МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

М. О. Корпусов

Лекции об эллиптических уравнениях второго порядка

Москва
Физический факультет МГУ
2023

К о р п у с о в М. О.
Лекции об эллиптических уравнениях второго порядка. — М.: Физический факультет МГУ, 2023. 312 с.
ISBN

В курсе лекций изложены классические результаты о решениях эллиптических уравнений второго порядка. Излагается как теория потенциала, дающая интегральное представление для классических решений краевых задач, так и теория слабых решений. Кроме того, излагается сильный принцип максимума и теория априорных оценок Шаудера.

Материал книги используется в курсе «Эллиптические уравнения», который автор читает на кафедре математики физического факультета МГУ.

Данный курс входит в учебный план кафедры математики физического факультета МГУ и представляет интерес для широкого круга студентов и аспирантов, специализирующихся по специальностям 1.1.2 «Дифференциальные уравнения и математическая физика» и 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Ил. 42. Библиогр. 17 назв.

Р е ц е н з е н т ы:
проф. *М. Д. Малых,*
проф. *В. Ю. Попов,*
проф. *М. В. Фалалеев*

Печатается по решению Учёного совета
физического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова

ISBN

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 8

I. Оператор Лапласа

Лекция 1. **Оператор Лапласа** 10
§ 1. Пространства непрерывных и дифференцируемых функций 10
§ 2. Фундаментальное решение 11
§ 3. Теорема Остроградского–Гаусса–Грина 13
§ 4. Решение уравнения Пуассона 19
§ 5. Теорема о среднем 25
§ 6. Примеры решения задач 28
§ 7. Литературные указания 31

Лекция 2. **Принципы максимума и минимума** 32
§ 1. Сильный принцип максимума 32
§ 2. Лемма Олейник–Хопфа 41
§ 3. Примеры решения задач 46
§ 4. Литературные указания 57

Лекция 3. **Свойства гармонических функций** 58
§ 1. Гладкость гармонических функций 58
§ 2. Локальные оценки для гармонических функций 60
§ 3. Теорема Лиувилля 63
§ 4. Неравенство Харнака 64
§ 5. Примеры решения задач 66
§ 6. Литературные указания 72

Лекция 4. **Функция Грина задачи Дирихле** 73
§ 1. Третья формула Грина 73
§ 2. Функция Грина задачи Дирихле 75
§ 3. Литературные указания 79

II. Теория потенциала для оператора Лапласа

Лекция 5. **Операторы с особенностью в $\mathbb{R}^N$** 81
§ 1. Операторы со слабой особенностью в $\mathbb{R}^N$ 81
§ 2. Литературные указания 92

Лекция 6. **Объемный потенциал** 93
§ 1. Определение потенциалов 93
§ 2. Объемный потенциал 94
§ 3. Литературные указания 103

Лекция 7. **Теория поверхностей Ляпунова** 104
§ 1. Поверхности Ляпунова 104
§ 2. Операторы со слабой особенностью на поверхности Ляпунова . . . 111
§ 3. Литературные указания 117

Лекция 8. **Потенциал двойного слоя** 118
§ 1. Гармоничность поверхностных потенциалов 118
§ 2. Прямое значение потенциала двойного слоя 119
§ 3. Интеграл Гаусса 121
§ 4. Предельные значения потенциала двойного слоя 125
§ 5. Литературные указания 128

Лекция 9. **Потенциал простого слоя** 129
§ 1. Нормальная производная потенциала простого слоя 129
§ 2. Предельные свойства нормальной производной потенциала простого слоя 132
§ 3. Литературные указания 138

Лекция 10. **Разрешимость задач Дирихле и Неймана** 139
§ 1. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа 139
§ 2. Теоремы единственности решения задач D_e и N_e 140
§ 3. Теория Фредгольма. Формулировка результатов 142
§ 4. Интегральные уравнения теории потенциала 143
§ 5. Однозначная разрешимость задач D_i и N_e 145
§ 6. Исследование пары сопряжённых интегральных уравнений D_e и N_i 147
§ 7. Разрешимость внутренней задачи Неймана N_i 150
§ 8. Разрешимость внешней задачи Дирихле D_e 151
§ 9. Литературные указания 154

III. Принцип максимума

Лекция 11. **Слабый принцип максимума** 156
§ 1. Слабый принцип максимума в случае ограниченного решения . . . 156
§ 2. Слабый принцип максимума в общем случае. 161
§ 3. Примеры решения задач 162
§ 4. Литературные указания. 163

Лекция 12. **Сильный принцип максимума** 164
§ 1. Сильный принцип максимума 164
§ 2. Следствия из принципа Хопфа 170
§ 3. Признак сравнения для нелинейных эллиптических операторов и некоторые примеры 177
§ 4. Примеры решения задач 181
§ 5. Литературные указания. 182

Лекция 13. **Лемма Жиро** 183
§ 1. Лемма Жиро 183
§ 2. Следствия из леммы Жиро. 189
§ 3. Примеры решения задач 194
§ 4. Литературные указания. 195

Лекция 14. **Единственность и признаки сравнения для некоторых нелинейных задач** 196
§ 1. Единственность и признак сравнения для задачи Дирихле 196
§ 2. Единственность и признак сравнения для задачи Неймана 203
§ 3. Периодическая задача 206
§ 4. Литературные указания. 210

IV. Оценки Шаудера

Лекция 15. **Пространства Гёльдера** 212
§ 1. Определения пространств Гёльдера 212
§ 2. Интерполяционные неравенства 215
§ 3. Литературные указания. 222

Лекция 16. **$\mathbb{C}^{2+\alpha}$–априорная оценка Шаудера для оператора Лапласа** . . . 223
§ 1. Постановка задачи . . . 223
§ 2. Гёльдеровские оценки второй смешанной производной . . . 224
§ 3. Литературные указания . . . 240

Лекция 17. **$\mathbb{C}^{2+\alpha}$–априорная оценка Шаудера для равномерно эллиптического оператора** . . . 241
§ 1. Гёльдеровские оценки . . . 241
§ 2. Метод продолжения по параметру и доказательство однозначной разрешимости задачи Дирихле . . . 245
§ 3. Литературные указания . . . 249

Лекция 18. **Метод верхних и нижних решений в пространстве Гельдера $\mathbb{C}^{2+\alpha}(\Omega)$** . . . 250
§ 1. Верхние и нижние решения. Определения . . . 250
§ 2. Основная теорема . . . 251
§ 3. Коэффициентная устойчивость решения . . . 257
§ 4. Литературные указания . . . 266

Лекция 19. **Оценки типа Бернштейна градиента решения** . . . 267
§ 1. Повышенная гладкость решения . . . 267
§ 2. Оценка Бернштейна градиента решения . . . 273
§ 3. Оценки градиента решения на границе . . . 278
§ 4. Литературные указания . . . 287

V. Слабые решения

Лекция 20. **Пространства С. Л. Соболева** . . . 289
§ 1. Слабая производная . . . 289
§ 2. Пространства С. Л. Соболева $H^1(\Omega)$ и $H^1_0(\Omega)$ . . . 293
§ 3. Литературные указания . . . 300

Лекция 21. **Метод априорных оценок** . . . 301
§ 1. Вывод априорной оценки. . . . 301
§ 2. Существование приближений Галёркина . . . 302
§ 3. Предельный переход . . . 305

§ 4. Литературные указания 308
Предметный указатель 309

Список литературы 311

Введение

В курсе лекций изложены классические результаты о решениях уравнения Лапласа и Пуассона в N–мерном случае, теория потенциала для оператора Лапласа, формула среднего значения и сильный принцип максимума. В случае общего эллиптического оператора второго порядка с переменными коэффициентами доказаны сильный принцип максимума и теорема Жиро о знаке косой производной в точках границы области. При помощи которых получены теоремы единственности как для линейных, так и для нелинейных уравнений эллиптического типа. Кроме того, рассмотрена теория априорных оценок Шаудера и об из приложениях в теории верхних и нижних решений. Изложены основы теории слабых решений.

Автор признателен профессору Н. Н. Нефедову за предложение читать спецкурс «Эллиптические уравнения». В результате чего появилась данная книга. Автор признателен профессорам А. Н. Боголюбову, В. Ю. Попову, а также доцентам Н. Т. Левашовой и А. А. Панину за полезное обсуждение содержания данного курса лекций. Также автор очень признателен рецензентам профессорам М. Д. Малых и М. В. Фалалееву за их труд и ценные замечания. Особенно автор благодарен доценту М. А. Давыдовой, взявшей на себя большой труд прочитать рукопись книги и сообщить многочисленные замечания. Автор благодарен фонду «Базис» за грантовую поддержку, благодаря которой был написан данный курс лекций.

Книга набрана и сверстана в пакете LaTeX2e.

Тематическая лекция I

ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА

Лекция 1

ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА

В этой лекции мы рассмотрим основные свойства решений уравнения Лапласа и уравнения Пуассона в областях с гладкой границей. Многие результаты известны из курса лекций ММФ для третьего курса. Однако, мы должны напомнить эти результаты, чтобы слушателям этого курса было проще воспринимать более сложные результаты, излагаемые в дальнейшем для общих эллиптических уравнений.

§ 1. Пространства непрерывных и дифференцируемых функций

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}_+^N$ — строчка, составленная из неотрицательных целых чисел. В дальнейшем мы будем пользоваться следующим обозначением:

$$\partial_x^\alpha f(x) = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_N}^{\alpha_N} f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_N}^{\alpha_N}}, \quad \partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j},$$

где $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$. Дадим серию определений.

Определение 1. *Множество функций f, непрерывных вместе со всеми производными ∂_x^α, $|\alpha| \leqslant n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, в области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ образует класс функций $\mathbb{C}^{(n)}(\Omega)$.*

Определение 2. *Функции $f \in \mathbb{C}(\Omega)$, которые допускают непрерывное продолжение на $\overline{\Omega}$, образуют пространство $\mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$.*

Замечание. Для соответствующего непрерывного продолжения функции $f(x)$ будем использовать обозначение $\overline{f}(x)$.

Иногда мы будем использовать определение непрерывных на множестве функций:

Определение 3. *Функция $f \in \mathbb{C}^{(n)}(\overline{\Omega})$, если функция f вместе со своими всеми производными $\partial_x^\alpha f(x)$ при $|\alpha| \leqslant n$ существует для всех $x \in \overline{\Omega}$ и непрерывна в каждой точке множества $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^N$. При этом производные в граничных точках области Ω понимаются в смысле предела разностных отношений на $\overline{\Omega}$.*

Определение 4. *Функция $f \in \mathbb{C}_w^{(n)}(\overline{\Omega})$, если функция f вместе со своими всеми производными $\partial_x^\alpha f(x)$ при $|\alpha| \leqslant n$ существует для всех $x \in \Omega$ и для всякого мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ при $|\alpha| \leqslant n$ функции $\partial_x^\alpha f(x)$ непрерывно продолжаемы из области Ω до границы Γ.*

З а м е ч а н и е. Заметим, что, имеет место строгое вложение $\mathbb{C}(\overline{\Omega}) \subset \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$. Кроме того, $\mathbb{C}_w(\overline{\Omega}) \subset \mathbb{C}_b(\Omega)$, где $\mathbb{C}_b(\Omega)$ — класс ограниченных и непрерывных функций на Ω.

Ниже мы увидим, что потенциал двойного слоя

$$W[\sigma](x)$$

как функция точки $x \in \mathbb{R}^N$ является функцией классов $\mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ и $\mathbb{C}_w(\mathbb{R}^N \backslash \Omega)$ в смысле определения 2, но не является функцией класса $\mathbb{C}(\overline{\Omega})$ и класса $\mathbb{C}(\mathbb{R}^N \backslash \Omega)$ в смысле третьего определения!

З а м е ч а н и е. Отметим, что, с одной стороны, для поверхностного потенциала простого слоя $V[\mu](x)$ в случае $\mu(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$ (даже в случае компактной Ляпуновской поверхности без края Γ) неизвестен результат о том, что $V[\mu](x) \in \mathbb{C}_w^{(1)}(\overline{\Omega})$ и $V[\mu](x) \in \mathbb{C}_w^{(1)}(\mathbb{R}^N \backslash \Omega)$! С другой стороны, нами будет доказано, что для каждой точки $x_0 \in \Gamma$ нормальная производная

$$\frac{\partial V[\mu]}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}(x)$$

имеет пределы при $\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega} \ni x \to x_0$ и при $\Omega \ni x \to x_0$ по прямой, проходящей через точку $x_0 \in \Gamma$ с направляющим вектором нормали $\mathbf{n}_{x_0}$ в этой точке x_0. Поэтому необходимо ввести новое определение пространства $\mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n}; \overline{\Omega})$.

О п р е д е л е н и е 5. *Функция $f(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n}; \overline{\Omega})$, если $f(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\Omega)$ и при этом для любой точки $x_0 \in \Gamma$ существует непрерывное продолжение функции*

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} = (\mathbf{n}_{x_0}, \nabla_x) f(x)$$

по $x \in l \cap \Omega$ в точку x_0, где l — прямая, проходящая через точку $x_0 \in \Gamma$, с направляющим вектором нормали $\mathbf{n}_{x_0}$. Указанное непрерывное продолжение в произвольной точке $x_0 \in \Gamma$ мы будем обозначать символом

$$\overline{\frac{\partial f(x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}} = \lim_{\Omega \cap l \ni x \to x_0 \in \Gamma} \frac{\partial f(x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}, \quad l = \{x_0 + t\mathbf{n}_{x_0}, t \in \mathbb{R}\}. \tag{1.1}$$

З а м е ч а н и е. Все введенные классы функций являются линейными пространствами.

§ 2. Фундаментальное решение

Прежде всего напомним, что оператором Лапласа называется следующий оператор:

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_N}, \tag{2.1}$$

где $x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$ при $N \geqslant 2$. Прежде, чем переходить к исследованию различных свойств решений уравнения Лапласа или уравнения Пуассона, имеющих соответственно вид

$$\Delta u = 0 \quad \text{или} \quad \Delta u = f(x), \tag{2.2}$$

нужно ввести так называемое *фундаментальное решение оператора Лапласа*. Фундаментальное решение является решением в смысле пространства обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ уравнения

$$\Delta \mathcal{E}_N(x) = \delta(x), \tag{2.3}$$

где $\delta(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ — это так называемая дельта–функция Дирака. Уравнение (2.3) не является поточечным, как это ошибочно считал сам Дирак и как ошибочно считают многие студенты Физического Факультета МГУ. Если ввести скобки двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ между векторным топологическим неметризуемым пространством основных функций $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ и соответствующим пространством обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, то уравнение (2.3) понимается в смысле следующих равенств:

$$\langle \Delta_x \mathcal{E}_N(x), \varphi(x) \rangle = \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle = \varphi(0) \tag{2.4}$$

для всех $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

В курсе функционального анализа показано, что

$$\mathcal{E}_N(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln|x|, & \text{если} \quad N = 2; \\ -\frac{1}{(N-2)\omega_N} |x|^{-N+2}, & \text{если} \quad N \geqslant 3, \end{cases} \tag{2.5}$$

где ω_N — это площадь единичной сферы $\{|x| = 1, \ x \in \mathbb{R}^N\}$.

Замечание. Отметим, что фундаментальное решение $\mathcal{E}_N(x)$, которое по определению дается формулой (2.5), является неединственным решением уравнения (2.3). В частности, решением этого уравнения является следующая функция:

$$\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_N(x) + \psi(x), \quad \Delta\psi(x) = 0, \quad \psi(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N).$$

Заметим, что фундаментальное решение удовлетворяет следующим неравенствам: [1])

$$\left| \frac{\partial \mathcal{E}_N(x)}{\partial x_j} \right| \leqslant \frac{c}{|x|^{N-1}}, \quad \left| \frac{\partial^2 \mathcal{E}_N(x)}{\partial x_k \partial x_j} \right| \leqslant \frac{c}{|x|^N}, \quad j, k = \overline{1, N} \tag{2.6}$$

при $x \neq 0$ и $c > 0$ — это константа.

---

[1]) Поэтому первая частная производная фундаментального решения имеет интегрируемую особенность, а вторая частная производная имеет не интегрируемую особенность.

□ Действительно, при $x \neq 0$ справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\ln|x| = \frac{1}{|x|}\frac{\partial}{\partial x_j}|x| = \frac{1}{|x|}\frac{\partial}{\partial x_j}(|x|^2)^{1/2} = \frac{x_j}{|x|^2}, \qquad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}\ln|x| = \frac{\delta_{jk}}{|x|^2} + x_j\frac{\partial}{\partial x_k}(|x|^2)^{-1} = \frac{\delta_{jk}}{|x|^2} - 2\frac{x_j x_k}{|x|^4}, \qquad (2.8)$$

из которых вытекают неравенства (2.6) в случае $N = 2$. Рассмотрим теперь случай $N \geqslant 3$. Имеют место следующие равенства при $x \neq 0$:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{|x|^{N-2}} = \frac{\partial}{\partial x_j}(|x|^2)^{-(N-2)/2} =$$
$$= -\frac{N-2}{2}2x_j(|x|^2)^{-(N-2)/2-1} = -(N-2)\frac{x_j}{|x|^N}, \qquad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}\frac{1}{|x|^{N-2}} = -(N-2)\left[\frac{\delta_{jk}}{|x|^N} + x_j\frac{\partial}{\partial x_k}(|x|^2)^{-N/2}\right] =$$
$$= -(N-2)\left[\frac{\delta_{jk}}{|x|^N} - x_j N x_k (|x|^2)^{-N/2-1}\right] =$$
$$= -(N-2)\left[\frac{\delta_{jk}}{|x|^N} - N\frac{x_j x_k}{|x|^{N+2}}\right]. \qquad (2.10)$$

Из равенств (2.9) и (2.10) получаем оценки (2.6) в случае $N \geqslant 3$. ⊠

§ 3. Теорема Остроградского–Гаусса–Грина

Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 2)$ — это ограниченная область с достаточно «гладкой» границей Γ такой, что в каждой ее точке $y \in \Gamma$ задано поле единичных внешних нормалей $\mathbf{n}_y = (n_{y1}, ..., n_{yN})$ $(|\mathbf{n}_y| = 1)$. Ясно, что

$$n_{yj} = \cos(\mathbf{n}_y, \mathbf{e}_j) \quad \text{при} \quad j = \overline{1, N},$$

где $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_N\}$ — прямоугольная декартова система координат в $\mathbb{R}^N$. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ рассмотрим ограниченную область

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \ \mathrm{distance}(x, \Gamma) > \varepsilon\}.$$

Справедлива следующая усиленная версия теоремы Остроградского–Гаусса–Грина:

Теорема 1. *Пусть* $u(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\Omega) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$. *Тогда*

$$\int\limits_\Omega u_{x_i}(x)\,dx = \int\limits_\Gamma \overline{u}(y)\cos(\mathbf{n}_y, \mathbf{e}_i)\,dS_y, \quad i = \overline{1, N}, \qquad (3.1)$$

где $\overline{u}(x)$ *— непрерывное продолжение функции* $u(x)$ *из области* Ω *до границы* Γ.

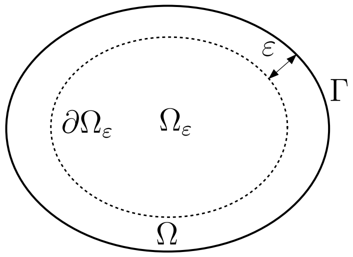


Рис. 1. «Эквидистантная» область Ω_ε

Доказательство. Заметим, что $u(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}_\varepsilon)$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ и поэтому справедливо равенство

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} u_{x_i}(x)\,dx = \int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} u(y)\cos(\mathbf{n}_y, \mathbf{e}_i)\,dS_y, \quad i = \overline{1, N}, \tag{3.2}$$

причем $\Omega_\varepsilon \to \Omega$ и $\partial\Omega_\varepsilon \to \Gamma$ при $\varepsilon \to +0$ и, кроме того, поскольку $u(x) \in \in \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$, то

$$\int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} u(y)\cos(\mathbf{n}_y, \mathbf{e}_i)\,dS_y \to \int\limits_{\Gamma} \overline{u}(y)\cos(\mathbf{n}_y, \mathbf{e}_i)\,dS_y \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

Тогда в пределе при $\varepsilon \to +0$ из (3.2) получим равенство (3.1).

Теорема доказана.

Справедлива следующая формула интегрирования по частям:

Теорема 2. *Пусть* $u(x), v(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$. *Тогда*

$$\int\limits_{\Omega} u_{x_i}(x)v(x)\,dx = -\int\limits_{\Omega} u(x)v_{x_i}(x)\,dx + \int\limits_{\Gamma} u(y)v(y)\cos(\mathbf{n}_y, \mathbf{e}_i)\,dS_y \tag{3.3}$$

при $i = \overline{1, N}$.

Доказательство.

Следует применить теорему 1 к функции $u(x)v(x)$.

Теорема доказана.

Наконец, справедливы следующие утверждения: [1])

Теорема 3. *Если* $u(x), v(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$, *то справедлива первая формула Грина*:

$$\int\limits_{\Omega} (D_x u(x), D_x v(x))\;dx = -\int\limits_{\Omega} u(x)\Delta v(x)\,dx + \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial v(y)}{\partial \mathbf{n}_y} u(y)\,dS_y, \tag{3.4}$$

[1]) Здесь и далее мы используем обозначение $D_x u = (\partial_{x_1} u, ..., \partial_{x_N} u)$. Обычно в курсе математического анализа используется более привычное обозначение ∇_x.

если $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n}; \overline{\Omega})$, *то имеет место следующая формула*:

$$\int\limits_{\Omega} \Delta u(x)\, dx = \int\limits_{\Gamma} \overline{\frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y}}\, dS_y, \tag{3.5}$$

а если $u(x), v(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n}; \overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$, *то справедлива вторая формула Грина*

$$\int\limits_{\Omega} [u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x)]\, dx = \int\limits_{\Gamma} \overline{u}(y) \overline{\frac{\partial v(y)}{\partial \mathbf{n}_y}}\, dS_y - \int\limits_{\Gamma} \overline{v}(y) \overline{\frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y}}\, dS_y, \tag{3.6}$$

где $\mathbf{n}_y$ *— это внешняя нормаль к точке* $y \in \Gamma$ *по отношению к области* Ω, $\overline{u}(x)$ *и* $\overline{v}(x)$ *— это соответствующие непрерывные продолжения функций* $u(x)$ *и* $v(x)$ *из области* Ω *до границы* Γ, *а обозначения*

$$\overline{\frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y}} \quad \textit{и} \quad \overline{\frac{\partial v(y)}{\partial \mathbf{n}_y}}$$

введены в формуле (1.1).

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $u(x), v(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$. Для того чтобы получить равенство (3.4) нужно применить равенство (3.3) в области Ω_ε, в которой вместо функции $v(x)$ нужно взять функцию $v_{x_i}(x)$, а затем просуммировать по $i = \overline{1, N}$ и получить следующее равенство:

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} (D_x u(x), D_x v(x))\, dx = -\int\limits_{\Omega_\varepsilon} u(x)\Delta v(x)\, dx + \int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial v(y)}{\partial \mathbf{n}_y} u(y)\, dS_y, \tag{3.7}$$

где как и при доказательстве теоремы 2 можно перейти к пределу при $\varepsilon \to +0$ и получить равенство (3.4), поскольку $u(x), v(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega_\varepsilon}) \cap \cap\, \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$ и поэтому справедливы предельные свойства

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} (D_x u(x), D_x v(x))\, dx \to \int\limits_{\Omega} (D_x u(x), D_x v(x))\, dx, \tag{3.8}$$

$$\int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial v(y)}{\partial \mathbf{n}_y} u(y)\, dS_y \to \int\limits_{\Gamma} \overline{\frac{\partial v(y)}{\partial \mathbf{n}_y}} u(y)\, dS_y \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0. \tag{3.9}$$

Шаг 2. Применив формулу (3.1) к функции $u_{x_i x_i}$ вместо функции u_{x_i}, получим следующее равенство:

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} u_{x_i x_i}(x)\, dx = \int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} u_{y_i}(y) \cos(\mathbf{n}_y, \mathbf{e}_i)\, dS_y.$$

Суммируя по $i = \overline{1, N}$, получим равенство (3.5), поскольку

$$\frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u(y)}{\partial y_i} \cos(\mathbf{n}_y, \mathbf{e}_i).$$

После чего в классе $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n}; \overline{\Omega})$ можно перейти к пределу при $\varepsilon \to +0$ и получить формулу (3.5).

Шаг 3. Для того чтобы получить равенство (3.6) нужно заметить, что в силу (3.4), имеют место следующие два равенства:

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} (D_x u(x), D_x v(x))\, dx = \\ = -\int\limits_{\Omega_\varepsilon} u(x) \Delta v(x)\, dx + \int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial v(y)}{\partial \mathbf{n}_y} u(y)\, dS_y. \quad (3.10)$$

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} (D_x v(x), D_x u(x))\, dx = \\ = -\int\limits_{\Omega_\varepsilon} v(x) \Delta u(x)\, dx + \int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y} v(y)\, dS_y. \quad (3.11)$$

Из равенств (3.10) и (3.11) вытекает одно равенство

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} [u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x)]\, dx = \\ = \int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} \left[u(y) \frac{\partial v(y)}{\partial \mathbf{n}_y} - v(y) \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y} \right] dS_y = \\ = \int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} u(y) \frac{\partial v(y)}{\partial \mathbf{n}_y}\, dS_y - \int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} v(y) \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y}\, dS_y, \quad (3.12)$$

из которого в классе $u(x), v(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n}; \overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ в пределе при $\varepsilon \to +0$ получим искомое равенство (3.6).

Теорема доказана.

Замечание. Если $u(x), v(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$, то справедливо следующее более сильное равенство, чем (3.6):

$$\int\limits_{\Omega} u(x)\Delta v(x)\, dx - \int\limits_{\Omega} v(x)\Delta u(x)\, dx =$$

$$= \int_{\Gamma} u(y) \frac{\partial v(y)}{\partial \mathbf{n}_y} \, dS_y - \int_{\Gamma} v(y) \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y} \, dS_y, \quad (3.13)$$

которое в указанном классе является следствием равенства (3.4).

В дальнейшем мы будем постоянно использовать сферические координаты в $\mathbb{R}^N$. При $N = 2$ формулы перехода имеют вид:

$$(x_1, x_2) \to (r, \varphi_1), \quad \begin{cases} x_1 = r \cos \varphi_1, \\ x_2 = r \sin \varphi_1, \end{cases}$$

$$J_2 = \left| \frac{D(x_1, x_2)}{D(r, \varphi_1)} \right| = r, \quad dx_1 dx_2 = J_2 dr \, d\varphi_1.$$

При $N = 3$ формулы имеют вид:

$$(x_1, x_2, x_3) \to (r, \varphi_1, \varphi_2), \quad \begin{cases} x_1 = r \cos \varphi_1, \\ x_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ x_3 = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2, \end{cases}$$

$$J_3 = \left| \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(r, \varphi_1, \varphi_2)} \right| = r^2 \sin \varphi_1, \quad dx_1 dx_2 dx_3 = J_3 dr \, d\varphi_1 \, d\varphi_2.$$

При $N > 3$ имеем:

$$(x_1, x_2, ..., x_N) \to (r, \varphi_1, ..., \varphi_{N-1}),$$

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \varphi_1, \\ x_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ x_3 = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{N-1} = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{N-2} \cos \varphi_{N-1}, \\ x_N = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{N-2} \sin \varphi_{N-1}, \end{cases}$$

$$J_N = \left| \frac{D(x_1, x_2, x_3, ..., x_{N-1}, x_N)}{D(r, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{N-2}, \varphi_{N-1})} \right| = \\ = r^{N-1} \sin^{N-2} \varphi_1 \sin^{N-3} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{N-2},$$

$$dx_1 dx_2 \cdots dx_{N-1} dx_N = J_N dr \, d\varphi_1 \, d\varphi_2 \cdots d\varphi_{N-2} \, d\varphi_{N-1} = r^{N-1} \, dr d\omega_N,$$

где символом $d\omega_N$ обозначается элемент площади единичной сферы $S_N \subset \mathbb{R}^N$.

В качестве важных примеров перехода к сферической системе координат (в том числе в N–мерном случае) мы приведем пример вычисления следующих двух интегралов:

$$I_1 := \int_{O(0,\varepsilon)} f(|x|) \, dx, \quad I_2 := \int_{\partial O(0,\varepsilon)} f(|y|) \, dS_y,$$

где $dx := dx_1 \cdots dx_N$ — элемент объема в N–мерном эвклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$, dS_y — элемент площади поверхности $\partial O(0,\varepsilon)$ в точке $y \in \partial O(0,\varepsilon)$. Кроме того, воспользуемся следующими стандартными обозначениями:

$$O(x,r) := \left\{ y \in \mathbb{R}^N : \ |x-y| < r \right\}, \quad \partial O(x,r) := \left\{ y \in \mathbb{R}^N : \ |x-y| = r \right\}.$$

Пункт 1. Вычислим сначала интеграл I_1.

□ Действительно, перейдем к сферической системе координат в общем N–мерном случае. Если в пространстве $\mathbb{R}^N$ замкнутый шар $\overline{O(0,\varepsilon)}$ имеет вид $|x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_N^2 \leqslant \varepsilon^2$, то в сферической системе координат $(r, \varphi_1, ..., \varphi_{N-2}, \varphi_{N-1})$ шару $O(0,\varepsilon)$ соответствует прямоугольный параллелепипед

$$0 \leqslant r \leqslant \varepsilon, \quad 0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \pi, \quad \cdots \quad 0 \leqslant \varphi_{N-2} \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi_{N-1} \leqslant 2\pi.$$

Поэтому для интеграла I_1 справедливо следующее выражение:

$$I_1 = \int\limits_0^\varepsilon dr \int\limits_0^\pi d\varphi_1 \cdot\cdot \int\limits_0^\pi d\varphi_{N-2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_{N-1} J_N f(r) =$$

$$= \int\limits_0^\varepsilon r^{N-1} f(r)\, dr \int\limits_0^\pi \sin^{N-2}\varphi_1\, d\varphi_1 \cdots \int\limits_0^\pi \sin^2 \varphi_{N-3}\, d\varphi_{N-3} \times$$

$$\times \int\limits_0^\pi \sin\varphi_{N-2}\, d\varphi_{N-2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_{N-1} = \int\limits_0^\varepsilon \int\limits_{\omega_N} r^{N-1}\, dr\, d\omega_N f(r) = \omega_N \int\limits_0^\varepsilon r^{N-1} f(r)\, dr,$$

где

$$\omega_N := 2\frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}, \quad \omega_2 = 2\pi, \quad \omega_3 = 4\pi$$

и по смыслу является площадью поверхности единичной сферы $\{y \in \in \mathbb{R}^N : \ |y| = 1\}$. Отметим, что объём единичного шара $O(0,1)$ равен

$$\alpha_N := \frac{\omega_N}{N}. \quad \boxtimes$$

Пункт 2. Вычислим интеграл I_2.

□ Действительно, прежде всего заметим, что в сферической системе координат сфера $\partial O(0,\varepsilon)$ параметризуется углами $(\varphi_1, ..., \varphi_{N-2}, \varphi_{N-1})$. Используя формулу

$$dS_y = J_N(y) d\varphi_1 \cdots d\varphi_{N-1}, \quad y = (\varepsilon, \varphi_1, ..., \varphi_{N-1})$$

для элемента площади dS_y в точке y сферы $\partial O(0,\varepsilon)$, где $J_N(y)$ — это модуль якобиана в который подставлены координаты точки y на сфере

$\partial O(0,\varepsilon)$ в сферической системе координат. После подстановки явного выражения для dS_y мы получим следующее равенство:

$$I_2 = \int\limits_{\partial O(0,\varepsilon)} f(|y|)\,dS_y =$$
$$= f(\varepsilon)\int\limits_0^\pi d\varphi_1 \int\limits_0^\pi d\varphi_2 \cdots \int\limits_0^\pi d\varphi_{N-2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi_{N-1} J_N(\varepsilon,\varphi_1,...,\varphi_{N-2}) =$$
$$= f(\varepsilon)\varepsilon^{N-1}\int\limits_0^\pi \sin^{N-2}\varphi_1\,d\varphi_1 \cdots \int\limits_0^\pi \sin^2\varphi_{N-3}\,d\varphi_{N-3}\times$$
$$\times \int\limits_0^\pi \sin\varphi_{N-2}\,d\varphi_{N-2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi_{N-1} = f(\varepsilon)\varepsilon^{N-1}\omega_N.$$

Полезной в различных вычислениях является связь элемента площади dS_y сферы $\partial O(0,\varepsilon)$ и элемента площади dS_z единичной сферы $\partial O(0,1)$. Эта связь дается следующей формулой:

$$dS_y = \varepsilon^{N-1} dS_z, \quad y = (\varepsilon,\varphi_1,...,\varphi_{N-1}), \quad z = (1,\varphi_1,...,\varphi_{N-1}). \quad \boxtimes$$

§ 4. Решение уравнения Пуассона

Пусть $f(x)\in\mathbb{C}_0^{(2)}(\mathbb{R}^N)$. Рассмотрим уравнение Пуассона

$$\Delta u = f(x). \tag{4.1}$$

Введём следующую функцию:

$$u(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_N(x-y)f(y)\,dy, \tag{4.2}$$

где $\mathcal{E}_N(x)$ — это фундаментальное решение оператора Лапласа. Справедлива следующая теорема:

Теорема 4. *Пусть $u(x)$ определено формулой* (4.2). *Тогда при условии, что $f(x)\in\mathbb{C}_0^{(2)}(\mathbb{R}^N)$ имеем $u(x)\in\mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N)$ и функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению* (4.1) *поточечно в* $\mathbb{R}^N$.

Доказательство.

Шаг 1. $u(x)\in\mathbb{C}(\mathbb{R}^N)$. Прежде всего сделаем замену координат и получим следующее равенство:

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_N(x-y)f(y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_N(y)f(x-y)\,dy. \tag{4.3}$$

Пусть $x, z \in O(0, R_0)$ при $R_0 > 0$, причем $\operatorname{supp} f(x) \subset O(0, R_1)$ при $R_1 >$ > 0. Заметим, что тогда как функция от $y \in \mathbb{R}^N$

$$\operatorname{supp} f(x-y), \quad \operatorname{supp} f(z-y) \subset O(0, R_0 + R_1). \tag{4.4}$$

$\square$ Действительно, имеем

$$x - y \in \operatorname{supp} f(x-y) \subset O(0, R_1) \Leftrightarrow y - x \in O(0, R_1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y \in x + O(0, R_1) \subset O(0, R_0) + O(0, R_1) \subset O(0, R_0 + R_1). \quad \boxtimes \tag{4.5}$$

Поэтому для любых $x, z \in O(0, R_0)$ и любого $R_0 > 0$ имеет место равенство:

$$u(x) - u(z) = \int\limits_{O(0,R_0+R_1)} \mathcal{E}_N(y)[f(x-y) - f(z-y)]\, dy. \tag{4.6}$$

Поскольку $f(x) \in \mathbb{C}_0^{(2)}(\mathbb{R}^N)$, то имеем неравенство

$$|u(x) - u(z)| \leqslant \int\limits_{O(0,R_0+R_1)} |\mathcal{E}_N(y)||f(x-y) - f(z-y)|\, dy \leqslant \\ \leqslant \sup_{y \in O(0,R_0+R_1)} |f(x-y) - f(z-y)| \int\limits_{O(0,R_0+R_1)} |\mathcal{E}_N(y)|\, dy \leqslant \\ \leqslant c_1 \sup_{y \in O(0,R_0+R_1)} |f(x-y) - f(z-y)|, \tag{4.7}$$

из которого получаем, что $u(x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N)$.

Шаг 2. $u(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^N)$. Заметим, что функция

$$u_j(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_N(y) \frac{\partial f(x-y)}{\partial x_j}\, dy \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N), \quad j = \overline{1, N}. \tag{4.8}$$

Непрерывность может быть доказана точно так же как соответствующее утверждение на шаге 1, поскольку $f(x) \in \mathbb{C}_0^{(2)}(\mathbb{R}^N)$. Справедливо следующее равенство:

$$\frac{1}{h}\, [f(x + h \cdot \mathbf{e}_j - y) - f(x-y)] = \frac{1}{h} \int\limits_0^1 \frac{df(z_s)}{ds}\, ds, \tag{4.9}$$

где $z_s = x - y + sh \cdot \mathbf{e}_j$, $h \in [-1, 1]$. Имеем

$$\frac{df(z_s)}{ds} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f(z_s)}{\partial z_{sk}} \frac{\partial z_{sk}}{\partial s} = \frac{\partial f(z_s)}{\partial z_{sj}} h. \tag{4.10}$$

Таким образом, с учетом (4.8)–(4.10) приходим к равенству:

$$\frac{1}{h}\left[u(x+h\cdot\mathbf{e}_j)-u(x)\right]-u_j(x)= \\ =\int\limits_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}_N(y)\int\limits_0^1\left[\frac{\partial f(z_s)}{\partial z_{sj}}-\frac{\partial f(x-y)}{\partial x_j}\right]ds\,dy, \quad (4.11)$$

где $z_s=x-y+sh\cdot\mathbf{e}_j$. По аналогии с доказательством на шаге 1 можно доказать, что при $x\in O(0,R_0)$, $R_0>0$ и $h\in[-1,1]$ подынтегральное выражение в (4.11) равно нулю при $y\in\mathbb{R}^N\backslash O(0,R_0+R_1+1)$. Отсюда и из (4.11) приходим к оценке:

$$\left|\frac{1}{h}\left[u(x+h\cdot\mathbf{e}_j)-u(x)\right]-u_j(x)\right|\leqslant \\ \leqslant\sup_{(y,s)\in O(0,R_0+R_1+1)\times[0,1]}\left|\frac{\partial f(z_s)}{\partial z_{sj}}-\frac{\partial f(x-y)}{\partial x_j}\right|\int\limits_{O(0,R_0+R_1+1)}|\mathcal{E}_N(y)|\,dy. \quad (4.12)$$

Поскольку $f(x)\in\mathbb{C}_0^{(2)}(\mathbb{R}^N)$, то правая часть в неравенстве (4.12) стремиться к нулю при $h\to 0$. Значит,

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}=u_j(x)\in\mathbb{C}(\mathbb{R}^N),\quad j=\overline{1,N},$$

т. е. совместно с результатом шага 1 получаем, что $u(x)\in\mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^N)$.

