Глава 7. Уравнения эллиптического типа (продолжение)

1. Теория потенциала

1) Объемный потенциал

Определение. Объемным потенциалом называется интеграл, определяемый формулой (1):

$$u(M) = \iiint\limits_D \frac{\rho(Q)}{r_{QM}} dV_Q. \qquad (1)$$

С физической точки зрения объемный потенциал можно рассматривать как потенциал в точке M, создаваемый зарядами, распределенными по телу D с плотностью $\rho(M)$.

С математической точки зрения интеграл (1) является собственным или несобственным интегралом, зависящим от параметра M. Функция $\rho(M)$ является финитной функцией.

В дальнейшем нам понадобятся два свойства объемного потенциала.

$$\Delta u(M) = 0, \quad M \notin D.$$

$$\Delta u(M) = -4\pi\rho(M), \quad M \in D.$$

2) Равномерная сходимость несобственного интеграла

Известно, что достаточным условием сходимости собственного интеграл, зависящего от параметров, является непрерывность подынтегральной функции по параметрам и независимым переменным. Для несобственных интегралов дело обстоит сложнее. Введем понятие **равномерной сходимости несобственного интеграла.**

Рассмотрим несобственный интеграл общего вида:

$$u(M) = \int_{D_n} f(M,Q)\rho(Q)\,dV_Q, \qquad (2)$$

где $f(M,Q)$ – сингулярная функция с интегрируемой особенностью при совпадении аргументов и непрерывная при $M \neq Q$, $\rho(M)$ – **локально интегрируемая** ограниченная функция. Заметим, что интеграл (1) будет интегралом рассматриваемого типа.

Определение.Функция $f(M), M \in R^n$ является абсолютно интегрируемой в конечной области $D_n \in R^n$, если существует интеграл $\int\limits_{D_n} |f(M)| dV < \infty$.

Если функция $f(M)$ абсолютно интегрируема в любой конечной области $D_n \in R^n$, то она называется **локально интегрируемой.**

Определение. Интеграл (2) называется равномерно сходящимся в точке M_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что неравенств

$$\left| \int\limits_{D^\delta} f(M,Q)\rho(Q)\,dV_Q \right| \le \varepsilon$$

выполняется для **любой** точки $M \in K^\delta_{M_0}$ и для любой области $D^\delta \in K^\delta_{M_0}$, содержащей точку M_0.

Теорема. Несобственный интеграл, равномерно сходящийся в точке M_0, непрерывен в этой точке.

Доказательство. Введем обозначения:

$$u_1(M) = \int_{D^{\delta_1}} f(M,Q)\rho(Q)\,dV_Q, \qquad (3a)$$

$$u_2(M) = \int_{D/D^{\delta_1}} f(M,Q)\rho(Q)\,dV_Q, \qquad (3b)$$

Тогда

$$u(M) - u(M_0) = \left(u_1(M) + u_2(M)\right) - \left(u_1(M_0) + u_2(M_0)\right) =$$
$$= \left(u_1(M) - u_1(M_0)\right) + \left(u_2(M) - u_2(M_0)\right). \qquad (4)$$

Так как интеграл (3) равномерно сходится, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta_1 > 0$, что для области D^{δ_1} содержащей точку M_0 и $D^{\delta_1} \in K_{M_0}^{\delta_1}$, получим:

$$\left|u_1(M)\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left|u_1(M_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (5)$$

Так как $M_0 \notin D / D^{\delta_1}$, то интеграл $u_2(M)$ непрерывен в точке M_0. Следовательно, для того же ε найдется δ_2 такое, что при $r_{MM_0} < \delta_2$

$$\left|u_2(M) - u_2(M_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (6)$$

Пусть $\delta = \min\{\delta_1,\ \delta_2\}$. Тогда из (4)-(6) следует, что при $r_{MM_0} < \delta$

$$\left|u(M) - u(M_0)\right| < \varepsilon.$$

ч.т.д.

3) Поверхностные потенциалы

Потенциал простого слоя. Пусть заряды (массы) распределятся на поверхности S с плотностью $\mu(P)$. Потенциал поля, создаваемого этими зарядами, равен

$$\mathrm{v}(M) = \iint_S \frac{\mu(P)}{r_{PM}} d\sigma_P. \qquad (7)$$

Определение. Интеграл (7) называется **поверхностным потенциалом простого слоя.**

Потенциал двойного слоя. Если на двусторонней поверхности, ориентация которой задана направлением **внутренней нормали**, распределены диполи с плотностью $\nu(P)$, то потенциал поля, созданного этими диполями, равен:

$$\mathrm{w}(M)=\iint_S \nu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PM}}\right)d\sigma_P=\iint_S \nu(P)\frac{\cos\varphi_{PM}}{r_{PM}^2}d\sigma_P. \quad (8)$$

Определение. Интеграл (8) называется потенциалом двойного слоя.

Замечание. Угол φ_{PM} – угол между **внутренней** нормалью $\vec{n}_p$ в точке P к поверхности S и вектором $\vec{r}_{PM}$.

4) Логарифмические потенциалы

Определим потенциал однородной бесконечной прямой, расположенной вдоль оси Z. Пусть $\mu -$ линейная плотность.

Сила притяжения элементом Δz прямой, расположенном в точке P, точки M, лежащей в плоскости $z = 0$, равна

$$\Delta F = -\frac{\mu \Delta z}{r^2 + z^2},$$

а ее проекция на плоскость $z = 0$ равна $(\alpha = \angle OMP)$:

$$\Delta R = -\frac{\mu \Delta z}{r^2 + z^2} \cos \alpha = -\frac{\mu r \Delta z}{\left(r^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$R=-\mu\int_{-\infty}^{\infty}\frac{rdz}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{\mu}{r^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{\left(1+\frac{z^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{\mu}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{dz}{r}}{\left(1+\frac{z^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=-\frac{\mu}{r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\alpha\,d\alpha=-2\frac{\mu}{r},$$

так как $\dfrac{z}{r}=\mathrm{tg}\,\alpha;\quad \dfrac{dz}{r}=\dfrac{d\alpha}{\cos^2\alpha}.$

Легко проверить непосредственным дифференцированием,что потенциал силы R имеет вид:

$$u_0=2\mu\ln\frac{1}{r}. \qquad (9)$$

Определение. Потенциал (9) называется логарифмическим потенциалом

Замечание. Функция u_0 есть фундаментальное решение уравнения Лапласа в двумерном случае.

Определение. Интеграл

$$u(M)=\iint_G \rho(Q)\ln\frac{1}{r_{QM}}d\sigma_Q$$

называется потенциалом площади.

Определение. Интеграл

$$\mathrm{v}(M)=\int_C \mu(P)\ln\frac{1}{r_{PM}}dl_P. \qquad (10)$$

называется логарифмическим потенциалом простого слоя.

Определение. Интеграл

$$\mathrm{w}(M) = \int_C \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\ln \frac{1}{r_{PM}} \right) dl_P = \int_C \nu(P) \frac{\cos\varphi_{PM}}{r_{PM}} dl_P \qquad (11)$$

называется логарифмическим потенциалом двойного слоя.

Замечание. Ориентация кривой С задается направлением внутренней нормали $\vec{n}_P$ к кривой C в точке P. Угол φ_{PM} – угол между внутренней нормалью $\vec{n}_P$ к кривой C в точке P и вектором $\vec{r}_{PM}$.

5) Свойства логарифмических потенциалов простого и двойного слоя

Определение. Будем называть кривой класса A плоскую кривую с непрерывной ограниченной кривизной.

Для кривой класса A справедливы следующие утверждения:

а) в каждой точке кривой определена непрерывная касательная;

б) существует такая $\delta-$ окрестность любой точки P_0 этой кривой, что в местной (локальной) системе координат участок кривой, попавший в эту $\delta-$окрестность может быть задан с помощью однозначной функции $y = f\left(x\right)$.

Пусть точка $P = P\left(\xi,\eta\right)$ находится на кривой C класса A. Введем местную систему координат с центром в точке P_0. Тогда получаем, что $\eta\left(0\right) = \eta'\left(0\right) = 0$ и поэтому $\eta\left(\xi\right) = \dfrac{\xi^2}{2}\eta''\left(\theta\xi\right),\ \theta \in \left(0,1\right).$

В силу ограниченности кривизны

$$\left|\eta(\xi)\right| < \frac{1}{2}K\xi^2,\ K = const. \qquad (12)$$

Далее,

$$\eta'(\xi) = \eta'(0) + \xi\eta''(\theta\xi) = \xi\eta''(\theta\xi),\ \ \theta \in (0,1),$$

откуда

$$\left|\eta'(\xi)\right| < K\left|\xi\right|. \qquad (13)$$

Так как $tg\alpha = \eta'(\xi)$, $\left|\sin\alpha\right| < \left|tg\alpha\right|$, то

$$\left|\sin\alpha\right| < K\left|\xi\right| \qquad (14)$$

и, уменьшая $\left|\xi\right|$, можно получить $\cos\alpha > \dfrac{1}{2}$.

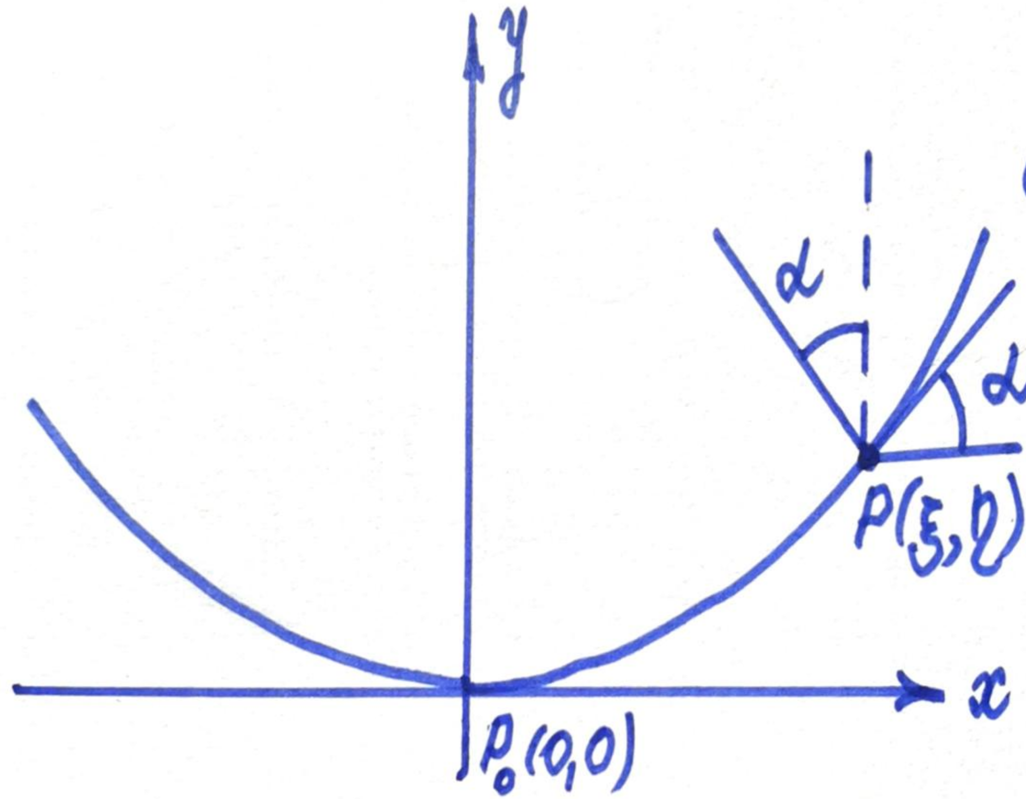

Рис. 1. $\eta(\xi) = \eta(0) + \xi\eta'(0) + \dfrac{\xi^2}{2}\eta''(\theta\xi) = \dfrac{\xi^2}{2}\eta''(\theta\xi),\ \ \theta \in (0,1).$

1. Непрерывность логарифмического потенциала простого слоя

Теорема. Пусть $\mu(P)$ – локально-интегрируемая и ограниченная функция: $|\mu(P)| < N.$ Тогда логарифмический потенциал простого слоя

$$\mathrm{v}(M) = \int_C \mu(P) \ln \frac{1}{r_{PM}} \, dl_P. \qquad (10)$$

является непрерывной функцией точки: $\mathrm{v}(M) \in C(R^2)$.

Доказательство. а) Если $M_0 \notin C -$ то это очевидно, так как интеграл (10) собственный.

б) Если $M_0 \equiv P_0 \in C -$ то достаточно доказать равномерную сходимость интеграла (10) в точке P_0.

Введем локальную систему координат с центром точке P_0 и выберем в качестве $\delta -$ окрестности точки P_0 круг $U_{P_0}^{\delta}$.

Выберем такое δ, что для части кривой C^{δ}, лежащей внутри круга: $C^{\delta} = C \cap U^{\delta}_{M_0}$, $\cos\alpha > \frac{1}{2}$, где $\alpha -$ угол между касательной к кривой C в точке $P \in C^{\delta}$ и положительным направлением оси абсцисс локальной системы координат.

Пусть $P_0 = P_0(0,0), M = M(x,y) \in U^{\delta}_{P_0}, P = P(\xi,\eta) \in C^{\delta}$.

