theta<\pi, & (5)\\ \left|\Theta(0)\right|<\infty,\quad \left|\Theta(\pi)\right|<\infty. & (6)\end{cases}$$

Условия ограниченности решений уравнения (5) ставятся в особых точках данного уравнения $\theta = 0, \ \theta = \pi.$

Если сделать замену $x = \cos\theta, y(x) = y(\cos\theta) = \Theta(\theta),$ то Задача (5)-(6) принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\dfrac{d}{dx}y(x)\right)+\left(\lambda-\dfrac{m^2}{1-x^2}\right)y(x)=0, -1<x<1, & (7) \\ \left|y(\pm 1)\right|<\infty. & (8) \end{cases}$$

Сравнивая формулы (7)-(8) с формулами (8)-(9) главы 5, мы видим, что задача (7)-(8) является задачей Штурма-Лиувилля для присоединенных функций Лежандра. Следовательно, собственные значения будут равны

$$\lambda = \lambda_n = n(n+1),$$

а собственные функции

$$\Theta_{nm}(\theta) = y_{nm}(\cos\theta) = P_n^{(m)}(\cos\theta), \quad m < n.$$

Из формулы (4) и условий периодичности получаем задачу на собственные функции и собственные значения для функции $\Phi(\varphi)$:

$$\begin{cases} \Phi'' + \nu^2 \Phi = 0, \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi). \end{cases} \qquad (9)$$

При $\nu = m^2$ задача (9) имеет нетривиальное решение вида

$$\Phi_m(\varphi) = e^{im\varphi}, m = 0, \pm 1, \ldots \qquad (10)$$

Собственные функции задачи (9) можно также записать в тригонометрическом виде

$$\Phi_m(\varphi) = \begin{cases} \sin m\varphi, \\ \cos m\varphi. \end{cases} \quad m = 0, 1, 2, \ldots \qquad (11)$$

В случае задания функций $\Phi_m(\varphi)$ в виде (10), система сферических функций n-го порядка имеет следующий вид

$$Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) = P_n^{(|m|)}(\cos\varphi)e^{im\varphi}, \quad -n \le m \le n. \qquad (12)$$

Если функции $\Phi_m(\varphi)$ имеет тригонометрический вид (11), то положительный верхний индекс функции $Y_n^{(m)}$ соответствует умножению на $\sin m\varphi$, а отрицательный - на $\cos m\varphi$. В этом случае система сферических функций n-го порядка записывается следующим образом

$$Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) = P_n^{(m)}(\cos\varphi)\sin m\varphi, \quad -n \le m \le n.$$

$$Y_n^{(-m)}(\theta,\varphi) = P_n^{(|m|)}(\cos\varphi)\cos m\varphi, \quad 0 \le m \le n. \qquad (13)$$

Квадрат нормы сферических функций вида (12) равен

$$\left\|Y_n^{(m)}\right\|^2 = \int_0^{2\pi} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) Y_n^{(m)^*}(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi = \tag{14}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P_n^{(|m|)^2}(\cos\theta)\left|e^{im\varphi}\right|^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 2\pi\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!},$$

$$n = 0,1,\ldots;\, m = 0,\pm1,\ldots,\pm n.$$

Для сферических функций вида (13)

$$\left\|Y_n^{(\pm m)}\right\|^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P_n^{(m)^2}(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\sin^2 m\varphi \\ \cos^2 m\varphi\end{Bmatrix}\sin\theta d\theta d\varphi = \tag{15}$$

$$= 2\pi\varepsilon_m \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!},\;\; \varepsilon_m = \begin{cases}1, \; m = 0 \\ \dfrac{1}{2}, \; m \neq 0\end{cases};\quad n = 0,1,\ldots;\; m = 0,1,\ldots,n.$$

Гл. 7. Шаровые функции

Рассмотрим уравнение Лапласа в шаре

$$\Delta_{\theta,\varphi} u(r,\theta,\varphi), \tag{1}$$

где оператор Лапласа в сферической системе координат имеет вид:

$$\Delta u \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi} u,$$

$$\Delta_{\theta,\varphi} u(r,\theta,\varphi) \equiv \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}.$$

Применяя метод разделения переменных Фурье, представляя решение уравнения (1) в виде

$$u(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi) \qquad (2)$$

и подставляя (1) в (2), получим

$$\frac{\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{dR}{dr}\right)}{R(r)}=-\frac{\Delta_{\theta,\varphi}Y}{Y(\theta,\varphi)}. \qquad (3)$$

Из рассмотренной в главе 6 задачи Штурма-Лиувилля для сферических функций вытекает, что

$$\frac{\Delta_{\theta,\varphi}Y}{Y(\theta,\varphi)}=-n(n+1). \qquad (4)$$

Из уравнений (3), (4) получаем уравнение для радиальной функции:

$$r^2 R''(r) + 2rR'(r) - n(n+1)R(r) = 0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) является равнением Эйлера, решение которого ищется в виде

$$R(r) = r^{\sigma}. \qquad (6)$$

Подставляя формулу (6) в (5) и сокращая на r^{σ}, получим для определения параметра σ характеристическое уравнение

$$\sigma(\sigma+1) - n(n+1) = 0.$$

Решения характеристического уравнения имеют следующий вид:

$\sigma = n$ и $\sigma = -(n+1)$.