Шаг 3. $u(x)\in\mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N)$. Поскольку $f(x)\in\mathbb{C}_0^{(2)}(\mathbb{R}^N)$, то функция

$$u_{jk}(x):=\int\limits_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}_N(y)\frac{\partial^2 f(x-y)}{\partial x_k\partial x_j}\,dy\in\mathbb{C}(\mathbb{R}^N),\quad u_{jk}(x)=u_{kj}(x), \quad (4.13)$$

где $j,k=\overline{1,N}$. Для любого $x\in O(0,R_0)$ и $h\in[-1,1]$ точно так же как на шаге 2 приходим к такой оценке:

$$\left|\frac{1}{h}\left[u_j(x+h\cdot\mathbf{e}_k)-u_j(x)\right]-u_{jk}(x)\right|\leqslant \\ \leqslant\sup_{(y,s)\in O(0,R_0+R_1+1)\times[0,1]}\left|\frac{\partial^2 f(z_s)}{\partial z_{sk}\partial x_j}-\frac{\partial^2 f(x-y)}{\partial x_k\partial x_j}\right|\times \\ \times\int\limits_{O(0,R_0+R_1+1)}|\mathcal{E}_N(y)|\,dy,\quad j,k=\overline{1,N}, \quad (4.14)$$

где $z_s = x - y + sh \cdot \mathbf{e}_k$. Поскольку $f(x) \in \mathbb{C}_0^{(2)}(\mathbb{R}^N)$, то правая часть неравенства (4.14) стремиться к нулю при $h \to 0$. Следовательно,

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k \partial x_j} = u_{jk}(x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N), \quad j, k = \overline{1, N}.$$

Совместно с результатом шага 2 приходим к выводу о том, что $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N)$.

Шаг 4. $\Delta u(x) = f(x)$. Поскольку фундаментальное решение $\mathcal{E}_N(x)$ имеет особенность в точке $x = 0$, то фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем шар $O(0, \varepsilon)$ с центром в точке $x = 0$ и радиусом $\varepsilon > 0$. Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

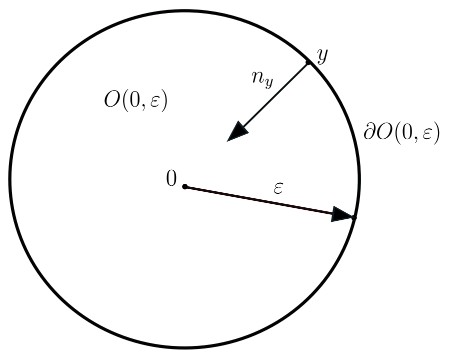


Рис. 2. Шар $O(0, \varepsilon)$ и его граница $\partial O(0, \varepsilon)$

$$\Delta u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_N(y) \Delta_x f(x - y)\, dy =$$
$$= \int\limits_{O(0,\varepsilon)} \mathcal{E}_N(y) \Delta_x f(x - y)\, dy + \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus O(0,\varepsilon)} \mathcal{E}_N(y) \Delta_x f(x - y)\, dy \stackrel{\mathrm{def}}{=}$$
$$\stackrel{\mathrm{def}}{=} I_1 + I_2. \quad (4.15)$$

Справедлива оценка

$$|I_1| \leqslant c_1 \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\Delta_x f(x)| \int\limits_{O(0,\varepsilon)} |\mathcal{E}_N(y)|\, dy \leqslant$$
$$\leqslant c_2 \begin{cases} \varepsilon^2 |1 - 2 \ln \varepsilon|, & \text{если} \quad N = 2; \\ \varepsilon^2, & \text{если} \quad N \geqslant 3. \end{cases} \quad (4.16)$$

□ Действительно, рассмотрим два случая $N = 2$ и $N \geqslant 3$. Без ограничения общности предположим, что $\varepsilon \in (0, 1)$. В первом случае имеет место следующая цепочка равенств:

$$\int\limits_{O(0,\varepsilon)} |\mathcal{E}_2(y)|\, dy = \int\limits_0^{\varepsilon} r|\ln r|\, dr = -\int\limits_0^{\varepsilon} r\ln r\, dr =$$

$$= \left(-\frac{r^2}{2}\ln r + \frac{r^2}{4}\right)\Big|_{r=0}^{r=\varepsilon} = \frac{\varepsilon^2}{4}\left(1 - 2\ln\varepsilon\right).$$

Рассмотрим теперь второй случай ($N \geqslant 3$.)

$$\int\limits_{O(0,\varepsilon)} |\mathcal{E}_N(y)|\, dy =$$

$$= \frac{1}{(N-2)\omega_N}\int\limits_0^{\varepsilon}\int\limits_{\omega_N} \frac{1}{r^{N-2}} r^{N-1} d\omega_N\, dr = \frac{1}{N-2}\int\limits_0^{\varepsilon} \frac{r^{N-1}}{r^{N-2}}\, dr = \frac{\varepsilon^2}{2(N-2)}. \quad \boxtimes$$

Интегрируя по частям, получаем

$$I_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus O(0,\varepsilon)} \mathcal{E}_N(y)\Delta_y f(x-y)\, dy =$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus O(0,\varepsilon)} \left(D_y\mathcal{E}_N(y), D_y f(x-y)\right)\, dy + \int\limits_{\partial O(0,\varepsilon)} \mathcal{E}_N(y)\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}_y}(x-y)\, dS_y \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} I_{21} + I_{22}, \quad (4.17)$$

где $\mathbf{n}_y$ – единичный вектор внутренней нормали к $\partial O(0,\varepsilon)$. Имеет место оценка

$$|I_{22}| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |D_x f(x)| \int\limits_{\partial O(0,\varepsilon)} |\mathcal{E}_N(y)|\, dS_y \leqslant$$

$$\leqslant c_3 \begin{cases} \varepsilon|\ln\varepsilon|, & \text{если} \quad N = 2, \\ \varepsilon, & \text{если} \quad N \geqslant 3. \end{cases} \quad (4.18)$$

□ Действительно, рассмотрим два случая $N = 2$ и $N \geqslant 3$. В первом случае имеет место следующая цепочка равенств:

$$\int\limits_{\partial O(0,\varepsilon)} |\mathcal{E}_2(y)|\, dS_y = \varepsilon|\ln\varepsilon|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial O(0,1)} dS_y = \varepsilon|\ln\varepsilon|.$$

Во втором случае справедливо выражение:

$$\int\limits_{\partial O(0,\varepsilon)} |\mathcal{E}_N(y)|\, dS_y = \frac{\varepsilon^{N-1}}{\omega_N(N-2)\varepsilon^{N-2}}\int\limits_{\partial O(0,1)} dS_y = \frac{1}{N-2}\varepsilon. \quad \boxtimes$$

Шаг 3. Интегрируя по частям в выражении для I_{21}, получим следующую цепочку равенств:

$$I_{21} = -\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus O(0,\varepsilon)} (D_y\mathcal{E}_N(y), D_y f(x-y))\, dy =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus O(0,\varepsilon)} \Delta_y \mathcal{E}_N(y) f(x-y)\, dy - \int\limits_{\partial O(0,\varepsilon)} \frac{\partial \mathcal{E}_N(y)}{\partial \mathbf{n}_y} f(x-y)\, dS_y =$$
$$= -\int\limits_{\partial O(0,\varepsilon)} \frac{\partial \mathcal{E}_N(y)}{\partial \mathbf{n}_y} f(x-y)\, dS_y, \quad (4.19)$$

так как фундаментальное решение $\mathcal{E}_N(x)$ удовлетворяет уравнению Лапласа вне начала координат. Имеют место следующие равенства:

$$D_y\mathcal{E}_N(y) = \frac{1}{\omega_N}\frac{y}{|y|^N} \quad \text{и} \quad \mathbf{n}_y = \frac{-y}{|y|} = -\frac{y}{\varepsilon} \quad \text{на} \quad \partial O(0,\varepsilon).$$ [1]

Следовательно,

$$\frac{\partial \mathcal{E}_N(y)}{\partial \mathbf{n}_y} = (\mathbf{n}_y, D_y\mathcal{E}_N(y)) =$$
$$= -\frac{1}{\omega_N}\frac{|y|^2}{\varepsilon |y|^N} = -\frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \quad \text{на} \quad \partial O(0,\varepsilon), \quad \text{т. е. при} \quad |y| = \varepsilon.$$

Поскольку $\omega_N \varepsilon^{N-1}$ — это площадь поверхности сферы $\partial O(0,\varepsilon)$, то при $\varepsilon \to +0$ имеем:

$$I_{21} = -\int\limits_{\partial O(0,\varepsilon)} \frac{\partial \mathcal{E}_N(y)}{\partial \mathbf{n}_y} f(x-y)\, dS_y = \frac{1}{\omega_N\varepsilon^{N-1}} \int\limits_{\partial O(0,\varepsilon)} f(x-y)\, dS_y \to f(x)$$

при $\varepsilon \to +0$.

□ Действительно, имеем

$$\frac{1}{\omega_N\varepsilon^{N-1}} \int\limits_{\partial O(0,\varepsilon)} f(x-y)\, dS_y = \frac{1}{\omega_N\varepsilon^{N-1}} \int\limits_{\partial O(0,\varepsilon)} [f(x-y) - f(x)]\, dS_y + f(x),$$

а интеграл

$$\frac{1}{\omega_N\varepsilon^{N-1}} \int\limits_{\partial O(0,\varepsilon)} [f(x-y) - f(x)]\, dS_y \to +0$$

[1] Напомним, что по смыслу $\mathbf{n}_y$ — это внутренняя нормаль к сфере $\partial O(0,\varepsilon)$.

при $\varepsilon \to +0$, поскольку функция $f(x) \in \mathbb{C}_0^{(2)}(\mathbb{R}^N) \subset \mathbb{C}(\mathbb{R}^N)$ и поэтому для всякого фиксированного $x \in \mathbb{R}^N$ имеет место предельный переход

$$\sup_{|y|=\varepsilon} |f(x-y) - f(x)| \to +0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

Справедливо следующее неравенство:

$$\frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int\limits_{\partial O(0,\varepsilon)} [f(x-y) - f(x)]\, dS_y \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|y|=\varepsilon} |f(x-y) - f(x)| \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int\limits_{\partial O(0,\varepsilon)} dS_y =$$

$$= \sup_{|y|=\varepsilon} |f(x-y) - f(x)| \to +0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0. \quad \boxtimes$$

Шаг 4. Итак, переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$ в равенстве (4.15), получим равенство

$$\Delta u(x) = f(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Теорема доказана.

§ 5. Теорема о среднем

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — область. Рассмотрим функцию $u(x)$ *гармоническую* в области Ω, т. е. удовлетворяющую уравнению Лапласа в области Ω:

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega. \tag{5.1}$$

Справедлива следующая теорема о среднем:

Теорема 5. *Если функция $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega)$ гармоническая в области Ω, то для любого шара $O(x,r) \subset \Omega$*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int\limits_{\partial O(x,r)} u(y)\, dS_y = \frac{1}{\alpha_N r^N} \int\limits_{O(x,r)} u(y)\, dy, \tag{5.2}$$

где ω_N — это площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^N$, а $\alpha_N = \omega_N/N$ — это объем единичного шара в $\mathbb{R}^N$.

Доказательство.

Шаг 1. Положим

$$\varphi(r) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int\limits_{\partial O(x,r)} u(y)\, dS_y. \tag{5.3}$$

Сделаем следующую замену переменных в интеграле (5.3):

$$y \in \partial O(x,r) \Rightarrow y = x + rz,$$
$$|y-x| = r \Rightarrow |z| = 1, \quad dS_y = r^{N-1} dS_z. \tag{5.4}$$

В силу замены переменных из (5.3) получим следующее равенство:

$$\varphi(r) = \frac{1}{\omega_N} \int\limits_{\partial O(0,1)} u(x+rz)\, dS_z. \tag{5.5}$$

Дифференцируя обе части этого равенства по r получим следующее равенство:

$$\varphi^{'}(r) = \frac{1}{\omega_N} \int\limits_{\partial O(0,1)} (D_y u(x+rz), z)\; dS_z, \tag{5.6}$$

поскольку

$$\frac{\partial u(x+rz)}{\partial r} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u(y)}{\partial y_i} z_i, \quad y = x + rz.$$

Выполняя еще одну замену переменных $y = x + rz$, получим равен-

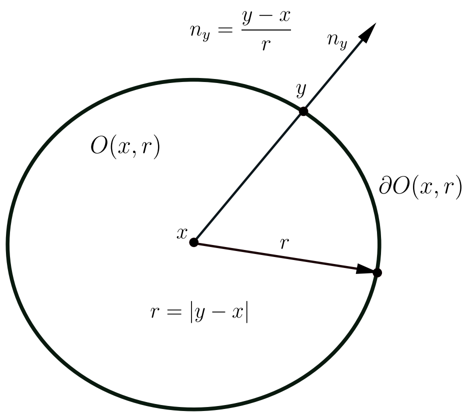


Рис. 3. Внешняя нормаль $\mathbf{n}_y$ в точке $y \in \partial O(x,r)$

ство:

$$\varphi^{'}(r) = \frac{1}{\omega_N} \int\limits_{\partial O(0,1)} (D_y u(x+rz), z)\; dS_z =$$
$$= \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int\limits_{\partial O(x,r)} \left(D_y u(y), \frac{y-x}{r} \right) dS_y. \tag{5.7}$$

Шаг 2. Прежде всего заметим, что имеют место следующие равенства:

$$\mathbf{n}_y = \frac{y-x}{r}, \quad r = |y-x| \Rightarrow \left(D_y u(y), \frac{y-x}{r}\right) = (D_y u(y), \mathbf{n}_y) = \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y},$$

где $\mathbf{n}_y$ — это внешняя нормаль в точке $y \in \partial O(x,r)$. Поэтому

$$\varphi'(r) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int\limits_{\partial O(x,r)} \left(D_y u(y), \frac{y-x}{r}\right) dS_y =$$
$$= \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int\limits_{\partial O(x,r)} \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y} dS_y = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int\limits_{O(x,r)} \Delta_y u(y)\, dy = 0. \quad (5.8)$$

Следовательно, $\varphi(r)$ постоянна и справедливо следующее равенство:

$$\varphi(r) = \lim_{t\to+0} \varphi(t) = \lim_{t\to+0} \frac{1}{\omega_N t^{N-1}} \int\limits_{\partial O(x,t)} u(y)\, dS_y = u(x). \quad (5.9)$$

Первое равенство в (5.2) доказано.

Шаг 3. Докажем второе равенство. Действительно,

$$\int\limits_{O(x,r)} u(y)\, dy = \int\limits_0^r \left(\int\limits_{\partial O(x,t)} u(z)\, dS_z \right) dt = u(x) \int\limits_0^r \omega_N t^{N-1}\, dt =$$
$$= \frac{\omega_N}{N} r^N u(x) \Rightarrow u(x) = \frac{1}{\alpha_N r^N} \int\limits_{O(x,r)} u(y)\, dy. \quad (5.10)$$

Теорема доказана.

Докажем теперь обратную теорему.

Теорема 6. *Если $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega)$ удовлетворяет условию*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int\limits_{\partial O(x,r)} u(y)\, dS_y \quad (5.11)$$

для каждого шара $O(x,r) \subset \Omega$, то $u(x)$ — это гармоническая функция.

Доказательство.

Если $\Delta u(y) \not\equiv 0$, то существует шар $O(x,r) \subset \Omega$ такой, что либо $\Delta u(y) > 0$ либо $\Delta u(y) < 0$ внутри $O(x,r)$. Для функции $\varphi(r)$, определенной равенством

$$\varphi(r) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int\limits_{\partial O(x,r)} u(y)\, dS_y \Rightarrow \varphi'(r) = 0$$

Поэтому в силу цепочки равенств (5.8) имеем

$$0 = \varphi'(r) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int\limits_{O(x,r)} \Delta_y u(y)\, dy \gtrless 0,$$

которое противоречиво.

Теорема доказана.

§ 6. Примеры решения задач

Задача 1. Пусть

$$\Omega = \Bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\Bigr\}, \quad u(x,y) \in \mathbb{C}^2(\overline{\Omega}),$$

$$\Delta u(x,y) = 0 \quad \text{в} \quad \overline{\Omega}, \quad u|_{y=0} = u|_{y=1} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{6.1}$$

Может ли функция

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^1 u^2(x,y)\, dy$$

иметь точку перегиба внутри интервала $(0,1)$?

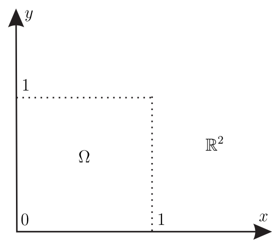


Рис. 4. Область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

Ответ. Нет.

Решение. Поскольку $u(x,y) \in \mathbb{C}^2(\overline{\Omega})$, то справедливы равенства

$$f'(x) = 2\int\limits_0^1 u_x(x,y) u(x,y)\, dy,$$

$$f''(x) = 2\int\limits_0^1 \Bigl(u_x^2(x,y) + u_{xx}(x,y) u(x,y)\Bigr)\, dy =$$

$$= 2\int\limits_0^1 \Big(u_x^2(x,y) - u_{yy}(x,y)u(x,y)\Big)\,dy =$$

$$= 2\int\limits_0^1 \Big(u_x^2(x,y) + u_y^2(x,y)\Big)\,dy \geqslant 0,$$

где мы воспользовались тем, что

$$u_{xx}(x,y) = -u_{yy}(x,y)$$

и интегрированием по частям с учетом граничных условий (6.1). Следовательно, точки перегиба нет, поскольку знак у функции $f''(x)$ не меняется при $x \in (0,1)$.

Задача 2. Пусть

$$\Delta u(x) = 1 \quad \text{при} \quad x \in \overline{O(0,2)}\backslash O(0,1) \subset \mathbb{R}^2, \tag{6.2}$$

где

$$O(0,r) \overset{\text{def}}{=} \Big\{x \in \mathbb{R}^2 :\ |x| < r\Big\}.$$

Что больше

$$\int\limits_{\partial O(0,2)} \frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho,\vartheta)\,d\vartheta \quad \text{или} \quad \int\limits_{\partial O(0,1)} \frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho,\vartheta)\,d\vartheta\ ?$$

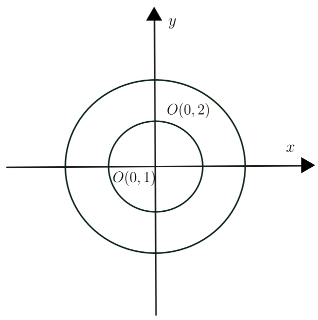


Рис. 5. Область $O(0,2)\backslash\overline{O(0,1)}$

Решение. Проинтегрируем по множеству $\overline{O(0,2)}\backslash O(0,1)$ обе части равенства (6.2). Тогда с учетом формулы (3.5) и того, что

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} = \frac{\partial}{\partial \rho} \quad \text{при} \quad x \in \partial O(0,2),$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \quad \text{при} \quad x \in \partial O(0,1),$$

получим равенство

$$\int\limits_{\partial O(0,2)} \frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho,\vartheta)\,d\vartheta = \int\limits_{\partial O(0,1)} \frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho,\vartheta)\,d\vartheta + 3\pi,$$

поскольку

$$\int\limits_{\overline{O(0,2)}\setminus O(0,1)} r\,d\vartheta\,dr = 2\pi\int\limits_1^2 r\,dr = 2\pi\left(2-\frac{1}{2}\right) = 3\pi.$$

Итак,

$$\int\limits_{\partial O(0,2)} \frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho,\vartheta)\,d\vartheta > \int\limits_{\partial O(0,1)} \frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho,\vartheta)\,d\vartheta.$$

Задача 3. Пусть $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$ и

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_x} = \psi(x) \quad \text{при} \quad x \in \Gamma.$$

Доказать, что функция $\psi(x)$ обращается в нуль не менее, чем в двух точках на Γ.

Решение. В силу формулы (3.5) имеем место равенство

$$0 = \int\limits_\Gamma \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y}\,ds_y = \int\limits_\Gamma \psi(y)\,ds_y.$$

Либо $\psi(y) \equiv 0$ при $y \in \Gamma$, либо функция $\psi(y)$ меняет знак на Γ, по меньшей мере два раза.

Задача 4. При каких α существует решение $u(\rho,\vartheta)$ задачи Неймана для уравнения Лапласа в круге $O(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ с граничным условием

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=1} = \alpha\cos^4\vartheta + \alpha^2\cos^2\vartheta?$$

Решение. Задача предлагается для самостоятельного решения.

Задача 5. Пусть $u(x)$ — это гармоническая в шаре $O(0,r)$ и непрерывная в замкнутом шаре $\overline{O(0,r)}$ функция, причем $u(0) = 0$. Найти связь между числами

$$\int\limits_{O^+} u(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{O^-} u(x)\,dx,$$

где

$$O^+ \overset{\text{def}}{=} \{x \in O(0,r) : \ u(x) > 0\}, \quad O^- \overset{\text{def}}{=} \{x \in O(0,r) : \ u(x) < 0\}.$$

Решение. В силу формулы (5.2) теоремы о среднем 5 справедлива цепочка равенств

$$0 = u(0) = \frac{1}{\alpha_N r^N} \int\limits_{O(0,r)} u(y)\,dy = \frac{1}{\alpha_N r^N} \left(\int\limits_{O^+} u(x)\,dx + \int\limits_{O^-} u(x)\,dx \right).$$

Итак, имеем

$$\int\limits_{O^+} u(x)\,dx + \int\limits_{O^-} u(x)\,dx = 0.$$

Задача 6. Пусть $u(x)$ — это гармоническая в замкнутом шаре $\overline{O(0,1)} \subset \mathbb{R}^2$ функция. Найти

$$\int\limits_0^{2\pi} u_{\rho\rho}(1,\vartheta)\,d\vartheta.$$

Решение. Согласно формуле среднего значения (5.2) теоремы о среднем 5 справедливо равенство:

$$\int\limits_0^{2\pi} u(\rho,\vartheta)\,d\vartheta = 2\pi\rho u(0), \quad \rho \in (0,1].$$

Осталось заметить, что справедливо следующее равенство:

$$\int\limits_0^{2\pi} u_{\rho\rho}(1,\vartheta)\,d\vartheta = \left(\frac{d^2}{d\rho^2} \int\limits_0^{2\pi} u(\rho,\vartheta)\,d\vartheta \right) \Bigg|_{\rho=1} = 2\pi u(0) \frac{d^2\rho}{d\rho^2}\bigg|_{\rho=1} = 0.$$

Итак,

$$\int\limits_0^{2\pi} u_{\rho\rho}(1,\vartheta)\,d\vartheta = 0.$$

§ 7. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [3], [12], [16].

Лекция 2

ПРИНЦИПЫ МАКСИМУМА И МИНИМУМА

§ 1. Сильный принцип максимума

Следствием теоремы о среднем является принципы максимума и минимума для решений уравнения Лапласа в ограниченной области Ω с границей Γ.

Теорема 1. *Пусть функция* $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ *гармоническая внутри области* Ω. *Тогда*

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} \overline{u}(x) = \max_{x \in \Gamma} \overline{u}(x); \tag{1.1}$$

если существует точка $x_0 \in \Omega$ *такая, что*

$$u(x_0) = \max_{x \in \overline{\Omega}} \overline{u}(x), \tag{1.2}$$

то $u(x)$ *постоянна внутри* Ω. *Кроме того,*

$$\min_{x \in \overline{\Omega}} \overline{u}(x) = \min_{x \in \Gamma} \overline{u}(x); \tag{1.3}$$

если существует точка $x_0 \in \Omega$ *такая, что*

$$u(x_0) = \min_{x \in \overline{\Omega}} \overline{u}(x), \tag{1.4}$$

то $u(x)$ *постоянна внутри* Ω, *где* $\overline{u}(x)$ — *непрерывное продолжение функции* $u(x)$ *из области* Ω *до границы* Γ.

Доказательство. Докажем соответствующие утверждения для максимума.

Шаг 1. Предположим, что существует точка $x_0 \in \Omega$ такая, что

$$u(x_0) = M \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x \in \overline{\Omega}} \overline{u}(x).$$

Тогда при

$$0 < r < \operatorname{dist}(x_0, \Gamma)$$

по теореме о среднем для любого такого $r > 0$ имеем:

$$M = u(x_0) = \frac{1}{\alpha_N r^N} \int\limits_{O(x_0,r)} u(y)\,dy. \tag{1.5}$$

Предположим, что найдется такая точка $x_1 \in O(x_0, r)$, в которой

$$u(x_1) < M.$$

Поскольку $u(x) \in \mathbb{C}_w(\overline{\Omega}) \subset \mathbb{C}(\overline{O(x_0,r)})$, то найдется такой шар $O(x_1, r_1) \subset O(x_0, r)$, в котором

$$u(x) < M - \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in O(x_1, r_1)$$

при некотором малом $\varepsilon > 0$. В силу формулы (1.5) имеет место цепочка выражений:

$$M = u(x_0) = \frac{1}{\alpha_N r^N} \int\limits_{O(x_0,r)} u(y)\,dy =$$
$$= \frac{1}{\alpha_N r^N} \int\limits_{O(x_1,r_1)} u(y)\,dy + \frac{1}{\alpha_N r^N} \int\limits_{O(x_0,r)\setminus O(x_1,r_1)} u(y)\,dy \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\alpha_N r_1^N}{\alpha_N r^N}(M-\varepsilon) + M\frac{\alpha_N(r^N - r_1^N)}{\alpha_N r^N} = M - \left(\frac{r_1}{r}\right)^N \varepsilon.$$

Отсюда вытекает противоречивые неравенства:

$$0 < \varepsilon \leqslant 0.$$

Значит,
$$u(x) = M \quad \text{для всех} \quad x \in O(x_0, r).$$

Шаг 2. Пусть $\widehat{x} \in \Omega$ — это произвольная точка. Соединим точку $\widehat{x}$ с точкой $x_0 \in \Omega$ ломанной и покроем ломанную конечным числом шаров

$$O(x_0, r_0), \quad O(x_1, r_1), \quad \ldots, \quad O(x_N, r_N),$$

содержащихся в Ω и таких, что $\widehat{x} \in O(x_N, r_N)$, а $x^k \in O(x_{k-1}, r_{k-1})$ при $k = \overline{1, N}$. По доказанному получим, что $u(x) = M$ в каждом из этих шаров. Следовательно,

$$u(\widehat{x}) = M.$$

Шаг 3. Таким образом, либо точка x_0, в которой достигается максимум, принадлежит Ω и функция $u(x) = u(x_0)$ — постоянна в Ω либо $x_0 \in \Gamma$. В обоих случаях имеет место равенство (1.1).

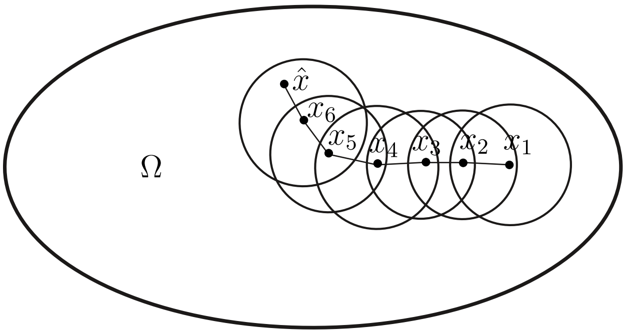


Рис. 6. К шагу 2

Шаг 4. Принцип минимума. Для доказательства принципа минимума (1.3), (1.4) заметим, что для функции $-u(x)$ выполнены все условия для справедливости принципа максимума (1.1), (1.2) и поэтому справедливо равенство

$$\max_{x\in\overline{\Omega}}(-\overline{u}(x)) = \max_{x\in\Gamma}(-\overline{u}(x)) \tag{1.6}$$

и если существует точка $x_0 \in \Omega$ такая, что

$$-u(x_0) = \max_{x\in\overline{\Omega}}(-\overline{u}(x)), \tag{1.7}$$

то $-u(x) = -u(x_0)$ в области Ω. Осталось заметить, что всегда выполнено равенство

$$\inf_{x\in X} f(x) = -\sup_{x\in X}(-f(x)).$$

$\Box$ Действительно, рассмотрим случай, когда inf функции $f(x)$ достигается в некоторой точке $x_0 \in X$. Тогда имеем

$$f(x_0) = \inf_{x\in X} f(x) \Leftrightarrow -f(x_0) = \sup_{x\in X}(-f(x)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x_0) = -\sup_{x\in X}(-f(x)) \Leftrightarrow \inf_{x\in X} f(x) = -\sup_{x\in X}(-f(x)). \quad \boxtimes \tag{1.8}$$

Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что, например, потенциал двойного слоя $W[\sigma](x)$ с плотностью $\sigma(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$ не является функцией непрерывной на множествах $\overline{\Omega}$ и $\mathbb{R}^N\backslash\Omega$. Поэтому при доказательстве теоремы 1 нужно рассматривать непрерывное продолжение $\overline{u}(x)$ функции $u(x) \in \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ до границы Γ области Ω.

Прямым следствием принципа максимума является следующее утверждение:

Следствие. *Пусть функция $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ гармоническая внутри ограниченной области Ω с границей Γ. Тогда*

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} |\overline{u}(x)| = \max_{x\in\Gamma} |\overline{u}(x)|, \tag{1.9}$$

$\overline{u}(x)$ — непрерывное продолжение функции $u(x)$ с Ω до границы Γ.

Доказательство.

Пусть

$$M = \max_{x\in\Gamma} |\overline{u}(x)|.$$

Рассмотрим две гармонические функции в Ω

$$v_1(x) := \overline{u}(x) - M, \quad v_2(x) := \overline{u}(x) + M.$$

Ясно, что

$$v_1(x) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad v_2(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma.$$

В силу принципа максимума имеем [1)]

$$v_1(x) \leqslant \max_{x\in\Gamma} v_1(x) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad v_2(x) \geqslant \min_{x\in\Gamma} v_2(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega.$$

Итак,

$$-M \leqslant \overline{u}(x) \leqslant M \quad \text{при} \quad x \in \Omega \Rightarrow |\overline{u}(x)| \leqslant M \Rightarrow \max_{x\in\overline{\Omega}} |\overline{u}(x)| = \max_{x\in\Gamma} |\overline{u}(x)|.$$

Следствие доказано.

Важным следствием из принципа максимума является теорема единственности решения задачи Дирихле.

Теорема 2. *Пусть $g(x)$ и $f(x)$ — функции, определенные на Γ и Ω, соответственно. Тогда если существует, то не более одного решения $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ краевой задачи Дирихле*

$$\Delta u(x) = f(x) \quad \textit{в} \quad \Omega, \quad \lim_{\Omega\ni x\to x_0\in\Gamma} u(x) = g(x_0). \tag{1.10}$$

Доказательство.

Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — это два решения краевой задачи (1.10). Тогда функция $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ будет решением соответствующей однородной задачи, а в силу следствия к теореме 1 находим, что

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} |\overline{u}(x)| = \max_{x\in\Gamma} |\overline{u}(x)| = 0 \Rightarrow u_1(x) = u_2(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega.$$

Теорема доказана.

Наконец, справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. *Гармоническая в ограниченной области Ω функция $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$, отличная от постоянной, при любом $x \in \Omega$ удовлетворяет неравенствам*

$$\min_{y\in\Gamma} \overline{u}(y) < u(x) < \max_{y\in\Gamma} \overline{u}(y), \tag{1.11}$$

где $\overline{u}(x)$ — непрерывное продолжение функции $u(x)$ из области Ω до границы Γ.

[1)] Заметим, что $\overline{v}_j(x) = v_j(x)$ при $j = 1, 2$.

Доказательство.

Это прямое следствие теоремы 1. Действительно, если найдутся такие точки $x_1, x_2 \in \Omega$, в которых достигается минимум и максимум функции $u(x)$, соответственно, то функция равна постоянной в области Ω, что противоречит нашим предположениям.

Теорема доказана.

Кроме того, имеет место следующий принцип максимума и принцип минимума в случае ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ для субгармонических функций ($\Delta u(x) \geqslant 0$) и для супергармонических функций ($\Delta u(x) \leqslant 0$):

Лемма 1. *Пусть функция $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ и пусть $\Delta u(x) \geqslant 0$ в Ω (субгармоническая функция). Тогда для любой точки $x \in \Omega$*

$$u(x) \leqslant \max_{y \in \Gamma} \overline{u}(y). \tag{1.12}$$

Пусть функция $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ и пусть $\Delta u(x) \leqslant 0$ в Ω (супергармоническая функция) Тогда для любой точки $x \in \Omega$

$$u(x) \geqslant \min_{y \in \Gamma} \overline{u}(y), \tag{1.13}$$

где $\overline{u}(x)$ — непрерывное продолжение функции $u(x)$ из области Ω до границы Γ.

Доказательство.

Шаг 1. Докажем сначала неравенство (1.12). Прежде всего, поскольку $u(x) \in \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ и область Ω ограничена, то найдется постоянная

$$c_1 > \max_{x \in \overline{\Omega}} |\overline{u}(x)| \Rightarrow -\overline{u}(x) \leqslant |\overline{u}(x)| < c_1.$$

Поэтому функция

$$u(x) + c_1 > 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega$$

и является субгармонической в Ω. Значит, без ограничения общности будем считать, что

$$u(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega.$$

Шаг 2. Пусть

$$v(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u(x)}{1 - \varepsilon |x|^2}, \quad \varepsilon = const > 0. \tag{1.14}$$

Поскольку область Ω ограничена, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство:

$$\varepsilon |x|^2 < 1 \Rightarrow 1 - \varepsilon |x|^2 > 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega.$$

Заметим, что имеет место выражение:

$$0 \leqslant \Delta u(x) = (1 - \varepsilon |x|^2)\Delta v(x) - 4\varepsilon \sum_{j=1}^{N} x_j \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} - 2\varepsilon N v(x). \qquad (1.15)$$

Шаг 3. Если $v(x)$ принимает наибольшее значение в точке $x_0 \in \Omega$, то в этой точке

$$\frac{\partial^2 v(x_0)}{\partial x_j^2} \leqslant 0, \quad \frac{\partial v(x_0)}{\partial x_j} = 0, \quad v(x_0) = u(x_0)(1 - \varepsilon |x_0|^2) > 0 \qquad (1.16)$$

при $j = \overline{1, N}$. Поэтому мы приходим к противоречию с неравенством (1.15), поскольку в силу (1.16) получим

$$(1 - \varepsilon |x_0|^2)\Delta v(x_0) - 4\varepsilon \sum_{j=1}^{N} x_{0j} \frac{\partial v(x_0)}{\partial x_j} - 2\varepsilon N v(x_0) < 0.$$

Поэтому для любой точки $x \in \Omega$ выполнено неравенство:

$$v(x) \leqslant \max_{y \in \Gamma} \overline{v}(y) \Rightarrow \frac{u(x)}{1 - \varepsilon |x|^2} \leqslant \max_{y \in \Gamma} \frac{\overline{u}(y)}{1 - \varepsilon |y|^2}.$$

Устремляя $\varepsilon \to +0$ в последнем неравенстве с учётом $u(x) \in \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$, мы получим неравенство (1.12).

Шаг 4. Если $\Delta u(x) \leqslant 0$, то $\Delta\left(-u(x)\right) \geqslant 0$ и, следовательно, по доказанному имеем

$$-u(x) \leqslant \max_{y \in \Gamma} \left(-\overline{u}(y)\right) \Rightarrow u(x) \geqslant -\max_{y \in \Gamma} \left(-\overline{u}(y)\right) = \min_{y \in \Gamma} \overline{u}(y), \quad x \in \Omega,$$

поскольку

$$\max_{y \in \Gamma} \left(-\overline{u}(y)\right) = -\min_{y \in \Gamma} \overline{u}(y),$$

что доказывает неравенство (1.13).

Лемма доказана.