Учтем, что

$$r_{PM} \geq |x-\xi|, \quad dl_P = \frac{d\xi}{\cos\alpha} < 2d\xi.$$

Тогда

$$\left| \int_{C^{\delta}} \mu(P) \ln\frac{1}{r_{PM}} dl_P \right| < 2N \int_{-\delta}^{\delta} \ln\frac{1}{|x-\xi|} d\xi < \varepsilon. \qquad (15)$$

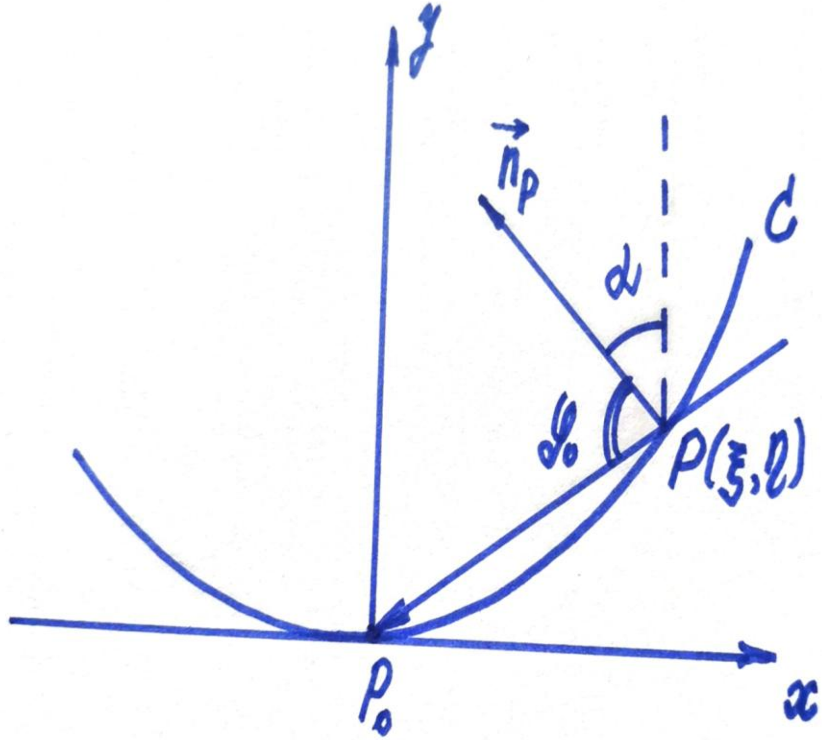

Рис. 2

Так как интеграл в правой части (15) сходящийся, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что будет выполнено неравенство (15), а также и неравенство $\cos\alpha > \frac{1}{2}$.

Итак, интеграл (10), в силу равномерной сходимости в точке P_0 будет непрерывным в этой точке, так как эта точка $P_0 \in C -$ произвольная точка, то из пунктов а) и б) вытекает, что интеграл (10) непрерывен всюду на плоскости: $\mathrm{v}(M) \in R^2$. **Ч.т.д.**

2. Существование логарифмического потенциала двойного слоя

Теорема. Если $\nu(P) -$ локально-интегрируемая и ограниченная функция: $|\nu(P)| < N$, то логарифмический потенциал двойного слоя определен всюду в R^2.

Доказательство. Если $M_0 \notin C$, то существование интеграла (11) очевидно.

Пусть $M_0 \equiv P_0 \in C$. Введем локальную систему координат с центром точке P_0 и выберем в качестве $\delta -$окрестности точки P_0 круг $U_{P_0}^{\delta}$.

Если $P_0 = P_0(0,0),\ P = P(\xi,\eta),$ то получаем, что

$$\vec{r}_{PP_0} = \{-\xi, -\eta\}, \quad \vec{n}_P = \{-\sin\alpha, \cos\alpha\},$$

где α —угол между внутренней нормалью $\vec{n}_P$ к кривой C и осью ординат локальной системы координат. Тогда из скалярного произведения $(\vec{r}_{PP_0}, \vec{n}_P)$ получим, учитывая, что $n_P = |\vec{n}_P| = 1$:

$$\cos\varphi_0 = \frac{(\vec{r}_{PP_0}, \vec{n}_P)}{r_{PP_0} n_P} = \frac{\xi\sin\alpha - \eta\cos\alpha}{r_{PP_0}},$$

где $\varphi_0 -$ угол между векторами $\vec{r}_{PP_0}$, $\vec{n}_P$.

Из формул (12) и (14) следует, поскольку $\eta = \eta(\xi)$, что

$$|\sin\alpha| < K|\xi|, \ \ |\eta(\xi)| < \frac{1}{2}K\xi^2, \ \ |\cos\alpha| \le 1,$$

Откуда

$$|\cos\varphi_0| < \frac{K\xi^2 + \frac{1}{2}K\xi^2}{r_{PP_0}} = \frac{3}{2}K\frac{\xi^2}{r_{PP_0}} < 2K|\xi|, \qquad (16)$$

так как $\dfrac{|\xi|}{r_{PP_0}} \le 1.$

Из формулы (16) получаем, что

$$\frac{|\cos\varphi_0|}{r_{PP_0}} < 2K \qquad (17)$$

и окончательно получаем

где

$$\left| \int\limits_{C^\delta} \nu(P) \frac{\cos\varphi_0}{r_{PP_0}} dl_P \right| < 4NK \int\limits_{-\delta}^{\delta} d\xi = 8NK\delta. \qquad (18)$$

Здесь $C^\delta = C \cap U_{P_0}^\delta,\ \cos\alpha > \frac{1}{2},\ dl_P = \frac{d\xi}{\cos\alpha} < 2d\xi$ при достаточно малом δ.

Из формулы (18) следует сходимость интеграла (11) в точке $P_0 \in C$ и существование логарифмического потенциала двойного слоя $\mathrm{w}(P_0)$.

Ч.т.д.

Замечание 1. Интеграл

$$\mathrm{w}(M) = \int\limits_C \nu(P) \frac{\cos\varphi_{PM}}{r_{PM}} dl_P \qquad (19)$$

не сходится равномерно, поэтому он определяет разрывную функцию.

В самом деле, если точка M- любая точка, принадлежащая кругу $U_{P_0}^{\delta}$, то равномерная оценка ядра интеграла (19) не имеет места. Оценка (17) основана на то, что если точка $P_0 \in C$, то при $P \to P_0$, $r_{PP_0} \to 0$, но и $\cos\varphi_0 \to 0$, поскольку угол $\varphi_0 \to \dfrac{\pi}{2}$. Если же взять любую точку M, принадлежащую кругу $U_{P_0}^{\delta}$, то возможно такое положение, когда $r_{PM} \to 0$, но угол φ между векторами $\vec{r}_{PM}, \vec{n}_P$ при этом к значению $\dfrac{\pi}{2}$ не стремится и оценка (17) уже не проходит. Интересно, что если в качестве окрестности точки $P_0 \in C$ взять дугу C^{δ}, в пределах такой окрестности можно доказать равномерную сходимость. Это означает непрерывность логарифмического потенциала двойного слоя на несущей кривой C.

Замечание 2. выражение (20)

$$\mathrm{w}\left(P_0\right)=\int\limits_C \nu\left(P\right)\frac{\cos\varphi_{PP_0}}{r_{PP_0}}dl_P, \qquad (20)$$

где точка $P_0 \in C,$ называется **прямым значением** логарифмического потенциала двойного слоя.

3. Разрыв потенциала двойного слоя.

а) Случай постоянной плотности. Пусть плотность логарифмического потенциала двойного слоя постоянна: $\nu\left(P\right)=\nu_0=\mathrm{const}.$

Соответствующий потенциал обозначим через $\mathrm{w}_0\left(M\right)$:

$$\mathrm{w}_0\left(M\right)=\nu_0\int\limits_C \frac{\cos\varphi}{r_{PM}}dl_P=\nu_0\int\limits_C \frac{\partial}{\partial n_P}\ln\left(\frac{1}{r_{PM}}\right)dl_P. \qquad (21)$$

Теорема 3. Для потенциала $w_0(M)$ справедлива формула:

$$w_0(M)=\begin{cases}2\pi\nu_0,\ M\in G,\\ \pi\nu_0,\ M\in C,\\ 0, M\notin \bar{G},\end{cases} \tag{22}$$

где C замкнутая кривая класса A, ограничивающая плоскую область G: $\bar{G}=G+C$.

Доказательство. Воспользуемся формулой Грина на плоскости:

$$\Omega_2 u(M)=\int_C\left(\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}\ln\frac{1}{r_{PM}}-u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\ln\frac{1}{r_{PM}}\right)dl_P-\int_G \Delta u(Q)\ln\frac{1}{r_{QM}}ds_Q, \tag{23}$$

$$\Omega_2=\begin{cases}2\pi, M\in G,\\ \pi, M\in C,\\ 0, M\notin \bar{G}.\end{cases}$$

Полагая $u(M)=v_0$ и учитывая, что в определении логарифмического потенциала двойного слоя нормаль внутренняя, а в формуле Грина нормаль внешняя, получим формулу (22).

Ч.т.д.

Замечание 1.Функция $\mathrm{w}_0(M)$ при переходе через контур C претерпевает скачок:

$$\mathrm{w}_0^{(i)}(P)-\mathrm{w}_0^{(e)}(P)=2\pi\nu_0, \quad P\in C, \tag{24}$$

где $\mathrm{w}_0^{(\mathrm{i})}(P)$ – значение $\mathrm{w}_0(P)$ внутри контура C, а $\mathrm{w}_0^{(\mathrm{e})}(P)$ – значение вне контура C, причем:

$$\mathrm{w}_0^{(i)}(P)=\mathrm{w}_0(P)+\pi\nu_0, \quad \mathrm{w}_0^{(e)}(P)=\mathrm{w}_0(P)-\pi\nu_0. \tag{25}$$

Замечание 2. Пусть на контуре C (не замкнутом или замкнутом) $\cos\varphi$, где $\varphi -$ угол между векторами $\vec{r}_{PM}$, $\vec{n}_P$, сохраняет знак. Это означает, что луч, проведенный из точки M, пересекает кривую C только в одной точке, то есть из точки M все время видна одна сторона кривой C. Тогда

$$\int\limits_C \frac{|\cos\varphi|}{r_{PM}} dl_P \le 2\pi. \qquad (26)$$

б) Случай переменной плотности.

Теорема 4. Если плотность $\nu(P) -$ кусочно-непрерывная ограниченная функция $|\nu(P)| < N$, то в точках непрерывности P_0 функции $\nu(P)$ логарифмический потенциал двойного слоя претерпевает скачок

$$\mathrm{w}^{(i)}(P_0) = \mathrm{w}(P_0) + \pi\nu(P_0),\ \mathrm{w}^{(e)}(P_0) = \mathrm{w}(P_0) - \pi\nu(P_0),\quad (27)$$

$$\mathrm{w}^{(i)}(P_0) - \mathrm{w}^{(e)}(P_0) = 2\pi\nu(P_0), \quad P_0 \in C, \quad (28)$$

где $\mathrm{w}^{(i)}(P_0)$, $\mathrm{w}^{(e)}(P_0)$ – предельные значения потенциала при стремлении точки M к точке P_0, соответственно, с внутренней и внешней стороны контура C.

Доказательство. Пусть P_0 – точка непрерывности функции $\nu(P)$. Положим $\nu_0 = \nu(P_0)$ и рассмотрим функцию

$$J(M) = \mathrm{w}(M) - \mathrm{w}_0(M) = \int_C \left(\nu(P) - \nu(P_0)\right)\frac{\cos\varphi}{r_{PM}}dl_P. \quad (29)$$

Покажем, что функция $J(M)$ непрерывна в точке P_0. Тогда, так как $w_0(M)$ имеет в точке P_0 скачок, то для его компенсации и функция $w(M)$ должна иметь в точке P_0 такой же скачок.

Докажем равномерную сходимость функции $J(M)$ в точке P_0. Пусть дано любое $\varepsilon > 0$. Выберем по нему такое $\delta > 0$, чтобы

$$\left|\nu(P)-\nu(P_0)\right| < \frac{\varepsilon}{2\pi},\ P \in C^\delta = C \cap U_{P_0}^\delta. \tag{30}$$

Учитывая формулу (26), получим

$$\left|\int_{C^\delta}\left(\nu(P)-\nu(P_0)\right)\frac{\cos\varphi}{r_{PM}}dl_P\right| \le \frac{\varepsilon}{2\pi}2\pi = \varepsilon \tag{31}$$

для любого $M \in U_{P_0}^\delta$.

Таким образом, интеграл $J(M)$ равномерно сходится по параметру М в точке P_0 и, следовательно, непрерывен в этой точке.

Получаем, что

$$\mathrm{w}^{(i)}(P_0) = \mathrm{w}_0^{(i)}(P_0) + J(P_0) = \mathrm{w}_0(P_0) + \pi\nu_0 + J(P_0) =$$

$$= \mathrm{w}(P_0) + \pi\nu(P_0), \tag{32}$$

$$\mathrm{w}^{(e)}(P_0) = \mathrm{w}_0^{(e)}(P_0) - J(P_0) = \mathrm{w}_0(P_0) - \pi\nu_0 - J(P_0) =$$

$$= \mathrm{w}(P_0) - \pi\nu(P_0), \tag{33}$$

$$\mathrm{w}^{(i)}(P_0) - \mathrm{w}^{(e)}(P_0) = 2\pi\nu(P_0). \tag{34}$$

Ч.т.д.

Замечание. Кривая С может быть и незамкнутой. В самом деле, если С – незамкнутая двусторонняя кривая, то мы можем ее замкнуть (гладко, чтобы полученная замкнутая кривая принадлежала классу А) и положить плотность на замыкающем участке равной нулю. Тогда результирующая плотность будет кусочно-непрерывной и в точках непрерывности (кроме концов кривой С) функции $\nu\left(P\right)$ будут справедливы формулы (32)-(34).

4. Разрыв нормальной производной логарифмического потенциала простого слоя.

Покажем. что нормальные производные логарифмического потенциала простого слоя имеют на контуре С скачок, как и потенциал двойного слоя

Обозначим через $\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right)^{(e)}$, $\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right)^{(i)}$ пределы производной $\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}$ при стремлении точки M к точке P_0, соответственно, с внешней или внутренне стороны контура C. Назовем их внешними или внутренними производными по внутренней (внешней) нормали, если ось $У$ направлена по внутренней (внешней) нормали.