В результате получаем два семейства решений уравнения (5):

$$u_{nm}(r,\theta,\varphi)=\begin{cases} r^n Y_n^{(m)}(\theta,\varphi), \\ \dfrac{1}{r^{n+1}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi). \end{cases} \qquad (7)$$

Функция $r^n Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$ используется для решения внутренних краевых задач, а функция $\dfrac{1}{r^{n+1}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$ - для решения внешних краевых задач.

Определение. Функции $u_{nm}(r,\theta,\varphi)$, определяемые формулами (7) и являющимися частными решениями уравнения Лапласа в сферической системе координат, называются шаровыми функциями.

Определение. Гармоническим полиномом называется однородный полином, удовлетворяющий уравнению Лапласа.

Можно показать, что шаровые функции

$$u_{nm}\left(r,\theta,\varphi\right)=r^{n}Y_{n}^{(m)}\left(\theta,\varphi\right)$$

являются гармоническими полиномами степени n.

Гл. 8. Собственные функции Шара

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля для шара радиуса a :

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \quad (r,\theta,\varphi) \in K_0^a, & (1) \\ \alpha \dfrac{du(r,\theta,\varphi)}{dr} + \beta u(r,\theta,\varphi) = 0, \ (r,\theta,\varphi) \in \Sigma_0^a, & (2) \end{cases}$$

где $\bar{K}_0^a = K_0^a + \Sigma_0^a.$

Разделяя переменные и разыскивая решение в виде

$$u(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi),$$

получим:

$$\frac{\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\lambda r^2 R}{R(r)} = -\frac{\Delta_{\theta,\varphi}Y}{Y(\theta,\varphi)} = n(n+1). \qquad (3)$$

Для радиальной функции из (3) получаем уравнение

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left(\lambda-\frac{n(n+1)}{r^2}\right)R=0, \qquad (4)$$

решение которого удовлетворяет граничному условию

$$\alpha\frac{dR}{dr}+\beta R=0, \quad r=a \qquad (5)$$

и условию

$$\left|R(0)\right|<\infty. \qquad (6)$$

С помощью замены

$$R(r) = \frac{y(r)}{\sqrt{r}}$$

задача (4)-(6) приводится к следующей задаче Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} r^2 y'' + r y' + \left(\lambda r^2 - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right) y = 0, & (7) \\ \alpha y' + \left(\beta - \frac{\alpha}{2a} \right) y = 0, \quad r = a, & (8) \\ y(0) = 0. & (9) \end{cases}$$

Общее решение уравнения (7) имеет вид

$$y(r) = AJ_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right) + BN_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right).$$

Из условия (9) следует, что B=0. Положим A=1. Для определения собственного значения λ из граничного условия (8) получаем дисперсионное уравнение

$$\alpha\sqrt{\lambda}J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right) + \left(\beta - \frac{\alpha}{2a}\right)J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right) = 0. \qquad (10)$$

Пусть $\mu = a\sqrt{\lambda}$. Тогда собственные функции шара имеют вид

$$u_{nkm}(r,\theta,\varphi) = \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\dfrac{\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{a}\right)}{\sqrt{r}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi), \; n = 0,1,\ldots; \; k = 1,2,\ldots; \; (11)$$

$$m = 0, \pm 1, \ldots, \pm n,$$

а собственные значения равны

$$\lambda_{kn} = \left(\frac{\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{a} \right)^2, \qquad (12)$$

где $\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}$ – корни уравнения (10).

Из формулы (11) что собственные значения при $n \neq 0$ являются кратными: каждому собственному значению соответствует $2n+1$ линейно независимая собственная функция, то есть $\mathrm{rang}\lambda_{kn} = 2n+1$.

Норма собственных функций:

$$\|u_{knm}\|^2 = \int\limits_{K_0^a} u_{knm}^2 dV = \int\limits_0^a \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} u_{knm}^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi =$$

$$= \left\| \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 \cdot \left\| Y_n^{(m)} \right\|^2.$$

Значение нормы $\left\|Y_n^{(m)}\right\|^2$ дается формулами (14) и (15) главы 6.

Вычислим норму радиальной части собственной функции, используя формулу (107) главы 3:

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}\right\|^2=\int_0^a\frac{1}{r}J^2_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)r^2dr=\int_0^a J^2_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)rdr=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left\{J'^2_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right)+\left(1-\frac{\left(n+1/2\right)^2}{a^2\lambda}\right)J^2_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}a\right)\right\}.$$