Глава 5. Присоединенные функции Лежандра

1. Определение присоединенных функции Лежандра

Определение. Присоединенными функциями Лежандра называются функции, определяемые соотношениями

$$P_n^{(m)}(x) = \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x). \qquad (1)$$

При $m>n$ присоединенные функции Лежандра тождественно равны нулю.

При $m=2k$ - это полином степени n. (В самом деле $\frac{d^m}{dx^m} P_n(x) -$ полином степени $n\text{-}m=n\text{-}2k$, а $\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}$ при $m=2k$ полином степени $2k$).

При $m=2k+1$ – это иррациональные функции.

Из формулы (1) вытекает, что нули присоединенных функций Лежандра $P_n^{(m)}(x)$ помимо точек -1 и +1 определяются также еще n-m нулями производной $\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)$, являющейся классическим ортогональным полиномом $(n$-$m)$-го порядка.

Следовательно, присоединенные функции Лежандра имеют при $m>0$ $(n$-$m)$ простых нулей, расположенных строго внутри отрезка $[-1,1]$ и обращается в ноль в граничных точках -1 и +1.

Очевидно, что $P_n^{(0)}(x) \equiv P_n(x)$, где $P_n(x)$ – полином Лежандра.

2) Краевая задача для присоединенных функций Лежандра

Получим уравнение для присоединенных функций Лежандрам. Введем обозначение $u(x) = P_n(x)$. Функция $u(x)$ будет удовлетворять уравнению

$$\left(1 - x^2\right)u''(x) - 2xu'(x) + n(n+1)u(x) = 0. \qquad (2)$$

Продифференцируем уравнение (2) m – раз, учитывая формулу Лейбница

$$(wv)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k w^{(k)} v^{(m-k)}. \qquad (3)$$

Положим

$$w(x) = \left(1 - x^2\right), v(x) = u(x).$$

Тогда будем иметь

$$\left(\left(1-x^2\right)u''-2xu'+n\left(n+1\right)u\right)^{(m)}=\sum_{k=0}^{m}C_m^k\left(1-x^2\right)^{(k)}u^{(m-k+2)}-$$

$$-\sum_{k=0}^{m}C_m^k\left(2x\right)^{(k)}u^{(m-k+1)}+n\left(n+1\right)u^{(m)}=\sum_{k=0}^{m}C_m^k\left(1-x^2\right)^{(k)}u^{(m-k+2)}+$$

$$+\sum_{k=0}^{m}C_m^k\left(1-x^2\right)^{(k+1)}u^{(m-k+1)}+n\left(n+1\right)u^{(m)}=\left\{l=k+1\right\}=$$

$$=\sum_{k=0}^{m}C_m^k\left(1-x^2\right)^{(k)}u^{(m-k+2)}+\sum_{l=1}^{m+1}C_m^{l-1}\left(1-x^2\right)^{(l)}u^{(m-l+2)}+n\left(n+1\right)u^{(m)}.$$

Учтем, что k=0,1,2, а l=1,2 поскольку при $k\geq 3$ $\left(1-x^2\right)^{(k)}\equiv 0$, а при $l\geq 3$ $\left(1-x^2\right)^{(l)}\equiv 0$.

$$\left(\left(1-x^2\right)u''-2xu'+n\left(n+1\right)u\right)^{(m)}=C_m^0\left(1-x^2\right)u^{(m+2)}+$$

$$+\left(C_m^1+C_m^0\right)\left(1-x^2\right)'u^{(m+1)}+\left(C_m^2+C_m^1\right)\left(1-x^2\right)''u^{(m)}+n\left(n+1\right)u^{(m)}.$$

Так как

$$C_m^1 + C_m^0 = m+1;\quad C_m^2 + C_m^1 = \frac{m(m-1)}{2} + m = \frac{m(m+1)}{2},$$

то

$$\left(\left(1-x^2\right)u'' - 2xu' + n(n+1)u\right)^{(m)} = \left(1-x^2\right)u^{(m+2)} +$$

$$+(m+1)(-2x)u^{(m+1)} + \frac{m(m+1)}{2}(-2)u^{(m)} + n(n+1)u^m = \qquad (4)$$

$$= \left(1-x^2\right)u^{(m+2)} - 2(m+1)xu^{(m+1)} - m(m+1)u^{(m)} + n(n+1)u^{(m)} = 0.$$

Если обозначить

$$v(x) = \frac{d^m}{dx^m}u(x) = \frac{d^m}{dx^m}P_n(x),$$

то из (4) получим

$$\left(1-x^2\right)v'' - 2x(m+1)v' - m(m+1)v + n(n+1)v = 0. \qquad (5)$$

Положим

$$v(x)=\left(1-x^2\right)^{-\frac{m}{2}}y(x),$$

где $y(x)=P_n^{(m)}(x)$ – присоединенные функции Лежандра. Тогда для присоединенных функций Лежандра получаем уравнение

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+\left(n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0. \qquad (6)$$

Уравнение (6) можно переписать в дивергентном виде

$$\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right)+\left(n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0. \qquad (7)$$

Из вида уравнения (7) следует, что точки $x = \pm 1$ являются особыми точками этого уравнения. Поэтому для выделения единственного решения уравнения (7) достаточно потребовать, чтобы оно было ограничено в точках . Следовательно, присоединенные функции Лежандра при каждом значении параметра m являются собственными функциями, соответствующими собственным значениям $\lambda_n = n(n+1)$ следующей краевой задачи на отрезке [-1,1]:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\dfrac{d}{dx}P_n^{(m)}(x)\right)+\left(\lambda_n-\dfrac{m^2}{1-x^2}\right)P_n^{(m)}(x)=0, -1<x<1, & (8) \\ \left|P_n^{(m)}(\pm 1)\right|<\infty. & (9) \end{cases}$$

Второе линейно независимое решение уравнения (8) имеет особенность в особых точках ± 1.