Теорема. Если $\mu(P)-$ кусочно-непрерывная ограниченная функция $|\mu(P)| < N = const$, то в точках P_0 непрерывности функции $\mu(P)$ нормальные производные логарифмического потенциала простого слоя по внутренней нормали претерпевает скачок:

$$\frac{\partial \mathrm{v}^{(i)}}{\partial n_i}(P_0) = \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial n_i}(P_0) - \pi\mu(P_0); \quad \frac{\partial \mathrm{v}^{(e)}}{\partial n_i}(P_0) = \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial n_i}(P_0) + \pi\mu(P_0);$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}^{(i)}}{\partial n_i}(P_0) - \frac{\partial \mathrm{v}^{(e)}}{\partial n_i}(P_0) = -2\pi\mu(P_0). \tag{35}$$

Замечание. В случае производной по внешней нормали формулы имеют вид:

$$\frac{\partial \mathrm{v}^{(i)}}{\partial n_e}(P_0)=\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial n_e}(P_0)+\pi\mu(P_0);\quad \frac{\partial \mathrm{v}^{(e)}}{\partial n_e}(P_0)=\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial n_e}(P_0)-\pi\mu(P_0);$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}^{(i)}}{\partial n_e}(P_0)-\frac{\partial \mathrm{v}^{(e)}}{\partial n_e}(P_0)=2\pi\mu(P_0). \qquad (36)$$

Доказательство. Пусть ось Y направлена по внутренней нормали: $\frac{\partial}{\partial y}\equiv\frac{\partial}{\partial n_i}$. Из рис. 3 ясно, что $\psi=\pi-(\alpha+\varphi)$. Здесь $\varphi-$ угол между векторами $\vec{r}_{PM}$, $\vec{n}_P$, а $\alpha,\ \psi-$ углы, соответственно, между векторами $\vec{r}_{MP}$, $\vec{n}_P$, и положительным направлением оси Y, где $M=M(0,y)$, $P=P(\xi,\eta)$ (см. рис. 3). Подсчитаем производную

$$\frac{\partial}{\partial n_i}\ln\frac{1}{{}_{PM}}.$$

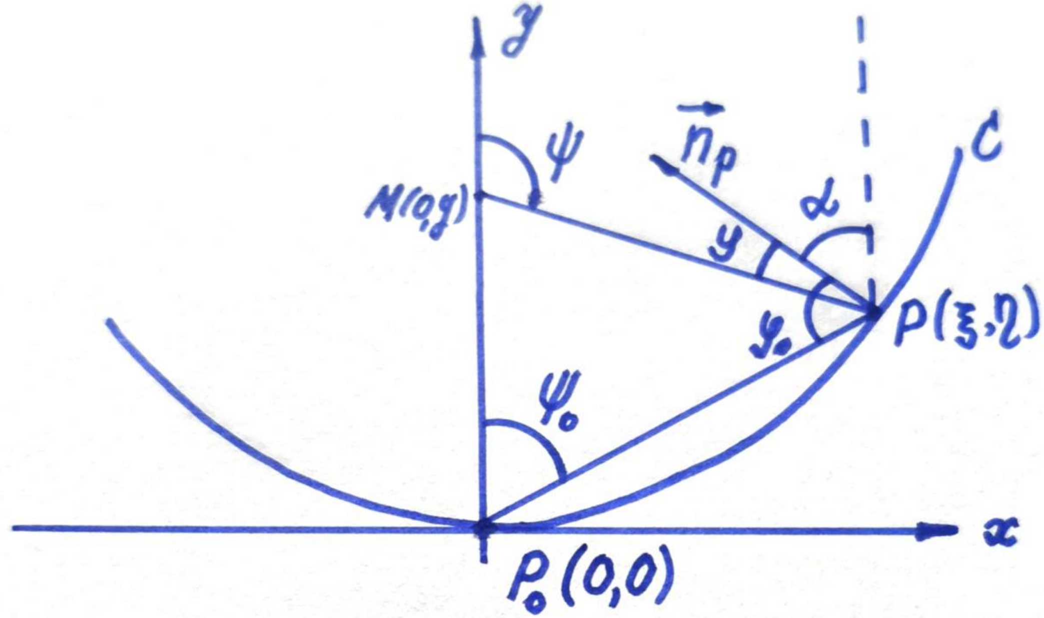

Рис. 3

$$r_{PM} = \sqrt{\xi^2 + \left(y-\eta\right)^2}, \frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{1}{r_{PM}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\xi^2 + \left(y-\eta\right)^2 \right) =$$

$$= \frac{\eta - y}{\xi^2 + \left(y-\eta\right)^2} = \frac{\eta - y}{\sqrt{\xi^2 + \left(y-\eta\right)^2}} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \left(y-\eta\right)^2}} = \frac{\cos\psi}{r_{PM}}. \qquad (37)$$

Поэтому из формул (35) и (37) получаем, учитывая, что $\psi = \pi - \left(\alpha + \varphi\right)$:

$$\frac{\partial \mathrm{v}\left(M\right)}{\partial y} = \int_C \mu\left(P\right) \frac{\cos\psi}{r_{PM}} dl_P = -\int_C \mu\left(P\right) \cos\alpha \frac{\cos\varphi}{r_{PM}} dl_P +$$

$$+ \int_C \mu\left(P\right) \frac{\sin\alpha}{r_{PM}} \sin\varphi dl_P = -\hat{\mathrm{w}}\left(M\right) + I\left(M\right). \qquad (38)$$

Функция

$$\hat{\mathrm{w}}(M)=\int_C \mu(P)\cos\alpha\,\frac{\cos\varphi}{r_{PM}}\,dl_P \tag{39}$$

является логарифмическим потенциалом двойного слоя с плотностью $\hat{\mu}(P)=\mu(P)\cos\alpha.$ Он претерпевает скачок при переходе через контур C. Ядро интеграла $I(M)$ ограничено в точке P_0. Это следует из оценки (14):

$$|\sin\alpha|<K|\xi|,\ \ \frac{|\sin\alpha|}{r_{PM}}<K\frac{|\xi|}{r_{PM}}<K,\ \ \left|\frac{\sin\alpha}{r_{PM}}\sin\varphi\right|<K \tag{40}$$

Из ограниченности ядра следует равномерная сходимость интеграла $I(M)$ в точке P_0 и, следовательно, его непрерывность в этой точке. Итак, учитывая свойство логарифмического потенциала двойного слоя, а также непрерывность интеграла $I(M)$ и формулу (38), получим:

$$\frac{\partial \mathrm{v}^{(i)}(P_0)}{\partial n_i} \equiv \frac{\partial \mathrm{v}^{(i)}(P_0)}{\partial y} = -\hat{\mathrm{w}}(P_0) - \pi \hat{\nu}(P_0) + I(P_0), \qquad (41)$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}^{(e)}(P_0)}{\partial n_i} \equiv \frac{\partial \mathrm{v}^{(e)}(P_0)}{\partial y} = -\hat{\mathrm{w}}(P_0) + \pi \hat{\nu}(P_0) + I(P_0). \qquad (42)$$

Обозначим

$$\frac{\partial \mathrm{v}(P_0)}{\partial n_i} \equiv \frac{\partial \mathrm{v}(P_0)}{\partial y} = -\hat{\mathrm{w}}(P_0) + I(P_0) = \int_C \mu(P) \frac{\cos\psi_0}{r_{PP_0}} dl_P. \qquad (43)$$

В точке P_0 угол $\alpha = \alpha(P_0) = 0,$ поэтому $\hat{\mu}(P_0) = \mu(P_0)\cos\alpha(P_0) = \mu(P_0),$

а угол $\psi_0 = \psi(P_0).$

Таким образом, получаем формулы (35):

$$\frac{\partial \mathbf{v}^{(i)}}{\partial n_i}(P_0) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n_i}(P_0) - \pi\mu(P_0); \quad \frac{\partial \mathbf{v}^{(e)}}{\partial n_i}(P_0) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n_i}(P_0) + \pi\mu(P_0);$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}^{(i)}}{\partial n_i}(P_0) - \frac{\partial \mathbf{v}^{(e)}}{\partial n_i}(P_0) = -2\pi\mu(P_0). \tag{35}$$

Формулы (36) получаются аналогично. **Ч.т.д.**

6) Обобщение на трехмерный случай. Поверхность Ляпунова

Определение. Поверхность S называется поверхностью Ляпунова, если:

1) в каждой точке P поверхности существует касательная плоскость, то есть существует нормаль в каждой точке P поверхности;

2) существует такое δ, общее для всех точек поверхности, что часть поверхности S^{δ}, попавшая внутрь шара $K_P^{\delta}:\ S^{\delta} = S \cap K_P^{\delta}$, может быть задана в локальной системе координат как однозначная функция:

$z = f(x, y)$;

3) угол $\gamma(P_1, P_2) = (\vec{n}_{P_1}, \vec{n}_{P_2})$ между нормалями в соседних точках P_1, P_2 участка поверхности S^{δ} удовлетворяет условию:

$$\gamma(P_1, P_2) < Ar_{P_1P_2}^{\lambda},\ 0 < \lambda \le 1,\ P_1, P_2 \in S^{\delta}.$$

Замечание 1 Константы A и λ являются общими для всей поверхности S.

Замечание 2 В определении вместо третьего условия можно потребовать, чтобы нормаль к поверхности $\vec{n}_P$ была непрерывна по Гёльдеру на S, то есть существую такие числа $A > 0, \quad 0 < \lambda \leq 1$ такие, что

$$\left|\vec{n}_{P_1} - \vec{n}_{P_2}\right| \leq A r_{P_1 P_2}^{\lambda}, P_1, P_2 \in S^{\delta}.$$

Из этого определения можно сделать вывод, что поверхность Ляпунова содержится в классе поверхностей C^1; с другой стороны, всякая ограниченная замкнутая поверхность класса C^2 есть поверхность Ляпунова . (См. В.С.Владимиров. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981).

Замечание 3 Имеет место следующая лемма:

Лемма. Если S – поверхность Ляпунова, то функция $\cos\varphi_0$ непрерывна на $S\times S : \cos\varphi_0 \in C(S\times S)$ и существует такая постоянная B>0, что

$$\left|\cos\varphi_0\right| \le Br_{PP_0}^{\lambda}, P, P_0 \in S,$$

где $\varphi_0 = \left(\vec{n}_P, \vec{r}_{PP_0}\right)$.

На поверхностях Ляпунова поверхностные потенциалы обладают свойствами аналогичными свойствам логарифмических потенциалов на кривых класса А.

В частности, для ограниченных локально интегрируемых плотностей $\mu(P)$, $\nu(P)$ можно доказать непрерывность потенциала простого слоя

$$\mathrm{v}(M) = \iint\limits_S \frac{\mu(P)}{r_{PM}} d\sigma_P. \qquad (7)$$

и существование всюду в R^3 потенциал двойного слоя

$$\mathrm{w}(M) = \iint\limits_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PM}}\right) d\sigma_P = \iint\limits_S \nu(P) \frac{\cos\varphi_{PM}}{r_{PM}^2} d\sigma_P \qquad (8)$$

непрерывного на поверхности S.

Имеет место формула

$$\iint\limits_S \frac{\cos\varphi}{r_{PM}^2} d\sigma_P = \begin{cases} 4\pi, M \in D, \\ 2\pi, M \in S, \\ 0, M \notin \bar{D}, \end{cases} \qquad \bar{D} = D + S.$$

Отсюда для поверхностного потенциала двойного слоя с постоянной плотностью получаются формулы:

$$\iint_S \nu_0 \frac{\cos\varphi}{r_{PM}^2} d\sigma_P = \begin{cases} 4\pi\nu_0, M \in D, \\ 2\pi\nu_0, M \in S, \\ 0, M \notin \bar{D}, \end{cases} \quad \bar{D} = D + S. \tag{44}$$

В точках непрерывности P_0 кусочно-непрерывной и ограниченной плотности $\nu(P)$ поверхностный потенциал двойного слоя претерпевает скачок:

$$\mathrm{w}^{(i)}(P_0) = \mathrm{w}(P_0) + 2\pi\nu(P_0),\ \mathrm{w}^{(e)}(P_0) = \mathrm{w}(P_0) - 2\pi\nu(P_0),$$

$$\mathrm{w}^{(i)}(P_0) - \mathrm{w}^{(e)}(P_0) = 4\pi\nu(P_0), \quad P_0 \in S,$$

В точках непрерывности P_0 кусочно-непрерывной и ограниченной плотности $\mu(P)$ производная по нормали поверхностного потенциала простого слоя претерпевает скачок. По внутренней нормали:

$$\frac{\partial \mathrm{v}^{(i)}}{\partial n_i}(P_0)=\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial n_i}(P_0)-2\pi\mu(P_0);\quad \frac{\partial \mathrm{v}^{(e)}}{\partial n_i}(P_0)=\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial n_i}(P_0)+2\pi\mu(P_0);$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}^{(i)}}{\partial n_i}(P_0)-\frac{\partial \mathrm{v}^{(e)}}{\partial n_i}(P_0)=-4\pi\mu(P_0).\quad P_0\in S,$$

по внешней нормали:

$$\frac{\partial \mathrm{v}^{(i)}}{\partial n_e}(P_0)=\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial n_e}(P_0)+2\pi\mu(P_0);\quad \frac{\partial \mathrm{v}^{(e)}}{\partial n_e}(P_0)=\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial n_e}(P_0)-2\pi\mu(P_0);$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}^{(i)}}{\partial n_e}(P_0)-\frac{\partial \mathrm{v}^{(e)}}{\partial n_e}(P_0)=4\pi\mu(P_0).\quad P_0\in S.$$

Докажем еще две теоремы о свойствах поверхностных потенциалов, которые понадобятся нам в следующем разделе.