Следствие. *Если в условиях леммы имеют место соответствующие строгие неравенства*

$$\Delta u(x) > 0 \quad \text{или} \quad \Delta u(x) < 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \qquad (1.17)$$

то будут иметь место соответствующие строгие неравенства:

$$u(x) < \max_{y \in \Gamma} \overline{u}(y) \quad \text{или} \quad u(x) > \min_{y \in \Gamma} \overline{u}(y) \quad \text{при} \quad x \in \Omega. \qquad (1.18)$$

Доказательство.

Действительно, пусть, например, $\Delta u(x) > 0$ при $x \in \Omega$. Тогда согласно результату леммы 1 имеет место неравенство (1.12). Предположим, что существует точка $x_0 \in \Omega$, в которой достигается равенство в неравенстве (1.12). Но тогда в этой точке максимума выполнено неравенство

$$\Delta u(x_0) \leqslant 0,$$

что противоречит неравенству $\Delta u(x) > 0$ при $x \in \Omega$.

Следствие доказано.

Замечание. Заметим, что для неограниченных областей $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^N$ естественная переформулировка, например, следствия из принципа максимума, т. е. равенства (1.9) (принципа максимума модуля)

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} |\overline{u}(x)| = \max_{x \in \Gamma} |\overline{u}(x)|, \tag{1.19}$$

вообще говоря, не имеет места. Достаточно привести следующий пример:

ПРИМЕР 1. Пусть $N \geqslant 2$ и

$$\Omega = \left\{ (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N : \; -\frac{\pi}{2} < x_N < \frac{\pi}{2} \right\},$$

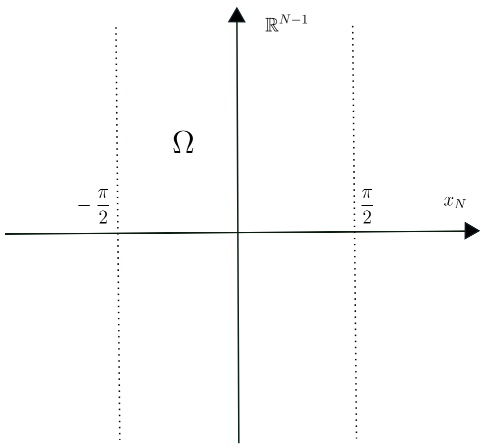


Рис. 7. Область Ω

Функция $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ гармоническая в области Ω удовлетворяет граничным условиям

$$u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (x_1, ..., x_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad x_N = \pm\frac{\pi}{2} \right\}.$$

Решением этой задачи является следующая неограниченная функция:

$$u(x) = \cos(x_N) v(x_1, ..., x_{N-1}),$$

где
$$v(x_1, ..., x_{N-1}) = \exp\left(\frac{x_1}{\sqrt{N-1}}\right)\cdots\exp\left(\frac{x_{N-1}}{\sqrt{N-1}}\right).$$
Этот пример подсказывает нам, что в классе ограниченных функций утверждение все таки имеет место.

Признак сравнения. Пусть функции $v(x), w(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ — это решение следующей задачи:
$$\Delta v(x) < \Delta w(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{1.20}$$
$$\lim_{\Omega \ni y \to x \in \Gamma} v(y) \geqslant \lim_{\Omega \ni y \to x \in \Gamma} w(y) \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \tag{1.21}$$
где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с границей Γ. Тогда $v(x) \geqslant w(x)$ для всех $x \in \Omega$.

□ Действительно, образуем разность $u(x) = \overline{v}(x) - \overline{w}(x)$. Эта функция удовлетворяет следующей задаче:
$$\Delta u(x) < 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{1.22}$$
$$u(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma. \tag{1.23}$$
Предположим, что существует точка $x_0 \in \Omega$ такая, что $u(x_0) < 0$. Поскольку $u(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, а область $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная, то функция $u(x)$ где-то в $\overline{\Omega}$ достигает глобального отрицательного минимума. Так как на границе Γ функция $u(x) \geqslant 0$, то отрицательный глобальный минимум достигается внутри области Ω. Пусть это точка $x_0 \in \Omega$. Тогда в этой точке выполнено неравенство
$$\Delta u(x_0) \geqslant 0, \tag{1.24}$$
которое противоречит неравенству (1.22). Значит всюду в Ω имеем $v(x) \geqslant w(x)$. ⊠

Устойчивость решения задачи Дирихле. Пусть $u_1(x), u_2(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ — это решения соответствующих задач Дирихле:
$$\Delta u_k(x) = f_k(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega, \tag{1.25}$$
$$u_k(x) = g_k(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \Gamma, \tag{1.26}$$
где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ и $k = 1, 2$. Для произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$ и $0 < \delta < 2$ рассмотрим следующие три функции:
$$v(x) = u_1(x) - u_2(x), \tag{1.27}$$

$v_1(x) = -\sup\limits_{x \in \Gamma} |g_1(x) - g_2(x)| -$

$$- \frac{d^2 - |x|^2}{N\delta} \max\left\{\sup_{x\in\Omega}|f_1(x) - f_2(x)|, \varepsilon\right\}, \quad (1.28)$$

$$v_2(x) = \sup_{x\in\Gamma}|g_1(x) - g_2(x)| + \\ + \frac{d^2 - |x|^2}{N\delta} \max\left\{\sup_{x\in\Omega}|f_1(x) - f_2(x)|, \varepsilon\right\}, \quad (1.29)$$

где

$$d := \sup_{x\in\Omega}|x|.$$

Заметим, что

$$\Delta v_1(x) = \frac{2}{\delta} \max\left\{\sup_{x\in\Omega}|f_1(x) - f_2(x)|, \varepsilon\right\}, \quad (1.30)$$

$$\Delta v_2(x) = -\frac{2}{\delta} \max\left\{\sup_{x\in\Omega}|f_1(x) - f_2(x)|, \varepsilon\right\}. \quad (1.31)$$

Тогда справедливы неравенства

$$\Delta v(x) = f_1(x) - f_2(x) \leqslant \max\left\{\sup_{x\in\Omega}|f_1(x) - f_2(x)|, \varepsilon\right\} < \\ < \frac{2}{\delta} \max\left\{\sup_{x\in\Omega}|f_1(x) - f_2(x)|, \varepsilon\right\} = \Delta v_1(x) \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \quad (1.32)$$

$$v(x) = g_1(x) - g_2(x) \geqslant -\sup_{x\in\Gamma}|g_1(x) - g_2(x)| \geqslant \\ \geqslant v_1(x) \quad \text{для} \quad x \in \Gamma, \quad (1.33)$$

$$\Delta v(x) = f_1(x) - f_2(x) \geqslant -\max\left\{\sup_{x\in\Omega}|f_1(x) - f_2(x)|, \varepsilon\right\} > \\ > -\frac{2}{\delta} \max\left\{\sup_{x\in\Omega}|f_1(x) - f_2(x)|, \varepsilon\right\} = \Delta v_2(x) \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \quad (1.34)$$

$$v(x) = g_1(x) - g_2(x) \leqslant \sup_{x\in\Gamma}|g_1(x) - g_2(x)| \leqslant v_2(x) \quad \text{для} \quad x \in \Gamma. \quad (1.35)$$

Из пар неравенств (1.32), (1.33) и (1.34), (1.35) с учетом признака сравнения для задачи (1.20) и (1.21) получаем неравенства

$$v_1(x) \leqslant v(x) \leqslant v_2(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \overline{\Omega}. \quad (1.36)$$

Следовательно,

$$\max_{x\in\overline{\Omega}}|u_1(x)-u_2(x)| \leqslant \sup_{x\in\Gamma}|g_1(x)-g_2(x)|+ \\ +\max_{x\in\overline{\Omega}}\left(\frac{d^2-|x|^2}{N\delta}\right)\max\left\{\sup_{x\in\Omega}|f_1(x)-f_2(x)|\,,\varepsilon\right\} \quad (1.37)$$

для произвольных $\varepsilon > 0$ и $\delta \in (0,2)$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$ и $\delta \to 2$ в неравенстве (1.37), получим искомое неравенство

$$\max_{x\in\overline{\Omega}}|u_1(x)-u_2(x)| \leqslant \sup_{x\in\Gamma}|g_1(x)-g_2(x)|+ \\ +\max_{x\in\overline{\Omega}}\left(\frac{d^2-|x|^2}{2N}\right)\sup_{x\in\Omega}|f_1(x)-f_2(x)|\,, \quad (1.38)$$

из которого, в частности, получаем устойчивость решения задачи Дирихле в ограниченной области.

§ 2. Лемма Олейник–Хопфа

Теперь мы можем доказать *лемму Олейник–Хопфа* о знаке косой производной в точке экстремума, например, минимума.

Лемма Олейник–Хопфа. *Пусть гармоническая в шаре $O(x_0,R)$ функция $u(x) \not\equiv const$, $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(O(x_0,R)) \cap \mathbb{C}(\overline{O(x_0,R)})$ и пусть $u(x)$ принимает наименьшее значение в точке $x_1 \in \partial O(x_0,R)$. Если в точке x_1 существует производная*

$$\frac{\partial u(x_1)}{\partial l_{x_1}} := \lim_{0>\lambda\to 0}\frac{u(x_1+\lambda l_{x_1})-u(x_1)}{\lambda}, \quad (2.1)$$

где l_{x_1} — направление, образующее острый угол β с внешней нормалью $\mathbf{n}_{x_1}$ к $\partial O(x_0,R)$ в точке x_1, то

$$\frac{\partial u(x_1)}{\partial l_{x_1}} < 0. \quad (2.2)$$

Доказательство.

Шаг 1. В области

$$\Omega \overset{\text{def}}{=} O(x_0,R)\backslash\overline{O(x_0,R/2)}$$

введем функцию

$$w(x) = |x-x_0|^{2-N} - R^{2-N} \quad \text{при} \quad N \geqslant 3,$$

$$w(x) = \ln\frac{1}{|x-x_0|} - \ln\frac{1}{R} \quad \text{при} \quad N = 2.$$

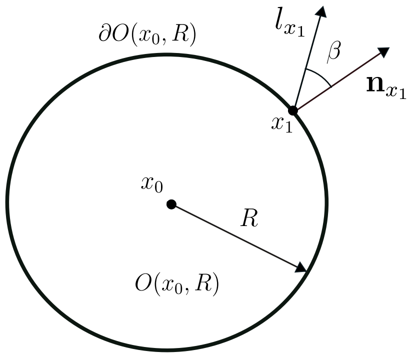


Рис. 8. Поле l_{x_1} внешних направлений

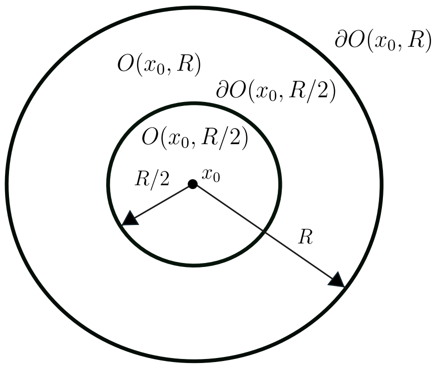
Прежде всего заметим, что

$$\Delta w(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega.$$

Шаг 2. Введём следующую функцию:

$$v(x) \stackrel{\text{def}}{=} u(x) - u(x_1) - \varepsilon w(x).$$

Прежде всего заметим, что эта функция неотрицательна на границе $\partial\Omega = \partial O(x_0, R) \cup \partial O(x_0, R/2)$ области Ω при достаточно малом $\varepsilon > 0$. $\square$ Действительно,



$\Omega = O(x_0, R)\backslash\overline{O(x_0, R/2)}$

Рис. 9. Область Ω и ее граница $\partial\Omega$

$$w(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial O(x_0, R) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v(x) = u(x) - u(x_1) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial O(x_0, R). \tag{2.3}$$

Очевидно, что

$$\Delta\left(u(x) - u(x_1)\right) = 0 \quad \text{в} \quad O(x_0, R), \tag{2.4}$$

поэтому в силу (2.3) и (2.4) из формулы (1.13) леммы 1 получим, что

$$u(x) - u(x_1) > 0 \quad \text{в} \quad O(x_0, R) \Rightarrow \\ \Rightarrow u(x) - u(x_1) \geqslant a > 0 \quad \text{на} \quad \partial O(x_0, R/2).$$

Следовательно,

$$v(x) \geqslant a - \varepsilon w(x) > 0 \quad \text{на} \quad \partial O(x_0, R/2)$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$. ⊠

Шаг 3. В силу того, что

$$\Delta v(x) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \quad \text{и} \quad v(x) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega$$

и леммы 1 вытекает, что

$$v(x) \geqslant \min_{y \in \partial\Omega} v(y) = 0.$$

Таким образом, $v(x) \geqslant 0$ в Ω и $v(x_1) = 0$. Поэтому если производная по направлению l_{x_1} в точке x_1 существует, то

$$\frac{\partial v(x_1)}{\partial l_{x_1}} \leqslant 0. \tag{2.5}$$

□ Действительно, напомним определение производной по внешнему направлению l_{x_1} к точке $x_1 \in \partial\Omega$ минимума функции $v(x)$. Рассмотрим луч, проходящий через точку $x_1 \in \partial\Omega$ и параллельный внутреннему направлению

$$l_{x_1} = \left(\cos\beta_{x_{1,1}}, ..., \cos\beta_{x_{1,N}}\right), \ \sum_{j=1}^{N} \cos^2\beta_{x_{1,j}} = 1.$$

Заметим, что поскольку l_{x_1} — это внешнее направление в точке $x_1 \in \in \partial\Omega$, то при $\lambda < 0$ имеем $\lambda l_{x_1} \uparrow\downarrow l_{x_1}$. Следовательно, при малом $\lambda > 0$ точка $x_1 + \lambda l_{x_1} \in \Omega$ и лежит в малой окрестности точки $x_1 \in \partial\Omega$. Тогда производная функции $v(x)$ по внешнему направлению l_{x_1} в точке $x_1 \in \in \partial\Omega$ определяется следующим образом:

$$\frac{\partial v(x_1)}{\partial l_{x_1}} := \lim_{0 > \lambda \to 0} \frac{v(x_1 + \lambda l_{x_1}) - v(x_1)}{\lambda} \leqslant 0. \quad ⊠ \tag{2.6}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial w(x_1)}{\partial l_{x_1}} = \frac{\partial w(x_1)}{\partial \mathbf{n}_{x_1}} \cos(\mathbf{n}_{x_1}, l_{x_1}) + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial w(x_1)}{\partial \tau_{j x_1}} \cos(\tau_{j x_1}, l_{x_1}),$$

где $\mathbf{n}_{x_1}$ и τ_{jx_1} — это внешняя нормаль и касательные в точке $x_1 \in \in \partial\Omega$. Перепишем теперь выражение для $w(x)$ в сферической системе координат с полюсом в точке $x = x_0$:

$$w(r) = r^{2-N} - R^{2-N} \quad \text{при} \quad N \geqslant 3,$$

$$w(r) = \ln R - \ln r \quad \text{при} \quad N = 2.$$

Поэтому для всех $j = \overline{1, N-1}$ имеем

$$\frac{\partial w(x_1)}{\partial \tau_{jx_1}} = 0, \quad \frac{\partial w(x_1)}{\partial \mathbf{n}_{x_1}} = \frac{\partial w(R)}{\partial r}, \quad \cos(\mathbf{n}_{x_1}, l_{x_1}) = \cos\beta.$$

При этом

$$\frac{\partial w(R)}{\partial r} = -(N-2)R^{1-N} \quad \text{при} \quad N \geqslant 3,$$

$$\frac{\partial w(R)}{\partial r} = -\frac{1}{R} \quad \text{при} \quad N = 2.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial v(x_1)}{\partial \tau_{x_1}} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{\partial u(x_1)}{\partial \tau_{x_1}} \leqslant \varepsilon \frac{\partial w(x_1)}{\partial l_{x_1}} = \\ = -(N-2)\varepsilon R^{1-N} \cos\beta < 0 \quad \text{при} \quad N \geqslant 3,$$

$$\frac{\partial v(x_1)}{\partial l_{x_1}} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{\partial u(x_1)}{\partial l_{x_1}} \leqslant \varepsilon \frac{\partial w(x_1)}{\partial l_{x_1}} = -\frac{\varepsilon}{R}\cos\beta < 0 \quad \text{при} \quad N = 2,$$

где β — это острый угол между вектором l_{x_1} и вектором внешней нормали $\mathbf{n}_{x_1}$ в точке $x_1 \in \partial O(x_0, R)$.

Лемма доказана.

Рассмотрим задачу Неймана для уравнения Пуассона в следующей постановке:

$$\Delta u(x) = f(x) \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \lim_{\Omega \cap l \ni x \to x_0 \in \Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} = g(x_0) \tag{2.7}$$

для любой точки $x_0 \in \Gamma$, где $l = \{x_0 + t\mathbf{n}_{x_0},\ t \in \mathbb{R}\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей Γ, $\mathbf{n}_{x_0}$ — это внешняя нормаль в точке $x_0 \in \Gamma$.

Пусть $f(x)$ и $g(y)$ определены на Ω и Γ соответственно. Решение задачи Неймана (2.7) будем рассматривать в классе $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n}; \overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$. Теперь дадим определение условия сферичности изнутри точки $x_1 \in \Gamma$.

Определение 1. *Будем говорить, что точка границы $x_1 \in \Gamma$ удовлетворяет условию сферичности изнутри области Ω, если существует шар $O(x_0, R) = \left\{x \in \mathbb{R}^N :\ |x - x_0| < r\right\} \subset \Omega$, для которого $\partial O(x_0, R) \cap \Gamma = \{x_1\}$.*

Далее во второй тематической лекции определим понятие ляпуновских поверхностей $\Gamma \in \mathbb{C}^{(1,\alpha)}$. Тогда для выполнения сформулированного условия сферичности изнутри достаточно потребовать, чтобы $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 2. *Решение задачи Неймана в классе* $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n};\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ *при указанных условиях на границу* Γ *единственно с точностью до постоянной* [1])

Доказательство.

Пусть $u_1(x), u_2(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n};\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ — это какие-то два решения задачи Неймана (2.7). Тогда функция

$$v(x) := u_1(x) - u_2(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n};\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$$

— это решение соответствующей однородной задачи

$$\Delta v(x) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \overline{\frac{\partial v(x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}} := \lim_{\Omega \cap l \ni x \to x_0 \in \Gamma} \frac{\partial v(x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} = 0 \tag{2.8}$$

для любой точки $x_0 \in \Gamma$, $l = \{x_0 + t\mathbf{n}_{x_0}, \forall\, t \in \mathbb{R}\}$. Заметим, что поскольку $v(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n};\overline{\Omega})$, то существует производная по направлению $\mathbf{n}_{x_0}$ в точке $x_0 \in \Gamma$ и, более того, в силу (2.8) имеет место равенство

$$\overline{\frac{\partial v(x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}} = 0 \quad \text{для всех} \quad x_0 \in \Gamma. \tag{2.9}$$

Отметим, что в смысле предельного равенства (2.1) при $l_{x_0} = \mathbf{n}_{x_0}$ имеет место равенство:

$$\frac{\partial v(x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} = \overline{\frac{\partial v(x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}}.$$

Предположим, что $v(x) \neq const$. Пусть

$$M := \max_{x \in \Gamma} v(x), \quad m := \min_{x \in \Gamma} v(x).$$

Поскольку $v(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, то в силу теоремы 3 имеет место неравенство

$$m < v(x) < M \quad \text{при} \quad x \in \Omega.$$

Следовательно, функция $v(x)$ принимает наименьшее значение m и наибольшее значение M на границе Γ. Пусть, например, $x_1 \in \Gamma$ — это точка, где гармоническая функция $v(x)$ принимает глобальное наименьшее значение. Тогда согласно условие сферичности изнутри

[1]) Т. е. если $u(x)$ — это решение задачи Неймана, то любое другое решение представимо в виде $u(x) + const$.

границы Γ найдется такой шар $O(x_0, R) \subset \Omega$ и $\partial\overline{O(x_0, R)} \cap \Gamma = \{x_1\}$. В этом шаре функция $v(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(O(x_0, R)) \cap \mathbb{C}(\overline{O(x_0, R)})$ отлична от постоянной [1)] и принимает наименьшее значение только в точке $x_1 \in \partial O(x_0, R)$. Следовательно, в этой точке в силу леммы Олейник–Хопфа имеем

$$\frac{\partial v(x_1)}{\partial \mathbf{n}_{x_1}} < 0,$$

поскольку $\mathbf{n}_{x_1}$ — это внешняя нормаль к границе шара $O(x_0, R)$. Но это противоречит равенству

$$\overline{\frac{\partial v(y)}{\partial \mathbf{n}_y}} = 0 \quad \text{для всех} \quad y \in \Gamma.$$

Аналогичным образом рассматривается случай точки границы Γ, где функция $v(x)$ принимает максимальное значение.

Следовательно, $v(x) = const$.

Лемма доказана.

Замечание. Отметим, что в том случае, когда τ_y — это касательное направление в точке $y \in \Gamma$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$), утверждение леммы Олейник–Хопфа не имеет места. Поэтому используя принцип максимума доказать единственность с точностью до произвольной постоянной решения *задачи с касательной производной* нельзя. Задача с касательной производной имеет следующий вид:

$$\Delta u(x) = f(x) \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \frac{\partial u(y)}{\partial \tau_y} = g(y) \quad \text{на} \quad \Gamma \tag{2.10}$$

для функции $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$. Ниже в тематической лекции 5 мы обсудим этот вопрос, используя энергетический метод.

§ 3. Примеры решения задач

Задача 1. Пусть $N = 2$, $\varepsilon > 0$ и

$$\Omega \subset \left\{ z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, -\frac{\pi}{2} + \varepsilon < y < \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right\}.$$

Пусть $u(x, y)$ — это гармоническая функция в Ω такая, что $u(x, y) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ и ее непрерывное продолжение из Ω до границы Γ

$$\overline{u}(x, y) = 0 \quad \text{при} \quad (x, y) \in \Gamma.$$

[1)] Если предположить, что в этом шаре функция $v(x) = const$, то, поскольку $v(x) \in \mathbb{C}(\overline{O(x_0, R)})$, мы получим, что $v(x) = v(x_1)$, а отсюда сразу же в силу принципа максимума получим справедливость равенства $v(x) = v(x_1)$ уже во всей области Ω, что противоречит нашему предположению.

Доказать, что если Ω неограниченная и

$$\limsup_{|x|\to+\infty} |u(x,y)|e^{-|x|} = 0,$$

то $u(x,y) \equiv 0$ в Ω.

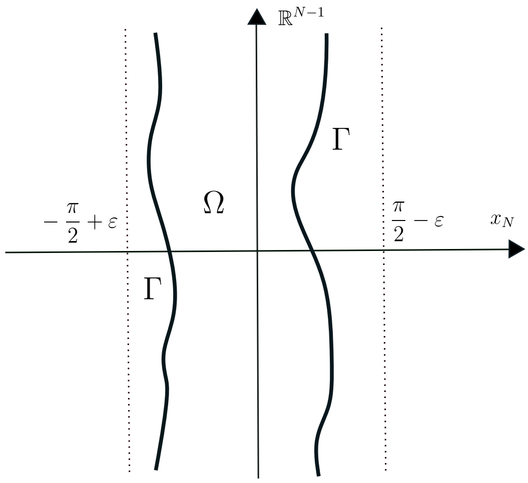


Рис. 10. Область Ω и ее граница Γ

Решение. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$u_0(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma\,\mathrm{ch}(x)\cos(y), \quad \gamma > 0,$$

где положительная постоянная γ произвольна. Определим две вспомогательные функции

$$w_1(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{u}(x,y) - u_0(x,y), \quad w_2(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{u}(x,y) + u_0(x,y).$$

Обе функции гармонические в $\Omega \cap O(0,R)$ при любом $R>0$. Заметим, что, с одной стороны,

$$w_1(x,y) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad w_2(x,y) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,y)\in\Gamma.$$

С другой стороны, для любого фиксированного $\gamma>0$ при достаточно большом $R>0$ имеем:

$$w_1(x,y) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad w_2(x,y) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,y)\in\partial O(0,R)\cap\overline{\Omega}.$$

В силу принципа максимума для ограниченной области $\Omega\cap O(0,R)$ получим, что

$$w_1(x,y) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad w_2(x,y) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,y)\in\Omega\cap O(0,R).$$

Откуда находим, что

$$|\overline{u}(x,y)| \leqslant u_0(x,y) = \gamma\,\mathrm{ch}(x)\cos(y) \quad \text{для всех} \quad (x,y) \in \Omega \cap O(0,R).$$

Переходя к пределу при $\gamma \to +0$ для любой фиксированной точки $(x,y) \in \Omega$, получим

$$u(x,y) = 0 \quad \text{для любой точки} \quad (x,y) \in \Omega.$$

З а д а ч а 2. Доказать, что если

$$\Omega = \left\{ x = (x_1, ..., x_{N-1}, x_N) \in \mathbb{R}^N : \, -\frac{\pi}{4} < x_N < \frac{\pi}{4} \right\}$$

и ограниченная гармоническая функция $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$, то равенство (1.19), являющееся следствием принципа максимума, остается в силе для ограниченных функций $u(x)$ и для такой неограниченной области Ω.

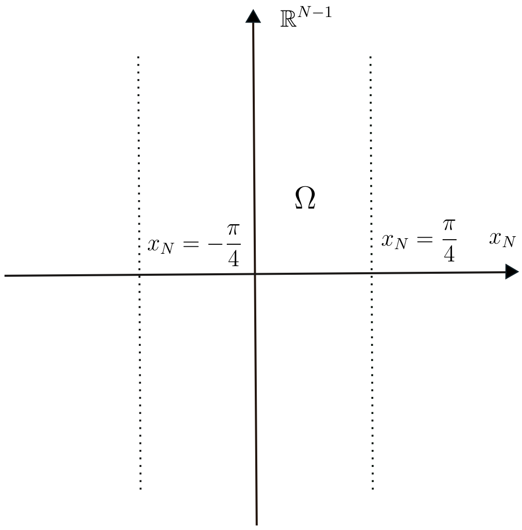


Рис. 11. Полоса Ω

Р е ш е н и е. Рассмотрим следующую вспомогательную функцию:

$$v(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \overline{u}(x) - \varepsilon\cos(x_N)\,(\mathrm{ch}(x_1) + \cdots + \mathrm{ch}(x_{N-1}))$$

при произвольном фиксированном $\varepsilon > 0$ и ограниченную область

$$\Omega_R \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Omega \cap O(0,R), \quad R > 0.$$

Поскольку $u(x)$ ограничена, а

$$-\varepsilon\cos(x_N)\,(\mathrm{ch}(x_1) + \cdots + \mathrm{ch}(x_{N-1}))\Big|_{x\in\Omega\cap\partial O(0,R)} \to -\infty$$

при $R \to +\infty$, то максимум функции $v(x)$ достигается на части $\Gamma \cap \cap \overline{O(0,R)}$ границы $\partial(\Omega \cap O(0,R))$. Итак, имеем

$$\max_{x \in \overline{\Omega}_R} v(x) = \max_{x \in \Gamma \cap \overline{O(0,R)}} v(x).$$

Устремляя $R \to +\infty$, мы получим равенство

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} v(x) = \max_{x \in \Gamma} v(x) \Rightarrow \max_{x \in \overline{\Omega}} \overline{u}(x) = \max_{x \in \Gamma} \overline{u}(x)$$

в пределе при $\varepsilon \to +0$. Стандартным образом приходим к (1.19).

Задача 3. Доказать, что если

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x = (x_1, ..., x_{N-1}, x_N) \in \mathbb{R}^N : \, x_n > 0\right\}$$

и ограниченная гармоническая функция $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$, то (1.19) остается в силе в случае полупространства Ω.

Решение. Доказательство проведем в несколько шагов.

Шаг 1. Рассмотри полосу

$$\Omega_R = \left\{x = (x_1, ..., x_{N-1}, x_N) \in \mathbb{R}^N : \, 0 < x_N < R\right\}.$$

Докажем, что если гармоническая в Ω_R ограниченная функция $w(x) \in \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega_R) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega}_R)$ удовлетворяет граничным условиям

$$\overline{w}(x) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad x_N = 0 \quad \text{и} \quad x_N = R,$$

то $w(x) \leqslant 0$ в Ω_R. Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть область

$$\Omega_{R,r} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_R \cap O(0,r)$$

при $r > 0$.

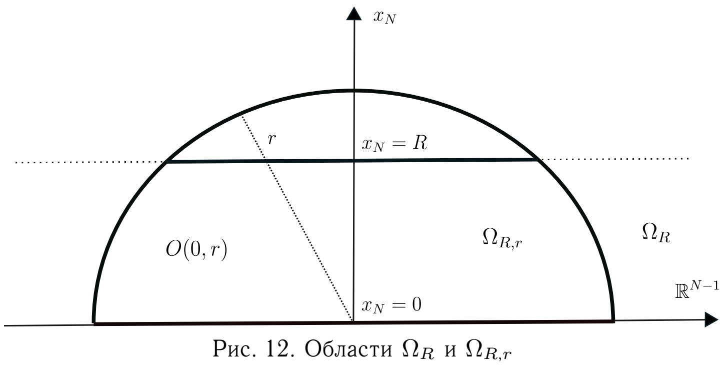


Рис. 12. Области Ω_R и $\Omega_{R,r}$

Затем нужно рассмотреть другую вспомогательную функцию

$$w_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{w}(x) - \varepsilon \cos\left(\frac{x_N}{R}\right) \left[\operatorname{ch}(x_1) + \cdots + \operatorname{ch}(x_{N-1})\right], \quad \varepsilon > 0.$$

Далее рассуждая как в предыдущей задаче с предельными переходами при $r \to +\infty$ и $\varepsilon \to +0$ получим, что

$$w(x) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega_R.$$

Шаг 2. Рассмотрим в полосе Ω_R следующую вспомогательную функцию:

$$v(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x_N}{R} \sup_{x_N=R} \overline{u}(x) + \left(1 - \frac{x_N}{R}\right) \sup_{x_N=0} \overline{u}(x).$$

Ясно, что эта функция является гармонической в Ω_R. Имеют место следующие свойства:

$$v(x)\Big|_{x_N=0} = \sup_{x_N=0} \overline{u}(x), \quad v(x)\Big|_{x_N=R} = \sup_{x_N=R} \overline{u}(x).$$

Рассмотрим вспомогательную гармоническую функцию в Ω_R

$$w(x) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{u}(x) - v(x).$$

Ясно, что

$$w(x) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad x_N = 0 \quad \text{и} \quad x_N = R.$$

В соответствии с первым шагом имеем

$$w(x) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega_R \Rightarrow u(x) \leqslant v(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega_R.$$

Переходя к пределу при фиксированном $x \in \Omega_R$ при $R \to +\infty$, получим неравенство

$$u(x) \leqslant \sup_{x_N=0} \overline{u}(x) \Rightarrow \max_{x \in \overline{\Omega}} \overline{u}(x) = \max_{x_N=0} \overline{u}(x).$$

Далее стандартным образом приходим к равенству (1.19).

Задача 4. Найти все значения $\alpha > 0$, при которых решение

$$u(x,y) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^2_+) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\mathbb{R}^2_+})$$

задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости

$$\mathbb{R}^2_+ := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0\},$$

удовлетворяющее неравенству

$$|u(x,y)| \leqslant M\,(1 + x + |y|)^{\alpha},$$

где $M = const > 0$, единственно.

Решение. Пусть существует два решения $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$. Обозначим

$$v(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} u_1(x, y) - u_2(x, y).$$

Легко видеть, что $v(x, y) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^2_+) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\mathbb{R}^2_+})$ удовлетворяет однородной задаче Дирихле. Общее решение такой задачи в полуплоскости имеет вид [1])

$$v(\rho, \vartheta) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(c_k \rho^k + d_k \rho^{-k}\right) \sin(k\vartheta).$$

С учетом условия

$$|v| \leqslant |u_1| + |u_2| \leqslant M_1 \left(1 + \rho \cos(\vartheta) + \rho |\sin(\vartheta)|\right)^\alpha \leqslant M_2 (1 + \rho)^\alpha$$

заключаем, что решение имеет вид

$$v(\rho, \vartheta) = \sum_{k=1}^{K} c_k \rho^k \sin(k\vartheta).$$

Здесь константа K равна целой части α. Таким образом, при $\alpha \geqslant 1$ существует ненулевая функция $v(x, y)$ и, следовательно, решение исходной задачи не единственно. При $\alpha < 1$ существует только нулевое решение. Поэтому решение исходной задачи единственно.

Задача 5. Пусть $N \geqslant 2$ и $\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^N : \ x_N > 0\right\}$. Предположим, что функция $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, ограниченная и гармоническая в Ω. Выберем $\delta \in (0, 1)$ и предположим, что верно неравенство

$$|u(x) - u(y)| \leqslant |x - y|^\delta$$

для всех $x, y \in \partial\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \left\{(x_1, ..., x_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad x_N = 0\right\}$. Используя принцип максимума, доказать, что найдется константа $M = M(N, \delta) > 0$ такая, что

$$|u(x) - u(y)| \leqslant M |x - y|^\delta \quad \text{для всех} \quad x, y \in \Omega.$$

Решение. Решение проведем за несколько шагов.

Шаг 1. Докажем сначала следующее вспомогательное утверждение: *Пусть $N = 2$ и $\Omega = \{(x, y) : \ x > 0\}$. При $\delta \in (0, 1)$ существует гармоническая неотрицательная функция в Ω, непрерывная в $\overline{\Omega}$ и равная $|y|^\delta$ на Γ.*

□ Нужно рассмотреть главную ветвь функции комплексного аргумента $w = w(z) = z^\delta$, т. е. ту ветвь этой функции которая принимает

[1]) Решение получается стандартным методом разделяющихся переменных для уравнения в полярных координатах.

положительные значения на оси $z = x > 0$, и выделить действительную часть этой функции. Тогда функция

$$v = v(x, y) = \mathrm{Re} w(z)$$

будет обладать требуемыми свойствами [1]. ⊠

Шаг 2. Пусть $w = w(x, y)$ — это функция двух переменных ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$), существование которой доказано на первом шаге. Для $x \in \Omega$ рассмотрим следующую вспомогательную функцию:

$$v(x) \stackrel{\text{def}}{=} w(x_N, x_1) + \cdots + w(x_N, x_{N-1}).$$

Как нетрудно убедиться, функция $v(x)$ является гармонической в области Ω. Кроме того, по построению (см. шаг 1) имеет место равенство

$$v(x)|_{x_N=0} = w(0, x_1) + \cdots + w(0, x_{N-1}) = |x_1|^\delta + \cdots + |x_{N-1}|^\delta.$$

Теперь по этой функции $v(x)$ построим новую функцию

$$h(x) \stackrel{\text{def}}{=} u(x) - u(0) - v(x).$$

По построению эта функция является гармонической в Ω. Кроме того,

$$h(x)|_{x_N=0} = u|_{x_N=0} - u(0) - v(x)|_{x_N=0} \leqslant \\ \leqslant |x_1^2 + \cdots + x_{N-1}^2|^{\delta/2} - |x_1|^\delta - \cdots - |x_{N-1}|^\delta \leqslant 0$$

Шаг 3. Теперь рассмотрим функцию $h(x)$ в области

$$\Omega_R = \Omega \cap O(0, R) \quad \text{при} \quad R > 0.$$

Заметим, что функция $u(x)$ ограниченная в Ω, а функция $v(x) \to +\infty$ при $|x| \to +\infty$. Поэтому множество тех $x \in \Omega_R$, для которых функция $h(x) \geqslant 0$ является ограниченным в $\mathbb{R}^N$. Следовательно, при достаточно большом $R > 0$ получим

$$h(x) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial(O(0, R) \cap \Omega).$$

Согласно принципу максимума в ограниченной области Ω_R получим, что

$$h(x) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega_R$$

для любого $R > 0$. Итак, получим, что

$$u(x) - u(0) \leqslant v(x) \leqslant M_1(N, \delta)|x|^\delta \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega.$$

---

[1] Эта функция является гармонической как действительная часть аналитической функции.

Аналогичным образом можно рассмотреть вспомогательную функцию

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} u(x) - u(0) + v(x).$$

И доказать, что в силу принципа максимума имеет место следующее неравенство:

$$u(x) - u(0) \geqslant v(x) \geqslant |x|^\delta \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega.$$

Итак, мы доказали, что

$$|u(x) - u(0)| \leqslant M(N, \delta)|x|^\delta \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega$$

при

$$M = \max\{1, M_1\}.$$

Шаг 4. Сдвинув начало координат в точку $y \in \Gamma$, мы получим неравенство

$$|u(x+y) - u(y)| \leqslant M(N, \delta)|x|^\delta \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega, \quad y \in \Gamma.$$

Оставшуюся часть доказать самостоятельно!

Задача 6. Пусть Ω_1 и Ω_2 — это две ограниченные области в $\mathbb{R}^N$ при $N \geqslant 2$ с гладкими границами Γ_1 и Γ_2, причем $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$ и $u_k(x) \in \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega_k) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega}_k)$ при $k = 1, 2$. Пусть

$$\Delta u_k(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega_k, \quad \lim_{\Omega_k \ni x \to y \in \Gamma} u_k(x) = f_k(y) \quad \text{для} \quad y \in \Gamma_k,$$

$$f_1(x_1) < f_2(x_2) \quad \text{для всех} \quad x_1 \in \Gamma_1, \quad x_2 \in \Gamma_2.$$

Что больше:

$$u_1(x_0) \quad \text{или} \quad u_2(x_0)$$

в произвольной точке $x_0 \in \Omega_1$?