Так как присоединенные функции Лежандра $P_n^{(m)}(x)$ являются собственными функциями задачи (8)-(9), то они образуют ортогональную систему на отрезке [-1,1]:

$$\int_{-1}^{+1} P_n^{(m)}(x) P_k^{(m)}(x)\, dx = 0$$

при $n \neq k$ и одном и том же m.

Квадрат нормы присоединенной функции Лежандра имеет вид:

$$\left\| P_n^{(m)} \right\|^2 = \int_{-1}^{+1} \left(P_n^{(m)}(x) \right)^2 dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \qquad (10)$$

Вычислим норму присоединенных функций Лежандра. Воспользуемся определением присоединенных функций Лежандра и проинтегрируем полученный интеграл один раз по частям:

$$N_{n,m} = \left\| P_n^{(m)}(x) \right\|^2 = \int_{-1}^{+1} \left(P_n^{(m)}(x) \right)^2 dx =$$

$$= \int_{-1}^{+1} \left(1-x^2\right)^m \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)\, dx = \left(1-x^2\right)^m \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_n(x) \Big|_{-1}^{+1} -$$

$$-\int_{-1}^{+1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_n(x) \frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)^m \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \right) dx. \qquad (11)$$

Для вычисления интеграла воспользуемся формулой (5)

$$\left(1-x^2\right)v'' - 2x(m+1)v' - m(m+1)v + n(n+1)v = 0, \qquad (5)$$

в которой положим $v(x)=\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)$:

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}}P_n(x)-2x(m+1)\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P_n(x)+$$

$$+\left(n(n+1)-m(m+1)\right)\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)=0.$$

Умножив эту формулу на $\left(1-x^2\right)^m$ и запишем результат в виде

$$\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)^{m+1}\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P_n(x)\right)+\left(n(n+1)-m(m+1)\right)\left(1-x^2\right)^m\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)=0.$$

Положив вместо m m-1, получим

$$\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)^m \frac{d^m}{dx^m} P_n\left(x\right)\right) = -\left(n\left(n+1\right)-m\left(m-1\right)\right)\left(1-x^2\right)^{m-1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_n\left(x\right).$$

Подставив это выражение в интеграл (11), получим

$$N_{n,m} = \left\| P_n^{(m)}\left(x\right) \right\|^2 =$$

$$= \int\limits_{-1}^{+1} \left(n\left(n+1\right)-m\left(m-1\right)\right)\left(1-x^2\right)^{m-1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_n\left(x\right) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_n\left(x\right) dx =$$

$$= \left(n\left(n+1\right)-m\left(m-1\right)\right) \left\| P_n^{(m-1)}\left(x\right) \right\|^2 = \left(n\left(n+1\right)-m\left(m-1\right)\right) N_{n,m-1},$$

\

то есть рекуррентную формулу для вычисления квадрата нормы $\left\| P_n^{(m)}\left(x\right) \right\|^2$.

$$N_{n,m} = \left(n\left(n+1\right) - m\left(m-1\right)\right) N_{n,m-1}.$$

Так как

$$n\left(n+1\right) - m\left(m-1\right) = n^2 - m^2 + n + m = \left(n+m\right)\left(n-m+1\right),$$

то

$$N_{n.m} = \left(n+m\right)\left(n-m+1\right) N_{n.m-1} =$$
$$= \left(n+m\right)\left(n-m+1\right)\left(n+m-1\right)\left(n-m+2\right) N_{n.m-2} =$$
$$= \left(n+m\right)\left(n-m+1\right)\left(n+m-1\right)\left(n-m+2\right)\ldots\left(n+1\right) n N_{n.0},$$

так как

$$n+1 = \left(n+m\right) - \left(m-1\right),\ n = \left(n-m\right) + m.$$

Далее, поскольку

$$(n+m)(n-m+1)(n+m-1)(n-m+2)\ldots(n+1)n =$$

$$=\left((n+m)(n+m-1)\ldots(n+1)\right)\left((n-m+1)(n-m+2)\ldots n\right) =$$

$$=\frac{(n+m)!}{n!}\frac{n!}{(n-m)!},$$

то

$$N_{n,m} = \frac{(n+m)!}{n!}\frac{n!}{(n-m)!}N_{n,0},$$

а так как

$$N_{n,0} = \left\|P_n(x)\right\|^2 = \frac{2}{2n+1},$$

то

$$\left\|P_n^{(m)}(x)\right\|^2 = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$