Теорема 6. Поверхностные потенциалы простого и двойного слоя являются гармоническими функциями всюду в R^3, кроме точек несущей поверхности.

Доказательство. Так как $M \notin S,$ то соответствующие интегралы являются собственными и поэтому

$$\Delta \mathrm{v}(M) = \iint_S \mu(P) \Delta_M \left(\frac{1}{r_{PM}} \right) d\sigma_P = 0,$$

$$\Delta \mathrm{w}(M) = \iint_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\Delta_M \left(\frac{1}{r_{PM}} \right) \right) d\sigma_P = 0.$$

Ч.т.д.

Теорема 7. Если несущая поверхность S ограничена, то поверхностные потенциалы простого и двойного слоя равномерно стремятся к нулю, когда точка M стремится к бесконечности.

Доказательство. Используем теорему о среднем:

$$\mathrm{v}(M)=\frac{1}{r_{P^*M}}\iint_S \mu(P)d\sigma_P=\frac{m}{r_{P^*M}},P^*\in S, \qquad (45)$$

Где $m=\iint_S \mu(P)d\sigma_P -$ суммарный заряд. Аналогично получаем:

$$\mathrm{w}(M)=\frac{1}{r_{P^*M}^2}\iint_S \nu(P)\cos\varphi d\sigma_P. \qquad (46)$$

Из формул (45) и (46) следует, что

$$\mathrm{v}(M) \rightrightarrows 0,\ M \to \infty, \qquad \mathrm{w}(M) \rightrightarrows 0,\ M \to \infty.$$

Ч.т.д.

Замечание. Теоремы, аналогичные теоремам 6 и 7, справедливы и для логарифмических потенциалов простого и двойного слоя. При этом необходимо наложить условия на плотность, например, $\int\limits_C \mu(P)\,dl_P = 0.$

2. Сведение краевых задач к интегральным уравнениям

1) Некоторые сведения из теории интегральных уравнений

Определение. Интегральное уравнение

$$u(M)+\lambda\int\limits_D K(M,Q)u(Q)\,dV_Q = f(M), \qquad (1)$$

где $M=M(x,y,z)$ называется интегральным уравнением Фредгольма второго рода.

Ядро $K(M,Q)$ будем считать вещественным и непрерывным на $\bar{D}\times\bar{D}$:

$K(M,Q)\in C(\bar{D}\times\bar{D})$.

Определение. Союзным интегральным уравнением к уравнению (1) называется уравнение

$$\mathrm{v}(M)+\lambda\int\limits_D K(Q,M)\mathrm{v}(Q)\,dV_Q = g(M), \qquad (2)$$

Ядра $K(M,Q)$ и $K(Q,M)$ называются **транспонированными или союзными.**

Уравнения (1) и (2) имеют одинаковые собственные значения, ранги которых совпадают.

Собственным значением ядра $K(M,Q)$ называется значение параметра λ, при котором существует нетривиальное решение однородного уравнения

$$u(M)+\lambda\int_D K(M,Q)u(Q)\,dV_Q=0. \qquad (3)$$

Рангом собственного значения называется число линейно независимых собственных функций, отвечающих данному собственному значению.

Напомним **альтернативу Фредгольма**:

а) если $\lambda \neq \lambda_n,$ то уравнения (1) и (2) одновременно разрешимы единственным образом при любой непрерывной правой части;

б) если $\lambda = \lambda_n,$ то уравнение (1) или неразрешимо, или имеет бесконечное множество решений. Условие разрешимости уравнения (1) имеет вид

$$\int\limits_D f\left(M\right) \mathrm{v}_n^{(i)}\left(M\right) dV_M = 0, \quad i = 1, 2, ..., r_n, \qquad (4)$$

где $\mathrm{v}_n^{(i)}\left(M\right) -$ собственная функция союзного ядра, $r_n -$ ранг собственного значения $\lambda_n: \ \ r_n = \mathrm{rang}\left(\lambda_n\right),$

Определение. Ядро $K\left(M,Q\right)=\dfrac{H\left(M,Q\right)}{r_{MQ}^{\alpha}}$, $\alpha<n$, где функция $H\left(M,Q\right)\in C\left(\bar{D}\times\bar{D}\right)$, $n-$ размерность области D, называется **полярным**. Если $\alpha<\dfrac{n}{2}$, то ядро называется **слабо полярным**.

Для того, чтобы ядро $K\left(M,Q\right)$ было полярным, необходимо и достаточно, чтобы оно было непрерывным при $M\neq Q$, $M\in\bar{D}$, $Q\in\bar{D}$ и удовлетворяло оценке (см. В.С.Владимиров. Уравнения математической физики. М.: «Наука», 1967. стр. 225):

$$\left|K\left(M,Q\right)\right|\leq\frac{A}{r_{MQ}^{\alpha}},\ \alpha<n,\ M\in D,\ Q\in D.$$

Теоремы Фредгольма остаются справедливыми и для интегральных уравнений с полярным ядром на ограниченной кусочно-гладкой поверхности S:

$$u\left(P_0\right)+\lambda\iint\limits_S \frac{H\left(P,P_0\right)}{r_{PP_0}^{\alpha}}u\left(P\right)d\sigma_P = f\left(P_0\right),\ \ P_0\in S,$$

где ядро $H\left(P,P_0\right)$ равномерно непрерывно на $S\times S$ и показатель α меньше размерности S (см. С.В.Владимиров, стр. 247, где есть ссылка на книгу: И.Г.Петровский. Лекции по теории интегральных уравнений. М.: «Наука», 1965, стр. 42-54).

2) Внутренняя задача Дирихле и внешняя задача Неймана

Рассмотрим внутреннюю краевую задачу Дирихле для оператора Лапласа в области D_i, ограниченной достаточно гладкой поверхностью S, например, поверхностью Ляпунова $\bar{D}_i = D_i + S$:

$$\begin{cases} \Delta u(M) = -f(M), M \in D_i, & (5) \\ u(P) = \varphi(P), P \in S, & (6) \\ u(M) \in C^{(2)}(D_i) \cap C(\bar{D}_i). & (7) \end{cases}$$

Частным решением уравнения (5) является объемный потенциал

$$\tilde{u}(M) = \frac{1}{4\pi} \int_{D_i} \frac{f(Q)}{r_{QM}} dV_Q. \qquad (8)$$

Будем искать решение задачи (5)-(7) в виде

$$u(M) = \tilde{u}(M) + \mathrm{w}(M). \tag{9}$$

Для функции $\mathrm{w}(M)$ получаем задачу:

$$\begin{cases} \Delta \mathrm{w}(M) = 0,\ M \in D_i, & (10) \\ \mathrm{w}(P) = \varphi(P) + \tilde{u}(P) = g(P),\ P \in S. & (11) \end{cases}$$

Таким образом, с помощью замены (9) краевую задачу для уравнения Пуассона всегда можно свести к краевой задаче для уравнения Лапласа.

Будем искать решение задачи (10)-(11) в виде поверхностного потенциала двойного слоя. При любом выборе функции плотности $\nu(P)$ этот потенциал, согласно теореме 6 предыдущего раздела будет являться гармонической функцией в области D_i, то есть удовлетворять уравнению (10):

$$\mathrm{w}(M) = \int_S \nu(P) \frac{\cos\varphi}{r_{PM}^2} d\sigma_P. \qquad (12)$$

Здесь $\varphi -$ угол между векторами $\vec{r}_{PM}$, $\vec{n}_P$, где $\vec{n}_P -$ единичный вектор **внутренней** нормали в точке P .

Для удовлетворения краевому условию (11), нужно, чтобы в точках $P_0 \in S$ выполнялось соотношение

$$\mathrm{w}^{(i)}(P_0) = g(P_0), P_0 \in S,$$

или

$$\mathrm{w}^{(i)}(P_0) = \mathrm{w}(P_0) + 2\pi\nu(P_0) = g(P_0), P_0 \in S,$$

или

$$2\pi\nu\left(P_0\right)+\int_S \nu\left(P\right)\frac{\cos\varphi_0}{r_{pp_0}^2}d\sigma_P = g\left(P_0\right), P_0\in S. \qquad (13)$$

Здесь $\mathrm{w}^{(i)}\left(P_0\right),\ P_0\in S-$ внутреннее предельное значение потенциала двойного слоя на поверхности S, $\varphi_0 -$ угол между векторами $\vec{r}_{PP_0}$, $\vec{n}_P$. Уравнение (13) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Для его получения мы воспользовались свойством скачка поверхностного потенциала двойного слоя на поверхности S.

Союзным к уравнению (13) будет уравнение (14)

$$2\pi\mu\left(P_0\right)+\int_S \mu\left(P\right)\frac{\cos\psi_0}{r_{PP_0}^2}d\sigma_P = h\left(P_0\right), P_0\in S. \qquad (14)$$

Здесь ψ_0 – угол между векторами $\vec{r}_{P_0P}$, $\vec{n}_{P_0}$, где $\vec{n}_{P_0}$ – единичный вектор **внутренней** нормали в точке P_0.

Ядра интегралов в уравнениях (13) и (14) являются союзными, поскольку

$$K(P,P_0)=\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PP_0}}\right)=\frac{\cos\varphi_0}{r_{PP_0}^2},$$

$$K(P_0,P)=\frac{\partial}{\partial n_{P_0}}\left(\frac{1}{r_{P_0P}}\right)=\frac{\cos\psi_0}{r_{P_0P}^2}.$$

Покажем, что к союзному интегральному уравнению приводит внешняя задача Неймана:

$$\begin{cases} \Delta \mathrm{v}(M) = 0, M \in D_e, & (15) \\ \dfrac{\partial \mathrm{v}(P)}{\partial n_P} = h(P), P \in S, & (16) \\ \mathrm{v}(M) \Rightarrow 0, M \to \infty, & (17) \\ \mathrm{v}(M) \in C^{(2)}(D_e) \cap C^{(1)}(\bar{D}_e). & (18) \end{cases}$$

Будем искать решение задачи (15)-(18) в виде поверхностного потенциала простого слоя

$$\mathrm{v}(M) = \int_S \mu(P) \frac{1}{r_{PM}} d\sigma_P. \qquad (19)$$

Воспользуемся свойством скачка производной потенциала простого слоя по внутренней нормали:

$$\frac{\partial \mathrm{v}^{(e)}\left(P_0\right)}{\partial n_{P_0}} = 2\pi\mu\left(P_0\right) + \int\limits_S \mu\left(P\right)\frac{\cos\psi_0}{r_{PP_0}^2}d\sigma_P = h\left(P_0\right),$$

откуда следует уравнение (14).

Союзные уравнения (13) и (14) разрешимы одновременно и имеют одинаковые собственные значения.

Покажем, что $\lambda_0 = \dfrac{1}{2\pi}$ не является собственным значением уравнений (13) и (14).

Предположим, что $\lambda_0 = \dfrac{1}{2\pi}$ – собственное значение уравнений (13) и (14):

$$2\pi\mu_0\left(P_0\right) + \int\limits_S \mu_0\left(P\right)\frac{\cos\psi_0}{r_{PP_0}^2}d\sigma_P = 0. \qquad (20)$$

Образуем потенциал простого слоя с плотностью $\mu_0(P)$:

$$\mathrm{v}_0(M)=\int\limits_S \mu_0(P)\frac{1}{r_{PM}}d\sigma_P. \qquad (21)$$

В силу теоремы 6 параграфа 1, функция $v_0(M)$ является гармонической функцией в области D_e. Далее,

$$\frac{\partial \mathrm{v}_0^{(e)}(P_0)}{\partial n_{P_0}}=2\pi\mu_0(P_0)+\int\limits_S \mu_0(P)\frac{\cos\psi_0}{r_{PP_0}^2}d\sigma_P=0,\ P_0\in S. \qquad (22)$$

наконец, в силу теоремы 7 параграфа 1, функция $v_0(M)$ равномерно сходится к нулю на бесконечности, то есть является регулярной на бесконечности.

В результате для функции $\mathbf{v}_0(M)$ получаем краевую задачу:

$$\begin{cases} \Delta \mathrm{v}_0(M) = 0, M \in D_e, & (23) \\ \dfrac{\partial \mathrm{v}_0(P)}{\partial n_P} = 0, P \in S, & (24) \\ \mathrm{v}_0(M) \rightrightarrows 0, M \to \infty, & (25) \\ \mathrm{v}_0(M) \in C^{(2)}(D_e) \cap C^{(1)}(\bar{D}_e), & (26) \end{cases}$$

В силу теоремы единственности для решения внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа, $\mathrm{v}_0(M) = 0,\ M \in \bar{D}_e,$ откуда следует, что $\mathrm{v}_0(P) = 0,\ P \in S.$ Таким образом, для $\mathrm{v}_0(M)$ получаем задачу:

$$\begin{cases} \Delta \mathrm{v}_0(M) = 0, M \in D_i, & (27) \\ \mathrm{v}_0(P) = 0, P \in S, & (28) \end{cases}$$

В силу единственности решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа, $\mathbf{v}_0(M)=0,\ M\in\bar{D}_i$. Следовательно, $\mathbf{v}_0(M)\equiv 0$ и по формуле скачка нормальной производной поверхностного потенциала простого слоя получаем

$$\frac{\partial \mathrm{v}_0^{(e)}(P_0)}{\partial n_{P_0}}-\frac{\partial \mathrm{v}_0^{(i)}(P_0)}{\partial n_{P_0}}=4\pi\mu_0(P_0)=0,\ P_0\in S.$$

Так как функция $\mu_0(P)\equiv 0,$ то она по определению не является собственной функцией, и таким образом $\lambda_0=\frac{1}{2\pi}$ не является собственным значением уравнений (13) и (14).