Решение. В силу слабого принципа максимума для функций $u_2(x)$ и $u_1(x)$ справедливо неравенство

$$u_2(x_0) > \min_{x \in \Gamma_2} \overline{u}_2(x) = \min_{x \in \Gamma_2} f_2(x) > \max_{x \in \Gamma_1} f_1(x) = \max_{x \in \Gamma_1} \overline{u}_1(x) > u_1(x_0)$$

для всех $x_0 \in \Omega_1 \subset \Omega_2$.

Задача 7. Пусть $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(O(0,1)) \cap \mathbb{C}(\overline{O(0,1)})$ и

$$u_{x_1x_1} + u_{x_1x_2} + u_{x_2x_2} = 1 \quad \text{при} \quad x = (x_1, x_2) \in O(0,1) \subset \mathbb{R}^2. \tag{3.1}$$

Может ли $u(x)$ иметь внутри $O(0,1)$ максимум, минимум?

Ответ. Максимум не может. Минимум может.

Решение. Матрица соответствующей квадратичной формы эллиптического уравнения имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом корни характеристического уравнения

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{3}{2}.$$

Поэтому существует ортогональное преобразование (поворот)

$$x = \widehat{P}y,$$

конкретный вид которого нам не важен, приводящий исходную задачу к следующей:

$$v_{y_1y_1} + 3v_{y_2y_2} = 2, \quad v(y) = u(\widehat{P}y) \quad \text{при} \quad y = (y_1, y_2) \in O(0,1) \subset \mathbb{R}^2.$$

Если сделать еще одну невырожденную замену переменных (сжатие)

$$z_1 = y_1, \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_2, \quad z = \widehat{Q}y, \quad \widehat{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

то мы получим уравнение

$$\Delta_z w(z) = w_{z_1z_1} + w_{z_2z_2} = 2 \geqslant 0, \quad w(z) = u(\widehat{Q}\widehat{P}x)$$

при $z = (z_1, z_2) \in \Omega = \{z \in \mathbb{R}^2 : \ z_1^2 + 3z_2^2 < 1\}$. Теперь в силу результата следствия из леммы 1 мы приходим к выводу о том, что максимум функции $w = w(z)$ не может достигаться внутри эллипса Ω, однако минимум может достигаться. В силу невырожденности указанного отображения $\widehat{Q}\widehat{P}x$ граница шара $O(0,1)$ переходит в границу эллипса, а внутренность шара $O(0,1)$ переходит во внутренность эллипса. Таким образом, для функции $u(x)$ утверждение тоже самое.

Задача 8. Пусть $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, $q(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ и функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta u(x) + q(x)u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega.$$

Определим следующие величины:

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x), \quad m \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x \in \Gamma} u(x).$$

Возможно ли, что $M > m$,

1. если $q(x) \equiv 0$;
2. если $q(x) > 0$;

3. если $q(x) < 0$ и $M > 0$;

4. если $q(x) < 0$ и $M < 0$?

Решение. Рассмотрим разные случаи.

1. Нет, в этом случае $M = m$ согласно принципу максимума.

2. В этом случае такая ситуация возможна. Рассмотрим следующий пример:

$$u_{xx} + u = 0 \quad \text{при} \quad x \in (0, \pi), \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0.$$

Решение этой задачи

$$u(x) = \sin x \Rightarrow M = 1, \quad m = 0.$$

3. Нет, поскольку, если в некоторой точке $x_0 \in \Omega$ достигается положительный максимум

$$u(x_0) = M > 0 \Rightarrow \Delta u(x_0) \leqslant 0 \Rightarrow 0 < -q(x_0)u(x_0) = \Delta u(x_0) \leqslant 0.$$

Противоречие.

4. Да, может быть. Рассмотрим следующий пример:

$$u_{xx} - u = 0 \quad \text{при} \quad x \in (-1, 1).$$

Решением этого уравнения является функция

$$u(x) = -\operatorname{ch}(x),$$

$$M = u(0) = -1, \quad m = u(-1) = u(1) = -\frac{1}{2e} - \frac{e}{2}, \quad M > m.$$

Задача 9. Пусть

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 < x^2 + 2y^2 < 2\right\}, \quad u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega}),$$

$$\Delta u(x, y) = 0 \quad \text{при} \quad (x, y) \in \overline{\Omega},$$

$$u(x, y) = x + y \quad \text{при} \quad x^2 + 2y^2 = 2,$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial \mathbf{n}_{(x,y)}} + (1 - x)u(x, y) = 0 \quad \text{при} \quad x^2 + 2y^2 = 1,$$

где $\mathbf{n}_{(x,y)}$ — это направление внешней нормали к точке (x, y) границе Γ области Ω. Найти $\max\limits_{(x,y)\in\overline{\Omega}} |u(x, y)|$.

Решение. В силу принципа максимума максимум функции $|u(x, y)|$ достигается на границе. Поэтому следует рассмотреть граничные условия. Итак, рассмотрим сначала границу $x^2 + 2y^2 = 1$. Перепишем граничное условие в следующем виде:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial \mathbf{n}_{(x,y)}} = (x - 1)u(x, y) \quad \text{при} \quad x^2 + 2y^2 = 1.$$

В точке максимума $z_{max} \in \Gamma$ (минимума $z_{min} \in \Gamma$) на границе имеем

$$\frac{\partial u(z_{max})}{\partial \mathbf{n}_{(x,y)}} \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(z_{min})}{\partial \mathbf{n}_{(x,y)}} \leqslant 0.$$

Заметим, что

$$x^2 + 2y^2 = 1 \Rightarrow |x| \leqslant 1 \Rightarrow x - 1 \leqslant 0 \quad \text{на} \quad x^2 + 2y^2 = 1.$$

Следовательно, в точке $z_{\max} \in \Gamma$ имеют место неравенства

$$0 \leqslant \frac{\partial u(z_{max})}{\partial \mathbf{n}_{(x,y)}} = (x-1)u(z_{max}) \Rightarrow u(z_{max}) \leqslant 0,$$

$$0 \geqslant \frac{\partial u(z_{min})}{\partial \mathbf{n}_{(x,y)}} = (x-1)u(z_{min}) \Rightarrow u(z_{min}) \geqslant 0.$$

Эти два условия означают, что

$$u(x,y) = 0 \quad \text{при} \quad x^2 + 2y^2 = 1.$$

Следовательно, осталось вычислить

$$\max_{x^2+2y^2=2} (x+y).$$

Легко видеть, что максимум достигается в первом квадранте. Таким образом, нужно найти максимум функции

$$f(y) = \sqrt{2-2y^2} + y \quad \text{при} \quad y > 0 \Rightarrow f(y_0) = \sqrt{3} \quad \text{при} \quad y_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

З а д а ч а 10. Доказать, что решение следующей задачи единственно в классе $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega})$

$$\Omega = O(0,2) \backslash \overline{O(0,1)} \subset \mathbb{R}^2,$$

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega},$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \rho} - u(x) = f_1(x) \quad \text{при} \quad x \in \partial O(0,1),$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \rho} + u(x) = f_2(x) \quad \text{при} \quad x \in \partial O(0,2).$$

Р е ш е н и е. Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — это два решения поставленной задачи. Рассмотрим разность

$$v(x) := u_1(x) - u_2(x),$$

которая является решением соответствующей однородной задачи. Применим первую формулу Грина к функции $v(x)$. Имеем

$$0 = \int\limits_{\Omega} v(x)\Delta v(x)\,dx = -\int\limits_{\partial O(0,1)} \frac{\partial v(x)}{\partial \rho} v(x)\,ds_x + \\ + \int\limits_{\partial O(0,2)} \frac{\partial v(x)}{\partial \rho} v(x)\,ds_x - \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2\,dx.$$

С учетом граничных условий находим

$$\int\limits_{\partial O(0,1)} v^2(x)\,ds_x + \int\limits_{\partial O(0,2)} v^2(x)\,ds_x + \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2\,dx = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow v(x) = const \Rightarrow v(x) = 0.$$

Задача 11. Справедлив ли принцип максимума для уравнения

$$\Delta u + u_x + u = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

в ограниченной области Ω на плоскости в той же форме, как для уравнения Лапласа?

Ответ. Нет.

Решение. Рассмотрим следующий пример:

$$(x, y) \in \Omega = (0, \sqrt{2}\,\pi) \times (0, 2\pi),$$

$$u(x, y) = e^{-x/2} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{y}{2}\right).$$

Легко непосредственно проверить, что функция $u = u(x, y)$ является решением рассматриваемого уравнения. При этом

$$u|_{x=0} = u|_{x=\sqrt{2}\,\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=2\pi} = 0,$$

а во внутренней точке

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}, \pi\right) \in \Omega$$

имеем

$$u(x_0, y_0) = \exp\left(-\pi/(2\sqrt{2}\,)\right) > 0.$$

Значит, максимум решения достигается внутри области Ω.

§ 4. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [3], [6], [12], [16].

Лекция 3

СВОЙСТВА ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В этой лекции доказано, что если функция $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega)$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, то $u(x) \in \mathbb{C}^{\infty}(\Omega)$, а также получен спектр результатов, которые называются результатами типа Лиувилля. Кроме того, доказано важное неравенство Харнака.

§ 1. Гладкость гармонических функций

Справедлива следующая важная теорема:
Теорема 1. *Если* $u(x) \in \mathbb{C}(\Omega)$ *обладает свойством*:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int\limits_{\partial O(x,r)} u(y)\, dS_y = \frac{1}{\alpha_N r^N} \int\limits_{O(x,r)} u(y)\, dy$$

для каждого шара $O(x,r) \subset \Omega$, *то* $u(x) \in \mathbb{C}^{\infty}(\Omega)$.

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $\omega(x)$ — это функция «шапочка» следующего вида:

$$\omega(x) = a \begin{cases} \exp\left(-1/(1-|x|^2)\right), & \text{при} \quad |x| \leqslant 1; \\ 0, & \text{при} \quad |x| > 1; \end{cases}$$

где константа $a > 0$ выбирается таким образом, чтобы

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega(x)\, dx = 1.$$

Пусть

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega | \operatorname{dist}(x, \Gamma) > \varepsilon\}.$$

Шаг 2. Введём следующую функцию:

$$u_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon^N} \int\limits_{\Omega} \omega\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u(y)\, dy, \quad x \in \Omega_{2\varepsilon}.$$

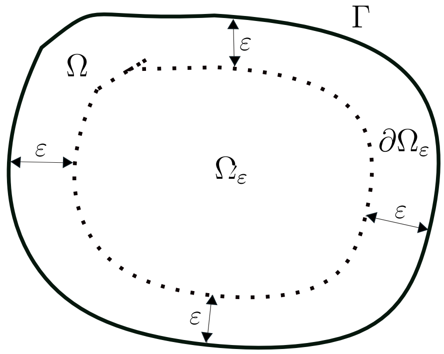


Рис. 13. Область Ω_ε

Справедлива следующая формула:

$$\int\limits_{O(x,\varepsilon)} f(y)\,dy = \int\limits_0^\varepsilon \left(\int\limits_{\partial O(x,r)} f(z)\,dS_z \right) dr. \tag{1.1}$$

Учитывая формулу (1.1), при $x \in \Omega_{2\varepsilon}$ получим [1)] следующую цепочку равенств:

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \int\limits_{O(x,\varepsilon)} \omega\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u(y)\,dy =$$
$$= \frac{1}{\varepsilon^N} \int\limits_0^\varepsilon \omega\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \left(\int\limits_{\partial O(x,r)} u(z)\,dS_z \right) dr = \frac{1}{\varepsilon^N} u(x) \int\limits_0^\varepsilon \omega\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \omega_N r^{N-1}\,dr =$$
$$= u(x) \frac{1}{\varepsilon^N} \int\limits_{O(0,\varepsilon)} \omega\left(\frac{|y|}{\varepsilon}\right) dy = u(x), \tag{1.2}$$

Шаг 3. Теперь заметим, что $u_\varepsilon(x) \in \mathbb{C}^\infty(\Omega_{2\varepsilon})$.

□ Действительно, если $x \in \Omega_{2\varepsilon}$, то замкнутый шар $\overline{O(x,\varepsilon)} \in \Omega$, а функция $u_\varepsilon(x)$ равна:

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \int\limits_{O(x,\varepsilon)} \omega\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u(y)\,dy,$$

[1)] Реально интегрирование ведется по шару $O(x,\varepsilon)$.

причём $u(x) \in \mathbb{C}(\Omega)$, а значит, $u(x) \in \mathbb{C}(\overline{O(x,\varepsilon)})$ и, в частности, ограничена на замкнутом шаре $\overline{O(x,\varepsilon)}$. Тогда правая часть функции $u_\varepsilon(x)$ бесконечное число раз дифференцируемая функция, поскольку ядро

$$\omega\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$$

для всякого $y \in \overline{O(x,\varepsilon)}$. $\boxtimes$

Значит, в силу (1.2) имеем $u(x) \in \mathbb{C}^\infty(\Omega_{2\varepsilon})$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ приходим к утверждению теоремы.

Теорема доказана.

Следствие. *Всякая гармоническая функция $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega)$ принадлежит классу $\mathbb{C}^\infty(\Omega)$.*

Доказательство.

Утверждение вытекает сразу же из теоремы о среднем для гармонических в области Ω функций.

Следствие доказано.

§ 2. Локальные оценки для гармонических функций

Справедлива следующая важная теорема:

Теорема 2. *Пусть функция $u(x)$ гармоническая в Ω. Тогда*

$$|D_x^\alpha u(x_0)| \leqslant \frac{c_k}{r^{N+k}} \|u\|_{L^1(O(x_0,r))} \tag{2.1}$$

для любых шара $O(x_0,r) \subset \Omega$ и мультииндекса α длины $|\alpha| = k$. Здесь

$$D_x^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}}, \quad c_0 = \frac{N}{\omega_N}, \quad c_k = \frac{N(2^{N+1}Nk)^k}{\omega_N} \tag{2.2}$$

при $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство.

Шаг 1. Докажем (2.1), (2.2) с использованием индукции по k. Случай $k=0$ сразу следует из формулы о среднем.

$\square$ Действительно, имеем

$$u(x_0) = \frac{1}{\alpha_N r^N} \int\limits_{O(x_0,r)} u(y)\,dy \Rightarrow |u(x_0)| \leqslant \frac{c_0}{r^N} \int\limits_{O(x_0,r)} |u(y)|\,dy. \quad \boxtimes$$

В случае $k=1$, дифференцируя уравнение Лапласа, получим

$$\Delta u_{x_i} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

поскольку в силу теоремы 1 имеем $u(x) \in \mathbb{C}^\infty(\Omega)$. Следовательно, функция u_{x_i} является гармонической при $i = \overline{1,N}$. Значит, по теореме

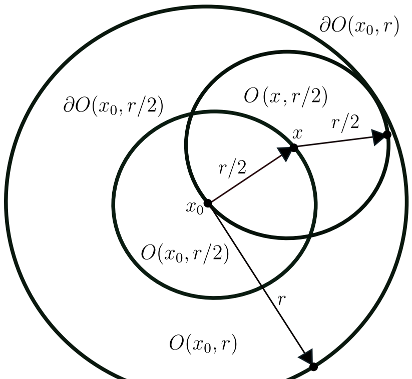


Рис. 14. Шары $O(x_0, r/2)$, $O(x, r/2)$ и $O(x_0, r)$

о среднем имеем

$$u_{x_i}(x_0) = \frac{1}{\alpha_N (r/2)^N} \int\limits_{O(x_0, r/2)} u_{x_i}(x)\, dx.$$

Отсюда вытекает следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} |u_{x_i}(x_0)| &= \left| \frac{N 2^N}{\omega_N r^N} \int\limits_{O(x_0, r/2)} u_{x_i}(x)\, dx \right| = \\ &= \left| \frac{N 2^N}{\omega_N r^N} \int\limits_{\partial O(x_0, r/2)} u(y) n_{yi}\, dS_y \right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{N 2^N}{\omega_N r^N} \sup_{y \in \partial O(x_0, r/2)} |u(y)| \omega_N \left(\frac{r}{2}\right)^{N-1} |n_{yi}| \leqslant \\ &\leqslant \frac{2N}{r} \|u\|_{L^\infty(\partial O(x_0, r/2))}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Заметим, что если $x \in \partial O(x_0, r/2)$, то $O(x, r/2) \subset O(x_0, r) \subset \Omega$ (см. рисунок 14). Поэтому согласно формуле среднего значения имеем

$$|u(x)| \leqslant \frac{N}{\omega_N} \left(\frac{2}{r}\right)^N \|u\|_{L^1(O(x, r/2))} \leqslant \frac{N}{\omega_N} \left(\frac{2}{r}\right)^N \|u\|_{L^1(O(x_0, r))} \tag{2.4}$$

в силу (2.1), (2.2) при $k = 0$. Отсюда имеем

$$\|u\|_{L^\infty(\partial O(x_0, r/2))} \leqslant \frac{N}{\omega_N} \left(\frac{2}{r}\right)^N \|u\|_{L^1(O(x_0, r))}. \tag{2.5}$$

Комбинируя неравенства (2.3), (2.5) находим

$$|D^\alpha u(x_0)| \leqslant \frac{2^{N+1}N^2}{\omega_N}\frac{1}{r^{N+1}}\|u\|_{L^1(O(x_0,r))} \quad \text{при} \quad |\alpha| = 1. \tag{2.6}$$

Таким образом, (2.1), (2.2) справедливы при $k = 1$.

Шаг 2. Предположим, что $k \geqslant 2$ и формулы (2.1), (2.2) справедливы для всех шаров, лежащих в Ω, и мультииндексов длины, меньшей или равной $k-1$. Фиксируем $O(x_0, r) \subset \Omega$. Пусть α — это мультииндекс длины $|\alpha| = k$. Тогда

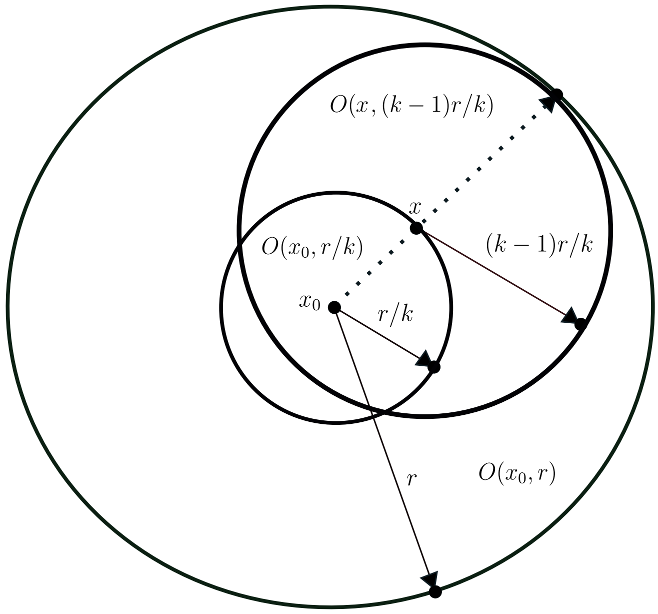


Рис. 15. Шары $O(x_0, r/k)$, $O(x, r(k-1)/k)$ и $O(x_0, r)$

$$D^\alpha u(x) = (D^\beta u(x))_{x_i} \quad \text{для некоторого} \quad i \in \{1, ..., N\}, \quad |\beta| = k-1.$$

Поскольку функция $D^\alpha u(x)$ является гармонической в области Ω, то можно применить к ней рассуждения, подобные проведенным (2.3), но только в шаре $O(x_0, r/k)$. В результате получим оценку:

$$|D^\alpha u(x_0)| \leqslant \frac{Nk}{r}\|D^\beta u\|_{L^\infty(\partial O(x_0,r/k))}. \tag{2.7}$$

Если $x \in \partial O(x_0, r/k)$, то (см. рисунок 15)

$$O\left(x, \frac{k-1}{k}r\right) \subset O(x_0, r) \subset \Omega.$$

Таким образом, из (2.1), (2.2) при $k-1$ следует оценка

$$|D^{\beta}u(x)| \leqslant \frac{N\left(2^{N+1}N(k-1)\right)^{k-1}}{\omega_N\left(\frac{k-1}{k}r\right)^{N+k-1}}\|u\|_{L^1(O(x,r(k-1)/k))} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{N\left(2^{N+1}N(k-1)\right)^{k-1}}{\omega_N\left(\frac{k-1}{k}r\right)^{N+k-1}}\|u\|_{L^1(O(x_0,r))}. \quad (2.8)$$

Следовательно, из оценок (2.7) и (2.8)

$$|D^{\alpha}u(x_0)| \leqslant \frac{N\left(2^{N+1}Nk\right)^{k}}{\omega_N r^{N+k}}\|u\|_{L^1(O(x_0,r))},$$

из которой вытекают оценки (2.1), (2.2) при $|\alpha| = k$.

Теорема доказана.

§ 3. Теорема Лиувилля

Следствием теоремы 2 является следующая важная и интересная теорема:

Теорема Лиувилля. *Пусть $u(x) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ является гармонической и ограниченной. Тогда $u(x) = const$.*

Доказательство.

Фиксируем $x_0 \in \mathbb{R}^N$ и $r > 0$ и применяем теорему 2 к шару $O(x_0, r)$:

$$|D_x u(x_0)| \leqslant \frac{A_1}{r^{N+1}}\|u\|_{L^1(O(x_0,r))} \leqslant \frac{A_2}{r}\|u\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^N)} \to +0$$

при $r \to +\infty$. Тогда $D_x u(x_0) = 0$ для всех $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Следовательно, $u(x)$ — это константа.

Теорема доказана.

Замечание. При доказательстве теоремы Лиувилля использовалось следующее неравенство:

$$\|u\|_{L^1(O(x_0,r))} = \int\limits_{O(x_0,r)} |u(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \|u\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^N)} \int\limits_{O(x_0,r)} dx = \|u\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^N)}\frac{\omega_N}{N}r^N.$$

В свою очередь важным следствием теоремы Лиувилля является следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть $f(x) \in \mathbb{C}_0^{(2)}(\mathbb{R}^N)$ при $N \geqslant 3$. Тогда любое ограниченное решение уравнения*

$$\Delta u(x) = f(x) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^N \quad (3.1)$$

имеет вид

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_N(x-y) f(y)\, dy + c, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

где c — это константа.

Доказательство.

Заметим, что поскольку $\mathcal{E}_N(x) \to +0$ при $|x| \to +\infty$, то функция

$$\widetilde{u}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_N(x-y) f(y)\, dy$$

является ограниченным решением уравнения Пуассона (3.1).

□ Действительно, пусть $\operatorname{supp} f \subset O(0, R_0)$. Рассмотрим сначала случай, когда $|x| \leqslant 2R_0$. Тогда поскольку $\widetilde{u}(x) \in \mathbb{C}(\overline{O(0, 2R_0)})$ функция $\widetilde{u}(x)$ ограничена на шаре $O(0, 2R_0)$. Теперь предположим, что $x \in \in \mathbb{R}^N \backslash O(0, 2R_0)$. Справедливы следующие результаты:

$$\widetilde{u}(x) = \int\limits_{O(0,R_0)} \mathcal{E}_N(x-y) f(y)\, dy,$$

$$|x| \geqslant 2R_0, \quad |y| \leqslant R_0 \Rightarrow -|y| \geqslant -R_0 \geqslant -\frac{1}{2}|x| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |x-y| \geqslant |x| - |y| \geqslant |x| - \frac{1}{2}|x| = \frac{1}{2}|x|, \tag{3.2}$$

$$|\widetilde{u}(x)| \leqslant c(N, R_0) \left(\frac{2}{|x|}\right)^{N-2} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x)| < +\infty$$

для всех $|x| \geqslant 2R_0$. ⊠

Если $u(x)$ — это другое ограниченное решение уравнения (3.1), то функция $w(x) = \widetilde{u}(x) - u(x)$ является ограниченной гармонической функцией в $\mathbb{R}^N$. Следовательно, по теореме Лиувилля имеем

$$w(x) = const.$$

Теорема доказана.

§ 4. Неравенство Харнака

Справедлива следующая теорема:

Теорема 4. *Если $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega)$ — неотрицательная гармоническая функция в произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, то для любой ограниченной подобласти $\Omega' \Subset \Omega$ существует такая постоянная $C = = C(N, \Omega', \Omega) > 0$, что справедливо неравенство Харнака:*

$$\sup_{x \in \Omega'} u(x) \leqslant C \inf_{x \in \Omega'} u(x). \tag{4.1}$$

Доказательство. *Шаг 1.* Пусть шар $O(y,4R) \subset \Omega$ при некотором $R > 0$. Тогда для любых $x_1, x_2 \in O(y,R)$ справедливы следующие вложения:

$$O(x_1,R) \subset O(y,2R) \subset O(x_2,3R). \tag{4.2}$$

□ Действительно, с одной стороны, если $x \in O(x_1,R)$

$$|x-y| \leqslant |x-x_1| + |y-x_1| \leqslant 2R \Rightarrow O(x_1,R) \subset O(y,2R). \tag{4.3}$$

С другой стороны, если $x \in O(y,2R)$, то имеем

$$|x-x_2| \leqslant |x-y| + |x_2-y| \leqslant 3R \Rightarrow O(y,2R) \subset O(x_2,3R). \quad \boxtimes \tag{4.4}$$

Из вложений (4.2), теоремы о среднем 5 первой лекции и неотрицательности функции $u(x)$ вытекают следующие соотношения:

$$u(x_1) = \frac{1}{\omega_N R^N} \int\limits_{O(x_1,R)} u(x)\,dx \leqslant \frac{1}{\omega_N R^N} \int\limits_{O(y,2R)} u(x)\,dx, \tag{4.5}$$

$$u(x_2) = \frac{1}{\omega_N (3R)^N} \int\limits_{O(x_2,3R)} u(x)\,dx \geqslant \frac{1}{\omega_N (3R)^N} \int\limits_{O(y,2R)} u(x)\,dx. \tag{4.6}$$

Отсюда получаем, что

$$u(x_1) \leqslant 3^N u(x_2). \tag{4.7}$$

Возьмем supremum по $x_1 \in O(y,R)$ и infimum по $x_2 \in O(y,R)$ от обеих частей неравенства (4.7) и получим неравенство:

$$\sup_{x \in O(y,R)} u(x) \leqslant 3^N \inf_{x \in O(y,R)} u(x). \tag{4.8}$$

Шаг 2. Пусть теперь $\Omega' \Subset \Omega$. Поскольку $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \subset \mathbb{C}(\overline{\Omega'})$, то найдутся такие точки $x_1, x_2 \in \overline{\Omega'}$, что

$$u(x_1) = \sup_{x \in \Omega'} u(x), \quad u(x_2) = \inf_{x \in \Omega'} u(x). \tag{4.9}$$

Пусть $\mathcal{L} \subset \overline{\Omega'}$ — замкнутая кривая, соединяющая точки x_1, x_2. Выберем R следующим образом:

$$0 < R < \frac{1}{4}\,\mathrm{distance}(\mathcal{L}, \Gamma), \tag{4.10}$$

где Γ — граница области Ω и может быть, что $\Gamma = \varnothing$. Поскольку кривая $\mathcal{L}$ — замкнутое и ограниченное множество, т.е. компакт, то в силу теоремы Хайне–Бореля кривая $\mathcal{L}$ может быть покрыта конечным числом $M = M(\Omega', \Omega) \in \mathbb{N}$ шаров радиуса R.

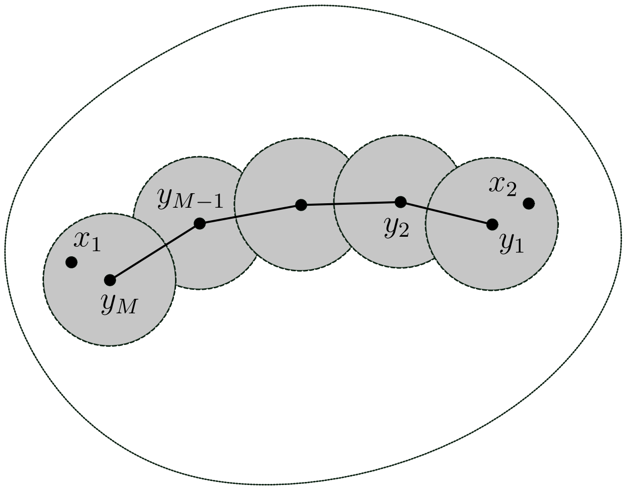


Рис. 16. Покрытие кривой шарами

Пусть $x_1 \in O(y_M, R)$, $x_2 \in O(y_1, R)$. Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} u(x_1) = \sup_{x \in O(y_M,R)} u(x) \leqslant 3^N \inf_{x \in O(y_M,R)} u(x) \leqslant \\ \leqslant 3^N \inf_{x \in O(y_M,R)\cap O(y_{M-1},R)} u(x) \leqslant 3^N \sup_{x \in O(y_M,R)\cap O(y_{M-1},R)} u(x) \leqslant \\ \leqslant 3^N \sup_{x \in O(y_{M-1},R)} u(x) \leqslant 3^{N+N} \inf_{x \in O(y_{M-1},R)} u(x) \leqslant \cdots \leqslant \\ \leqslant 3^{(M-1)N} \sup_{x \in O(y_1,R)} u(x) \leqslant 3^{MN} \inf_{x \in O(y_1,R)} u(x) = 3^{MN} u(x_2). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Из неравенств (4.11) с учетом (4.9) приходим к неравенству (4.1).

Теорема доказана.

§ 5. Примеры решения задач

Задача 1. Найти все гармонические в $\mathbb{R}^N$ функции, принадлежащие $L^p(\mathbb{R}^N)$ при $p \in [1, +\infty)$.

Ответ. $u(x) = 0$.

Указание. При $p = +\infty$ справедлива теорема Лиувилля.

Решение. Пусть $u(x)$ — это функция, удовлетворяющая указанным условиям. Согласно формуле среднего значения и неравенству Гельдера имеем для произвольного $x_0 \in \mathbb{R}^N$ неравенства

$$|u(x_0)| = \frac{1}{\alpha_N R^N} \left| \int\limits_{O(x_0,R)} u(x)\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha_N R^N} \left(\int\limits_{O(x_0,R)} 1^{p'}\, dx \right)^{1/p'} \left(\int\limits_{O(x_0,R)} |u(x)|^p\, dx \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha_N R^N} \left(\alpha_N R^N\right)^{1/p'} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^p\, dx \right)^{1/p} \leqslant \frac{c_N}{R^{N/p}} \to 0$$

при $R \to +\infty$, где

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

З а д а ч а 2. Найти все гармонические в $\mathbb{R}^3$ функции, для которых конечен интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(x)|^2}{(1+|x|)^3}\, dx < +\infty. \tag{5.1}$$

О т в е т. $u(x) = 0$.

Р е ш е н и е. Согласно формуле среднего значения для любого $x_0 \in \in \mathbb{R}^3$ справедлива следующая цепочка неравенств:

$$|u(x_0)| = \frac{1}{\alpha_3 R^3} \left| \int\limits_{O(x_0,R)} u(y)\, dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha_3 R^3} \int\limits_{O(x_0,R)} (1+|y|)^{3/2} \frac{|u(y)|}{(1+|y|)^{3/2}}\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha_3 R^3} \left(\int\limits_{O(x_0,R)} (1+|y|)^3\, dy \right)^{1/2} \left(\int\limits_{O(x_0,R)} \frac{|u(y)|^2}{(1+|y|)^3}\, dy \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha_3 R^3} (1+R)^{3/2} \left(\alpha_3 R^3\right)^{1/2} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(y)|^2}{(1+|y|)^3}\, dy \right)^{1/2} \leqslant A < +\infty,$$

где постоянная $A > 0$ не зависит от $R > 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Следовательно функция $u(x)$ является гармонической и ограниченной в $\mathbb{R}^3$. По теореме Лиувилля $u(x) = const$. Подстановка в условие (5.1) дает равенство

$$u(x) = 0.$$

3*

Задача 3. Пусть для гармонической во всем пространстве $\mathbb{R}^N$ функции $u(x)$ выполнено неравенство

$$u(x) \geqslant -c_1,$$

где $c_1 > 0$ — постоянная. Тогда $u(x) = const$.

Решение. Рассмотрим следующую функцию:

$$v(x) \stackrel{\text{def}}{=} u(x) + c_1 > 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N$$

и функция $v(x)$ является гармонической в $\mathbb{R}^N$. Согласно теоремы о среднем значении для гармонической функции [1]

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x_j}$$

при любом $R > 0$ и для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}^N$ имеем:

$$\frac{\partial v(x_0)}{\partial x_j} = \frac{1}{\alpha_N R^N} \int\limits_{O(x_0,R)} \frac{\partial v(x)}{\partial x_j}\, dx = \\ = \frac{1}{\alpha_N R^N} \int\limits_{\partial O(x_0,R)} v(y) \cos(\mathbf{n}_y, \mathbf{e}_j)\, dS_y \qquad (5.2)$$

при $j = \overline{1, N}$. Так как $v(x)$ — это положительная функция, то по известной теореме о среднем значении для интеграла имеем

$$\int\limits_{\partial O(x_0,R)} v(y) \cos(\mathbf{n}_y, \mathbf{e}_j)\, ds_y = \cos(\mathbf{n}_{y_0}, \mathbf{e}_j) \int\limits_{\partial O(x_0,R)} v(y)\, dS_y, \qquad (5.3)$$

где $y_0 \in \partial O(x_0, R)$ — это некоторая точка. Теперь воспользуемся теоремой о среднем для интеграла по сфере $\partial O(x_0, R)$ и получим следующее равенство:

$$v(x_0) = \frac{1}{\omega_N R^{N-1}} \int\limits_{\partial O(x_0,R)} v(y)\, dS_y. \qquad (5.4)$$

Собирая равенства (5.2)–(5.4), приходим к равенствам:

$$\frac{\partial v(x_0)}{\partial x_j} = \frac{\omega_N R^{N-1}}{\alpha_N R^N} \cos(\mathbf{n}_{y_0}, \mathbf{e}_j) v(x_0) =$$

[1] Производная гармонической в области функции является гармонической функцией.

$$= \frac{N\cos(\mathbf{n}_{y_0}, \mathbf{e}_j)}{R} v(x_0) \quad \text{при} \quad j = \overline{1, N} \quad (5.5)$$

для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Устремляя $R \to +\infty$ получим, что $v(x) = const$. Следовательно, $u(x) = const$.

Задача 4. Найти все гармонические в $\mathbb{R}^2$ функции $u(x, y)$, для которых

$$u_x(x, y) < u_y(x, y) \quad \text{для всех} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Решение. Прежде всего заметим, что производные гармонической функции в области $\mathbb{R}^2$ — тоже гармонические функции. Поэтому функция $u_y(x, y) - u_x(x, y)$ является гармонической функцией в $\mathbb{R}^2$, причем

$$u_y(x, y) - u_x(x, y) > 0 \quad \text{для всех} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

В силу предыдущей задачи имеем в этом случае

$$u_y(x, y) - u_x(x, y) = c \quad \text{для всех} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (5.6)$$

где $c \geqslant 0$ — это постоянная. Теперь задача сводится к решению уравнения в частных производных первого порядка (5.6). Воспользуемся с этой целью уравнениями характеристик:

$$-dx = dy = \frac{du}{c}.$$

Эта система имеет два независимых первых интеграла

$$x + y = c_1, \quad u + cx = c_2,$$

т. е. решение имеет вид

$$u = -cx + \varphi(x + y)$$

с произвольной гармонической функцией φ. Таким образом,

$$0 = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 2\varphi'' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi(x + y) = k_1(x + y) + k_2 \Rightarrow u(x, y) = m_1 x + m_2 y + m_3.$$

Так как $u_x < u_y$, то $m_1 < m_2$.