Значит, справедлив первый случай альтернативы Фредгольма и уравнения (13) и (14) одновременно разрешимы и имеет место теорема:

Теорема 1. В трехмерном случае внутренняя краевая задача Дирихле и внешняя краевая задача Неймана одновременно разрешимы при любых непрерывных функциях $g(P)$, $h(P)$ и их решения представляются поверхностными потенциалами двойного и простого слоя соответственно.

3) Внутренняя задача Неймана и внешняя задача Дирихле

Рассмотрим внутреннюю краевую задачу Неймана:

$$\begin{cases} \Delta \mathrm{v}(M) = 0, M \in D_i, & (29) \\ \dfrac{\partial \mathrm{v}(P)}{\partial n_P} = h(P), P \in S, & (30) \\ \mathrm{v}(M) \in C^{(2)}(D_i) \cap C^{(1)}(\bar{D}_i), & (31) \end{cases}$$

Заметим, что направление нормали мы оставим таким же, как и в пункте 2.

Если решение задачи (29)-(31) искать в виде поверхностного потенциала простого слоя (21), то с учетом скачка нормальной производной на поверхности S для плотности получим уравнение:

$$\frac{\partial \mathrm{v}^{(i)}(P_0)}{\partial n_{P_0}} = -2\pi\mu(P_0) + \mathrm{v}^{(i)}(P_0) = h(P_0), P_0 \in S,$$

то есть интегральное уравнение для плотности $\mu(P)$ имеет вид:

$$2\pi\mu(P_0) - \int_S \mu(P)\frac{\cos\psi_0}{r_{PP_0}^2}\,d\sigma_P = -h(P_0), P_0 \in S. \qquad (32)$$

Если рассмотреть внешнюю задачу Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta \mathrm{w}(M) = 0, M \in D_e, & (33) \\ \mathrm{w}(P) = 0, P \in S, & (34) \\ \mathrm{w}(M) \Rightarrow 0, M \to \infty, & (35) \\ \mathrm{w}(M) \in C^{(2)}(D_e) \cap C(\bar{D}_e), & (36) \end{cases}$$

решение которой искать в виде поверхностного потенциала двойного слоя (12), то, учитывая формул скачка

$$\mathrm{w}^{(e)}(P_0) = \mathrm{w}(P_0) - 2\pi\nu(P_0) = g\ (P_0), P_0 \in S,$$

получим интегральное уравнение

$$2\pi\nu(P_0) - \int_S \nu(P)\frac{\cos\varphi_0}{r_{pp_0}^2}d\sigma_P = -g(P_0), P_0 \in S. \qquad (37)$$

Уравнения (32) и (37) являются союзными уравнениями. Из формулы (36) параграфа 1 следует, что

$$\iint_S \nu_0 \frac{\cos\varphi_0}{r_{PP_0}^2} d\sigma_P = 2\pi\nu_0, P_0 \in S.$$

Отсюда следует, что $\lambda_0 = -\dfrac{1}{2\pi}$ является собственным значением уравнения (37) и, следовательно, уравнения (32), причем собственной функцией уравнения (37) является функция $\nu_0(P) \equiv 1$, а уравнения (32) – функция $\mu_0(P)$.

Покажем, что ранг собственного значения равен 1: $rang\left(-\dfrac{1}{2\pi}\right) = 1.$

Пусть $\mu_0^k(P) -$ собственная функция, соответствующая собственному значению $\lambda_0 = -\dfrac{1}{2\pi}$:

$$2\pi\mu_0^k(P_0) - \int_S \mu_0^k(P)\frac{\cos\psi_0}{r_{PP_0}}d\sigma_P = 0,\ k = 1,2,...,rang(\lambda_0). \quad (38)$$

Составим потенциал простого слоя с плотностью $\mu_0^k(P)$:

$$\mathrm{v}^k(M) = \int_S \mu_0^k(P) \frac{1}{r_{PM}} d\sigma_P. \qquad (39)$$

В силу (38)

$$\left(\frac{\partial \mathrm{v}^k}{\partial n_{P_0}}(P_0) \right)^{(i)} = 2\pi\mu_0^k(P_0) - \int_S \mu_0^k(P) \frac{\cos\psi_0}{r_{PP_0}} d\sigma_P = 0, \; P_0 \in S,$$

а так как, в силу теоремы 6 параграфа 1,

$$\Delta \mathrm{v}^k(M) = 0, \; M \in D_i,$$

то

$$\mathrm{v}^k(M) = C_k = const, M \in \bar{D}_i, \; k = 1, 2, ..., rang(\lambda_0). \qquad (40)$$

Рассмотрим функцию:

$$V(M) = \mathrm{v}^k(M) - \frac{C_k}{C_1}\mathrm{v}^1(M) = \int_S \left(\mu_0^k - \frac{C_k}{C_1}\mu_0^1 \right) \frac{1}{r_{PM}} d\sigma_P,\ k \neq 1. \qquad (41)$$

По теореме 6 параграфа 1

$$\Delta V(M) = 0,\ \ M \notin S.$$

В силу формулы (40),

$$V(M) = 0,\ M \in \bar{D}_i$$

и, следовательно,

$$V(P) = 0,\ P \in S.$$

Наконец, по теореме 7 параграфа 1

$$V(M) \Rightarrow 0,\ M \to \infty.$$

Таким образом, получаем краевую задачу:

$$\begin{cases} \Delta V(M)=0, M\in D_e, & (42)\\ V(P)=0, P\in S, & (43)\\ V(M)\Rightarrow 0, M\to\infty, & (44)\\ V(M)\in C^{(2)}(D_e)\cap C(\bar{D}_e). & (45)\end{cases}$$

В силу единственности решения внешней задачи Дирихле для уравнения Пуассона, $V(M)=0,\ M\in\bar{D}_e,$ а так как $V(M)=0,\ M\in\bar{D}_i$ и, следовательно, $V(M)\equiv 0.$

Запишем условия скачка нормальной производной для потенциала простого слоя (41):

$$\frac{\partial V^{(e)}(P_0)}{\partial n_P} - \frac{\partial V^{(i)}(P_0)}{\partial n_P} = 4\pi\left(\mu_0^k - \frac{C_k}{C_1}\mu_0^1\right) = 0. \qquad (46)$$

Из формулы (46) вытекает, что

$$\mu_0^k = \frac{C_k}{C_1}\mu_0^1, \quad k \neq 1.$$

Следовательно, все решения $\mu_0^k, \ k \neq 1$ линейно зависимые от решения $\mu_0^1,$ то есть ранг собственного значения $\lambda_0 = -\frac{1}{2\pi}$ равен единице: $rang(\lambda_0) = 1$. Этому собственному значению соответствует единственная собственная функция $\mu_0(P)$ уравнения (32) и единственная собственная функция $\nu_0(P) \equiv 1$ уравнения (37).

Составим потециал простого слоя с плотностью $\mu_0(P)$:

$$V_0(M)=\int_S \frac{\mu_0(P)}{r_{PM}}d\sigma_P. \tag{47}$$

В силу формулы (40) потенциал $V_0(M)\equiv \mathbf{v}^1(M)=C,\ M\in\bar{D}_i$ и в силу теорем 6 и 7 параграфа 1 является регулярной гармонической функцией в области D_e.

Определение. Потенциал, определяемый формулой (47), называется **потенциалом Робена**.

Потенциал Робена дает решение задачи о распределении зарядов на идеально проводящем теле.

Таким образом, для союзных уравнений (32) и (37) осуществляется вторая возможность альтернативы Фредгольма, мы попадаем на спектр и и для разрешимости уравнений (32) и (37) необходимо, чтобы правые части этих уравнений были ортогональны собственным функциям союзных уравнений. Для уравнения (32) это означает выполнения условия:

$$\int_S h(P)\nu_0(P)\,d\sigma_P = \int_S h(P)1\,d\sigma_P = 0. \qquad (48)$$

Условие (48) является необходимым условием разрешимости внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа, полученное нами ранее с помощью формулы Грина.

Аналогично для уравнения (37) получается условие разрешимости

$$\int_S g(P)\mu_0(P)\,d\sigma_P = 0. \qquad (49)$$

Решекние должно вести себя как

Условие (49) является слишком жестким и не вяжется с единственностью решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Причина данного противоречия заключается в том, что мы искали решение внешней задачи Дирихле (33)-(36) в виде поверхностного потенциала двойного слоя, который, в силу теоремы 7 параграфа 1 ведет себя на бесконечности как $O\left(\frac{1}{r^2}\right)$, в то время, как для классического решения такой задачи требуется регулярность решения на бесконечности, то есть решение должно вести себя как $O\left(\frac{1}{r}\right)$. Таким образом, разыскивая решение в виде поверхностного потенциала двойного слоя, мы сузили класс решения.

Будем искать решение внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в следующем виде:

$$\mathrm{w}(M)=\int_S \nu(P)\frac{\cos\varphi}{r_{PM}^2}d\sigma_P+\frac{\alpha}{r_{M_iM}}, \qquad (50)$$

где постоянная α пока не определена, а $M_i\in D_i$.

В этом случае для функции $\nu(P)$ получается интегральное уравнение

$$2\pi\nu(P_0)-\int_S \nu(P)\frac{\cos\varphi_0}{r_{pp_0}^2}d\sigma_P=-g(P_0)+\frac{\alpha}{r_{M_iP_0}},\ P_0\in S, \qquad (51)$$

и условие разрешимости запишется в виде:

$$\int_S \mu_0(P)\left(g(P)-\frac{\alpha}{r_{M_iP}}\right)d\sigma_P=0.$$

Но поскольку точка $M_i \in D_i$, то, по свойству потенциала Робена,

$$\int\limits_S \frac{\mu_0(P)}{r_{PM_i}} d\sigma_P = C,\ M_i \in D_i,$$

и всегда можно отнормировать собственную функцию $\mu_0(P)$ так , что C=1. Тогда

$$\alpha = \int\limits_S \mu_0(P) g(P) d\sigma_P,$$

и при таком выборе α уравнение (32) всегда разрешимо и представимо в виде

$$\mathrm{w}(M) = \int\limits_S \nu(P) \frac{\cos\varphi}{r_{PM}^2} d\sigma_P + \frac{1}{r_{M_i M}} \int\limits_S \mu_0(P) g(P) d\sigma_P. \quad (52)$$

Заметим, что во второй возможности альтернативы Фредгольма, когда мы попадает на спектр, при выполнении условия разрешимости интегральное уравнение (37) будет иметь бесконечное множество решений $\nu(P)+C\nu_0=\nu(P)+C.$ Но внешняя задача Дирихле для уравнения Лапласа будет тем не менее иметь единственное решение

$$\mathrm{w}(M)=\int_S \nu(P)\frac{\cos\varphi}{r_{PM}^2}d\sigma_P+C\int_S \frac{\cos\varphi}{r_{PM}^2}d\sigma_P+\frac{1}{r_{M_iM}}\int_S \mu_0(P)g(P)d\sigma_P=$$

$$=\int_S \nu(P)\frac{\cos\varphi}{r_{PM}^2}d\sigma_P+\frac{1}{r_{M_iM}}\int_S \mu_0(P)g(P)d\sigma_P,$$

так как $\int_S \frac{\cos\varphi}{r_{PM}^2}d\sigma_P=0, M\in D_e$ в силу формулы (36) параграфа 1.

Итак, доказаны две теоремы.

Теорема 2. В трехмерном случае внутренняя задача Неймана разрешима с точностью до произвольной аддитивной постоянной при любой непрерывной функции $h(P)$, удовлетворяющей условию ортогональности $\int\limits_S h(P) d\sigma_P = 0$ и ее решение представляется в виде поверхностного потенциала простого слоя.

Теорема3. В трехмерном случае внешняя задача Дирихле разрешима единственным образом при любой непрерывной функции $g(P)$ и ее решение представляется в виде суммы поверхностного потенциала двойного слоя и потенциала $\frac{1}{r_{M_i M}} \int\limits_S \mu_0(P) g(P) d\sigma_P,\ M_i \in D_i.$

4) Примеры

1. Полупространство. Рассмотрим в верхнем полупространстве $z \geq 0$ задачу Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta u(M) = 0, M \in R^{3,+} \equiv \{-\infty < x, y < \infty, 0 < z < \infty\}, \\ u(P) = g(P), P \in \{z = 0\}, \\ u(M) \rightrightarrows 0, M \to \infty. \end{cases} \qquad (53)$$

Будем искать решение задачи (53) в виде поверхностного потенциала двойного слоя:

$$u(M) = \iint\limits_{\{z=0\}} \nu(P) \frac{\cos\varphi}{r_{PM}^2} d\sigma_P. \qquad (54)$$

Интегральное уравнение Фредгольма второго рода имеет вид:

$$2\pi\nu\left(P_0\right)+\iint\limits_{\{z=0\}}\nu\left(P\right)\frac{\cos\varphi_0}{r_{PP_0}^2}d\sigma_P=g\left(P_0\right),\ P_0\in\{z=0\}.$$

В данном случае

$$\angle\varphi_0=\frac{\pi}{2},\ \cos\varphi_0=0,\ \nu\left(P_0\right)=\frac{1}{2\pi}g\left(P_0\right),\ \cos\varphi=\frac{z}{r_{PM}},\qquad(55)$$

Подставляя формулы (55) в формулу (54), окончательно получим:

$$u\left(x,y,z\right)=\frac{z}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{g\left(\xi,\eta\right)d\xi d\eta}{\sqrt{\left(x-\xi\right)^2+\left(y-\eta\right)^2+z^2}}.$$

2. Круг. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге $\bar{U}_0^a = \bar{U}_0^a + C_0^a$:

$$\begin{cases} \Delta u(M) = 0, M \in U_0^a, \\ u(P) = g(P), P \in C_0^a \end{cases}. \qquad (56)$$

Будем искать решение задачи (56) в виде логарифмического потенциала двойного слоя

$$u(M) = \int_{C_0^a} \nu(P) \frac{\cos\varphi}{r_{PM}} dl_P, \quad dl_P = a d\phi. \qquad (57)$$

В результате получаем интегральное уравнение Фредгольма:

$$\pi\nu(\phi_0) + a\int_0^{2\pi} \nu(\phi) \frac{\cos\varphi_0}{r_{PP_0}} d\phi = g(\phi_0). \qquad (58)$$

Так как $r_{PP_0} = 2a\cos\varphi_0$, то уравнение (58) примет вид

$$\nu(\phi_0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \nu(\phi)d\phi = \frac{1}{\pi} g(\phi_0). \qquad (59)$$

Введем обозначение

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \nu(\phi)\,d\phi \qquad (60)$$

Тогда

$$\nu(\phi_0) = \frac{1}{\pi} g(\phi_0) - A \qquad (61)$$

и, следовательно,

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \nu(\phi)\,d\phi = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi} g(\phi)d\phi - A,$$

откуда

$$A = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} g(\phi) d\phi. \qquad (62)$$

Подставляя (61) и (62) в (57), получим

$$u(M) = u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\phi) \frac{\cos\varphi}{r_{PM}} a d\phi - A \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{r_{PM}} a d\phi. \qquad (63)$$

В силу формулы (22) параграфа 1

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{r_{PM}} a d\phi = 2\pi,\ M \in U_0^a. \qquad (64)$$

Из формул (62)-(64) получим:

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\phi)\frac{\cos\varphi}{r_{PM}}a\,d\phi-2\pi A=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\phi)\frac{\cos\varphi}{r_{PM}}a\,d\phi-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\phi)\,d\phi= \tag{65}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\phi)\frac{2a\cos\varphi-r_{PM}}{r_{PM}}d\phi.$$

По тереме косинусов

$$r_0^2=a^2+r_{PM}^2-2ar_{PM}\cos\varphi \quad\Rightarrow\quad 2a\cos\varphi-r_{PM}=\frac{a^2-r_0^2}{r_{PM}}. \tag{66}$$

Из формул (65). (66) окончательно получаем:

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\phi)\frac{a^2-r_0^2}{r_{PM}^2}\,d\phi. \qquad (67)$$

Формула (67) носит название **интеграл Пуассона для круга.**

3. Задача Дирихле на собственные значения для оператора Лапласа

1) Постановка задачи

Рассмотрим задачу на собственные функции и собственные значения (задачу Штурма-Лиувилля) в ограниченной области D с достаточно гладкой границей S, например являющейся поверхностью Ляпунова:

$$\begin{cases} \Delta u(M) + \lambda \rho(M) u(M) = 0,\ M \in D, & (1) \\ u(P) = 0, P \in S. & (2) \end{cases}$$

где $\rho(M) > 0,\ M \in D,\ \rho(M) \in C^{(1)}(\bar{D})$. Будем искать классические собственные функции:

$$u(M) \in C^{(2)}(D) \cap C(\bar{D}).$$

Замечание. Можно показать, что собственные функции задачи (1)-(2) обладают непрерывной нормальной производной на поверхности S и поэтому к ним можно применять формулы Грина (см. В.И.Смирнов. Курс высшей математики, том IV, часть 2, стр. 387).

2) Свойства интегральных уравнений Фредгольма второго рода с вещественным симметричным слабополярным ядром

Существование собственный функций и собственных значений задачи (1)-(2) докажем, сведя ее к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с вещественным симметричным ядром

$$v(M) = \lambda \int_D K(M,Q) v(Q)\, dV_Q, \qquad K(M,Q) = K(Q,M).$$

Напомним свойства симметричного ядра.

1) Если $K(M,Q)=K(Q,M)$, то существует хотя бы одно собственное значение.

2) Ранг собственных значений конечен.

3)Число собственных значений или конечно, или счетно, в последнем случае $\lambda_n \to \infty,\ n \to \infty.$

4) Собственные функции $v_n(M) \in C(\bar{D})$ ортогональны с весом, равным единице и их можно нормировать:

$$v_n(M) = \lambda_n \int_D K(M,Q) v_n(Q)\, dV_Q, \quad \left\| v_n(M) \right\| = 1,\ n = 1, 2, \ldots$$

Тогда выражение

$$\frac{v_n(M)}{\lambda_n} = \int_D K(M,Q) v_n(Q)\, dV_Q, \quad n = 1, 2, \ldots$$

можно рассматривать как коэффициент Фурье в разложении ядра по системе собственных функций ядра. Таким образом, для ядра получается билинейное разложение:

$$K(M,Q) = \sum_{(n)} \frac{v_n(M) v_n(Q)}{\lambda_n} \tag{3}$$

В формуле (3) каждое собственное значение повторяется столько раз, каков его ранг.

а) Если число собственных значений конечно, то ядро представляется в виде конечной суммы и носит название вырожденного ядра.

б) Если ядро невырожденное, то в случае положительно определенного непрерывного и ограниченного ядра ряд (3) сходится абсолютно и равномерно.

Замечание.ТеоремаМорера.Билинейный ряд (3) эрмитова положительно определенного непрерывного в $\bar{D}\times\bar{D}$ ядра $K(M,Q)\in C(\bar{D}\times\bar{D})$, абсолютно и равномерно сходится к ядру $K(M,Q)$.

Комплексное ядро $K(M,Q)=\bar{K}(Q,M)$, где черта – знак комплексного сопряжения, называется эрмитовым. Для вещественных ядер эрмитово ядро совпадает с симметричным.

в) Если ядро полярное, то ряд (3) сходится в среднем.

Замечание. Ядро

$$K(M,Q)=\frac{H(M,Q)}{r_{MQ}^{\alpha}},\alpha<N,$$

где $H(M,Q)\in C(\bar{D}\times\bar{D})$, $N-$ размерность области $D,$ называется **полярным**. Если $\alpha<\frac{N}{2},$ то ядро называется **слабо полярным**.

5) Все собственные функции ядра $K(M,Q)$ непрерывны.

6) Имеет место теорема Гильберта-Шмидта.

Теорема. Если функция $f(M)\in C(\bar{D})$ истокообразно представима через слабо-полярное симметричное знакоопределеннное ядро с помощью непрерывной функции $h(M)\in C(\bar{D}),$ то есть

$$f(M)=\int_D K(M,Q)h(Q)dV_Q,$$

то функция $f(M)$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям ядра:

$$f(M) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n v_n(M),$$

где f_n – коэффициенты Фурье:

$$f_n = \int_D f(Q) v_n(Q)\, dV_Q, \quad n = 1, 2, \ldots$$

7) Если непрерывная функция $f(M) \in C(\bar{D})$ ортогональна всем

собственным функциям ядра $\int_D f(Q) v_n(Q)\, dV_Q = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$

то она ортогональна ядру $\int_D K(M,Q) f(Q)\, dV_Q = 0.$

3) Сведение краевой задачи на собственные функции к интегральному уравнению Фредгольма с симметричным слабополярным ядром

$$\begin{cases} \Delta u(M) + \lambda \rho(M) u(M) = 0, \ M \in D, & (4) \\ u(P) = 0, P \in S, & (5) \\ u(M) \in C^{(2)}(D) \cap C(\bar{D}). & (6) \end{cases}$$

Уравнение (4) может быть записана в следующем виде

$$\Delta u(M) = -\lambda \rho(M) u(M).$$

Выше было доказано существование функции Грина задачи Дирихле. Поэтому решение задачи (4)-(6) можно записать в виде:

$$u(M)=\lambda\int_D G(M,Q)\rho(Q)u(Q)\,dV_Q. \qquad (7)$$

Покажем, что задача (4)-(6) и уравнение (7) эквивалентны. Действительно: а) если существует решение задачи (4)-(6), то оно в силу определения функции Грина задачи Дирихле удовлетворяет уравнению (7); б) в силу свойств функции Грина задачи Дирихле

$$\Delta_M G(M,Q)=-\delta(M,Q), M\in D;\quad G(P,Q)=0, P\in S$$

любое решение уравнения (7) удовлетворяет задаче (4)-(6).

Функция Грина $G(M,Q)$ симметричная, однако ядро уравнения (7) $G(M,Q)\rho(Q)$ несимметрично. Однако его легко симметризовать. Положим

$$v(M)=\sqrt{\rho(M)}u(M),\quad K(M,Q)=\sqrt{\rho(M)}G(M,Q)\sqrt{\rho(Q)}.$$

Тогда, умножая уравнение (7) на $\sqrt{\rho(M)}$, получим:

$$v(M) = \lambda \int_D K(M,Q) v(Q)\, dV_Q \tag{8}$$

Уравнение Фредгольма второго рода с симметричным ядром, эквивалентное задаче (4)-(6). Отсюда следует, что собственные значения задачи (4)-(6) совпадают с собственными значениями уравнения (8), а собственные функции задачи (4)-(6) получаются путем деления собственных функций уравнения (8) на $\sqrt{\rho(M)}$.

4)Свойства собственных функций и собственных значений задачи (4)-(6)

В главе 3 части II нашего курса мы рассмотрели свойства собственных функций и собственных значений задачи Штурма-Лиувилля. В этом разделе мы продолжим их изучение.

Теорема 1. Задача (4)-(6) имеет бесконечное счетное множество собственных значений.

Доказательство. Существование хотя бы одного собственного значения следует из симметрии ядра $K(M,Q)$. В силу общих свойств ядра имеет место билинейное разложение (3)

$$K(M,Q)=\sum_{(n)}\frac{v_n(M)v_n(Q)}{\lambda_n} \qquad (3)$$

При этом ядро слабо-полярное (что следует из свойств функции Грина), а собственные функции $v_n(M)-$ непрерывные (все собственные функции полярного ядра, принадлежащие $L_2(D)$, принадлежат $C(\bar{D})$). Поэтому, если их конечное число, то сумма в правой части равенства (3) будет непрерывной, в то время как ядро в левой части слабополярное – противоречие, поскольку ранги собственных значений конечны. Значит, собственных функций бесконечное число и, в силу конечности рангов собственных значений, собственные значения $\{\lambda_n\}$ образуют счетное множество. **Ч.т.д.**

Замечания. 1) Собственные значения λ_n краевой задачи (4)-(6) имеют конечный ранг.

2) $\lambda_n \to \infty,\ n \to \infty -$ нет конечных точек сгущения (накопления).

3) Собственные функции задачи (4)-(6) ортогональны с весом $\rho(M)$ и их можно нормировать:

$$\int_D v_n(Q) v_k(Q)\, dV_Q = \int_D u_n(Q) u_k(Q)\, \rho(Q)\, dV_Q = 0, \quad n \neq k.$$

Теорема 2. Все собственные функции задачи (4)-(6) вещественные и положительные.

Доказательство. Первая формула Грина дает:

$$\int_D u(M) \Delta u(M)\, dV_M = \int_S u(P) \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} d\sigma_P - \int_D grad^2 u(M) dV_M,$$

откуда получаем

$$-\lambda_n \int_D u_n^2(M)\, \rho(M) dV_M = -\int_D grad^2 u_n(M) dV_M$$

и

$$\lambda_n = \frac{\int\limits_D grad^2 u_n(M) dV_M}{\int\limits_D u_n^2(M)\rho(M) dV_M} > 0. \qquad (9)$$

Здесь учтено, что собственные функции не могут быть константами, поскольку они удовлетворяют граничным условиям Дирихле, и константы обратились бы в нули, что невозможно в силу определения собственных функций**. Ч.т.д.**

Следствие. Все собственные значения ядра $K(M,Q)$ положительные и ядро положительно определенное.

Теорема 3 (теорема Стеклова). Функция $f(M)$, дважды непрерывно дифференцируемая в замкнутой области $\bar{D}$ и обращающаяся в ноль на границе S этой области, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям задачи (4)-(6).

Доказательство. Так как $f(M) \in C^{(2)}(\bar{D})$, то

$$\Delta f(M) = -h(M) \in C(\bar{D}),\ f(P) = 0,\ P \in S,$$

откуда

$$f(M) = \int_D G(M,Q) h(Q)\, dV_Q, \tag{10}$$

Или, умножая на $\sqrt{\rho(M)}$ и вводя

$$H(M) = \frac{1}{\sqrt{\rho(M)}} h(M),\ F(M) = \sqrt{\rho(M)} f(M),$$

получим

$$F(M)=\int_D K(M,Q)H(Q)\,dV_Q.$$

Таким образом, функция $F(M)$ является истокообразно представимой и по теореме Гильберта-Шмидта разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$F(M)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n v_n(M)$$

Так как

$$F_n=\int_D F(M)v_n(M)\,dV_M=\int_D f(M)u_n(M)\rho(M)\,dV_M=f_n,$$

то

$$f(M)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n u_n(M), \tag{11}$$

где $f_n -$ коэффициенты Фурье в разложении функции $f(M)$ по системе собственных функций краевой задачи (4)-(6) с весом $\rho(M)$. **Ч.т.д.**

Замечание. Переход от ядра $G(M,Q)$ к ядру $K(M,Q)$ нужен не для симметризации ядра, так как в формуле (10) ядро уже симметричноеное. Но если оставить ядро $G(M,Q)$, то формулу для коэффициентов Фурье не войдет плотность $\rho(M)$, что будет противоречить тому, что в формуле (11) разложение идет по собственным функциям задачи (4)-(6), ортогональным с весом $\rho(M)$.