Задача 5. Получить аналог теоремы Лиувилля для классических решений нелинейного уравнения

$$\Delta u(x) = |u(x)|^p \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad p > 1, \quad N \geqslant 2. \quad (5.7)$$

Решение. Прежде всего введем следующую пробную функцию:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad |x| \leqslant 1; \\ 0, & \text{если} \quad |x| \geqslant 2, \end{cases} \quad (5.8)$$

причем $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Такая пробная функция существует. По этой пробной функции введем следующую функцию:

$$\varphi_R(x) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi\left(\frac{|x|^2}{R^2}\right), \quad R > 1. \tag{5.9}$$

Будем рассматривать классические решения $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N) \subset$ $\subset L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ уравнения (5.7). Умножим обе части уравнения (5.7) на пробную функцию (5.9) и проинтегрируем по частям, в результате получим соответствующие равенства:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Delta u(x)\varphi_R(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi_R(x)|u(x)|^p\,dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x)\Delta\varphi_R(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi_R(x)|u(x)|^p\,dx. \tag{5.10}$$

Все рассматриваемые интегралы существуют в смысле Римана, поскольку носитель функции $\varphi_R(x)$ компактный. Воспользуемся теперь неравенством Гельдера с параметрами

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1, \quad q_1 = p, \quad q_2 = p' = \frac{p}{p-1},$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x)\Delta\varphi_R(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi_R^{1/p}(x)u(x)\frac{\Delta\varphi_R(x)}{\varphi_R^{1/p}(x)}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi_R(x)|u(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|\Delta\varphi_R(x)|^{p'}}{\varphi_R^{p'/p}(x)}\,dx\right)^{1/p'} \tag{5.11}$$

Из (5.10) и (5.11) вытекают неравенства

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi_R(x)|u(x)|^p\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi_R(x)|u(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|\Delta\varphi_R(x)|^{p'}}{\varphi_R^{p'/p}(x)}\,dx\right)^{1/p'} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{p}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi_R(x)|u(x)|^p\,dx + \frac{1}{p'}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|\Delta\varphi_R(x)|^{p'}}{\varphi_R^{p'/p}(x)}\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1-\frac{1}{p}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^N}\varphi_R(x)|u(x)|^p\,dx \leqslant \frac{1}{p'}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{|\Delta\varphi_R(x)|^{p'}}{\varphi_R^{p'/p}(x)}\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^N}\varphi_R(x)|u(x)|^p\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{|\Delta\varphi_R(x)|^{p'}}{\varphi_R^{p'/p}(x)}\,dx, \qquad (5.12)$$

где мы воспользовались арифметическим неравенством Гельдера

$$a\cdot b \leqslant \frac{a^{q_1}}{q_1}+\frac{b^{q_2}}{q_2}, \quad \frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}=1, \quad a,b\geqslant 0,$$

а также тем, что

$$1-\frac{1}{p}=\frac{1}{p'}, \quad p>1.$$

Рассмотрим правую часть итогового неравенства в (5.12). Сделаем замену переменных в нём

$$\xi=\frac{x}{R}, \quad x\in\mathbb{R}^N$$

и получим равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{|\Delta\varphi_R(x)|^{p'}}{\varphi_R^{p'/p}(x)}\,dx = c_1R^{N-2p'}, \qquad (5.13)$$

$$c_1=\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{\left|\Delta_\xi\varphi(|\xi|^2)\right|^{p'}}{\varphi^{p'/p}(|\xi|^2)}\,d\xi=\int\limits_{1\leqslant|\xi|^2\leqslant 2}\frac{\left|\Delta_\xi\varphi(|\xi|^2)\right|^{p'}}{\varphi^{p'/p}(|\xi|^2)}\,d\xi,$$

поскольку $\varphi(|\xi|^2)=1$ при $|\xi|\leqslant 1$ и $\varphi(|\xi|^2)=0$ при $|\xi|\geqslant 2$. Отметим, что существует функция $\varphi=\varphi(s)$, для которой $0<c_1<+\infty$. Из итогового неравенства (5.12) и равенства (5.13) вытекает следующая оценка:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\varphi_R(x)|u(x)|^p\,dx \leqslant c_1R^{N-2p'} \to +0 \qquad (5.14)$$

при условии

$$N<2p' \Rightarrow 1<p<p_{kr}=\begin{cases}+\infty, & \text{если} \quad N=2;\\ N/(N-2), & \text{если} \quad N\geqslant 3.\end{cases}$$

Итак, при $p\in(1,p_{kr})$ в силу теоремы Беппо Леви приходим при $R\to\to+\infty$ к равенству

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}|u(x)|^p\,dx=0 \Rightarrow u(x)=0.$$

Таким образом, получен аналог теоремы Лиувилля в нелинейном случае. Заметим, что при $p>p_{kr}$ есть результаты о существовании нетривиальных решений уравнения (5.7) в $\mathbb{R}^N$.

§ 6. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [3], [5], [6], [12], [16].

Лекция 4

ФУНКЦИЯ ГРИНА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

§ 1. Третья формула Грина

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это область с достаточно «гладкой» границей Γ. Задача данного параграфа состоит в получении представления решения уравнения Пуассона

$$\Delta u(x) = f(x) \quad \text{в} \quad \Omega \tag{1.1}$$

при заданном граничном условии

$$\lim_{\Omega \ni x \to x_0 \in \Gamma} u(x) = g(x_0) \quad \text{для всех} \quad x_0 \in \Gamma. \tag{1.2}$$

Рассмотрим функцию класса $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n}; \overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$. За-

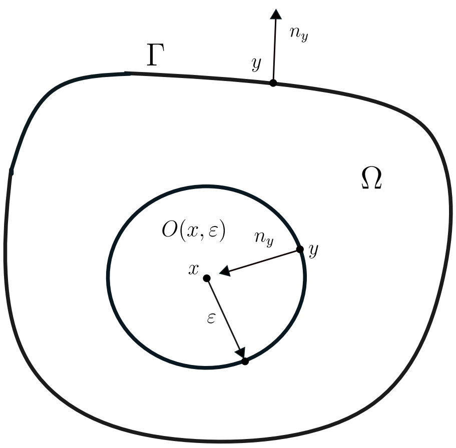


Рис. 17. Область $V_\varepsilon = \Omega \backslash O(x,\varepsilon)$ с полем внешних нормалей n_y к границе ∂V_ε

фиксируем точку $x \in \Omega$ и выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, что $O(x,\varepsilon) \subset \subset \Omega$. Применим вторую формулу Грина, имеющую следующий вид:

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} [u(y)\Delta v(y) - v(y)\Delta u(y)]\, dy =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} \overline{u}(y)\frac{\partial v(y)}{\partial \mathbf{n}_y}\,dS_y - \int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} v(y)\overline{\frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y}}\,dS_y, \quad (1.3)$$

к функциям $u = u(y)$ и $v(y) = \mathcal{E}_N(y-x)$ для области

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash \overline{O(x,\varepsilon)},$$

где $\overline{u}(x)$ — непрерывное продолжение функции $u(x)$ из области Ω до границы Γ. Находим:

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} [u(y)\Delta_y \mathcal{E}_N(y-x) - \mathcal{E}_N(y-x)\Delta_y u(y)]\,dy =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} \overline{u}(y)\frac{\partial \mathcal{E}_N(y-x)}{\partial \mathbf{n}_y}\,dS_y - \int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} \mathcal{E}_N(y-x)\overline{\frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y}}\,dS_y, \quad (1.4)$$

где $\mathbf{n}_y$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega_\varepsilon$. Напомним, что по построению фундаментальное решение $\mathcal{E}_N(y-x)$ при $y \neq x$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_y \mathcal{E}_N(y-x) = 0.$$

Кроме того, имеет место следующее неравенство (см. лекцию 1)

$$\left| \int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)} \mathcal{E}_N(y-x)\frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y}\,dS_y \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\partial O(x,\varepsilon)} |D_x u(x)|\omega_N \varepsilon^{N-1} \begin{cases} c_2|\ln\varepsilon|, & \text{если} \quad N=2; \\ c_N \varepsilon^{2-N}, & \text{если} \quad N \geqslant 3. \end{cases} \to +0 \quad (1.5)$$

при $\varepsilon \to +0$. Справедлива следующие равенства:

$$D_y \mathcal{E}_N(y-x) = \frac{1}{\omega_N}\frac{y-x}{|y-x|^N} \quad \text{и} \quad \mathbf{n}_y = -\frac{y-x}{|y-x|} = -\frac{y-x}{\varepsilon} \quad \text{на} \quad \partial O(x,\varepsilon).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \mathcal{E}_N(y-x)}{\partial \mathbf{n}_y} = (\mathbf{n}_y, D_y \mathcal{E}_N(y-x)) =$$

$$= -\frac{1}{\omega_N}\frac{|y-x|^2}{|y-x|^N}\frac{1}{\varepsilon}\bigg|_{|x-y|=\varepsilon} = -\frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \quad \text{на} \quad \partial O(x,\varepsilon).$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)} u(y)\frac{\partial \mathcal{E}_N(y-x)}{\partial \mathbf{n}_y}\,dS_y = -\frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)} u(y)\,dS_y \to -u(x) \quad (1.6)$$

при $\varepsilon \to +0$ (см. лекцию 1). Полагая $\varepsilon \to +0$ в равенстве (1.4) получим следующее равенство:

$$u(x) = -\int\limits_{\Gamma} \mathcal{E}_N(y-x)\overline{\frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y}} + \int\limits_{\Gamma} \overline{u}(y)\frac{\partial \mathcal{E}_N(y-x)}{\partial \mathbf{n}_y}\,dS_y + \\ + \int\limits_{\Omega} \mathcal{E}_N(y-x)\Delta_y u(y)\,dy. \quad (1.7)$$

Формула (1.7) носит название *третьей формулы Грина*.

Замечание. Полученная формула (1.7) позволяет найти $u(x)$ зная значения Δu внутри области Ω и предельные значения

$$\overline{u}(y), \quad \overline{\frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y}} \quad \text{при} \quad y \in \Gamma.$$

Теорема 1. *Для любой функции* $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n}; \overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ *справедлива формула* (1.7), *в которой* $\overline{u}(x)$ — *непрерывное продолжение функции* $u(x)$ *из области* Ω *до границы* Γ, *а*

$$\overline{\frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y}} = \lim_{\Omega \cap l \ni x \to y \in \Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_y}, \quad l = \{y + t\mathbf{n}_y, t \in \mathbb{R}\}.$$

§ 2. Функция Грина задачи Дирихле

Однако формулу (1.7) нужно модифицировать для задачи Дирихле [1], поскольку значения нормальной производной на границе неизвестны. С этой целью нужно ввести корректирующую функцию $\varphi^x(y) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n}; \overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ при фиксированном $x \in \Omega$ как решение следующей краевой задачи:

$$\Delta_y \varphi^x(y) = 0 \quad \text{при} \quad y \in \Omega, \quad \lim_{\Omega \ni z \to y \in \Gamma} \varphi^x(z) = \mathcal{E}_N(y-x) \qquad (2.1)$$

для всех $y \in \Gamma$. Применяя вторую формулу Грина (3.6) из теоремы 3 первой лекции к функциям

$$u = u(y), \quad v(y) = \varphi^x(y), \quad u(y) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n}; \overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega}),$$

получим следующее равенство:

$$-\int\limits_{\Omega} \varphi^x(y)\Delta_y u(y)\,dy = \int\limits_{\Gamma} \left[\overline{u}(y)\overline{\frac{\partial \varphi^x(y)}{\partial \mathbf{n}_y}} - \overline{\varphi^x}(y)\overline{\frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y}}\right] dS_y. \qquad (2.2)$$

[1] Как, впрочем, и для задачи Неймана.

О п р е д е л е н и е 1. *Функцией Грина задачи Дирихле для области U называется функция*

$$G(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E}_N(y-x) - \overline{\varphi^x(y)}, \quad x,y \in \Omega, \quad x \neq y, \tag{2.3}$$

где $\overline{\varphi^x(y)}$ — *непрерывное продолжение функции* $\varphi^x(y)$ *из области* Ω *до границы* Γ.

Справедливы следующее утверждение:

Л е м м а 1. *Для всех* $x \in \Omega$ *и* $y \in \overline{\Omega}$ *справедливы следующие неравенства*:

$$\mathcal{E}_N(y-x) < G(x,y) < 0. \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

По построению функция Грина $G(x,y)$ является гармонической в области $\Omega\backslash\{x\}$. Кроме того, имеем

$$G(x,y) = 0 \quad \text{для каждого} \quad y \in \Gamma$$

и $G(x,y) \to -\infty$ при $y \to x$. Поэтому в соответствии с принципом максимума имеем:

$$G(x,y) < \max_{y \in \Gamma \cup \{x\}} G(x,y) = 0.$$

Функция $\varphi^x(y)$ является гармонической по переменной $y \in \Omega$ для каждого $x \in \Omega$. При этом

$$\overline{\varphi^x(y)} = \mathcal{E}_N(y-x) < 0 \quad \text{при} \quad y \in \Gamma.$$

Поэтому согласно принципу максимума имеем:

$$\varphi^x(y) < 0 \quad \text{для всех} \quad y \in \Omega, \quad x \in \Omega.$$

Значит,

$$0 > G(x,y) > \mathcal{E}_N(y-x).$$

Л е м м а д о к а з а н а.

Из равенств (1.7) и (2.2) при условии существования корректирующей функции $\varphi^x(y)$ в классе $\mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n};\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ получим следующую формулу:

$$u(x) = \int\limits_{\Gamma} \overline{u}(y) \overline{\frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}_y}}\, dS_y + \int\limits_{\Omega} G(x,y) \Delta_y u(y)\, dy, \quad x \in \Omega. \tag{2.5}$$

Таким образом, нами доказана следующая теорема:

Теорема 2. *Если* $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n};\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ — *это решение задачи Дирихле* (1.1), (1.2), *то при условии существования корректирующей функции* $\varphi^x(y)$ *в классе* $\mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n};\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ *справедливо следующее равенство*:

$$u(x) = \int\limits_{\Gamma} g(y) \overline{\frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}_y}}\, dS_y + \int\limits_{\Omega} G(x,y) f(y)\, dy, \quad x \in \Omega, \tag{2.6}$$

где

$$\overline{\frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}_y}} := \lim_{\Omega \cap l \ni z \to y \in \Gamma} \frac{\partial G(x,z)}{\partial \mathbf{n}_y}, \quad l = \{y + t\mathbf{n}_y, t \in \mathbb{R}\}.$$

Справедлива следующая важная теорема:

Теорема 3. *При условии существования функции Грина для любых* $x, y \in \Omega$ *при* $x \neq y$ *имеет место равенство*

$$G(y,x) = G(x,y).$$

Доказательство.

Шаг 1. Фиксируем $x, y \in \Omega$, $x \neq y$. Положим

$$v(z) \stackrel{\text{def}}{=} G(x,z), \quad w(z) \stackrel{\text{def}}{=} G(y,z) \quad z \in \Omega. \tag{2.7}$$

Заметим, что согласно определению (2.3) при условии существования корректирующих функций

$$\varphi^x(z), \varphi^y(z) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n};\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$$

функции

$$v(z), w(z) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n};\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega}).$$

Тогда

$$\Delta_z v(z) = 0, \quad \Delta_z w(z) = 0 \quad \text{при} \quad z \neq x, \quad z \neq y,$$
$$w(z) = v(z) = 0 \quad \text{при} \quad z \in \Gamma.$$

Шаг 2. Применяя вторую формулу Грина в области

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash \left(\overline{O(x,\varepsilon)} \cup \overline{O(y,\varepsilon)} \right),$$

$$O(x,\varepsilon) \cap O(y,\varepsilon) = \varnothing, \quad O(x,\varepsilon) \cup O(y,\varepsilon) \subset \Omega$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$ для функций $v(z)$ и $w(z)$, получим следующее равенство (см. рисунок 17):

$$\int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)} \left[\frac{\partial v(z)}{\partial \mathbf{n}_z} w(z) - \frac{\partial w(z)}{\partial \mathbf{n}_z} v(z) \right] dS_z =$$

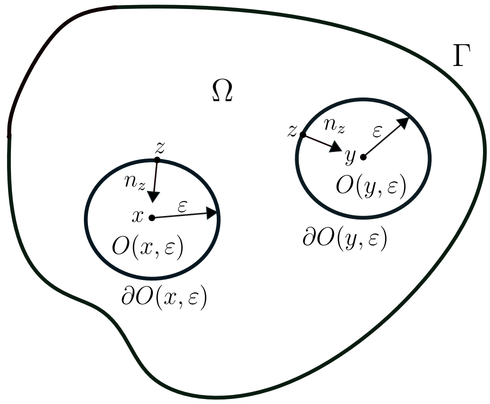


Рис. 18. Область Ω_ε

$$= \int\limits_{\partial O(y,\varepsilon)} \left[\frac{\partial w(z)}{\partial \mathbf{n}_z} v(z) - \frac{\partial v(z)}{\partial \mathbf{n}_z} w(z)\right] dS_z, \quad (2.8)$$

где $\mathbf{n}_z$ — это векторное поле единичных нормалей к $\partial O(x,\varepsilon) \cup \partial O(y,\varepsilon)$. Поскольку интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} \left[\overline{\frac{\partial v(z)}{\partial \mathbf{n}_z}} w(z) - \overline{\frac{\partial w(z)}{\partial \mathbf{n}_z}} v(z)\right] dS_z = 0,$$

так как по определению

$$v(z) := G(x,z) = \mathcal{E}_N(z-x) - \overline{\varphi^x(z)}, \quad \varphi^x(z) = \mathcal{E}_N(z-x) \quad \text{при} \quad z \in \Gamma,$$

$$w(z) := G(y,z) = \mathcal{E}_N(z-y) - \overline{\varphi^y(z)}, \quad \varphi^y(z) = \mathcal{E}_N(z-y) \quad \text{при} \quad z \in \Gamma,$$

то

$$v(z) = w(z) = 0 \quad \text{при} \quad z \in \Gamma.$$

Шаг 3. Прежде всего заметим, что функция $w(z)$ регулярна в малой окрестности точки $x \in \Omega$, поэтому

$$\left|\int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)} \frac{\partial w(z)}{\partial \mathbf{n}_z} v(z)\, dS_z\right| \leqslant a_1 \varepsilon^{N-1} \sup_{z \in \partial O(x,\varepsilon)} |v(z)| =$$

$$= a_2 \varepsilon^{N-1} \begin{cases} c_N \varepsilon^{2-N}, & \text{если} \quad N \geqslant 3; \\ c_2 |\ln \varepsilon|, & \text{если} \quad N = 2. \end{cases} \to +0$$

при $\varepsilon \to +0$.

□ Действительно, заметим, что

$$v(z) = \mathcal{E}_N(z-x) - \overline{\varphi^x(z)}, \quad \varphi^x(z) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{O(x,\varepsilon)}). \quad \boxtimes$$

С учетом этого получаем

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)}\frac{\partial v(z)}{\partial \mathbf{n}_z}w(z)\,dS_z=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)}\frac{\partial \mathcal{E}_N(z-x)}{\partial \mathbf{n}_z}w(z)\,dS_z. \quad (2.9)$$

Справедливы следующие равенства:

$$D_z\mathcal{E}_N(z-x)=\frac{1}{\omega_N}\frac{z-x}{|z-x|^N} \quad \text{и} \quad \mathbf{n}_z=\frac{z-x}{|z-x|}=\frac{z-x}{\varepsilon} \quad \text{на} \quad \partial O(x,\varepsilon).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \mathcal{E}_N(z-x)}{\partial \mathbf{n}_z}=(\mathbf{n}_z,D_z\mathcal{E}_N(z-x))=\frac{1}{\omega_N\varepsilon^{N-1}} \quad \text{на} \quad \partial O(x,\varepsilon).$$

Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)}\frac{\partial v(z)}{\partial \mathbf{n}_z}w(z)\,dS_z=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\omega_N\varepsilon^{N-1}}\int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)}w(z)\,dS_z=w(x). \quad (2.10)$$

Значит, левая часть равенства (2.8) при $\varepsilon\to+0$ сходится к $w(x)$. Аналогичным образом доказывается, что правая часть равенства (2.8) при $\varepsilon\to+0$ сходится к $v(y)$. Итак,

$$w(x)=v(y) \quad \text{при} \quad x\neq y.$$

Значит,

$$G(y,x)=w(x)=v(y)=G(x,y) \quad \text{при} \quad x\neq y.$$

Теорема доказана.

§ 3. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [4], [16].

Тематическая лекция II

ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

Лекция 5

ОПЕРАТОРЫ С ОСОБЕННОСТЬЮ В $\mathbb{R}^N$

В этой лекции рассмотрены некоторые результаты об операторах со слабой особенностью в $\mathbb{R}^N$.

§ 1. Операторы со слабой особенностью в $\mathbb{R}^N$

Перейдём к исследованию *операторов со слабой особенностью*.

Определение 1. *Операторы вида* [1]

$$K(\rho)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\Omega} \rho(y)\frac{A(x,y)}{|x-y|^{\lambda}}\,dy, \quad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *— это ограниченная область, функция* $A(x,y) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega} \times \times \overline{\Omega})$*, называются интегральными операторами со слабой особенностью.*

Справедлива следующая важная теорема:

Теорема 4. *Пусть* $\rho(x) \in L^p(\Omega)$ *при* $1 < p \leqslant \infty$ *и*

$$0 \leqslant \lambda p^{'} < N, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p^{'}} = 1, \quad A(x,y) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}).$$

Тогда интегральный оператор со слабой особенностью (1.1) *вполне непрерывен как оператор*

$$K : L^p(\Omega) \to \mathbb{C}(\overline{\Omega}).$$

Доказательство.

Доказательство проведём в два этапа и за несколько шагов.

Этап I. Прежде всего докажем, что

$$K : L^p(\Omega) \to \mathbb{C}(\overline{\Omega}).$$

Шаг 1. Сначала докажем, что

$$K : \mathbb{C}(\overline{\Omega}) \to \mathbb{C}(\overline{\Omega}).$$

---

[1] Здесь мы символом $\int\limits_{\Omega}$ обозначаем N–кратный интеграл по измеримому множеству $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Пусть $x_0 \in \overline{\Omega}$ — произвольное фиксированное. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда интеграл (1.1) можно представить в следующем виде:

$$K(x) = K_1(x) + K_2(x), \tag{1.2}$$

$$K_1(x) = \int\limits_{\Omega \cap O(x_0,\eta)} F(x,y)\,dy, \quad K_2(x) = \int\limits_{\Omega \setminus O(x_0,\eta)} F(x,y)\,dy, \tag{1.3}$$

$$F(x,y) = \rho(y)\frac{A(x,y)}{|x-y|^\lambda}, \tag{1.4}$$

причем $\eta > 0$ настолько мало, что $\Omega \setminus O(x_0,\eta) \neq \varnothing$. Кроме того, предположим, что

$$x \in O(x_0, \eta/2).$$

Справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} |K_1(x_0)| \leqslant \int\limits_{\Omega \cap O(x_0,\eta)} |F(x_0,y)|\,dy \leqslant \\ \leqslant \sup_{(x,y)\in\Omega\times\Omega} |A(x,y)\rho(y)| \int\limits_{O(x_0,\eta)} \frac{1}{|x_0-y|^\lambda}\,dy = \\ = c_1\omega_N \int\limits_0^\eta \frac{r^{N-1}}{r^\lambda}\,dr = c_1\omega_N \frac{\eta^{N-\lambda}}{N-\lambda}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} |K_1(x)| \leqslant \int\limits_{\Omega \cap O(x_0,\eta)} |F(x,y)|\,dy \leqslant \\ \leqslant \sup_{(x,y)\in\Omega\times\Omega} |A(x,y)\rho(y)| \int\limits_{O(x_0,\eta)} \frac{1}{|x-y|^\lambda}\,dy. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Заметим, что при $|y-x_0| < \eta$ и $|x-x_0| < \eta/2$ имеем

$$|y-x| \leqslant |y-x_0| + |x-x_0| < \eta + \eta/2 = \frac{3}{2}\eta.$$

Отсюда получаем, что

$$O(x_0,\eta) \subset O(x, 3\eta/2) \quad \text{при} \quad x \in O(x_0,\eta/2).$$

Поэтому можно продолжить оценку (1.6) следующим образом:

$$|K_1(x)| \leqslant \sup_{(x,y)\in\Omega\times\Omega} |A(x,y)\rho(y)| \int\limits_{O(x,3\eta/2)} \frac{1}{|x-y|^\lambda}\,dy =$$

$$= c_1\omega_N \int\limits_0^{3\eta/2} \frac{r^{N-1}}{r^\lambda}\,dr = c_1\omega_N \frac{(3\eta/2)^{N-\lambda}}{N-\lambda}. \quad (1.7)$$

Теперь выберем $\eta > 0$ настолько малым, чтобы

$$c_1\omega_N \frac{(3\eta/2)^{N-\lambda}}{N-\lambda} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отсюда с учетом оценок (1.5) и (1.7) получим неравенства:

$$|K_1(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |K_1(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{для} \quad x \in O(x_0, \eta/2). \quad (1.8)$$

На данном этапе фиксируем $\eta > 0$. Теперь рассмотрим следующую разность:

$$K_2(x) - K_2(x_0) = \int\limits_{\Omega\setminus O(x_0,\eta)} [F(x,y) - F(x_0,y)]\,dy =$$

$$= \int\limits_{\Omega\setminus O(x_0,\eta)} \rho(y) \frac{A(x,y) - A(x_0,y)}{|x-y|^\lambda}\,dy +$$

$$+ \int\limits_{\Omega\setminus O(x_0,\eta)} \rho(y)A(x_0,y) \left[\frac{1}{|x-y|^\lambda} - \frac{1}{|x_0-y|^\lambda}\right] dy = I_1 + I_2. \quad (1.9)$$

Заметим, что если $|y - x_0| \geqslant \eta$ и $|x - x_0| < \eta/2$, то

$$|y - x| \geqslant |y - x_0| - |x - x_0| \geqslant \eta - \eta/2 = \eta/2. \quad (1.10)$$

Поэтому справедлива следующая оценка:

$$|I_1| \leqslant \sup_{y\in\Omega} |\rho(y)| \sup_{y\in\Omega} |A(x,y) - A(x_0,y)| \int\limits_{\Omega\setminus O(x_0,\eta)} \frac{1}{|x-y|^\lambda}\,dy \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \left(\frac{2}{\eta}\right)^\lambda \sup_{y\in\Omega} |A(x,y) - A(x_0,y)|. \quad (1.11)$$

Для I_2 имеет место следующая оценка:

$$|I_2| \leqslant \sup_{(x,y)\in\Omega\times\Omega} |\rho(y)A(x,y)| \int\limits_{\Omega\setminus O(x_0,\eta)} \left|\frac{1}{|x-y|^\lambda} - \frac{1}{|x_0-y|^\lambda}\right| dy. \quad (1.12)$$

Справедлива следующая вспомогательная лемма:

Л е м м а 2. *При* $|y - x_0| \geqslant \eta > 0$ *и* $|x - x_0| < \eta/2$, $\lambda > 0$ *выполняется неравенство*

$$\left| \frac{1}{|x-y|^\lambda} - \frac{1}{|x_0-y|^\lambda} \right| \leqslant \lambda \left(\frac{2}{\eta}\right)^{\lambda+1} |x - x_0|. \tag{1.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Имеет место формула

$$\frac{1}{|x-y|^\lambda} - \frac{1}{|x_0-y|^\lambda} = \int\limits_0^1 \frac{d}{ds} \frac{1}{|x_s-y|^\lambda}\, ds, \tag{1.14}$$

если

$$x_s = sx + (1-s)x_0 \neq y \quad \text{для всех} \quad s \in [0,1].$$

Справедливы следующие равенства:

$$\frac{d}{ds} \frac{1}{|x_s-y|^\lambda} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_{sj}} \frac{1}{|x_s-y|^\lambda} \frac{\partial x_{sj}}{\partial s}, \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{sj}} \frac{1}{|x_s-y|^\lambda} = \frac{\partial}{\partial x_{sj}} (|x_s-y|^2)^{-\lambda/2} = \\ = -\frac{\lambda}{2} 2(x_{sj}-y_j)(|x_s-y|^2)^{-(\lambda+2)/2} = -\lambda \frac{x_{sj}-y_j}{|x_s-y|^{\lambda+2}}, \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial x_{sj}}{\partial s} = x_j - x_{0j}. \tag{1.17}$$

Из (1.15)–(1.17) получаем, что

$$\frac{d}{ds} \frac{1}{|x_s-y|^\lambda} = -\lambda \sum_{j=1}^N \frac{(x_{sj}-y_j)(x_j-x_{0j})}{|x_s-y|^{\lambda+2}} = \\ = -\lambda \frac{(x_s-y, x-x_0)}{|x_s-y|^{\lambda+2}}. \tag{1.18}$$

Из (1.18) вытекает оценка

$$\left| \frac{d}{ds} \frac{1}{|x_s-y|^\lambda} \right| \leqslant \lambda \frac{|x-x_0|}{|x_s-y|^{\lambda+1}}. \tag{1.19}$$

Теперь заметим, что при условиях леммы

$$|y - x_s| \geqslant |y - x_0| - |x_s - x_0|,$$

$$|x_s - x_0| \leqslant |sx - sx_0| \leqslant s|x - x_0| \leqslant |x - x_0| \Rightarrow \\ \Rightarrow |y - x_s| \geqslant |y - x_0| - |x - x_0| \geqslant \eta - \eta/2 = \eta/2. \quad (1.20)$$

Из (1.19) и (1.20) получаем

$$\left| \frac{d}{ds} \frac{1}{|x_s - y|^\lambda} \right| \leqslant \lambda \left(\frac{2}{\eta} \right)^{\lambda+1} |x - x_0|. \quad (1.21)$$

Из (1.14) и (1.21) приходим к утверждению леммы.

Лемма доказана.

С учетом (1.13) получаем для I_2 следующую оценку:

$$|I_2| \leqslant c_2 \lambda \left(\frac{2}{\eta} \right)^{\lambda+1} |x - x_0||\Omega|. \quad (1.22)$$

Тогда из (1.11) и (1.22) приходим к выводу о том, что при фиксированном ранее $\eta > 0$ найдется такое достаточно малое $\delta = \delta(\varepsilon, \eta(\varepsilon)) > 0$, что при

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |I_1| < \frac{\varepsilon}{6}, \quad |I_2| < \frac{\varepsilon}{6}. \quad (1.23)$$

Таким образом, из (1.2)–(1.4), (1.8) и (1.23) вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое малое $\widetilde{\delta}(\varepsilon) > 0$, что справедливы неравенства

$$|V(x) - V(x_0)| \leqslant |V_1(x)| + |V_1(x_0)| + \\ + |V_2(x) - V_2(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon. \quad (1.24)$$

Значит, $V(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$.

Шаг 2. Докажем теперь, что

$$V : L^p(\Omega) \to \mathbb{C}(\overline{\Omega}). \quad (1.25)$$

Пусть $\rho(y) \in L^p(\Omega)$. Докажем, что и в этом случае

$$K(\rho)(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega}).$$

□ Действительно, имеет место плотное вложение:

$$\mathbb{C}(\overline{\Omega}) \overset{ds}{\subset} L^p(\Omega).$$

Тогда для $\rho(y) \in L^p(\Omega)$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такая функция $\rho_0(y) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, что имеет место следующее неравенство:

$$\|\rho - \rho_0\|_p < \frac{\varepsilon}{4M_1}, \quad \|f\|_p := \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad (1.26)$$

где постоянная $M_1 > 0$ будет определена ниже. Заметим, что поскольку $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область, то найдется такое достаточно большое $H > 0$, что $\Omega \subset O(x, H)$ для всех $x \in \Omega$. Поэтому справедлива следующая вспомогательная оценка:

$$\int\limits_{\Omega} \frac{1}{|x-y|^{\lambda p'}}\,dy \leqslant \int\limits_{O(x,H)} \frac{1}{|x-y|^{\lambda p'}}\,dy = \\ = \omega_N \int\limits_0^H \frac{r^{N-1}}{r^{\lambda p'}}\,dr = \omega_N \frac{H^{N-\lambda p'}}{N-\lambda p'}. \quad (1.27)$$

Теперь определим постоянную M_1 :

$$M_1 := \max\left\{1, \sup_{(x,y)\in\Omega\times\Omega} |A(x,y)| \left(\omega_N \frac{H^{N-\lambda p'}}{N-\lambda p'}\right)^{1/p'}\right\}. \quad (1.28)$$

Справедливо следующее неравенство:

$$|K(\rho)(x) - K(\rho)(x_0)| = \left|\int\limits_{\Omega} \frac{A(x,y)}{|x-y|^{\lambda}}\rho(y)\,dy - \int\limits_{\Omega} \frac{A(x_0,y)}{|x_0-y|^{\lambda}}\rho(y)\,dy\right| = \\ = \left|\int\limits_{\Omega} \frac{A(x,y)}{|x-y|^{\lambda}}[\rho(y)-\rho_0(y)]\,dy - \int\limits_{\Omega} \frac{A(x_0,y)}{|x_0-y|^{\lambda}}[\rho(y)-\rho_0(y)]\,dy - \right. \\ \left. - \int\limits_{\Omega} \frac{A(x,y)}{|x-y|^{\lambda}}\rho_0(y)\,dy + \int\limits_{\Omega} \frac{A(x_0,y)}{|x_0-y|^{\lambda}}\rho_0(y)\,dy\right| \leqslant \\ \leqslant \int\limits_{\Omega} \frac{|A(x,y)|}{|x-y|^{\lambda}}|\rho(y)-\rho_0(y)|\,dy + \int\limits_{\Omega} \frac{|A(x_0,y)|}{|x_0-y|^{\lambda}}|\rho(y)-\rho_0(y)|\,dy + \\ + \left|\int\limits_{\Omega} \frac{A(x,y)}{|x-y|^{\lambda}}\rho_0(y)\,dy - \int\limits_{\Omega} \frac{A(x_0,y)}{|x_0-y|^{\lambda}}\rho_0(y)\,dy\right| = I_1(x) + I_1(x_0) + I_2(x,x_0).$$

С одной стороны, в силу (1.27), (1.28) справедлива оценка:

$$\sup_{x\in\Omega} I_1(x) \leqslant \sup_{(x,y)\in\Omega\times\Omega} |A(x,y)| \left(\int\limits_{\Omega} \frac{1}{|x-y|^{\lambda p'}}\,dy\right)^{1/p'} \times \\ \times \left(\int\limits_{\Omega} |\rho(y)-\rho_0(y)|^p\,dy\right)^{1/p} \leqslant M_1 \|\rho-\rho_0\|_p < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (1.29)$$

С другой стороны, поскольку $\rho_0(y) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, то по с учетом результатов шага 1 имеем: найдётся такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$I(x, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак, имеем:

$$|K(\rho)(x) - K(\rho)(x_0)| \leqslant I_1(x) + I_1(x_0) + I_2(x, x_0) < 2\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \boxtimes$$

Этап II. Доказательство вполне непрерывности.

Определение 2. *Оператор K, действующий из одного банахова пространства B_1 в другое банахово пространство B_2, называется вполне непрерывным, если он является непрерывным и компактным.*

Итак, на первом этапе мы доказали, что при условиях теоремы

$$K : L^p(\Omega) \to \mathbb{C}(\overline{\Omega}).$$

Более того, этот оператор ограничен и для его нормы имеет место оценка:

$$\|K\| := \sup_{\|\rho\|_p \leqslant 1} \|K(\rho)\|_{\mathbb{C}(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{(x,y)\in\Omega\times\Omega} |A(x,y)| \left(\int\limits_{\Omega} \frac{1}{|x-y|^{\lambda p'}}\, dy \right)^{1/p'} \times$$
$$\times \sup_{\|\rho\|_p \leqslant 1} \left(\int\limits_{\Omega} |\rho(y)|^p\, dy \right)^{1/p} \leqslant M_1, \quad (1.30)$$

где M_1 определена формулой (1.28).

Сформулируем определение непрерывного оператора: *для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что как только*

$$\|\rho_1(y) - \rho_2(y)\|_p < \delta$$

имеет место неравенство

$$\|K(\rho_1)(x) - K(\rho_2)(x)\|_{\mathbb{C}(\overline{\Omega})} := \sup_{x\in\Omega} |K(\rho_1)(x) - K(\rho_2)(x)| < \varepsilon.$$

Как известно, *линейный ограниченный оператор непрерывен.*

□ Действительно, ограниченным оператором называется оператор с конечной нормой и в нашем случае имеем неравенство:

$$\|K(\rho_1) - K(\rho_2)\|_{\mathbb{C}(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} |K(\rho_1)(x) - K(\rho_2)(x)| =$$
$$= \sup_{x\in\Omega} \left| \int\limits_{\Omega} \frac{A(x,y)}{|x-y|^{\lambda}} [\rho_1(y) - \rho_2(y)]\, dy \right| \leqslant$$
$$\leqslant M_1 \left(\int\limits_{\Omega} |\rho_1(y) - \rho_2(y)|^p \, dy \right)^{1/p} = M_1 \|\rho_1 - \rho_2\|_p. \quad \boxtimes \quad (1.31)$$

Поэтому для доказательства вполне непрерывности оператора K нам нужно доказать его компактность, т. е. доказать, *что для всякого ограниченного множества* $R \subset L^p(\Omega)$, т. е. такого, что

$$\|\rho\|_p \leqslant c_1 < +\infty \quad \text{для всех} \quad \rho(x) \in R,$$

где постоянная c_1 не зависит от ρ, множество

$$\mathfrak{M} := \{K(\rho) : \ \rho(x) \in R\} \qquad (1.32)$$

предкомпактно в $\mathbb{C}(\overline{\Omega})$, т. е. такое, что *из всякого покрытия* $\overline{\mathfrak{M}}$ *открытыми множествами можно извлечь конечное подпокрытие*. С этой целью воспользуемся теоремой Арцела. Доказательство проведём за несколько шагов.

Шаг 1. $\mathfrak{M}$ ограничено в $\mathbb{C}(\overline{\Omega})$. Действительно, имеет место неравенство

$$\sup_{\rho\in R} \|K(\rho)\|_{\mathbb{C}(\overline{\Omega})} \leqslant \sup_{\|\rho\|_p \leqslant c_1} M_1 \|\rho\|_p = c_1 M_1 < +\infty$$

Шаг 2. $\mathfrak{M}$ равностепенно непрерывно в $\mathbb{C}(\overline{\Omega})$.