Теорема 4. Система $\{u_n(M)\}$ является полной в D, то есть если функция $f(M)\in C(\bar{D})$ и

$$\int\limits_D f(M)u_n(M)\rho(M)\,dV_M=0, n=1,2,... \qquad (12)$$

то $f(M)=0$.

Доказательство (от противного). Пусть функция $f(M)\neq 0$ и удовлетворяет условию (12). Тогда функция $F(M)=\sqrt{\rho(M)}f(M)\in C(\bar{D})$ и удовлетворяет условию ортогональности всем собственным функциям симметричного слабополярного ядра $K(M,Q)$:

$$\int\limits_D F(M)v_n(M)\,dV_M=0, \quad n=1,2,...$$

Но тогда она ортогональна и самому ядру

$$\int_D K(M,Q)F(Q)dV_Q = 0, \quad M \in D. \tag{12}$$

из формулы (12) следует, что

$$\int_D G(M,Q)\, f(Q)\,\rho(Q)dV_Q = 0, \quad M \in D.$$

Но, с другой стороны, функция

$$u(M) = \int_D G(M,Q)\, f(Q)\,\rho(Q)dV_Q,$$

как объемный потенциал, удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta u(M) = -f(M)\rho(M), \quad M \in D,$$

а так как $u(M) \equiv 0$ в D, а $\rho(M) > 0$, то отсюда следует $f(M) \equiv 0$ в D и полнота системы $\{u_n(M)\}$. **Ч.т.д.**

Замечание. Из доказанной теоремы следует, что система функций задачи (4)-(6) $\{u_n(M)\}$ исчерпывает все собственные функции задачи (4)-(6).

Заключительное замечание. Мы рассмотрели вопрос о существовании и свойствах собственных функций и собственных значений задачи Штурма-Лиувилля с граничными условиями Дирихле. Аналогичные рассмотрения можно провести и для других самосопряженных задач.

4. Краевые задачи для уравнения $\Delta \mathbf{u}(\mathbf{M})+\mathbf{cu}(\mathbf{M})=-\mathbf{f}(\mathbf{M})$

1) Физические задачи, приводящие к уравнению Гельмгольца

1. Установившиеся колебания. Рассмотрим уравнение колебаний с затуханием

$$w_{tt}(M,t)+\alpha w_t(M,t)=a^2\Delta w(M,t)+\tilde{F}(M,t), \qquad (1)$$

причем приложенная внешняя сила является гармонической:

$$\tilde{F}(M,t)=F(M)e^{-i\omega t}=F(x,y,z)e^{-i\omega t}. \qquad (2)$$

Тогда решения естественно искать в виде

$$w(x,y,z,t)=u(x,y,z)e^{-i\omega t}, \qquad (3)$$

откуда

$$\left(-\omega^2 - i\alpha\omega\right)u\left(M\right) = a^2\Delta u\left(M\right) + F\left(M\right)$$

или

$$\Delta u\left(M\right) + k^2 u\left(M\right) = -f\left(M\right), \tag{4}$$

где

$$k^2 = \frac{\omega^2 + i\alpha\omega}{a^2}, \quad f\left(M\right) = \frac{1}{a^2}F\left(M\right). \tag{5}$$

Уравнение (4) называется уравнением установившихся колебаний, приведенным волновым уравнением или уравнением Гельмгольца.

Величина k носит название волнового числа. k^2-комплексная величина, причем $\operatorname{Im} k^2 > 0.$ Выберем такую ветвь, где $\operatorname{Im} k > 0.$ Эта ветвь соответствует поглощению.

Рассмотрим однородное уравнение Гельмгольца в одномерном случае

$$u_{xx}(x)+k^2u(x)=0. \qquad (6)$$

Его решением будет плоска волна

$$u(x)=e^{\pm ikx}. \qquad (7)$$

Выбор знака в экспоненте (7) связан с выбором ветви для k и выбором знака в экспоненте временного множителя $e^{\pm i\omega t}$. В нашем случае выбран множитель $e^{-i\omega t}$.

Физический смысл имеет выражение (7), умноженное на временной множитель. С учетом нашего выбора временного множителя $e^{-i\omega t}$, получим для правой волны выражение

$$w(x,t)=e^{i(kx-\omega t)}. \qquad (8)$$

Причем с учетом выбора ветви $\operatorname{Im} k > 0$, мы получаем затухающую на $+\infty$ волну.

При $\alpha = 0$ коэффициент k вещественный – среда без поглощения.

При выборе ветви $\operatorname{Im} k < 0$ получаем нарастающую амплитуду при $x \to +\infty$, физически это означает активную среду.

2. Стационарный процесс диффузии. Уравнение диффузии имеет вид:

$$u_t(M,t) = D\Delta u(M,t) + cu(M,t) + f(M,t), \qquad (9)$$

где D — коэффициент диффузии.

При $c<0$ происходит процесс диффузии с поглощением частиц, поглощение пропорциональное концентрации.

При $c > 0$ происходит процесс диффузии с размножением частиц, причем размножение пропорциональное концентрации Физически это означает наличие цепных реакций.

В случае стационарного процесса диффузии $u_t = 0$ и уравнение имеет вид

$$D\Delta u(M) + cu(M) = -f(M). \qquad (10)$$

2) Свойства решений

Случай $c<0$ отличается от случая $c>0$ весьма резко. Мы будем обозначать $c=k^2$ при $c>0$ и при комплексном c и $c=-\chi^2$ при $c<0$.

Для уравнения $\Delta u(M)-\chi^2 u(M)=0$ имеет место принцип максимума.

Теорема 1. Классическое решение уравнения $\Delta u(M)-\chi^2 u(M)=0$**,** дважды непрерывно дифференцируемое в открытой области и непрерывное в замкнутой области: $u(M)\in C^{(2)}(D)\cap C(\bar{D})$**,** не может во внутренних точках области достигать локального положительного максимума и локального отрицательного минимума.

Доказательство (от противного). Предположим, что в некоторой точке $M_0 \in D$ функция $u(M)$ достигает положительного максимального значения:

$$u\left(M_0\right) > 0, \quad M \in D^{M_0}, \qquad (11)$$

где D^{M_0} – окрестность точки M_0. Тогда вторые производные в точке M_0 не положительные:

$$\Delta u\left(M_0\right) \le 0 \qquad (12)$$

и уравнение точке M_0 не выполняется:

$$\Delta u\left(M_0\right) - \chi^2 u\left(M_0\right) < 0.$$

Аналогично доказывается невозможность достижения отрицательного локального минимума. **Ч.т.д.**

Рассмотрим краевую задачу;

$$\begin{cases} \Delta u(M) - \chi^2 u = -f(M), M \in D, \\ u(P) = \mu(P), P \in S, \\ u(M) \in C^{(2)}(D) \cap C(\bar{D}) \end{cases} \qquad (14)$$

Теорема 2. Классическое решение задачи (14) единственно.

Доказательство (от противного). Рассмотрим два решения задачи (14): $u_1(M) \neq u_2(M)$. Их разность $v(M) = u_1(M) - u_2(M)$ является классическим решением задачи

$$\begin{cases} \Delta v(M) - \chi^2 v = 0, \ M \in D, \\ v(P) = 0, \ P \in S. \end{cases} \qquad (15)$$

Применяя к решению задачи принцип максимума, получим, что $v(M)=0,\ M\in\bar{D}.$ Отсюда получаем $u_1(M)=u_2(M),\ M\in\bar{D}$ – противоречие . **Ч.т.д.**

Замечание. При $c=k^2>0$ единственность может не иметь место.

3) Фундаментальные решения

Рассмотрим сферически-симметричное решение уравнения Гельмгольца $\Delta u(M)+cu(M)=0.$

Трехмерный случай. В трехмерном случае получаем:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du(r)}{dr}\right)+cu(r)=0, \qquad (16)$$

$$r\frac{d^2u(r)}{dr^2}+2\frac{du(r)}{dr}+c\left(ru(r)\right)=0,$$

$$\frac{d^2\left(ru(r)\right)}{dr^2}+c\left(ru(r)\right)=0. \qquad (17)$$

Положим $v(r)=ru(r)$. Тогда получаем уравнение

$$v''(r)+cv(r)=0. \qquad (18)$$

Общее решение уравнения (18) имеет вид

$$v(r)=A_1e^{\sqrt{-c}r}+A_2e^{-\sqrt{-c}r}. \qquad (19)$$

Пусть $c = k^2 > 0.$ Тогда решение имеет вид

$$v(r) = A_1 e^{ikr} + A_2 e^{-ikr},$$

$$u(r) = A_1 \frac{e^{ikr}}{r} + A_2 \frac{e^{-ikr}}{r}. \qquad (20)$$

Если вспомнить, что физический смысл имеет функция

$$w(r,t) = u(r) e^{-i\omega t},$$

то решения $\frac{e^{ikr}}{r}, \frac{e^{-ikr}}{r}$ соответствуют расходящейся и сходящейся сферическим волнам соответственно. Оба эти решения имеют одинаковую особенность в нуле. При вещественном коэффициенте k оба решения одинаково убывают на бесконечности, различия только в фазах.

Пусть k – комплексное: $k = k_1 + ik_2$. Если $k_2 > 0$, то:

$\dfrac{e^{ikr}}{r}$ – затухающая на бесконечности волна,

$\dfrac{e^{-ikr}}{r}$ – возрастающая на бесконечности волна,

$\dfrac{\cos kr}{r}$ – стоячая волна.

Пусть теперь $c = -\chi^2 < 0$. Тогда общее решение уравнения (18) имеет вид

$$u(r) = A_1 \frac{e^{\chi r}}{r} + A_2 \frac{e^{-\chi r}}{r}. \qquad (21)$$

Если $\chi > 0$, то первое слагаемое экспоненциально возрастает, а второе - экспоненциально убывает. В нуле особенность одинаковая.

Итак, в трехмерном случае все эти решения удовлетворяют уравнению:

$$\Delta u(r) + cu(r) = -4\pi\delta(M, M_0) \qquad (22)$$

с разным поведением на бесконечности.

Двумерный случай. В двумерном случае уравнение принимает вид:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u(r)}{\partial r}\right) + cu(r) = 0 \qquad (23)$$

С помощью замены $x = \sqrt{c}r$ уравнение (23) водится к уравнению Бесселя нулевого порядка. Общее решение имеет следующий вид:

$$u(r) = B_1 H_0^{(1)}\left(\sqrt{c}r\right) + B_2 H_0^{(2)}\left(\sqrt{c}r\right). \qquad (24)$$

Пусть $c = k^2 > 0.$ Тогда получаем:

$$u(r) = B_1 H_0^{(1)}(kr) + B_2 H_0^{(2)}(kr). \qquad (25)$$

Эти функции имеет логарифмическую особенность в нуле и асимптотику на бесконечности следующего вида

$$H_0^{(1,2)}(kr) = J_0(kr) \pm i N_0(kr);\ N_0 = -\frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{r} + \dots,\ r \to 0,$$

$$H_0^{(1,2)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{\pm i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)} + \dots\ , r \to \infty.$$

Таким образом, функции $H_0^{(1,2)}(kr)$ на бесконечности представляют собой сходящиеся и расходящиеся цилиндрические волны.

Если $k = k_1 + ik_2, k_2 > 0,$ то одно решение затухает, другое решение экспоненциально растет на бесконечности.

Пусть $c = -\chi^2 < 0.$ Тогда решение будет даваться линейной комбинацией цилиндрических функций мнимого аргумента

$$u(r) = C_1 K_0(\chi r) + C_2 I_0(\chi r), \tag{26}$$

причем функция $K_0(\chi r)$ имеет логарифмическую особенность в нуле и экспоненциальное затухание на бесконечности, а $I_0(\chi r)$ в нуле ограничено и растет экспоненциально на бесконечности.

Итак, в двумерном случае все эти решения удовлетворяют уравнению

$$\Delta u(r) + cu(r) = -2\pi\delta(M, M_0) \tag{27}$$

с различным поведением на бесконечности.

4) Формулы Грина

Для уравнения $\Delta u(M)+cu(M)=0,\ c\neq 0$ имеют место формулы Грина. Введем оператор

$$L\left[u(M)\right]\equiv\Delta u(M)+cu(M). \qquad (28)$$

Первая формула Грина имеет вид

$$\int_D v(M)L\left[u(M)\right]dV_M=\int_S v(P)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}d\sigma_P-$$

$$-\int_D grad\,u(M)\,grad\,v(M)\,dV_M+\int_D cu(M)v(M)\,dV_M. \qquad (29)$$

Для применения этой формулы необходимо выполнения условия:

$$u(M)\in C^{(2)}(D)\cap C^{(1)}(\bar{D}),\ v(M)\in C^{(1)}(D)\cap C(\bar{D}).$$

Если выполнено условие

$$u(M),\ v(M)\in C^{(2)}(D)\cap C^{(1)}(\bar{D}),$$

то, поменяв в формуле (29) функции $u(M),\ v(M)$ местами и вычитая полученную формулу из формулы (29), получаем **второю формулу Грина:**

$$\int_D \Big(v(M)L\big[u(M)\big]-L\big[v(M)\big]u(M)\Big)dV_M =$$

$$=\int_S \left(v(P)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}-\frac{\partial v(P)}{\partial n_P}u(P)\right)d\sigma_P. \quad (30)$$

Так как у фундаментальных решений уравнения Гельмгольца (28) та же особенность, что и у фундаментальных решений уравнения Лапласа, то третья формула Грина в трехмерном случае имеет вид:

при $\mathbf{c = k^2}$

$$u\left(M_0\right)=\frac{1}{4\pi}\int_S\left(\frac{e^{\pm ikr_{PM_0}}}{r_{PM_0}}\frac{\partial u\left(P\right)}{\partial n_P}-u\left(P\right)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{e^{\pm ikr_{PM_0}}}{r_{PM_0}}\right)\right)d\sigma_P-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_D\frac{e^{\pm ikr_{MM_0}}}{r_{MM_0}}L\left[u\left(M\right)\right]dV_M,\ M_0\in D, \qquad (31a)$$

$$L\left[u\left(M\right)\right]\equiv\Delta u\left(M\right)+k^2u\left(M\right).$$

При c = -χ^2

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\oint_S\left(\frac{e^{\pm\chi r_{PM_0}}}{r_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}-u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{e^{\pm\chi r_{PM_0}}}{r_{PM_0}}\right)\right)d\sigma_P-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\oint_D\frac{e^{\pm\chi r_{MM_0}}}{r_{MM_0}}L\left[u(M)\right]dV_M,\ M_0\in D, \qquad (31b)$$

$$L\left[u(M)\right]\equiv\Delta u(M)-\chi^2u(M).$$

Аналогичные формулы имеют место в двумерном случае.

5) Единственность решения внутренних краевых задач

Рассмотри краевую задачу:

$$\begin{cases} \Delta u(M) + cu(M) = -f(M), M \in D, & (32) \\ \alpha(P)\dfrac{\partial u(P)}{\partial n_P} + \beta(P)u(P) = \mu(P), P \in S, & (33) \\ u(M) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D}), & (34) \end{cases}$$

где $D -$ внутренняя область с границей $S: \ \bar{D} = D + S.$

Теорема. Если постоянная c не является собственным значением оператора Лапласа для данной области и данных граничных условий $(c \neq \lambda_n, n = 1, 2, ...)$, то краевая задача (32)-(34) не может иметь более одного решения..

Доказательство. Рассмотрим в области

$$\begin{cases} \Delta v_n(M) + \lambda_n v_n(M) = 0, M \in D, & (35) \\ \alpha(P)\dfrac{\partial v_n(P)}{\partial n_P} + \beta(P) v_n(P) = 0, P \in S, & (36) \\ v_n(M) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D}). & (37) \end{cases}$$

Однородная задача (32)-(34) при $f(M) \equiv 0,\ \mu(P) \equiv 0$ совпадает с задачей Штурма-Лиувилля (35)-(37) и, если $c \neq \lambda_n,\ n = 1, 2, \ldots$, то решение однородной задачи (32)-(34) тривиальное, то есть решение задачи (32)-(34) единственно**. Ч.т.д.**

Следствие 1. Решение внутренней задачи Дирихле для уравнения (32) при $c < 0, c = c_1 + ic_2, c_2 \neq 0$ единственно.

Доказательство. Выше было доказано, что все собственные значения задачи Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа при граничных условиях Дирихле вещественны и неотрицательны, что и доказывает следствие. **Ч.т.д.**

Следствие 2. При вещественном $c = k^2 > 0$ внутренняя задача Дирихле для уравнения (32) может иметь бесчисленное множество решений, если

$$c = k^2 = \lambda_{n_0}.$$

6) Метод решения краевых задач для уравнения Гельмгольца

Метод разложения по собственным функциям. Рассмотрим задачу на собственные значения:

$$\begin{cases} \Delta v_n(M) + \lambda_n v_n(M) = 0, \ M \in D, & (35) \\ \alpha(P)\dfrac{\partial v_n(P)}{\partial n_P} + \beta(P) v_n(P) = 0, \ P \in S, & (36) \\ v_n(M) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D}). & (37) \end{cases}$$

Предположим, что система собственных функций $\{v_n(M)\}$ задачи (35)-(37) ортонормирована. Классическое решение задачи (32)-(34) при

$\mu \equiv 0$ можно разложить в равномерно сходящийся ряд по системе $\{v_n(M)\}$:

$$u(M) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n(M), \tag{38}$$

$$a_n = \int_D u(M) v_n(M)\, dV_M. \tag{39}$$

Подставим (38) в уравнение (32):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Delta v_n(M) + c\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n(M) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (c-\lambda_n) v_n(M) = -\sum_{n=1}^{\infty} f_n v_n(M), \tag{40}$$

$$f_n = \int_D f(M) v_n(M)\, dV_M. \tag{41}$$

Из уравнения (40) получаем

$$a_n(c-\lambda_n) = -f_n, n = 1, 2, \ldots \tag{42}$$

$$a_n = \frac{f_n}{\lambda_n - c}, \; n = 1, 2, \ldots \qquad (43)$$

$$u(M) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n - c} v_n(M) \qquad (44)$$

Если $c \neq \lambda_n, \; n = 1, 2, \ldots$, то ряд (44) сходится. Например, если мы рассматриваем задачу Дирихле и $c < 0$ или $c = c_1 + ic_2, c_2 \neq 0.$

Если $c = \lambda_{n_0}$, то получается так называемы резонансный случай тогда при $f_{n_0}^{(k)} = \int\limits_D f(M) v_{n_0}^{(k)} dV_M \neq 0, k = 1, 2, \ldots, K,$ где через $K -$ обозначен ранг собственного значения λ_{n_0}, то краевая задача (32)-(34) неразрешима.

Если $f_{n_0}^{(k)} = 0, \; k = 1, 2, \ldots, K,$ то задача имеет бесконечное множество решений.

Метод функций Грина. Построение функции Грина рассмотрим на примере задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u(M)+cu(M)=-f(M),\ M\in D, & (45)\\ u(P)=\mu(P),\ P\in S, & (46)\\ u(M)\in C^{(2)}(D)\cap C^{(1)}(\bar{D}), & (47)\end{cases}$$

Запишем третью формулу Грина

$$u(M_9)=\frac{1}{4\pi}\int_S\left(\frac{e^{\pm ikr_{PM_0}}}{r_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}-u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{e^{\pm ikr_{PM_0}}}{r_{PM_0}}\right)\right)d\sigma_P-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_D\frac{e^{\pm ikr_{MM_0}}}{r_{MM_0}}L\left[u(M)\right]dV_M,\ M_0\in D, \qquad (48)$$

где оператор $L\left[u(M)\right] \equiv \Delta u(M) + k^2 u(M)$.

Пусть $v(M, M_0)$ –решение уравнения $\Delta v(M) + k^2 v(M) = 0,$ регулярное всюду в области D: $v(M, M_0) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D}),\ M_0 \in D.$

Применяя вторую формулу Грина к функциям $u(M),\ v(M),$ получим

$$0 = \int_S \left(v(P) \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P) \frac{\partial v(P)}{\partial n_P} \right) d\sigma_P - \int_D v(M) L\left[u(M)\right] dV_M. \quad (49)$$

Сложим формулы (48) и (49)

$$u(M_0) = \int_S \left(\left(\frac{e^{ikr_{PM_0}}}{4\pi r_{PM_0}} + v(P) \right) \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{e^{ikr_{PM_0}}}{4\pi r_{PM_0}} + v(P) \right) \right) d\sigma_P -$$

$$- \int_D \left(\frac{e^{ikr_{MM_0}}}{4\pi r_{MM_0}} + v(M) \right) L\left[u(M)\right] dV_M. \quad (50)$$

Введем понятие **функции Грина (функции влияния точечного источника)** задачи (45)-(47) как решение задачи

$$\begin{cases} L_M\left[G(M,M_0)\right] = -\delta(M,M_0), M \in D, & (51) \\ G(P,M_0) = 0,\ P \in S, & (52) \end{cases}$$

$$L_M\left[G(M,M_0)\right] \equiv \Delta_M G(M,M_0) + cG(M,M_0),$$

$$G(M,M_0) = \frac{e^{\pm\sqrt{-c}\,r_{MM_0}}}{4\pi r_{MM_0}} + v(M,M_0),\ M \in D,\ M_0 \in D, \qquad (53)$$

где $v(M,M_0)$ – регулярное в области D решение уравнения $L_M\left[G(M,M_0)\right] = 0,$ которое зависит от параметра $M_0 \in D.$

Вопрос о существовании функции Грина сводится к вопросу о том, существует ли функция $v(M,M_0)\in C^{(2)}(D)\cap C^{(1)}(\bar{D})$, зависящая от параметра $M_0\in D$, и являющаяся решением краевой задачи

$$\begin{cases} L\left[v(M,M_0)\right]\equiv\Delta_M v(M,M_0)+cv(M,M_0)=0, M\in D, & (54)\\ v(P,M_0)=-\dfrac{e^{\pm\sqrt{-c}r_{PM_0}}}{4\pi r_{PM_0}},\ P\in S;\ M_0\in D. & (55)\end{cases}$$

Очевидно, функция Грина $G(M,M_0)$ однозначно определена для любой области, допускающей единственное решение задачи Дирихле. Таким образом, если $k^2\neq\lambda_n,\quad n=1,2,\ldots,$ то функция Грина задачи (45)-(47) существует, а если $k^2=\lambda_{n_0}$, то функция Грина задачи (45)-(47) не существует.

Метод интегральных уравнений. Аналогично тому, как это было сделано для уравнения Лапласа $\Delta u(M)=0$, для уравнений Гельмгольца $\Delta u(M)+k^2u(M)=0$ и $\Delta u(M)-\chi^2u(M)=0$ можно ввести объемный потенциал и поверхностный потенциалы.

Трехмерный случай.

Определение 1. Объемным потенциалом для уравнения Гельмгольца $\Delta u(M)+k^2u(M)=0$ называется интеграл

$$u(M)=\iiint\limits_D \frac{e^{\pm ikr_{QM}}}{r_{QM}}\rho(Q)\,dV_Q. \qquad (56)$$

Свойства объемного потенциала (56) аналогичны свойствам объемного потенциала для уравнения Лапласа, в частности, потенциал (56) является решением уравнения

$$\Delta u(M) + k^2 u(M) = -4\pi\rho(M) \qquad (57)$$

во внутренних точках области D, а вне области D удовлетворяет уравнению

$$\Delta u(M) + k^2 u(M) = 0. \qquad (58)$$

Определение 2. Поверхностным потенциалом простого слоя для уравнения $\Delta u(M) + k^2 u(M) = 0$ называется интеграл

$$\mathrm{v}(M) = \iint_S \frac{e^{\pm ikr_{PM}}}{r_{PM}} \mu(P)\, d\sigma_P. \qquad (59)$$

Определение 3. Поверхностным потенциалом двойного слоя для уравнения $\Delta u(M)+k^2u(M)=0$ называется интеграл

$$\mathrm{v}(M)=\iint_S \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{e^{\pm ikr_{PM}}}{r_{PM}}\right)\nu(P)\,d\sigma_P, \qquad (60)$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n_P}$ означает производную по внутренней нормали к поверхности S.

Свойства поверхностных потенциалов (59) и (60) аналогичны свойствам поверхностных потенциалов для уравнения Лапласа. В частности, формулы скачков для поверхностных потенциалов двойного слоя и для нормальных производных поверхностных потенциалов простого слоя такие же, что и для поверхностных потенциалов с ядром $\dfrac{1}{r_{PM}}$.

Например, формула скачка нормальной производной поверхностного потенциала простого слоя имеет вид:

$$\frac{\partial \mathrm{v}^{(i)}(P)}{\partial n_P} - \frac{\partial \mathrm{v}^{(e)}(P)}{\partial n_P} = -4\pi\mu(P),$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}^{(i)}(P)}{\partial n_P} = \frac{\partial \mathrm{v}(P)}{\partial n_P} - 2\pi\mu(P), \tag{61}$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}^{(e)}(P)}{\partial n_P} = \frac{\partial \mathrm{v}(P)}{\partial n_P} + 2\pi\mu(P),\ P \in S.$$

Введенные поверхностные потенциалы (59), (60) удовлетворяют однородному уравнению Гельмгольца $\Delta u(M) + k^2 u(M) = 0$ вне несущей поверхности S.

Двумерный случай.

В двумерном случае потенциалы простого и двойного слоя имеют вид:

$$\mathrm{v}(M) = \mp\frac{\pi}{2i}\int_C \mu(P) H_0^{(1,2)}(kr_{PM})\,dl_P, \qquad (62)$$

$$\mathrm{w}(M) = \mp\frac{\pi}{2i}\int_C \nu(P)\frac{\partial}{\partial n_P} H_0^{(1,2)}(kr_{PM})\,dl_P. \qquad (63)$$

Наличие множителя $\mp\frac{\pi}{2i}$ связано с тем, что асимптотика в нуле функции Ханкеля имеет вид

$$H_0^{(1,2)}(x) = \mp\frac{2i}{\pi}\ln\frac{1}{x} + \ldots$$

Поэтому формула скачков для потенциалов (62) и (63) имеет такой же вид, как и для логарифмических потенциалов простого и двойного слоя:

$$\begin{aligned} &\mathrm{w}^{(i)}(P)-\mathrm{w}^{(e)}(P)=2\pi\nu(P), \\ &\mathrm{w}^{(i)}(P)=\mathrm{w}(P)+\pi\nu(P), \\ &\mathrm{w}^{(e)}(P)=\mathrm{w}(P)-\pi\nu(P), \quad P\in S. \end{aligned} \qquad (64)$$

Замечание.Аналогично вводятся потенциалы для уравнения Гельмгольца $\Delta u(M)-\chi^2 u(M)=0.$

Поверхностные потенциалы позволяют сводить краевые задачи к интегральным уравнениям Фредгольма с несимметричным ядром. При этом, если k^2 не совпадает с собственным значением внутренней краевой задачи для оператора Лапласа, то есть мы не попадаем на точку спектра, то при любой непрерывной граничной функции внутренние задачи Дирихле и Неймана однозначно разрешимы в виде соответствующих потенциалов, что следует из альтернативы Фредгольма.

Замечание. Разрешимость внешних краевых задач имеет место при всех значениях параметра k^2. Интересующихся слушателей мы отсылаем к классическому труду: В.Д.Купрадзе. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. М.: Гостехиздат, 1950. 280 с.