В силу неравенства Гёльдера для произвольного $\eta > 0$ имеет место следующие неравенства:

$$|K(\rho)(x) - K(\rho)(x_0)| = \left| \int\limits_{\Omega} \rho(y) \left[\frac{A(x,y)}{|x-y|^{\lambda}} - \frac{A(x_0,y)}{|x_0-y|^{\lambda}} \right] dy \right| \leqslant$$
$$\leqslant \|\rho\|_p \left[\int\limits_{\Omega} \left| \frac{A(x,y)}{|x-y|^{\lambda}} - \frac{A(x_0,y)}{|x_0-y|^{\lambda}} \right|^{p'} dy \right]^{1/p'} \leqslant$$
$$\leqslant c_1 \left\{ \int\limits_{\Omega\setminus O(x_0,\eta)} \left| \frac{A(x,y)}{|x-y|^{\lambda}} - \frac{A(x_0,y)}{|x_0-y|^{\lambda}} \right|^{p'} dy + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{O(x_0,\eta)} \left| \frac{A(x,y)}{|x-y|^{\lambda}} - \frac{A(x_0,y)}{|x-x_0|^{\lambda}} \right|^{p'} dy \right\}^{1/p'}. \qquad (1.33)$$

Заметим, что справедливо неравенство:

$$(a+b)^\alpha \leqslant a^\alpha + b^\alpha, \quad a, b \geqslant 0, \quad \alpha \in (0,1].$$

Применяя это неравенство, получим из (1.33) следующее неравенство:

$$|K(\rho)(x) - K(\rho)(x_0)| \leqslant$$
$$\leqslant c_1 \left(\int\limits_{\Omega \setminus O(x_0,\eta)} \left| \frac{A(x,y)}{|x-y|^\lambda} - \frac{A(x_0,y)}{|x_0-y|^\lambda} \right|^{p'} dy \right)^{1/p'} +$$
$$+ \left(\int\limits_{O(x_0,\eta)} \left| \frac{A(x,y)}{|x-y|^\lambda} - \frac{A(x_0,y)}{|x_0-y|^\lambda} \right|^{p'} dy \right)^{1/p'}, \quad (1.34)$$

из которого в силу неравенства треугольника получим:

$$|K(\rho)(x) - K(\rho)(x_0)| \leqslant J_1 + J_2 + J_3, \quad (1.35)$$

$$J_1 := c_1 \left[\int\limits_{\Omega \setminus O(x_0,\eta)} \left| \frac{A(x,y)}{|x-y|^\lambda} - \frac{A(x_0,y)}{|x_0-y|^\lambda} \right|^{p'} dy \right]^{1/p'}, \quad (1.36)$$

$$J_2 := c_1 \left[\int\limits_{O(x_0,\eta)} \frac{|A(x,y)|}{|x-y|^{p'\lambda}} \, dy \right]^{1/p'}, \quad (1.37)$$

$$J_3 := c_1 \left[\int\limits_{O(x_0,\eta)} \frac{|A(x_0,y)|}{|x_0-y|^{p'\lambda}} \, dy \right]^{1/p'}. \quad (1.38)$$

Прежде всего заметим, что для интеграла J_3 имеет место следующая оценка:

$$J_3 \leqslant c_1 \sup_{(x,y)\in\Omega\times\Omega} |A(x,y)| \left[\int\limits_{O(x_0,\eta)} \frac{1}{|x_0-y|^{\lambda p'}} \right]^{1/p'} \leqslant$$
$$\leqslant c_2 \left[\frac{\omega_N \eta^{N-\lambda p'}}{N-\lambda p'} \right]^{1/p'}, \quad (1.39)$$

поскольку $N > \lambda p'$. Для оценки интеграла J_2 предположим, что

$$|x - x_0| < \frac{\eta}{2} \quad \text{и} \quad |x - y| < \eta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x - y| \leqslant |y - x_0| + |x - x_0| < \eta + \frac{\eta}{2} < \frac{3}{2}\eta.$$

Поэтому $O(x_0, \eta) \subset O(x, 3\eta/2)$ при $x \in O(x_0, \eta/2)$. Следовательно, справедлива оценка

$$J_2 \leqslant c_1 \sup_{(x,y)\in\Omega\times\Omega} |A(x,y)| \left[\int\limits_{O(x_0,\eta)} \frac{1}{|x-y|^{\lambda p'}} \right]^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \left[\int\limits_{O(x,3\eta/2)} \frac{1}{|x-y|^{\lambda p'}} \right]^{1/p'} =$$

$$= c_2 \left[\frac{\omega_N (3\eta/2)^{N-\lambda p'}}{N - \lambda p'} \right]^{1/p'}. \tag{1.40}$$

В силу оценок (1.39) и (1.40) выберем $\eta > 0$ настолько малым, чтобы

$$J_2 + J_3 < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.41}$$

На этом этапе зафиксируем такое $\eta > 0$. Для оценки интеграла J_1 заметим, что при $|y - x_0| > \eta$ и при

$$|x - x_0| < \min\{\eta/2, \delta(\varepsilon)\}$$

имеет место следующая оценка снизу:

$$|x - y| \geqslant |y - x_0| - |x - x_0| \geqslant \eta - \eta/2 = \frac{\eta}{2} > 0.$$

Справедливо вспомогательное равенство:

$$\frac{A(x,y)}{|x-y|^{\lambda}} - \frac{A(x_0,y)}{|x_0-y|^{\lambda}} = \frac{A(x,y) - A(x_0,y)}{|x-y|^{\lambda}} +$$

$$+ A(x_0,y) \left[\frac{1}{|x-y|^{\lambda}} - \frac{1}{|x_0-y|^{\lambda}} \right]. \tag{1.42}$$

Из равенства (1.36) с учетом (1.42) и неравенство треугольника получим следующее неравенство:

$$J_1 \leqslant J_{11} + J_{12}, \tag{1.43}$$

$$J_{11} = c_1 \left[\int\limits_{\Omega\setminus O(x_0,\eta)} \frac{|A(x,y) - A(x_0,y)|^{p'}}{|x-y|^{\lambda p'}}\,dy \right]^{1/p'}, \tag{1.44}$$

$$J_{12} = c_1 \left[\int\limits_{\Omega\setminus O(x_0,\eta)} |A(x_0,y)|^{p'} \left| \frac{1}{|x-y|^{\lambda}} - \frac{1}{|x_0-y|^{\lambda}} \right|^{p'} dy \right]^{1/p'}. \tag{1.45}$$

С одной стороны, для J_{11} имеет место оценка (сравни с оценкой (1.27)):

$$J_{11} \leqslant c_1 \sup_{y\in\Omega} |A(x,y) - A(x_0,y)| \left(\int\limits_{\Omega} \frac{1}{|x-y|^{\lambda p'}}\,dy \right)^{1/p'} \leqslant$$
$$\leqslant c_1 M_2 \sup_{y\in\Omega} |A(x,y) - A(x_0,y)|, \tag{1.46}$$

где постоянная $M_2 > 0$ определена равенством:

$$M_2 = \left(\omega_N \frac{H^{N-\lambda p'}}{N-\lambda p'} \right)^{1/p'}, \quad \Omega \subset O(x,H), \quad \forall x \in \Omega. \tag{1.47}$$

С другой стороны, для J_{12} в силу оценки 1.13 из леммы 2 справедливо неравенство:

$$J_{12} = c_1 \lambda \sup_{(x,y)\in\Omega\times\Omega} |A(x,y)| \left(\frac{2}{\eta}\right)^{\lambda+1} |\Omega||x-x_0|. \tag{1.48}$$

Поэтому при ранее зафиксированном $\eta > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\eta(\varepsilon),\varepsilon) > 0$, что при $|x-x_0| < \delta$ из неравенств (1.46) и (1.48) следует неравенство:

$$J_{11} + J_{12} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак, справедлива следующая оценка:

$$J_1 < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad |x-x_0| < \delta. \tag{1.49}$$

Из (1.41), (1.49) и (1.24) вытекает оценка:

$$\sup_{\rho(x)\in R} |K(\rho)(x) - K(\rho)(x_0)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x-x_0| < \delta(\varepsilon), \tag{1.50}$$

где величина $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ не зависит от ρ. Следовательно, множество $\mathfrak{M}$ равностепенно непрерывно.

Таким образом, в силу теоремы Арцела множество $\mathfrak{M}$, определённое формулой (1.32), предкомпактно в $\mathbb{C}(\overline{\Omega})$.

Теорема доказана.

§ 2. Литературные указания

Материал для лекции взят из работы [10].

Лекция 6

ОБЪЕМНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

В этой лекции определены потенциалы простого и двойного слоя, а также объемный потенциал, которые уже фигурировал в третьей формуле Грина из предыдущей тематической лекции, а также изучены свойства объемного потенциала. В этой и следующих лекциях рассматривается пространство $\mathbb{R}^N$ при $N \geqslant 3$.

§ 1. Определение потенциалов

Напомним, что в четвёртой лекции первой тематической лекции получена третья формула Грина для функции $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n}; \overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ с гладкой границей Γ, которая при $N \geqslant 3$ имеет следующий вид:

$$u(x) = \frac{1}{(N-2)\omega_N} \int\limits_{\Gamma} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} \overline{\frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu_\xi}} \, dS_\xi - \\ - \frac{1}{(N-2)\omega_N} \int\limits_{\Gamma} \overline{u}(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} \, dS_\xi - \\ - \frac{1}{(N-2)\omega_N} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{|y - x|^{N-2}} \Delta_y u(y) \, dy, \quad (1.1)$$

где ν_ξ — это внешняя нормаль к области Ω в точке $\xi \in \Gamma$. В выражении (1.1) определены три типа слагаемых. Заменим функции

$$\overline{\frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu_\xi}}, \quad \overline{u}(\xi) \quad \text{и} \quad \Delta_y u(y)$$

соответственно функциями $\mu(\xi)$, $\sigma(\xi)$ и $\rho(\xi)$. В результате получим три интеграла, зависящие от $x \in \mathbb{R}^N$ как от параметра:

$$V[\mu](x) := \int\limits_{\Gamma} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} \mu(\xi) \, dS_\xi, \quad (1.2)$$

$$W[\sigma](x) := \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} \sigma(\xi) \, dS_\xi, \quad (1.3)$$

$$U[\rho](x) := \int\limits_{\Omega} \frac{1}{|y-x|^{N-2}} \rho(y)\, dy. \qquad (1.4)$$

Определение 1. *Функции $V[\mu](x)$, $W[\sigma](x)$ и $U[\rho](x)$ называются соответственно потенциалом простого слоя, потенциалом двойного слоя и объёмным потенциалом.*

§ 2. Объемный потенциал

Некоторые свойства объёмного потенциала $U[\rho](x)$ были изучены в первой тематической лекции. Рассмотрим объемный потенциал более общего вида:

$$U(x) = \int\limits_{\Omega} \frac{\rho(y)}{|x-y|^{\lambda}}\, dy, \quad 0 < \lambda < N, \qquad (2.1)$$

который носит название интеграла типа потенциала, где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область. Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Если $\rho(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, то $U(x) \in \mathbb{C}^{(n)}(\Omega)$, где n — наибольшее целое число такое, что $\lambda + n < N$ и соответствующие частные производные вычисляются под знаком интеграла.*

Доказательство. *Шаг 1.* $U(x) \in \mathbb{R}^N$. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^N$ и $\varepsilon > 0$. Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
|U(x) - U(x_0)| &\leqslant \int\limits_{\Omega} |\rho(y)| \left| \frac{1}{|y-x|^{\lambda}} - \frac{1}{|y-x_0|^{\lambda}} \right| dy \leqslant \\
&\leqslant M \int\limits_{\Omega} \left| \frac{1}{|y-x|^{\lambda}} - \frac{1}{|y-x_0|^{\lambda}} \right| dy \leqslant \\
&\leqslant M \int\limits_{O(x_0,\eta)} \left| \frac{1}{|y-x|^{\lambda}} - \frac{1}{|y-x_0|^{\lambda}} \right| dy + \\
&+ M \int\limits_{\Omega \setminus O(x_0,\eta)} \left| \frac{1}{|y-x|^{\lambda}} - \frac{1}{|y-x_0|^{\lambda}} \right| dy \leqslant \\
&\leqslant M \left(J_1(x) + J_1(x_0) + J_2(x, x_0) \right), \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

$$J_1(x) = \int\limits_{O(x_0,\eta)} \frac{1}{|y-x|^{\lambda}}\, dy, \quad J_1(x_0) = \int\limits_{O(x_0,\eta)} \frac{1}{|y-x_0|^{\lambda}}\, dy, \qquad (2.3)$$

$$J_2(x, x_0) = \int\limits_{\Omega \setminus O(x_0,\eta)} \left| \frac{1}{|y-x|^{\lambda}} - \frac{1}{|y-x_0|^{\lambda}} \right| dy. \qquad (2.4)$$

Пусть x настолько близко к x_0, что $x \in O(x_0, \eta/2)$. Оценим интеграл $J_1(x_0)$. Действительно, имеем

$$J_1(x_0) \leqslant \omega_N \int_0^\eta \frac{r^{N-1}}{r^\lambda}\, dr = \omega_N \frac{\eta^{N-\lambda}}{N-\lambda}. \tag{2.5}$$

Заметим, что

$$y \in O(x_0, \eta), \quad x \in O(x_0, \eta/2) \Rightarrow O(x_0, \eta) \subset O(x, 3\eta/2).$$

Поэтому справедливы следующие оценки для интеграла $J_1(x)$:

$$J_1(x) \leqslant \int\limits_{O(x, 3\eta/2)} \frac{1}{|y-x|^\lambda}\, dy = \omega_N \frac{(3\eta/2)^{N-\lambda}}{N-\lambda}. \tag{2.6}$$

Теперь выберем $\eta > 0$ настолько малым, чтобы

$$M\omega_N \frac{(3\eta/2)^{N-\lambda}}{N-\lambda} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.7}$$

Тогда из (2.5)–(2.7) получаем оценку:

$$J_1(x) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{для всех} \quad x \in O(x_0, \eta/2). \tag{2.8}$$

Согласно результату (1.13) из леммы 2 лекции 5 имеем оценку:

$$\left| \frac{1}{|y-x|^\lambda} - \frac{1}{|y-x_0|^\lambda} \right| \leqslant \lambda \left(\frac{2}{\eta}\right)^{\lambda+1} |x - x_0| \tag{2.9}$$

для всех $y \in \mathbb{R}^N \backslash O(x_0, \eta)$ и $x \in O(x_0, \eta/2)$. Из (2.4) и (2.9) получаем, что

$$J_2(x, x_0) \leqslant \lambda \left(\frac{2}{\eta}\right)^{\lambda+1} |\Omega||x - x_0|. \tag{2.10}$$

Найдется такое $\delta = \delta(\eta(\varepsilon), \varepsilon) > 0$, что при $|x - x_0| < \delta$ будет выполнено неравенство:

$$J_2(x, x_0) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.11}$$

Из (2.2), (2.8) и (2.11) вытекает, что

$$|U(x) - U(x_0)| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad |x - x_0| < \delta.$$

Шаг 2. Пусть $\lambda + 1 < N$. Рассмотрим функцию

$$U_j(x) = \int\limits_\Omega \rho(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|x-y|^\lambda}\, dy. \tag{2.12}$$

При $y \neq x$ справедливо следующее равенство:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{|x-y|^\lambda} = \frac{\partial}{\partial x_j}(|x-y|^2)^{-\lambda/2} = \\ = -\frac{\lambda}{2}2(x_j - y_1)(|x-y|^2)^{-\lambda/2-1} = \lambda\frac{y_j - x_j}{|y-x|^{\lambda+2}}, \quad (2.13)$$

из которого при $x \neq y$ вытекает оценка:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{|x-y|^\lambda}\right| \leqslant \lambda\frac{1}{|y-x|^{\lambda+1}}, \quad \lambda+1 < N. \quad (2.14)$$

Функция в правой части оценки (2.14) локально интегрируемая и поэтому

$$U_j(x) = \lambda\int\limits_\Omega \rho(y)\frac{y_j - x_j}{|y-x|^{\lambda+2}}\,dy. \quad (2.15)$$

Используя оценку (2.14) точно также как на шаге можно доказать, что $U_j(x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N)$. Докажем, теперь, что

$$U_j(x) = \frac{\partial U(x)}{\partial x_j} \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad j = \overline{1, N}. \quad (2.16)$$

Справедливо следующее равенство:

$$\int\limits_{x_{0j}}^{\xi_j} U_j(x)\,dx_j = \int\limits_{x_{0j}}^{\xi_j}\left[\int\limits_\Omega \rho(y)\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{|x-y|^\lambda}\,dy\right]dx_j = \\ = \int\limits_\Omega \rho(y)\left[\int\limits_{x_{0j}}^{\xi_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{|x-y|^\lambda}\,dx_j\right]dy = \\ = U(x_1, \ldots, x_{j-1}, \xi_j, x_{j+1}, \ldots, x_N) - \\ - U(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{0j}, x_{j+1}, \ldots, x_N). \quad (2.17)$$

В равенстве (2.17) изменен порядок интегрирования. Ниже следует обоснование этой перестановки.

□ Действительно, для этого в силу теоремы Фубини и оценки (2.14) достаточно доказать сходимость следующего повторного интеграла:

$$\int\limits_{x_{0j}}^{\xi_j}\left[\int\limits_\Omega \frac{|\rho(y)|}{|x-y|^{\lambda+1}}\right]dx_j. \quad (2.18)$$

Поскольку область $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная, то найдется такое $R > 0$, что $\Omega \subset O(0,R)$. Тогда справедливо неравенство:

$$\int\limits_{\Omega} \frac{1}{|x-y|^{\lambda+1}}\,dy \leqslant \int\limits_{O(0,R)} \frac{1}{|x-y|^{\lambda+1}}\,dy. \tag{2.19}$$

Рассмотрим два случая $|x| \geqslant 2R$ и $|x| < 2R$. В первом случае имеет место оценка снизу:

$$|x-y| \geqslant |x| - |y| \geqslant 2R - R = R. \tag{2.20}$$

Из (2.19) и (2.19) получаем оценку:

$$\int\limits_{\Omega} \frac{1}{|x-y|^{\lambda+1}}\,dy \leqslant \int\limits_{O(0,R)} \frac{1}{|x-y|^{\lambda+1}}\,dy \leqslant \leqslant \frac{1}{R^{\lambda+1}}\alpha_N R^N = \alpha_N R^{N-\lambda-1}. \tag{2.21}$$

Во втором случае при $|x| < 2R$ имеет место вложение $O(0,R) \subset \subset O(x,3R)$ и поэтому из (2.19) получаем оценку:

$$\int\limits_{\Omega} \frac{1}{|x-y|^{\lambda+1}}\,dy \leqslant \int\limits_{O(x,3R)} \frac{1}{|x-y|^{\lambda+1}}\,dy \leqslant \omega_N \frac{(3R)^{N-\lambda-1}}{N-\lambda-1} < +\infty, \tag{2.22}$$

поскольку по исходному предположению $\lambda < N-1$. Итак, из оценок (2.21) и (2.22) с учетом (2.18) получаем, что

$$\int\limits_{x_{0j}}^{\xi_j} \left[\int\limits_{\Omega} \frac{|\rho(y)|}{|x-y|^{\lambda+1}}\right] dx_j \leqslant \leqslant M(N,\lambda) R^{N-\lambda-1} |\xi_j - x_{0j}| \sup_{y\in\Omega} |\rho(y)| < +\infty. \quad \boxtimes \tag{2.23}$$

Дифференцируя обе части равенства (2.17) по ξ_j, получим равенство (2.16).

Теорема доказана.

Замечание. Заметим, что смешанную производную второго порядка от объемного потенциала

$$U(x) = \int\limits_{\Omega} \frac{\rho(y)}{|x-y|^{N-2}}\,dy$$

вычислить дифференцированием под знаком интеграла уже нельзя, поскольку, как это установлено в первой лекции, справедлива оценка при $x \neq y$

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \frac{1}{|x-y|^{N-2}} \right| \leqslant \frac{M}{|x-y|^N},$$

правая часть которой не является локально интегрируемой функцией. Однако, при некотором дополнительном условии на плотность объемного потенциала $\rho(x)$ объемный потенциал будет функцией из класса $\mathbb{C}^{(2)}(\Omega)$ и, кроме того, будет гармонической в Ω функцией.

Определение 2. *Функция $\rho(x)$ называется локально непрерывной по Гельдеру функцией в области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, если:*

$$[\rho]_{x,\beta} := \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|\rho(x) - \rho(y)|}{|x-y|^\beta} < +\infty \tag{2.24}$$

для каждого фиксированного $x \in \Omega$ и при $\beta \in (0,1]$.

Замечание. Для локально непрерывной по Гельдеру функции возможна ситуация, когда

$$[\rho]_\beta = \sup_{x \neq y,\, x,y \in \Omega} \frac{|\rho(x) - \rho(y)|}{|x-y|^\beta} = +\infty,$$

т.е. локально непрерывная по Гельдеру функция может не быть Гельдеровской.

Справедлива следующая важная теорема:

Теорема 2. *Пусть плотность $\rho(x)$ ограниченная и локально непрерывная по Гельдеру функция. Тогда соответствующий объемный потенциал $U(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega)$, справедливо равенство*

$$\Delta_x U(x) = -(N-2)\omega_N \rho(x) \quad \textit{для всех} \quad x \in \Omega, \tag{2.25}$$

и справедлива формула для вычисления смешанных производных второго порядка:

$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \int\limits_{O(z,R)} [\overline{\rho}(y) - \rho(x)] \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{|x-y|^{N-2}}\, dy - \\ - \rho(x) \int\limits_{\partial O(z,R)} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x-\xi|^{N-2}} \cos(\nu_\xi, \mathbf{e}_j)\, dS_\xi \tag{2.26}$$

для всех $x \in \Omega$, причем $\overline{\Omega} \subset O(z,R)$ — произвольный шар, а функция

$$\overline{\rho}(x) = \begin{cases} \rho(x), & \textit{если} \quad x \in \Omega; \\ 0, & \textit{если} \quad x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases} \tag{2.27}$$

Замечание. Если область Ω — шар в $\mathbb{R}^N$, то не надо рассматривать продолжение (2.27) плотности. В этом случае $O(z,R) = \Omega$.

Доказательство. *Шаг 1.* Рассмотрим следующую функцию:

$$U_{ij}(x) = \int\limits_{O(z,R)} [\overline{\rho}(y) - \rho(x)] \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{|x-y|^{N-2}}\, dy -$$
$$- \rho(x) \int\limits_{\partial O(z,R)} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x-\xi|^{N-2}} \cos(\nu_\xi, \mathbf{e}_j)\, dS_\xi, \quad x \in O(z,R). \qquad (2.28)$$

Напомним, что при $x \neq y$ справедливы следующие оценки:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|x-y|^{N-2}} \right| \leqslant \frac{M}{|x-y|^{N-1}}, \qquad (2.29)$$

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \frac{1}{|x-y|^{N-2}} \right| \leqslant \frac{M}{|x-y|^{N}}. \qquad (2.30)$$

Поэтому из (2.28) получаем, что функция $U_{ij}(x)$ определена в произвольной точке $x \in \Omega$.

□ Действительно, со вторым слагаемым в (2.28) все «хорошо», поскольку $\xi \in \partial O(z,R)$, а $x \in \overline{\Omega} \subset O(z,R)$. В первом слагаемом особенность в точке $y = x$ с учетом (2.24) имеет асимптотику

$$\frac{1}{|x-y|^{N-\beta}}, \quad \beta \in (0,1] \quad \text{при} \quad y \to x,$$

а значит имеет интегрируемую особенность в $\mathbb{R}^N$. ⊠

Шаг 2. Здесь приведено другое доказательство теоремы 1. Теперь введем следующую функцию $\eta(t) \in \mathbb{C}^{(1)}[0,+\infty)$:

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1; \\ 1, & \text{если} \quad t \geqslant 2, \end{cases} \qquad 0 \leqslant \eta(t) \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \eta'(t) \leqslant 2. \qquad (2.31)$$

Рассмотрим следующие функции:

$$w_\varepsilon(x) = \int\limits_\Omega \frac{1}{|x-y|^{N-2}} \eta_\varepsilon(|x-y|) \rho(y)\, dy, \qquad (2.32)$$

$$U_i(x) = \int\limits_\Omega \rho(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x-y|^{N-2}}\, dy, \qquad (2.33)$$

$$\eta_\varepsilon(|x-y|) = \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right), \quad O(x, 2\varepsilon) \subset \Omega, \quad \varepsilon > 0. \qquad (2.34)$$

В силу определения η_ε замечаем, что $w_\varepsilon(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^N)$. С учетом определения функций (2.32) и (2.33), а также с учетом определения функции (2.34) приходим к следующему равенству:

$$
\begin{aligned}
U_i(x) - \frac{\partial w_\varepsilon(x)}{\partial x_i} &= \\
&= \int\limits_\Omega \rho(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x-y|^{N-2}}\,dy - \int\limits_\Omega \rho(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\eta_\varepsilon(|x-y|)}{|x-y|^{N-2}} \right) dy = \\
&= \int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1-\eta_\varepsilon(|x-y|)}{|x-y|^{N-2}} \right) dy = \\
&= \int\limits_{O(x,2\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1-\eta_\varepsilon(|x-y|)}{|x-y|^{N-2}} \right) dy, \qquad (2.35)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}\eta_\varepsilon(|x-y|) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) = \\
&= \eta'(t)\Big|_{t=\frac{|x-y|}{\varepsilon}} \frac{1}{\varepsilon}\frac{x_i-y_i}{|x-y|}, \quad x \neq y. \qquad (2.36)
\end{aligned}
$$

Из равенств (2.36) получаем оценку:

$$
\left| \frac{\partial}{\partial x_i}\eta_\varepsilon(|x-y|) \right| \leqslant \frac{2}{\varepsilon}, \quad x \neq y. \qquad (2.37)
$$

Из (2.35) с учетом оценок (2.29) и (2.37) приходим к неравенству:

$$
\begin{aligned}
\left| U_i(x) - \frac{\partial w_\varepsilon(x)}{\partial x_i} \right| &\leqslant \\
&\leqslant \sup_{y\in\Omega} |\rho(y)| \int\limits_{O(x,2\varepsilon)} \left(\frac{M}{|x-y|^{N-1}} + \frac{2}{\varepsilon}\frac{1}{|x-y|^{N-2}} \right) dy \leqslant M_1\varepsilon. \qquad (2.38)
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
w_\varepsilon(x) \rightrightarrows U(x), \quad \frac{\partial w_\varepsilon(x)}{\partial x_i} \rightrightarrows U_i(x) \qquad (2.39)
$$

равномерно на всяком компактном множестве $G \subset \mathbb{R}^N$. Поэтому

$$
U_i(x) = \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad U(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^N). \qquad (2.40)
$$

Шаг 3. На этом шаге доказываются основные утверждения теоремы. Пусть $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_N\}$ — некоторая прямоугольная декартова система координат. Пусть $O(x, 2\varepsilon) \subset \Omega$ при некотором $\varepsilon > 0$. С использованием функции $U_i(x)$, определенной равенством (2.33), построим функцию

$$U_{i\varepsilon}(x) = \int\limits_{\Omega} \rho(y)\eta_\varepsilon(|x-y|)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\,dy \in \mathbb{C}^{(1)}(\Omega), \qquad (2.41)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_{i\varepsilon}(x)}{\partial x_j} &= \int\limits_{\Omega} \rho(y)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\eta_\varepsilon(|x-y|)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right)dy = \\
&= \int\limits_{O(z,R)} \overline{\rho}(y)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\eta_\varepsilon(|x-y|)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right)dy = \\
&= \int\limits_{O(z,R)} [\overline{\rho}(y)-\rho(x)]\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\eta_\varepsilon(|x-y|)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right)dy + \\
&\quad + \rho(x)\int\limits_{O(z,R)} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\eta_\varepsilon(|x-y|)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right)dy = \\
&= \int\limits_{O(z,R)} [\overline{\rho}(y)-\rho(x)]\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\eta_\varepsilon(|x-y|)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right)dy - \\
&\quad - \rho(x)\int\limits_{O(z,R)} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\eta_\varepsilon(|x-y|)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right)dy = \\
&= \int\limits_{O(z,R)} [\overline{\rho}(y)-\rho(x)]\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\eta_\varepsilon(|x-y|)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right)dy - \\
&\quad - \rho(x)\int\limits_{\partial O(z,R)} \eta_\varepsilon(|x-\xi|)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|x-\xi|^{N-2}}\right)\cos(\nu_\xi,\mathbf{e}_j)\,dS_\xi. \qquad (2.42)
\end{aligned}$$

Путем сравнения выражения (2.28) для функции $U_{ij}(x)$ и выражения (2.42) получим следующую цепочку соотношений:

$$\begin{aligned}
&\left|U_{ij}(x) - \frac{\partial U_{i\varepsilon}(x)}{\partial x_j}\right| = \\
&\quad = \left|\int\limits_{O(z,R)} [\overline{\rho}(y)-\rho(x)]\frac{\partial}{\partial x_j}\left((1-\eta_\varepsilon(|x-y|))\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right)dy\right| = \\
&\quad = \left|\int\limits_{O(x,2\varepsilon)} [\rho(y)-\rho(x)]\frac{\partial}{\partial x_j}\left((1-\eta_\varepsilon(|x-y|))\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right)dy\right| \leqslant
\end{aligned}$$

$$\leqslant [\rho]_{x,\beta} \int\limits_{O(x,2\varepsilon)} \left[\left| \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \frac{1}{|x-y|^{N-2}} \right| |x-y|^{\beta} + \right.$$

$$\left. + \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x-y|^{N-2}} \right| \left| \frac{\partial}{\partial x_j} \eta \left(\frac{|x-y|}{\varepsilon} \right) \right| |x-y|^{\beta} \right] dy \leqslant$$

$$\leqslant M_1 [\rho]_{x,\beta} \int\limits_{O(x,2\varepsilon)} \frac{1}{|x-y|^{N-\beta}}\, dy + \frac{M_2}{\varepsilon} [\rho]_{x,\beta} \int\limits_{O(x,2\varepsilon)} \frac{1}{|x-y|^{N-1-\beta}}\, dy =$$

$$= M_3 [\rho]_{x,\beta} \left\{ \frac{(2\varepsilon)^{\beta}}{\beta} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{(2\varepsilon)^{1+\beta}}{1+\beta} \right\} = M_4 \varepsilon^{\beta}. \quad (2.43)$$

Из (2.41) и (2.43) получаем, что

$$U_{i\varepsilon}(x) \rightrightarrows U_i(x), \quad \frac{\partial U_{i\varepsilon}(x)}{\partial x_j} \rightrightarrows U_{ij}(x) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0 \quad (2.44)$$

равномерно на всяком компактном подмножестве из Ω. Стало быть, приходим к выводу о том, что

$$U_{ij}(x) = \frac{\partial U_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_j \partial x_i}, \quad U(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \quad (2.45)$$

для всех $i, j = \overline{1, N}$.

Шаг 4. Докажем теперь равенство:

$$\Delta_x U(x) = -(N-2)\omega_N \rho(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega. \quad (2.46)$$

В доказанном равенстве (2.26) положим $z = x$ и просуммируем по $i = j \in \overline{1, N}$. Тогда:

$$\Delta_x U(x) = \int\limits_{O(x,R)} [\overline{\rho}(y) - \rho(x)] \Delta_x \frac{1}{|x-y|^{N-2}}\, dy -$$

$$- \rho(x) \int\limits_{\partial O(x,R)} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|x-\xi|^{N-2}} \cos(\nu_{\xi}, \mathbf{e}_j)\, dS_{\xi} = K_1 + K_2. \quad (2.47)$$

Для K_2 справедливы равенства:

$$K_2 = \rho(x)(N-2) \int\limits_{\partial O(x,R)} \frac{1}{|\xi - x|^{N-1}} \sum_{j=1}^{N} \cos^2(\nu_{\xi}, \mathbf{e}_j)\, dS_{\xi} =$$

$$= (N-2)\rho(x) \frac{1}{R^{N-1}} \int\limits_{\partial O(x,R)} dS_{\xi} = (N-2)\rho(x) \frac{1}{R^{N-1}} \omega_N R^{N-1} =$$

$$= (N-2)\omega_N \rho(x), \quad (2.48)$$

где

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x-\xi|^{N-2}} = (N-2)\frac{\xi_i - x_i}{|\xi - x|^N} = \frac{(N-2)}{|\xi - x|^{N-1}} \frac{\xi_i - x_i}{|\xi - x|} =$$
$$= \frac{(N-2)}{|\xi - x|^{N-1}} \cos(\xi - x, \mathbf{e}_i) = \frac{N-2}{|\xi - x|^{N-1}} \cos(\nu_\xi, \mathbf{e}_i), \quad (2.49)$$

поскольку для единичной внешней нормали ν_ξ к точке $\xi \in \partial O(x,R)$ имеет место равенство:

$$\nu_\xi = \frac{\xi - x}{|\xi - x|}.$$

Теперь докажем, что $K_1 = 0$. Действительно, докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ справедлива оценка $|K_1| < \varepsilon$. Для этого заметим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое малое $\eta > 0$, что

$$K_1 = \int\limits_{O(x,\eta)} [\rho(y) - \rho(x)] \Delta_x \frac{1}{|y-x|^{N-2}}\, dy +$$
$$+ \int\limits_{O(x,R)\setminus O(x,\eta)} [\overline{\rho}(y) - \rho(x)] \Delta_x \frac{1}{|y-x|^{N-2}}\, dy =$$
$$= \int\limits_{O(x,\eta)} [\rho(y) - \rho(x)] \Delta_x \frac{1}{|y-x|^{N-2}}\, dy = K_3, \quad (2.50)$$

поскольку

$$\Delta_x \frac{1}{|y-x|^{N-2}} = 0 \quad \text{для всех} \quad y \in O(x,R)\setminus O(x,\eta), \quad \eta > 0.$$

Для K_3 справедлива оценка:

$$|K_3| \leqslant [\rho]_{x,\beta} M \int\limits_{O(x,\eta)} \frac{1}{|y-x|^{N-\beta}}\, dy = [\rho]_{x,\beta} M \omega_N \frac{\eta^\beta}{\beta} < \varepsilon \quad (2.51)$$

Таким образом, $K_3 = 0$ и с учетом выражения (2.48) для K_1 из (2.47) получаем следующее равенство:

$$\Delta_x U(x) = -(N-2)\omega_N \rho(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega.$$

Теорема доказана.

§ 3. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [4], [5], [10].

Лекция 7

ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЛЯПУНОВА

§ 1. Поверхности Ляпунова

Сформулируем следующие три условия:

(i) Существует непрерывное поле нормалей $\mathbf{n}_x$ на поверхности Γ.

(ii) Существует такая постоянная $d > 0$ одна и та же для всей поверхности Γ, что шар

$$O(x,d) := \left\{y \in \mathbb{R}^N : \; |y-x| < d\right\} \quad \text{для всякой точки} \quad x \in \Gamma$$

вырезает из Γ участок $\Gamma(x) := \Gamma \cap O(x,d)$, который в местной системе координат $\{x, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{N-1}, \mathbf{e}_N\}$ с координатами $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{N-1}, \xi_N)$, связанной с точкой x, может быть задан уравнением вида

$$\xi_N = f(\xi^{'}) \in \mathbb{C}^{(1)}(\Gamma'(x)), \quad \xi^{'} = (\xi_1, ..., \xi_{N-1}), \tag{1.1}$$

где $\Gamma'(x)$ — проекция куска $\Gamma(x)$ поверхности Γ на касательную к точке x плоскость, причём прямоугольная декартова система координат $\{x, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{N-1}, \mathbf{e}_N\}$ выбрана таким образом, что в качестве орта $\mathbf{e}_N$, соответствующего координате ξ_N, выбирается вектор внешней нормали $\mathbf{n}_x$ в точке $x \in \Gamma$, а остальные орты $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{N-1})$ — лежат в касательной плоскости к точке x.

(iii) Существуют такие постоянные $a > 0$ и $\alpha \in (0,1]$, что если $\xi, \zeta \in \Gamma(x)$, то имеет место оценка

$$\left|\frac{\partial f(\xi^{'})}{\partial \xi_k} - \frac{\partial f(\eta^{'})}{\partial \xi_k}\right| \leqslant a \left[\sum_{j=1}^{N-1} (\xi_j - \eta_j)^2\right]^{\alpha/2}, \quad k = \overline{1, N-1}, \tag{1.2}$$

$$\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{N-1}), \; \eta' = (\eta_1, \ldots, \eta_{N-1}) \in \Gamma'(x).$$

Дадим определение.

Определение 1. *Поверхностью* $\Gamma \in \mathbb{R}^N$ *класса* $\mathbb{C}^{1,\alpha}$ *при* $\alpha \in (0,1]$ *или поверхностью Ляпунова называется поверхность, которая обладает свойствами* (i)–(iii).

Обсуждение определения поверхностей Ляпунова. Первое свойство определения 1 мы будем называть *свойством су-*

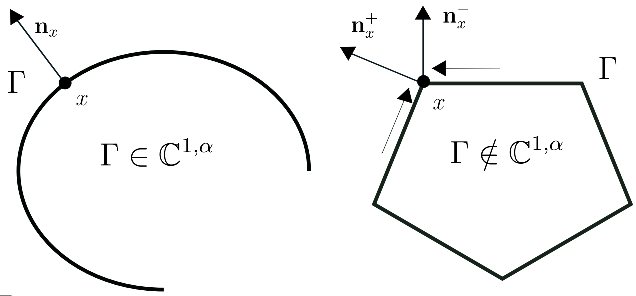


Рис. 19. Два примера существования и несуществования непрерывного поля нормалей

ществования непрерывного поля нормалей. Приведём примеры и контрпримеры на ниже следующих рисунках. Сферу $S_d(x) := \partial O(x, d)$ будем называть сферой Ляпунова, а второе свойство будем называть *свойством существования сферы Ляпунова*. Наконец, третье свой-

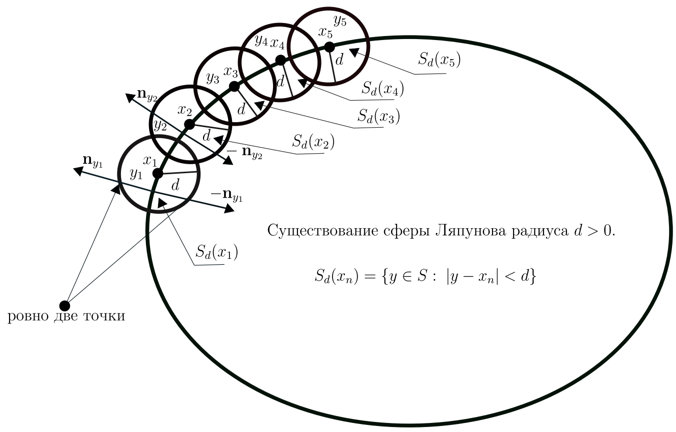


Рис. 20. Существование сферы Ляпунова.

ство, как будет показано ниже, означает, в частности, *гёльдеровскую непрерывность поля нормалей*.

З а м е ч а н и е. Плоскость $\xi_N = 0$ касается поверхности Γ в точке x, которая является началом системы координат $\{x, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{N-1}, \mathbf{e}_N\}$, поэтому, во–первых, в этой системы координат точка x имеет следующие координаты:

$$\boxed{\xi_N = 0, \quad \xi' = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{N-1}) \Rightarrow 0 = f(\underbrace{0, \ldots, 0}_{N-1})}, \tag{1.3}$$

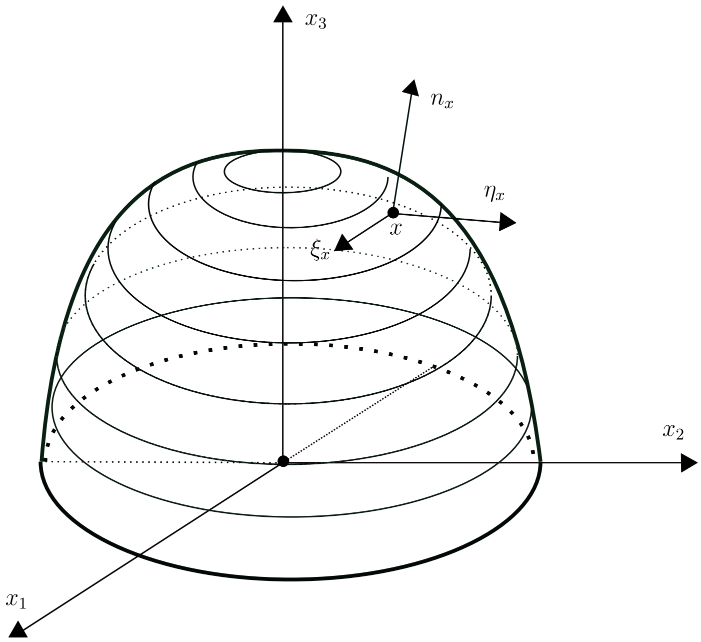


Рис. 21. «Локальная» система координат

во–вторых, рассмотрим локальную запись уравнения поверхности $\Gamma(x)$ в следующем виде:

$$F(\xi_1, ..., \xi_{N-1}, \xi_N) := \xi_N - f(\xi^{'}) = 0. \tag{1.4}$$

Отметим, что поверхность Ляпунова является неособой, т.е.

$$\nabla_\xi F(\xi)|_{M_0} \neq \overrightarrow{0}$$

для любой точки $M_0 \in \Gamma(x)$, поскольку

$$\frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi_N} = 1.$$

Лемма 1. *Пусть точка* $M_0(\xi_0', \xi_{0N})$ *принадлежит куску* $\Gamma(x)$ *поверхности Ляпунова* Γ. *Тогда единичная нормаль* $\mathbf{n}_{M_0}$ *в точке* M_0 *может быть задана равенством*:

$$\mathbf{n}_{M_0} = \left. \frac{\nabla_\xi F(\xi)}{|\nabla_\xi F(\xi)|} \right|_{M_0}. \tag{1.5}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную кривую $\xi = \xi(t)$ при $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ и $\varepsilon > 0$, лежащую на поверхности $F(\xi) = 0$ и проходящую через точку M_0 поверхности, положение которой соответствует параметру $t = t_0$. Кроме того, предположим, что

$$\dot{\xi}(t_0) = \mathbf{a}, \tag{1.6}$$

где $\mathbf{a}$ — произвольный фиксированный вектор на касательной плоскости в точке M_0. [1] Тогда справедливо равенство

$$F(\xi(t)) = 0 \quad \text{для всех} \quad t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon). \tag{1.7}$$

Продифференцируем обе части равенства (1.6) по t в точке $t = t_0$:

$$0 = \left.\frac{dF(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = \sum_{k=1}^{N} \left.\frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi_k}\frac{\partial \xi_k}{\partial t}\right|_{t=t_0} = \left(\nabla_\xi F(\xi)\Big|_{\xi=\xi_0}, \dot{\xi}(t_0)\right) = \\ = \left(\nabla_\xi F(\xi)\Big|_{\xi=\xi_0}, \mathbf{a}\right) \tag{1.8}$$

для произвольного вектора $\mathbf{a}$ из касательной плоскости к точке M_0. Значит, ковектор

$$\left.\frac{\nabla_\xi F(\xi)}{|\nabla_\xi F(\xi)|}\right|_{M_0}$$

представляет собой единичную нормаль в точке M_0 поверхности.

Лемма доказана.

Согласно лемме 1 направляющие косинусы вектора внешней нормали $\mathbf{n}_x$ к поверхности $F(\xi_1, ..., \xi_{N-1}, \xi_N) = 0$ в точке x равны:

$$\cos(\mathbf{n}_x, \mathbf{e}_k) = \frac{1}{|\nabla_\xi F(0)|}\frac{\partial F}{\partial \xi_k}(0), \quad k = \overline{1, N}. \tag{1.9}$$

Отсюда поскольку при таком выборе системы координат $\{x, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{N-1}, \mathbf{e}_N\}$ с координатами (ξ', ξ_N) имеем

$$\boxed{\cos(\mathbf{n}_x, \mathbf{e}_k) = 0, \quad k = \overline{1, N-1} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \xi_k}(0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \xi_k}(0, ..., 0) = 0.}$$

Обозначения. Пусть $\xi \in \Gamma(x)$. Расстояние между точками x и ξ будем обозначать через r, а расстояние между x и $(\xi', 0) = (\xi_1, ..., \xi_{N-1}, 0)$ будем обозначать посредством ρ. В выбранной ортогональной декартовой системе координат $\{x, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{N-1}, \mathbf{e}_N\}$ с координатами $(\xi_1, ..., \xi_{N-1}, \xi_N)$ точка $x \in \Gamma(x)$ имеет координаты:

$$\xi_N = 0, \quad \xi' = (\underbrace{0, ..., 0}_{N-1}),$$

[1] Такая кривая для каждого $\mathbf{a}$ существует.

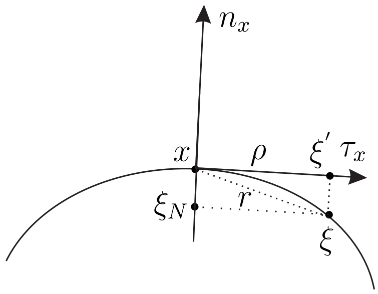


Рис. 22. К формулам (1.10)

поэтому справедливы следующие равенства:

$$\rho^2 = |(\xi^{'}, 0) - x|^2 = |(\xi^{'}, 0) - 0|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} \xi_k^2, \tag{1.10}$$

$$r^2 = |\xi - x|^2 = |\xi - 0|^2 = \sum_{k=1}^{N} \xi_k^2 = \rho^2 + \xi_N^2. \tag{1.11}$$

Заметим, что в силу свойства (iii), если положить $\eta' = (0, \ldots, 0)$, с учётом доказанного выше равенства

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_k}(0, ..., 0) = 0 \quad \text{при} \quad k = \overline{1, N-1}$$

получим следующую оценку:

$$\boxed{\left|\frac{\partial f(\xi^{'})}{\partial \xi_k}\right| \leqslant a\rho^{\alpha} \leqslant ar^{\alpha} \quad \text{при} \quad k = \overline{1, N-1}.} \tag{1.12}$$

Справедливо следующее утверждение:
Л е м м а 2. *Имеют место следующие неравенства*:

$$\boxed{|f(\xi')| \leqslant b\rho^{\alpha+1}, \quad b = (N-1)\frac{a}{\alpha+1},} \tag{1.13}$$

$$r^2 \leqslant (1 + b^2 d^{2\alpha})\rho^2 \tag{1.14}$$

где $\xi = (\xi^{'}, \xi_N) \in \Gamma(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\xi = (\xi', \xi_N) \in \Gamma(x)$. Тогда имеем:

$$f(\xi') - f(0, \ldots, 0) = \int_0^1 \frac{df(\eta_s')}{ds}\, ds, \quad \eta_s' = s\xi'. \tag{1.15}$$

В силу (1.3) находим, что $f(0,\ldots,0)=0$ и поэтому из (1.15) получаем равенство:

$$f(\xi')=\int\limits_0^1 \frac{df(\eta_s')}{ds}\,ds,\quad \eta_s'=s\xi'. \tag{1.16}$$

Справедливы следующие равенства:

$$\frac{df(\eta_s')}{ds}=\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\partial f(\eta_s')}{\partial\eta_{sk}}\frac{d\eta_{sk}}{ds}=\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\partial f(\eta_s')}{\partial\eta_{sk}}\xi_k. \tag{1.17}$$

Из (1.17) с учетом (1.12) получаем оценку:

$$\left|\frac{df(\eta_s')}{ds}\right|\leqslant (N-1)|(\xi',0)|\max_{k=\overline{1,N-1}}\left|\frac{\partial f(\eta_s')}{\partial\eta_{sk}}\right|\leqslant$$
$$\leqslant (N-1)as^\alpha|(\xi',0)|^{\alpha+1}=(N-1)as^\alpha\rho^{1+\alpha}, \tag{1.18}$$

где символом $|(\xi',0)|$ обозначена длина вектора с координатами $(\xi',0)$ в системе координат $\{x,\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{N-1},\mathbf{e}_N\}$, причем справедливы равенства:

$$|(\xi',0)|=\left(\sum_{k=1}^{N-1}\xi_k^2\right)^{1/2}=\rho.$$

Из (1.16) и (1.18) получаем неравенство:

$$|f(\xi')|\leqslant (N-1)a\int\limits_0^1 s^\alpha\,ds\rho^{1+\alpha}=b\rho^{1+\alpha},\quad b=(N-1)\frac{a}{1+\alpha}. \tag{1.19}$$

Отметим, что в выбранной локальной системе координат $\{x,\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{N-1},\mathbf{e}_N\}$ имеет место оценка:

$$r^2=\rho^2+\xi_N^2=\rho^2+(f(\xi'))^2\leqslant\rho^2+b^2\rho^{2+2\alpha}\leqslant(1+b^2d^{2\alpha})\rho^2 \tag{1.20}$$

для всех $\xi\in\Gamma(x)$.

Лемма доказана.

Замечание. Очевидно, радиус $d>0$ сферы Ляпунова можно выбрать сколь угодно малым и поэтому без ограничения общности можно считать, что

$$\boxed{(N-1)ad^\alpha<1.}$$

И тогда из неравенства (1.14) получим следующее неравенство:

$$r\leqslant\sqrt{2}\,\rho\leqslant 2\rho\quad\text{для всех}\quad \xi\in\Gamma(x). \tag{1.21}$$

Обозначения. Обозначим через $\mathbf{n}_x$ и ν_ξ — нормали к Γ в точках x, $\xi\in\Gamma(x)$ соответственно. Справедливо следующее утверждение:

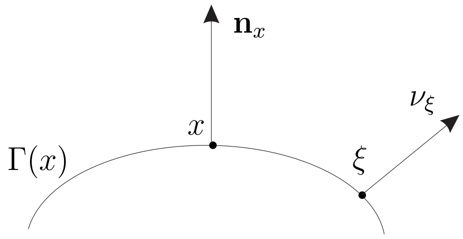


Рис. 23. Нормали $\mathbf{n}_x$ и ν_ξ

Лемма 3. *Пусть $\xi \in \Gamma(x)$, тогда справедливы следующие неравенства*:

$$|\cos(n_x, \mathbf{r})| \leqslant b|\mathbf{r}|^\alpha, \quad \mathbf{r} = \xi - x, \tag{1.22}$$

$$|\cos(\nu_\xi, \mathbf{r})| \leqslant b|\mathbf{r}|^\alpha, \quad \mathbf{r} = \xi - x, \tag{1.23}$$

где $b = (N-1)a/(1+\alpha)$.

Доказательство.

Докажем сначала (1.22). Действительно, в «локальной» системе координат $\{x, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{N-1}, \mathbf{e}_N\}$ имеет место следующее выражение:

$$|\cos(\mathbf{n}_x, \mathbf{r})| = \frac{|\langle \mathbf{n}_x, \xi - x\rangle|}{|\mathbf{n}_x||\xi - x|} = \frac{|\xi_N|}{r} \leqslant br^\alpha,$$

поскольку в системе координат $\{x, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{N-1}, \mathbf{e}_N\}$ точка x, как уже установлено, имеет координаты $x = (0, \ldots, 0, 0)$, где использована формула (1.13). Для доказательства формулы (1.23) нужно выбрать аналогичным образом прямоугольную декартову систему координат $\{\xi, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{n-1}, \mathbf{f}_N\}$ в точке $\xi \in \Gamma$, в которой $\mathbf{f}_N = \nu_\xi$ и орты $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{N-1}\}$ выбираются (произвольным образом) в касательной плоскости к точке ξ, причем $x \in \Gamma(\xi)$. Теперь нужно повторить только что приведённые рассуждения с заменой x на ξ и $\mathbf{n}_x$ на ν_ξ.

Лемма доказана.

Для дальнейшего потребуются оценки для направляющих косинусов нормали ν_ξ относительно локальной системы координат (ξ', ξ_N). Итак, справедливо следующее утверждение:

Лемма 4. *Справедливы оценки*

$$\cos(\nu_\xi, \mathbf{e}_N) \geqslant \frac{1}{2}, \quad |\cos(\nu_\xi, \mathbf{e}_k)| \leqslant b\rho^\alpha \leqslant br^\alpha, \quad k = \overline{1, N-1} \tag{1.24}$$

для всех $\xi \in \Gamma(x)$ *и* $b = (N-1)a/(1+\alpha)$.

Доказательство.

Согласно формуле (1.5) имеем:

$$\cos(\nu_\xi, \mathbf{e}_N) = \frac{1}{|\nabla_\xi F(\xi)|}\frac{\partial F}{\partial \xi_N}(\xi), \tag{1.25}$$

где $F(\xi) = \xi_N - f(\xi')$. Поэтому из (1.25) получим следующее равенство:

$$\cos(\nu_\xi, \mathbf{e}_N) = \left[1 + \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{\partial f(\xi')}{\partial \xi_k}\right)^2\right]^{-1/2}, \tag{1.26}$$

В силу неравенства (1.12) для всех $\xi \in \Gamma(x)$ имеет место следующая оценка снизу:

$$\cos(\nu_\xi, \mathbf{e}_N) \geqslant \left(1 + a^2(N-1)^2\rho^{2\alpha}\right)^{-1/2} \geqslant$$
$$\geqslant \left(1 + a^2(N-1)^2 d^{2\alpha}\right)^{-1/2} \geqslant \frac{1}{2}. \tag{1.27}$$

Для остальных направляющих косинусов имеет место формула (1.5):

$$\cos(\nu_\xi, \mathbf{e}_k) = \frac{\partial F}{\partial \xi_k}(\xi)\frac{1}{|\nabla_\xi F(\xi)|} =$$
$$= -\frac{\partial f(\xi')}{\partial \xi_k}\left[1 + \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{\partial f(\xi')}{\partial \xi_k}\right)^2\right]^{-1/2} \quad \text{при} \quad k = \overline{1, N-1}. \tag{1.28}$$

Отсюда получаем оценку сверху для всех $\xi \in \Gamma(x)$:

$$|\cos(\nu_\xi, \mathbf{e}_k)| \leqslant \left|\frac{\partial f(\xi')}{\partial \xi_k}\right| \leqslant a\rho^\alpha \leqslant ar^\alpha \quad \text{при} \quad k = \overline{1, N-1}. \tag{1.29}$$

Лемма доказана.

§ 2. Операторы со слабой особенностью на поверхности Ляпунова

В этом параграфе рассматриваются интегральные операторы, следующего вида:

$$V(\mu)(x) = \int_\Gamma \mu(\xi)\frac{A(x,\xi)}{|x-\xi|^\lambda}\, dS_\xi, \quad x \in \Gamma, \text{ [1]} \tag{2.1}$$

где $\Gamma \in \mathbb{R}^N$ — это поверхность Ляпунова ($\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha \in (0,1]$) без края. Ясно, что Γ является поверхностью размерности $N-1$. Относительно параметра λ предположим, что

$$0 \leqslant \lambda < N - 1.$$

Справедливо следующее утверждение:

---

[1] Здесь символом $\int_\Gamma$ мы обозначили поверхностный интеграл по $(N-1)$-мерной поверхности Γ.

Теорема 3. *Если*

$$0 \leqslant \lambda < N-1, \quad A(x,\xi) \in \mathbb{C}(\Gamma \times \Gamma),$$

то интегральный оператор $V(\mu)$ *действует*

$$V(\mu) : \mathbb{C}(\Gamma) \to \mathbb{C}(\Gamma)$$

и является вполне непрерывным.

Доказательство. В целом доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4. По аналогии разобьем доказательство на шаги.

Шаг 1. Докажем, что интегральный оператор $V(\mu)$ действует

$$V(\mu) : \mathbb{C}(\Gamma) \to \mathbb{C}(\Gamma).$$

Пусть $\mu(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$ и $x_0 \in \Gamma$ — произвольная фиксированная точка. Выберем декартову прямоугольную систему координат $\{x_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{N-1}, \mathbf{e}_N\}$ стандартным способом, а именно: $\mathbf{e}_N = \mathbf{n}_{x_0}$, а орты $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{N-1})$ лежат в касательной плоскости в точке x_0 рассматриваемой поверхности Ляпунова Γ.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное фиксированное. При достаточно малом $\eta > 0$ справедливо представление:

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x), \tag{2.2}$$

$$V_1(x) = \int\limits_{\Gamma \cap O(x_0,\eta)} \mu(\xi) \frac{A(x,\xi)}{|x-\xi|^\lambda}\, dS_\xi, \tag{2.3}$$

$$V_2(x) = \int\limits_{\Gamma \backslash O(x_0,\eta)} \mu(\xi) \frac{A(x,\xi)}{|x-\xi|^\lambda}\, dS_\xi, \tag{2.4}$$

где $\eta > 0$ настолько мало, что $\Gamma \backslash O(x_0,\eta) \neq \varnothing$, $0 < \eta < d$ и $x \in O(x_0, \eta/2)$. Справедлива следующая оценка:

$$|V_1(x_0)| \leqslant \sup_{(x,\xi)\in\Gamma\times\Gamma} |\mu(\xi)A(x,\xi)| \int\limits_{\Gamma \cap O(x_0,\eta)} \frac{1}{|x_0-\xi|^\lambda}\, dS_\xi. \tag{2.5}$$

В системе координат $\{x_0, \mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_{N-1}, \mathbf{e}_N\}$ обозначим через $G^{'}(x_0)$ проекцию куска $\Gamma \cap O(x_0,\eta)$ поверхности Γ на касательную гиперплоскость $\xi_N = 0$ к точке $x_0 \in \Gamma$. Тогда

$$dS_\xi \cos(\nu_\xi, \mathbf{n}_{x_0}) = d\xi' = d\xi_1\, d\xi_2 \cdots d\xi_{N-1} \tag{2.6}$$

и имеет место вложение:

$$G'(x_0) \subset O'(x_0,\eta) := \left\{x' \in \mathbb{R}^{N-1} : \ |x'-x_0| < \eta\right\} \subset \{\xi_N = 0\}, \tag{2.7}$$

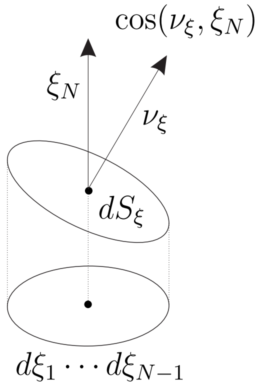


Рис. 24. Проекция dS_ξ на гиперплоскость $\xi_N = 0$

где символом $\{\xi_N = 0\}$ для краткости обозначена касательная плоскость в точке $x_0 \in \Gamma$, записанная в выбранной декартовой системе координат $\{x_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{N-1}, \mathbf{e}_N\}$. В этой системе координат точка x_0 имеет координаты $\{0, \ldots, 0, 0\}$. При этом

$$|x_0 - \xi| = |\xi| \geqslant |(\xi', 0)| = \rho.$$

С учетом результата 1.24 леммы 4 и (2.6) оценку (2.5) можно продолжить:

$$|V_1(x_0)| \leqslant \sup_{(x,\xi)\in\Gamma\times\Gamma} |\mu(\xi)A(x,\xi)| \frac{1}{2} \int\limits_{\Gamma'(x_0,\eta)} \frac{1}{\rho^\lambda}\, d\xi' \leqslant c_1 \int\limits_{O'(x_0,\eta)} \frac{1}{\rho^\lambda}\, d\xi' =$$
$$= c_1 \omega_{N-1} \int\limits_0^\eta \frac{\rho^{N-2}}{\rho^\lambda}\, \rho = c_1 \omega_{N-1} \frac{\eta^{N-1-\lambda}}{N-1-\lambda}. \qquad (2.8)$$

Для $V_1(x)$ справедлива следующая оценка:

$$|V_1(x)| \leqslant \sup_{(x,\xi)\in\Gamma\times\Gamma} |\mu(\xi)A(x,\xi)| \int\limits_{\Gamma\cap O(x_0,\eta)} \frac{1}{|x-\xi|^\lambda}\, dS_\xi \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} \sup_{(x,\xi)\in\Gamma\times\Gamma} |\mu(\xi)A(x,\xi)| \int\limits_{\Gamma'(x_0,\eta)} \frac{1}{|(x',0)-(\xi',0)|^\lambda}\, d\xi' \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} \sup_{(x,\xi)\in\Gamma\times\Gamma} |\mu(\xi)A(x,\xi)| \int\limits_{O'(x_0,\eta)} \frac{1}{|(x',0)-(\xi',0)|^\lambda}\, d\xi' \qquad (2.9)$$

где использовано свойство гипотенузы прямоугольного треугольника:

$$|x-\xi| \geqslant |(x',0)-(\xi',0)|.$$

Теперь напомним, что $x \in O(x_0, \eta/2)$, но тогда тем более

$$(x', 0) \in O'(x_0, \eta/2) = \{(x', 0) : \ |(x', 0) - (x'_0, 0)| < \eta/2\} \subset \{\xi_N = 0\}.$$

Поэтому справедлива оценка:

$$|(x', 0) - (\xi', 0)| \leqslant |(\xi', 0) - (x'_0, 0)| + |(x', 0) - (x'_0, 0)| < \\ < \eta + \eta/2 = 3\eta/2. \quad (2.10)$$

Следовательно, если $x \in O(x_0, \eta/2)$, то

$$O'(x_0, \eta) \subset O'(x', 3\eta/2).$$

Значит, оценку (2.9) можно продолжить следующим образом:

$$|V_1(x)| \leqslant \frac{1}{2} \sup_{(x,\xi)\in\Gamma\times\Gamma} |\mu(\xi)A(x,\xi)| \int\limits_{O'(x', 3\eta/2)} \frac{1}{|(x', 0) - (\xi', 0)|^{\lambda}}\, d\xi' = \\ = c_2\omega_{N-1} \int\limits_0^{3\eta/2} \frac{\rho^{N-2}}{\rho^{\lambda}}\, d\rho = c_2\omega_{N-1} \frac{(3\eta/2)^{N-1-\lambda}}{N-1-\lambda}. \quad (2.11)$$

Теперь для заданного $\varepsilon > 0$ выберем число $\eta > 0$ настолько малым, чтобы

$$\max\{|V_1(x_0)|, |V_1(x)|\} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in O(x_0, \eta/2), \quad (2.12)$$

где использованы оценки (2.8) и (2.11). На этом шаге зафиксируем $\eta > 0$.

Справедливы следующие оценки для модуля разности:

$$|V_2(x) - V_2(x_0)| \leqslant \left| \int\limits_{\Gamma\setminus O(x_0,\eta)} \mu(\xi) \frac{A(x,\xi) - A(x_0,\xi)}{|\xi - x|^{\lambda}}\, dS_{\xi} \right| + \\ + \left| \int\limits_{\Gamma\setminus O(x_0,\eta)} \mu(\xi) A(x_0,\xi) \left[\frac{1}{|x-\xi|^{\lambda}} - \frac{1}{|x_0 - \xi|^{\lambda}} \right] dS_{\xi} \right| = J_1 + J_2. \quad (2.13)$$

Для J_1 справедлива следующая оценка:

$$J_1 \leqslant \sup_{\xi\in\Gamma} |A(x,\xi) - A(x_0,\xi)| \sup_{\xi\in\Gamma} |\mu(\xi)| \int\limits_{\Gamma\setminus O(x_0,\eta)} \frac{1}{|\xi - x|^{\lambda}}\, dS_{\xi}. \quad (2.14)$$

Заметим, что для $\xi \in \mathbb{R}^N \setminus O(x_0, \eta)$ и $x \in O(x_0, \eta/2)$ справедлива оценка снизу:

$$|\xi - x| \geqslant |\xi - x_0| - |x - x_0| \geqslant \eta - \eta/2 = \eta/2. \quad (2.15)$$

Из (2.14) с учетом (2.15) получаем оценку:

$$J_1 \leqslant \sup_{\xi\in\Gamma} |A(x,\xi) - A(x_0,\xi)| \sup_{\xi\in\Gamma} |\mu(\xi)| \left(\frac{2}{\eta}\right)^{\lambda} |\Gamma|. \tag{2.16}$$

Заметим, что в силу результата (1.13) леммы 2 предыдущей лекции имеет место оценка:

$$\left|\frac{1}{|x-\xi|^{\lambda}} - \frac{1}{|x_0-\xi|^{\lambda}}\right| \leqslant \lambda \left(\frac{2}{\eta}\right)^{\lambda+1} |x-x_0|. \tag{2.17}$$

для $\xi \in \mathbb{R}^N \backslash O(x_0,\eta)$ и $x \in O(x_0,\eta/2)$. Из (2.13) с учетом (2.17) вытекает следующая оценка:

$$J_2 \leqslant \sup_{(x,\xi)\in\Gamma\times\Gamma} |\mu(\xi)A(x,\xi)|\lambda \left(\frac{2}{\eta}\right)^{\lambda+1} |\Gamma||x-x_0|. \tag{2.18}$$

Теперь при ранее фиксированном $\eta > 0$ выберем достаточно малое $\delta = \delta(\eta(\varepsilon),\varepsilon) > 0$ такое, что при $|x-x_0| < \delta$ с учетом оценок (2.16) и (2.18) будет выполнена оценка:

$$\max\{J_1, J_2\} < \frac{\varepsilon}{6}. \tag{2.19}$$

Тогда из (2.13) получим, что

$$|V_2(x) - V_2(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{для всех} \quad |x-x_0| < \delta. \tag{2.20}$$

Таким образом, из (2.12) и (2.20) получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\widetilde{\delta}(\varepsilon) > 0$, что справедливы неравенства:

$$|V(x) - V(x_0)| \leqslant |V_1(x)| + |V_1(x_0)| + \\ + |V_2(x) - V_2(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \tag{2.21}$$

для всех $|x-x_0| < \widetilde{\delta}$. Значит, $V(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$.

Шаг 2. Вполне непрерывность. На этом шаге достаточно доказать, что оператор $V[\mu](x)$ переводит всякое ограниченное множество в $\mathbb{C}(\Gamma)$ в предкомпактное в $\mathbb{C}(\Gamma)$, т. е. замыкание которого компактно в $\mathbb{C}(\Gamma)$.

Пусть $\mathfrak{L}$ — это ограниченное множество в $\mathbb{C}(\Gamma)$, т.е.

$$\sup_{\mu\in\mathfrak{L}} \|\mu\| \leqslant c_1 < +\infty, \tag{2.22}$$

где

$$\|\mu\| := \sup_{\xi\in\Gamma} |\mu(\xi)|.$$

Рассмотрим множество:

$$\mathfrak{M} := \{V[\mu](x) \in \mathbb{C}(\Gamma) : \ \forall\, \mu(\xi) \in \mathfrak{L}\}\,. \tag{2.23}$$

Пусть $x_0 \in \Gamma$ — произвольная точка. Выберем $\eta = d > 0$, где $d > 0$ — радиус сферы Ляпунова. Выберем декартову систему координат $\{x_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{N-1}, \mathbf{e}_N\}$ стандартным образом и воспользуемся представлением (2.2)–(2.4). Справедливы оценки:

$$|V_2(x_0)| \leqslant \sup_{(x,\xi)\in\Gamma\times\Gamma} |\mu(\xi)A(x,\xi)| \int\limits_{\Gamma\setminus O(x_0,d)} \frac{1}{|x_0-\xi|^\lambda}\, dS_\xi \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{(x,\xi)\in\Gamma\times\Gamma} |\mu(\xi)A(x,\xi)|\frac{|\Gamma|}{d^\lambda} = A_1 \sup_{\xi\in\Gamma}|\mu(\xi)| < +\infty \tag{2.24}$$

Для $V_1(x_0)$ справедлива оценка (2.8), которая в данном случае примет вид:

$$|V_1(x_0)| \leqslant \sup_{(x,\xi)\in\Gamma\times\Gamma} |\mu(\xi)A(x,\xi)|\frac{1}{2}\omega_{N-1}\frac{d^{N-1-\lambda}}{N-1-\lambda} =$$

$$= A_2 \sup_{\xi\in\Gamma}|\mu(\xi)| < +\infty. \tag{2.25}$$

Таким образом, из (2.24) и (2.25) получаем, что

$$|V(x_0)| \leqslant (A_1 + A_2)\sup_{\xi\in\Gamma}|\mu(\xi)| = A_3 \sup_{\xi\in\Gamma}|\mu(\xi)|, \tag{2.26}$$

где $A_3 > 0$ и от $x_0 \in \Gamma$ не зависит. Отсюда получаем, что

$$\sup_{\mu\in\mathfrak{L}}\|V[\mu]\| \leqslant A_3 c_1 < +\infty, \tag{2.27}$$

т.е. множество $\mathfrak{M}$ ограничено в $\mathbb{C}(\Gamma)$.

Докажем, что множество $\mathfrak{M}$ равностепенно непрерывно в $\mathbb{C}(\Gamma)$. □ Действительно, для достаточно малого $\eta > 0$ настолько, что

$$\eta \in (0, d), \quad x \in O(x_0, \eta/2)$$

справедливы следующие равенства:

$$|V(\mu)(x) - V(\mu)(x_0)| = \left|\int\limits_\Gamma \mu(\xi)\left[\frac{A(x,\xi)}{|x-\xi|^\lambda} - \frac{A(x_0,\xi)}{|x_0-\xi|^\lambda}\right] dS_\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant \|\mu\|_{\mathbb{C}(\Gamma)} \int\limits_\Gamma \left|\frac{A(x,\xi)}{|x-\xi|^\lambda} - \frac{A(x_0,\xi)}{|x_0-\xi|^\lambda}\right| dS_\xi \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \int\limits_{\Gamma\setminus O(x_0,\eta)} \left| \frac{A(x,\xi)}{|x-\xi|^\lambda} - \frac{A(x_0,\xi)}{|x_0-\xi|^\lambda} \right| dS_\xi +$$

$$+ c_1 \int\limits_{\Gamma\cap O(x_0,\eta)} \frac{|A(x,\xi)|}{|x-\xi|^\lambda} \, dS_\xi + c_1 \int\limits_{\Gamma\cap O(x_0,\eta)} \frac{|A(x_0,\xi)|}{|x-x_0|^\lambda} \, dS_\xi, \quad (2.28)$$

где

$$\|\mu\|_{\mathbb{C}(\Gamma)} = \sup_{\xi\in\Gamma} |\mu(\xi)|.$$

Дальнейшее рассмотрение вполне аналогично оценкам функций $V_1(x)$, и $V_1(x_0)$ и модуля разности $|V_2(x) - V_2(x_0)|$, проделанным на шаге 1. Поэтому можно доказать, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\eta(\varepsilon), \varepsilon) > 0$, что для всех $|x - x_0| < \delta$ будет выполнено неравенство

$$\sup_{\mu\in\mathfrak{L}} |V(\mu)(x) - V(\mu)(x_0)| < \varepsilon,$$

т.е. семейство $\mathfrak{M}$ равностепенно непрерывно в $\mathbb{C}(\Gamma)$. ⊠

По теореме Арцелла, примененной к $\mathbb{C}(\Gamma)$ приходим к выводу о том, что семейство $\mathfrak{M}$ предкомпактно в $\mathbb{C}(\Gamma)$, а, значит, оператор $V(\mu) : \mathbb{C}(\Gamma) \to \mathbb{C}(\Gamma)$ компактен и в совокупности с результатом шага 1 получаем вполне непрерывность оператора $V(\mu)(x)$.

Теорема доказана.

§ 3. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [1], [4], [10].

Лекция 8

ПОТЕНЦИАЛ ДВОЙНОГО СЛОЯ

В этой лекции изучены свойства потенциала двойного слоя. В этой и следующих лекциях мы рассматривается пространство $\mathbb{R}^N$ при $N \geqslant 3$.

§ 1. Гармоничность поверхностных потенциалов

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Если плотности $\mu(x)$ и $\sigma(x)$ принадлежат классу $\mathbb{C}(\Gamma)$, то потенциалы $V[\mu](x)$ и $W[\sigma](x)$ являются гармоническими функциями в любой точке $x \notin \Gamma$.*

Доказательство. Пусть $x_0 \notin \Gamma$, Следовательно, $x_0 \in \mathbb{R}^N \backslash \Gamma$ — открытое множество. Значит, найдется такой шар положительного радиуса $O(x_0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^N \backslash \Gamma$. Тогда подынтегральная функция потенциала простого слоя $V[\mu](x)$ такова, что

$$D_x^\beta \frac{\mu(\xi)}{|x-\xi|^{N-2}} \in \mathbb{C}_{x,\xi}(\overline{O(x_0,\varepsilon)} \times \Gamma),$$

где

$$D_x^\beta := \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \frac{\partial^{\beta_2}}{\partial x_2^{\beta_2}} \cdots \frac{\partial^{\beta_N}}{\partial x_N^{\beta_N}}, \quad |\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_N.$$

Следовательно, для всех производных D_x^β выполнены все условия теоремы о дифференцировании по параметру собственного интеграла, зависящего от параметра, и можно дифференцировать выражение для $V[\mu](x)$ под знаком интеграла. Справедливо равенство

$$\Delta_x V[\mu](x) = \int\limits_\Gamma \Delta_x \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} \mu(\xi)\, dS_\xi = 0 \quad \text{при} \quad x \notin \Gamma,$$

поскольку при $x \neq \xi$ имеет место следующее равенство:

$$\Delta_x \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} = 0.$$

Аналогичные соображения справедливы для потенциала двойного слоя и поэтому имеет место следующее равенство:

$$\Delta_x W[\sigma](x) = \int\limits_{\Gamma} \Delta_x \left(\frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} \right) \sigma(\xi)\, d\xi, \quad x \in D. \tag{1.1}$$

Пусть задана некоторая декартова система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_N\}$. Напомним, что

$$\frac{\partial f(\eta)}{\partial \nu_\xi} = (\nu_\xi, \nabla_\xi) f(\eta).$$

Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} = \sum_{k=1}^{N} \cos(\nu_\xi, \mathbf{e}_k) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}.$$

Очевидно, что косинусы $\cos(\nu_\xi, \mathbf{e}_k)$ не зависят от x, поскольку это направляющие косинусы вектора нормали ν_ξ к точке $\xi \in \Gamma$ относительно исходной декартовой системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_N\}$. Поэтому имеем:

$$\Delta_x \left(\frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} \right) = \sum_{k=1}^{N} \cos(\nu_\xi, \mathbf{e}_k) \Delta_x \left(\frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \cos(\nu_\xi, \mathbf{e}_k) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \Delta_x \left(\frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} \right) = 0 \quad \text{при} \quad x \neq \xi.$$

Следовательно, отсюда и из равенства (1.1) приходим к следующему равенству:

$$\Delta_x W[\sigma](x) = 0 \quad \text{при} \quad x \notin \Gamma.$$

Теорема доказана.

Справедлива следующая важная теорема, которую мы приведём без доказательства.

Теорема 2. *Если Γ — это ляпуновская поверхность без края, то существует такая постоянная C, не зависящая от x, что*

$$\int\limits_{\Gamma} \left| \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} \right| dS_\xi \leqslant C \quad \textit{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.2}$$

§ 2. Прямое значение потенциала двойного слоя

В первом параграфе определен потенциал двойного слоя, имеющий следующий вид:

$$W[\sigma](x) = \int\limits_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\, dS_\xi, \tag{2.1}$$

где ν_ξ — внешняя нормаль в точке $\xi \in \Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$. Справедлива следующая теорема:

Теорема 3. *Если* $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ — *поверхность без края,* $\alpha \in (0,1]$, *и* $\sigma(\xi) \in \mathbb{C}(\Gamma)$, *то потенциал* $W[\sigma](x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$.

Доказательство.

Прежде всего вычислим следующую производную:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k}\frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} = \frac{\partial}{\partial \xi_k}(|\xi - x|^2)^{-(N-2)/2} = \\ = -\frac{N-2}{2}2(\xi_k - x_k)(|\xi - x|^2)^{-(N-2)/2-1} = -(N-2)\frac{\xi_k - x_k}{|\xi - x|^N}. \quad (2.2)$$

Тогда имеем:

$$\frac{\partial}{\partial \nu_\xi}\frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} = \sum_{k=1}^{N}\cos(\nu_\xi, \mathbf{e}_k)\frac{\partial}{\partial \xi_k}\frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} = \\ = -(N-2)\sum_{k=1}^{N}\cos(\nu_\xi, \mathbf{e}_k)\frac{\xi_k - x_k}{|\xi - x|^N}. \quad (2.3)$$

Теперь заметим, что

$$(\mathbf{r}, \mathbf{e}_k) = r\cos(\mathbf{r}, \mathbf{e}_k), \quad \mathbf{r} = \xi - x \Rightarrow \cos(\mathbf{r}, \mathbf{e}_k) = \frac{\xi_k - x_k}{|\xi - x|}. \quad (2.4)$$

Из (2.3) и (2.4) вытекает равенство:

$$\frac{\partial}{\partial \nu_\xi}\frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} = -\frac{N-2}{|\xi - x|^{N-1}}\sum_{k=1}^{N}\cos(\nu_\xi, \mathbf{e}_k)\cos(\mathbf{r}, \mathbf{e}_k) = \\ = -\frac{N-2}{|\xi - x|^{N-1}}\cos(\mathbf{r}, \nu_\xi). \quad (2.5)$$

□ Действительно, имеем:

$$\{\cos(\nu_\xi, \mathbf{e}_1), \cdots, \cos(\nu_\xi, \mathbf{e}_N)\}$$

— это координаты единичного вектора ν_ξ, а

$$\{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{e}_1), \cdots, \cos(\mathbf{r}, \mathbf{e}_N)\}$$

— это координаты вектора $\mathbf{r}/r$ в исходном ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_N\}$. Но тогда

$$\cos(\nu_\xi, \mathbf{r}) = \frac{(\nu_\xi, \mathbf{r})}{r} = \left(\nu_\xi, \frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \sum_{k=1}^{N}\cos(\nu_\xi, \mathbf{e}_k)\cos(\mathbf{r}, \mathbf{e}_k). \quad \boxtimes$$

Таким образом, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} = \frac{A(x,\xi)}{|\xi - x|^{\lambda}}, \tag{2.6}$$

где

$$A(x,\xi) = \begin{cases} -(N-2)|\xi - x|^{-\alpha/2} \cos(\mathbf{r}, \nu_\xi), & \text{если} \quad x \neq \xi; \\ 0, \quad \text{если} \quad x = \xi, \end{cases} \tag{2.7}$$

$$\lambda = N - 1 - \frac{\alpha}{2} < N - 1 \quad \text{при} \quad \alpha \in (0, 1].$$

Заметим, что в силу леммы 2 из лекции 5, поскольку $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha \in (0,1]$, имеет место следующее неравенство:

$$|\cos(\mathbf{r}, \nu_\xi)| \leqslant c|\xi - x|^{\alpha}.$$

Поэтому функция $A(x,\xi) \in \mathbb{C}(\Gamma \times \Gamma)$. В силу (2.6) потенциал двойного слоя является интегральным оператором со слабой особенностью, причём $\sigma(\xi) \in \mathbb{C}(\Gamma)$. Из теоремы 3 лекции 5 заключаем, что

$$W[\sigma](x) \in \mathbb{C}(\Gamma).$$

Теорема доказана.

§ 3. Интеграл Гаусса

Определение 1. *Потенциал двойного слоя, у которого плотность равна* 1, *называется интегралом Гаусса*:

$$W_0(x) := \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} \, dS_\xi, \tag{3.1}$$

где Γ *— замкнутая поверхность и* ν_ξ *— это внешняя к ней нормаль в точке* $\xi \in \Gamma$.

Предположим, что односвязная поверхность Ляпунова Γ ограничивает область $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (область Ω ограничена).

Справедлива следующая теорема:

Теорема 4. *Если поверхность без края* $\Gamma \in \mathbb{C}^{(1,\alpha)}$, *то справедливы следующие равенства*:

$$W_0(x) = \begin{cases} -(N-2)\omega_N, & \text{для} \quad x \in \Omega; \\ 0, & \text{для} \quad x \in \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}; \\ -\dfrac{N-2}{2}\omega_N, & \text{для} \quad x \in \Gamma, \end{cases} \tag{3.2}$$

где ω_N *— это площадь единичной сферы в* $\mathbb{R}^N$.

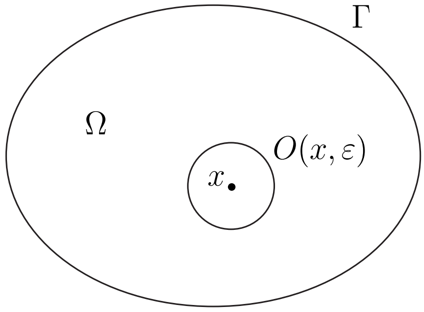


Рис. 25. Построения к шагу 1 теоремы 4

Доказательство. Доказательство проведём за несколько шагов.

Шаг 1. Сначала предположим, что $x \in \Omega$. Рассмотрим область:

$$\Omega_\varepsilon := \Omega \backslash \overline{O(x,\varepsilon)}, \quad O(x,\varepsilon) := \left\{ y \in \mathbb{R}^N : \ |y-x| < \varepsilon \right\}$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$ таком, чтобы $O(x,\varepsilon) \subset \Omega$. Заметим, что функция

$$\frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}$$

является гармонической по $\xi \in \Omega_\varepsilon$, поэтому справедливы следующие равенства:

$$\Delta_\xi \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} = 0 \Rightarrow \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \Delta_\xi \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\, d\xi = 0.$$

В силу теоремы Остроградского–Гаусса справедливо следующее равенство:

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\, dS_\xi + \int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\, dS_\xi = 0, \tag{3.3}$$

где ν_ξ — это внешняя нормаль к границе $\partial\Omega_\varepsilon$ области Ω_ε. Вычислим интеграл:

$$I_\varepsilon := \int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\, dS_\xi.$$

В этом интеграле нормаль ν_ξ направлена к центру шара. Ранее было получено равенство:

$$\frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{N-2}} = -\frac{N-2}{|\xi - x|^{N-1}} \cos(\mathbf{r}, \nu_\xi), \quad \mathbf{r} = \xi - x.$$

Ясно, что вектор $\mathbf{r}$ направлен из точки x к точке $\xi \in \partial O(x, \varepsilon)$, т. е. противоположно направлению вектора ν_ξ. Поэтому

$$\cos(\mathbf{r}, \nu_\xi) = -1.$$

Тогда

$$I_\varepsilon = \frac{N-2}{\varepsilon^{N-1}} \int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)} dS_\xi = (N-2)\omega_N. \tag{3.4}$$

Из равенств (3.3) и (3.4) вытекает первое выражение в (3.2).

Шаг 2. Если $x \notin \overline{\Omega}$, то функция

$$\frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}$$

гармонична по $\xi \in \Omega$. Тогда

$$\Delta_\xi \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} = 0 \Rightarrow \int\limits_\Omega \Delta_\xi \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\, d\xi = 0 \Rightarrow \int\limits_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\, dS_\xi = 0.$$

Поэтому второе выражение в (3.2) доказано.

Шаг 3. Пусть $x \in \Gamma$. Поскольку $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha \in (0,1]$, то выберем число $\varepsilon \in (0, d)$, где d — это радиус сферы Ляпунова. Опишем вокруг точки x шар $O(x, \varepsilon)$. Введём следующие обозначения:

1. Часть поверхности Γ, лежащую вне $O(x,\varepsilon)$ обозначим через Γ'_ε;
2. Часть сферы $\partial O(x,\varepsilon)$, лежащую внутри Ω обозначим через S'_ε.
3. Пусть $\Omega_\varepsilon := \Omega \backslash \overline{O(x,\varepsilon)}$, тогда $\partial \Omega_\varepsilon = \Gamma'_\varepsilon \cup S'_\varepsilon$.

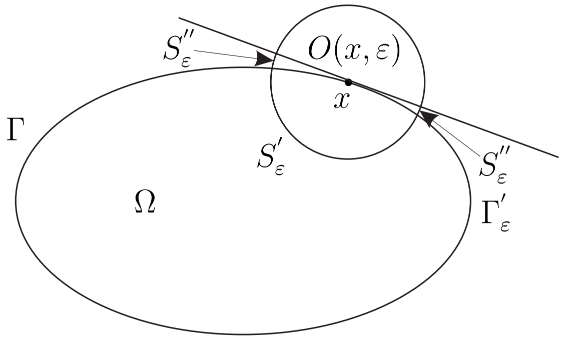


Рис. 26. Построения к шагу 3 теоремы 4

Заметим, что в области Ω_ε функция

$$\frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}$$

гармоническая по переменной $\xi \in U_\varepsilon$, т. е.

$$\Delta_\xi \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} = 0 \quad \text{при} \quad \xi \in \Omega_\varepsilon.$$

Поэтому отсюда имеем:

$$0 = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \Delta_\xi \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\, d\xi \Rightarrow \int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\, dS_\xi = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int\limits_{\Gamma'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\, dS_\xi + \int\limits_{S'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\, dS_\xi = 0.$$

Поскольку интеграл Гаусса $W_0(x)$ сходится при $x \in \Gamma$, то

$$W_0(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\Gamma'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\, dS_\xi.$$

Следовательно,

$$W_0(x) = -\lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{S'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\, dS_\xi, \tag{3.5}$$

где ν_ξ — это внутренняя нормаль к точке $\xi \in \partial O(x, \varepsilon)$ по отношению к шару $O(x, \varepsilon)$.

Для интеграла в правой части предельного равенства (3.5) справедливо равенство

$$\int\limits_{S'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\, dS_\xi = \frac{N-2}{\varepsilon^{N-1}} \int\limits_{S'_\varepsilon} dS_\varepsilon = (N-2) \frac{|S'_\varepsilon|}{\varepsilon^{N-1}}.$$

Заметим, что можно доказать следующее предельное свойство, справедливое для поверхностей Ляпунова, т. е. $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha \in (0, 1]$:

$$\frac{|S'_\varepsilon|}{\varepsilon^{N-1}} = \frac{\omega_N}{2} + O(\varepsilon^\alpha) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

З а м е ч а н и е. Площадь $|S'_\varepsilon|$ поверхности S'_ε при малых $\varepsilon > 0$ отличается от площади $\omega_N \varepsilon^{N-1}/2$ поверхности полусферы на поверхность пояска $S''_\varepsilon \subset \partial O(x, \varepsilon)$ (взятую с тем или иным знаком), заключённого между Γ и касательной плоскостью в точке $x \in \Gamma$.

Т е о р е м а д о к а з а н а.

§ 4. Предельные значения потенциала двойного слоя

Докажем следующую вспомогательную лемму:
Лемма 1. *Если* $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ *при* $\alpha \in (0,1]$ — *поверхность без края и* $\sigma(\xi) \in \mathbb{C}(\Gamma)$, *то функция*

$$W_1(x) := \int\limits_{\Gamma} [\sigma(\xi) - \sigma(x_0)] \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} \, dS_\xi \tag{4.1}$$

непрерывна в точке $x_0 \in \Gamma$.

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $x_0 \in \Gamma$ и $O(x_0, \eta) := \left\{ y \in \mathbb{R}^N : \ |y - x_0| < \eta \right\}$ при настолько малом $\eta > 0$, что

$$0 < \eta < d \quad \text{и} \quad \Gamma \backslash O(x_0, \eta) \neq \varnothing.$$

Кроме того, фиксируем стандартным образом систему координат $\left\{x_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{N-1}, \mathbf{e}_N\right\}$. Тогда

$$W_1(x) = W_{11}(x) + W_{12}(x),$$

где

$$W_{11}(x) := \int\limits_{\Gamma \cap O(x_0, \eta)} [\sigma(\xi) - \sigma(x_0)] \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} \, dS_\xi,$$

$$W_{12}(x) := \int\limits_{\Gamma \backslash O(x_0, \eta)} [\sigma(\xi) - \sigma(x_0)] \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} \, dS_\xi.$$

Справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} |W_1(x) - W_1(x_0)| &\leqslant |W_{11}(x) - W_{11}(x_0)| + |W_{12}(x) - W_{12}(x_0)| \leqslant \\ &\leqslant |W_{11}(x)| + |W_{11}(x_0)| + |W_{12}(x) - W_{12}(x_0)| . \end{aligned} \tag{4.2}$$

Шаг 2. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное фиксированное число. Тогда выберем $\eta > 0$ настолько малым, чтобы

$$|\sigma(\xi) - \sigma(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3C} \quad \text{для всех} \quad |\xi - x_0| < \eta,$$

где $C > 0$ — это постоянная из оценки (1.2). Для функции $W_{11}(x)$ для всех $x \in \Gamma$ справедлива следующая оценка:

$$|W_{11}(x)| \leqslant \int\limits_{\Gamma \cap O(x_0, \eta)} |\sigma(\xi) - \sigma(x_0)| \left| \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} \right| dS_\xi <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3C} \int\limits_{\Gamma \cap O(x_0,\eta)} \left| \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} \right| dS_\xi \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4.3)$$

Поэтому, в частности,

$$|W_{11}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4.4)$$

На этом шаге фиксируем $\eta > 0$.

Шаг 3. Пусть $x \in O(x_0, \eta/2)$, тогда на куске поверхности $\Gamma \backslash O(x_0, \eta)$ справедлива оценка снизу:

$$|\xi - x| \geqslant |\xi - x_0| - |x - x_0| \geqslant \eta - \frac{\eta}{2} = \frac{\eta}{2} \quad \text{для всех} \quad \xi \in \Gamma \backslash O(x_0, \eta).$$

С учетом определения (2.7) функции $A(x,\xi)$ интеграл $W_{12}(x)$ можно записать в следующем виде:

$$W_{12}(x) = \int\limits_{\Gamma \backslash O(x_0,\eta)} [\sigma(\xi) - \sigma(x_0)] \frac{A(x,\xi)}{|\xi - x|^\lambda} \, dS_\xi, \quad (4.5)$$

где $\lambda = N - 1 - \dfrac{\alpha}{2} < N - 1$, $A(x,\xi) \in \mathbb{C}(\Gamma \times \Gamma)$ и $\sigma(\xi) \in \mathbb{C}(\Gamma)$. Теперь нужно применить технику из доказательства теоремы 3 предыдущей лекции и получить, что для уже фиксированного $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta = \delta(\eta(\varepsilon), \varepsilon) > 0$, что

$$|W_{12}(x) - W_{12}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при} \quad |x - x_0| < \delta. \quad (4.6)$$

Итак, из формул (4.2)–(4.6) вытекает искомое неравенство:

$$|W_1(x) - W_1(x_0)| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad |x - x_0| < \delta.$$

Лемма доказана.

Обозначения. Пусть $x_0 \in \Gamma$, тогда

$$W_i(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Omega \ni x \to x_0} W[\sigma](x), \quad (4.7)$$

$$W_e(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\left(\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}\right) \ni x \to x_0} W[\sigma](x). \quad (4.8)$$

Прямое значение потенциала $W[\sigma](x)$ в точке $x = x_0$ будем обозначать следующим образом:

$$W(x_0) := W[\sigma](x_0).$$

Наконец, справедлива следующая основная теорема этой лекции:

Теорема 5. *Пусть* $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ *при* $\alpha \in (0,1]$ — *это поверхность без края и* $\sigma(\xi) \in \mathbb{C}(\Gamma)$. *Тогда справедливы следующие предельные равенства для потенциала двойного слоя* $W[\sigma](x)$:

$$W_i(x_0) = -\frac{(N-2)\omega_N}{2}\sigma(x_0) + W(x_0), \tag{4.9}$$

$$W_e(x_0) = \frac{(N-2)\omega_N}{2}\sigma(x_0) + W(x_0), \tag{4.10}$$

для любой точки $x_0 \in \Gamma$.

Доказательство.

Представим потенциал двойного слоя $W[\sigma](x)$ в следующем виде:

$$W[\sigma](x) = \int_\Gamma [\sigma(\xi) - \sigma(x_0)] \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\, dS_\xi + \\ + \sigma(x_0) \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\, dS_\xi = W_1(x) + \sigma(x_0) W_0(x), \tag{4.11}$$

где $W_0(x)$ — это интеграл Гаусса. Из леммы 1 вытекает непрерывность в точке $x = x_0 \in \Gamma$ функции $W_1(x)$, определенной равенством (4.1), а для интеграла Гаусса $W_0(x)$ справедливы равенства (3.2). Поэтому в силу (3.2) имеют место следующие предельные свойства:

$$W_{0i}(x_0) := \lim_{\Omega \ni x \to x_0} W_0(x) = -(N-2)\omega_N, \tag{4.12}$$

$$W_{0e}(x_0) := \lim_{\left(\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}\right) \ni x \to x_0} W_0(x) = 0. \tag{4.13}$$

Прямое значение непрерывной в точке $x = x_0$ функции $W_1(x)$ равно:

$$W_1(x_0) = \int_\Gamma [\sigma(\xi) - \sigma(x_0)] \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x_0|^{N-2}}\, dS_\xi = \\ = W(x_0) - \sigma(x_0) W_0(x_0) = W(x_0) + \frac{(N-2)\omega_N}{2}\sigma(x_0). \tag{4.14}$$

Итак, из формул (4.11)–(4.14) вытекают предельные равенства:

$$W_i(x_0) = W_1(x_0) + \sigma(x_0) W_{0i}(x_0) = \\ = W(x_0) + \frac{(N-2)\omega_N}{2}\sigma(x_0) - (N-2)\omega_N \sigma(x_0) = \\ = W(x_0) - \frac{(N-2)\omega_N}{2}\sigma(x_0), \tag{4.15}$$

$$W_e(x_0) = W_1(x_0) + \sigma(x_0)W_{0e}(x_0) = \\ = W_1(x_0) = W(x_0) + \frac{(N-2)\omega_N}{2}\sigma(x_0). \quad (4.16)$$

Теорема доказана.

Следствие. *При условиях теоремы имеет место следующая формула*:

$$\sigma(x_0) = \frac{1}{(N-2)\omega_N}\left[W_e(x_0) - W_i(x_0)\right]. \quad (4.17)$$

Помимо всего прочего, нами доказана следующая

Теорема 6. *Если* $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ *при* $\alpha \in (0,1]$ — *поверхность без края, ограничивающая односвязную ограниченную область* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, *то потенциал двойного слоя*

$$W[\sigma](x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega \cup \left(\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}\right)) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_w(\mathbb{R}^N \backslash \Omega) \cap \mathbb{C}(\Gamma)$$

для любой функции $\sigma(\xi) \in \mathbb{C}(\Gamma)$.

Доказательство. Утверждение, что

$$W[\sigma](x) \in \mathbb{C}_w(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_w(\mathbb{R}^N \backslash \Omega)$$

есть следствие представления (4.11) и того факта, что функция $W_1(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in \mathbb{R}^N$, а функция $W_0(x) \in \mathbb{C}_w(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_w(\mathbb{R}^N \backslash \Omega)$. Наконец, $W[\sigma](x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$ в силу теоремы 3.

Теорема доказана.

§ 5. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [1], [4], [10].

Лекция 9

ПОТЕНЦИАЛ ПРОСТОГО СЛОЯ

В этой лекции изучены свойства потенциала простого слоя при $N \geqslant 3$.

§ 1. Нормальная производная потенциала простого слоя

Напомним, что потенциал простого слоя определяется следующей формулой:

$$V[\mu](x) := \int\limits_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\, dS_{\xi}. \tag{1.1}$$

Справедлива следующая теорема:
Теорема 1. *Если $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha \in (0,1]$ — это поверхность без края в $\mathbb{R}^N$, а плотность $\mu(\xi) \in \mathbb{C}(\Gamma)$, то потенциал простого слоя $V[\mu](x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N)$.*

Доказательство.

Шаг 1. Очевидно, что $V[\mu](x)$ непрерывен во всех точках $x \in \mathbb{R}^N \backslash \Gamma$. Если $x \in \Gamma$, то можно воспользоваться теоремой 3 из первой лекции, где нужно положить

$$\lambda = N - 2 < N - 1,$$

тогда, поскольку $\mu(\xi) \in \mathbb{C}(\Gamma)$, получим

$$V[\mu](x) \in \mathbb{C}(\Gamma).$$

Шаг 2. Докажем теперь, что потенциал непрерывен в каждой точке $x_0 \in \Gamma$. С этой целью рассмотрим стандартную «локальную» декартову прямоугольную систему координат $\{x_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{N-1}, \mathbf{e}_N\}$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ и $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех

$$|x - x_0| < \min\{\delta, \eta/2\}$$

будут справедливы ниже следующие оценки. Рассмотрим следующую разность:

$$|V[\mu](x) - V[\mu](x_0)| \leqslant |V_1[\mu](x) - V_1[\mu](x_0)| + |V_2[\mu](x)| + |V_2[\mu](x_0)|,$$

где

$$V_1[\mu](x) = \int\limits_{\Gamma \setminus O(x_0,\eta)} \mu(\xi)\frac{1}{|x-\xi|^{N-2}}\,dS_\xi,$$

$$V_1[\mu](x_0) = \int\limits_{\Gamma \setminus O(x_0,\eta)} \mu(\xi)\frac{1}{|x_0-\xi|^{N-2}}\,dS_\xi,$$

$$V_2[\mu](x) = \int\limits_{\Gamma \cap O(x_0,\eta)} \mu(\xi)\frac{1}{|x-\xi|^{N-2}}\,dS_\xi,$$

$$V_2[\mu](x_0) = \int\limits_{\Gamma \cap O(x_0,\eta)} \mu(\xi)\frac{1}{|x_0-\xi|^{N-2}}\,dS_\xi.$$

При $\xi \in O(x_0,\eta)$ и $x \in O(x_0,\eta/2)$ справедливы неравенства:

$$|x-\xi| \leqslant |x-x_0| + |\xi - x_0| < \frac{3}{2}\eta \Rightarrow O(x_0,\eta) \subset O(x, 3\eta/2).$$

Для интеграла $V_2[\mu](x)$ справедлива следующая оценка:

$$|V_2[\mu](x)| \leqslant c_1 \int\limits_{\Gamma\cap O(x_0,\eta)} \frac{1}{|x-\xi|^{N-2}}\,dS_\xi \leqslant c_1 \int\limits_{\Gamma\cap O(x,3/2\eta)} \frac{1}{|x-\xi|^{N-2}}\,dS_\xi \leqslant$$
$$\leqslant c_1 \int\limits_{O'(x,3/2\eta)} \frac{1}{|(x',0)-(\xi',0)|^{N-2}}\frac{d\xi_1\cdots d\xi_{N-1}}{\cos(\nu_\xi, \mathbf{n}_{x_0})},$$

$$c_1 := \sup_{\xi\in\Gamma}|\mu(\xi)|, \quad \cos(\nu_\xi,\mathbf{n}_{x_0}) \geqslant \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2}\eta \leqslant d,$$

где $O'(x,3/2\eta)$ — это $(N-1)$–мерный шар на касательной гиперплоскости в точке $x \in \Gamma$. Переходя в последнем интеграле к сферической системе координат с центром в точке x, получим следующую оценку:

$$|V_2[\mu](x)| \leqslant c_1 2\omega_{N-1}\int\limits_0^{3/2\eta} \frac{1}{\rho^{N-2}}\rho^{N-2}\,d\rho = c_1\omega_{N-1}3\eta < \frac{\varepsilon}{3}$$

при условии, что

$$\eta < \frac{1}{c_1\omega_{N-1}}\frac{\varepsilon}{9}.$$

Аналогичным образом получаем оценку:

$$|V_2[\mu](x_0)| \leqslant c_1 2\omega_{N-1}\int\limits_0^{\eta} \frac{1}{\rho^{N-2}}\rho^{N-2}\,d\rho = 2c_1\omega_{N-1}\eta < \frac{\varepsilon}{3}$$

при условии, что

$$\eta < \frac{1}{c_1\omega_{N-1}}\frac{\varepsilon}{6}.$$

Зафиксируем теперь число η таким образом, чтобы

$$\eta < \frac{1}{c_1\omega_{N-1}}\frac{\varepsilon}{9}$$

и выберем достаточно малое $\delta(\varepsilon) > 0$ таким образом, чтобы

$$|V_1[\mu](x) - V_1[\mu](x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Этого, действительно, можно добиться используя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 3 лекции 5.

Теорема доказана.

Пусть $x \in \mathbb{R}^N \backslash \Gamma$. Тогда можно вычислить производную потенциала простого слоя по направлению внешней нормали $\mathbf{n}_{x_0}$ к поверхности $\Gamma \ni x_0$ в предположении, что $x \in \{x_0 + t\mathbf{n}_{x_0},\ t \in \mathbb{R}^1\}$, $x \notin \Gamma$, причём вычислить эту производную можно, дифференцируя потенциал простого слоя $V[\mu](x)$ под знаком интеграла.

□ Действительно, имеем

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} = (\mathbf{n}_{x_0}, \nabla_x)\frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} = \\ = \sum_{k=1}^{N}\cos(\mathbf{n}_{x_0}, \mathbf{e}_k)\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} = \\ = (N-2)\sum_{k=1}^{N}\frac{\xi_k - x_k}{|\xi - x|^N}\cos(\mathbf{n}_{x_0}, \mathbf{e}_k) = \frac{N-2}{|\xi - x|^{N-1}}\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}_{x_0}), \quad \mathbf{r} = \xi - x.$$

Напомним, что

$$\frac{\partial}{\partial \nu_\xi}\frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} = -\frac{N-2}{|\xi - x|^{N-1}}\cos(\mathbf{r}, \nu_\xi).$$

Поэтому при $x \in \mathbb{R}^N \backslash \Gamma$ имеет место следующее выражение:

$$\frac{\partial V[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} = (N-2)\int\limits_{\Gamma}\mu(\xi)\frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}_{x_0})}{|\xi - x|^{N-1}}\,dS_\xi, \quad \mathbf{r} = \xi - x. \quad \boxtimes \tag{1.2}$$

С другой стороны, вычислить нормальную производную потенциала простого слоя при $x \in \Gamma$ уже нельзя. Несложно проверить, что соответствующий интеграл будет расходящимся! Тем не менее справедлива следующая лемма:

Лемма 1. *Интеграл* (1.2) *сходится при* $x = x_0 \in \Gamma$, *если* $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ *при* $\alpha \in (0,1]$, *для всех* $\mu(\xi) \in \mathbb{C}(\Gamma)$. *Боле того, имеем*:

$$\frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} \in \mathbb{C}(\Gamma).$$

Доказательство. Интеграл (1.2) в точке $x = x_0$ примет вид:

$$\frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} = (N-2)\int\limits_{\Gamma} \mu(\xi)\frac{\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_{x_0})}{|\xi - x_0|^{N-1}}\, dS_\xi, \quad \mathbf{r}_0 = \xi - x_0. \tag{1.3}$$

Перепишем (1.3) в следующем виде:

$$\frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} = \int\limits_{\Gamma} \mu(\xi)\frac{A(x_0,\xi)}{|\xi - x_0|^{\lambda}}\, dS_\xi, \quad \lambda = N - 1 - \frac{\alpha}{2} < N - 1, \tag{1.4}$$

$$A(x_0,\xi) = (N-2)\begin{cases} |x_0 - \xi|^{-\alpha/2}\cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_{x_0}), & \text{если} \quad \xi \neq x_0; \\ 0, \quad \text{если} \quad \xi = x_0. \end{cases}$$

Интеграл в правой части равенства (1.4) изучен в лекции 5 и в силу теоремы 3 из лекции 5 имеем:

$$\frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} \in \mathbb{C}(\Gamma)$$

как функция переменной $x_0 \in \Gamma$.

Лемма доказана.

§ 2. Предельные свойства нормальной производной потенциала простого слоя

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область, граница которой $\partial\Omega = \Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha \in (0,1]$ — поверхность без края. Введём следующие обозначения:

$$\left(\frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)_i = \lim_{\Omega\cap l\ni x\to x_0} \frac{\partial V[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}, \quad l = \{x_0 + t\mathbf{n}_{x_0}, t \in \mathbb{R}\}, \tag{2.1}$$

$$\left(\frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)_e = \lim_{(\mathbb{R}^N\setminus\overline{\Omega})\cap l\ni x\to x_0} \frac{\partial V[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}, \tag{2.2}$$

а символом

$$\frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}$$

будем обозначать значение интеграла (1.2) при $x = x_0$, определенного равенством (1.3), и называть его прямым значением нормальной производной потенциала простого слоя в точке $x = x_0 \in \Gamma$.

Справедлива следующая основная теорема:

Теорема 2. *Если* $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ *при* $\alpha \in (0,1]$ — *это поверхность без края и* $\mu(\xi) \in \mathbb{C}(\Gamma)$, *тогда справедливы следующие предельные формулы*:

$$\left(\frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)_i = \frac{(N-2)\omega_N}{2}\mu(x_0) + \frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}, \tag{2.3}$$

$$\left(\frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)_e = -\frac{(N-2)\omega_N}{2}\mu(x_0) + \frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}, \tag{2.4}$$

для любой точки $x_0 \in \Gamma$.

Доказательство. Доказательство проведём за несколько шагов.

Шаг 1. Введём потенциал двойного слоя с плотностью $\mu(\xi) \in \mathbb{C}(\Gamma)$:

$$W[\mu](x) = \int\limits_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\, dS_\xi \tag{2.5}$$

и составим сумму при $x \notin \Gamma$:

$$I(x) := \frac{\partial V[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} + W[\mu](x) = \\ = \int\limits_{\Gamma} \mu(\xi) \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\right] dS_\xi. \tag{2.6}$$

Нужно доказать, что сумма (2.6) непрерывно меняется при переходе точки x по нормали $\mathbf{n}_{x_0}$ через точку $x_0 \in \Gamma$. Очевидно, что, как и ранее, нам нужно разбить выражение (2.6) на две части:

$$I_1(x) := \int\limits_{\Gamma_1} \mu(\xi) \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\right] dS_\xi, \tag{2.7}$$

$$I_2(x) := \int\limits_{\Gamma_2} \mu(\xi) \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\right] dS_\xi, \tag{2.8}$$

где

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad \Gamma_1 = \Gamma \cap O(x_0, \eta), \quad \Gamma_2 = \Gamma \backslash O(x_0, \eta), \quad \eta \in (0, d).$$

Шаг 2. Оценка для I_1. Стандартным образом введём декартову прямоугольную систему координат $\{x_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{N-1}, \mathbf{e}_N\}$ с координатами (ξ', ξ_N), $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{N-1})$ в точке $x_0 \in \Gamma$.

Справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} = \frac{N-2}{|\xi - x|^{N-1}} \sum_{k=1}^{N} \frac{\xi_k - x_k}{|\xi - x|} \cos(\mathbf{n}_{x_0}, \mathbf{e}_k),\ k = \overline{1, N}, \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu_\xi}\frac{1}{|\xi-x|^{N-2}}=-\frac{N-2}{|\xi-x|^{N-1}}\sum_{k=1}^{N}\frac{\xi_k-x_k}{|\xi-x|}\cos(\nu_\xi,\mathbf{e}_k),\ k=\overline{1,N}. \quad (2.10)$$

Поскольку точка x находится всегда на прямой с направляющим вектором $\mathbf{n}_{x_0}$ и проходящей через точку $x_0\in\Gamma$, то в этой системе координат $x=(0,\ldots,0,x_N)$, т. е. $x_k=0$ при $k=\overline{1,N-1}$. Кроме того,

$$\cos(\mathbf{n}_{x_0},\mathbf{e}_k)=0 \quad \text{при} \quad k=\overline{1,N-1}, \quad \cos(\mathbf{n}_{x_0},\mathbf{e}_N)=1. \quad (2.11)$$

Из формул (2.9)–(2.11) вытекает следующее равенство:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\frac{1}{|\xi-x|^{N-2}}+\frac{\partial}{\partial \nu_\xi}\frac{1}{|\xi-x|^{N-2}}&=\\ =\frac{N-2}{|\xi-x|^{N-1}}\frac{\xi_N-x_N}{|\xi-x|}&\left[\cos(\mathbf{n}_{x_0},\mathbf{e}_N)-\cos(\nu_\xi,\mathbf{e}_N)\right]+\\ +\frac{N-2}{|\xi-x|^{N-1}}\sum_{k=1}^{N-1}\left[\frac{\xi_k-x_k}{|\xi-x|}\cos(\mathbf{n}_{x_0},\mathbf{e}_k)-\frac{\xi_k-x_k}{|\xi-x|}\cos(\nu_\xi,\mathbf{e}_k)\right]&=\\ =\frac{N-2}{|\xi-x|^{N-1}}\frac{\xi_N-x_N}{|\xi-x|}&\left[1-\cos(\nu_\xi,\mathbf{e}_N)\right]-\\ -\frac{N-2}{|\xi-x|^{N-1}}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\xi_k}{|\xi-x|}&\cos(\nu_\xi,\mathbf{e}_k). \quad (2.12)\end{aligned}$$

Во–первых, имеет место следующее неравенство, доказанное в первой лекции:

$$|\cos(\nu_\xi,\mathbf{e}_k)|\leqslant b|\xi-x_0|^\alpha, \quad k=\overline{1,N-1}. \quad (2.13)$$

Во–вторых, имеет место следующее равенство и оценка снизу:

$$\begin{aligned}0\leqslant 1-\cos(\nu_\xi,\mathbf{e}_N)&=1-\frac{1}{\left[1+|\nabla_{\xi'}f(\xi')|^2\right]^{1/2}}=\\ &=\frac{1}{\left[1+|\nabla_{\xi'}f(\xi')|^2\right]^{1/2}}\frac{1}{1+\left[1+|\nabla_{\xi'}f(\xi')|^2\right]^{1/2}}\left(\nabla_{\xi'}f(\xi')\right)^2, \quad (2.14)\end{aligned}$$

где $\xi=(\xi',\xi_N)$, из которой вытекает оценка

$$0\leqslant 1-\cos(\nu_\xi,\mathbf{e}_N)\leqslant\frac{1}{2}b^2|\xi-x_0|^{2\alpha}\leqslant b_1|\xi-x_0|^\alpha, \quad b_1=\frac{b^2}{2}d^\alpha. \quad (2.15)$$

Из равенства (2.12) с учётом оценок (2.13) и (2.15) приходим к следующему неравенству:

$$\left|\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\frac{1}{|\xi-x|^{N-2}}+\frac{\partial}{\partial \nu_\xi}\frac{1}{|\xi-x|^{N-2}}\right|\leqslant b_2\frac{|\xi-x_0|^\alpha}{|\xi-x|^{N-1}}. \quad (2.16)$$

Поскольку $\xi \in \Gamma_1 = \Gamma(x_0)$, то имеет место неравенство:

$$r_0 \leqslant 2\rho, \quad \rho = |x_0 - (\xi^{'}, 0)| = |(\xi^{'}, 0)|, \quad \xi^{'} = (\xi_1, ..., \xi_{N-1}). \qquad (2.17)$$

Кроме того,

$$r = |\xi - x| = \left(\sum_{k=1}^{N} (\xi_k - x_k)^2\right)^{1/2} = \\ = \left(\sum_{k=1}^{N-1} \xi_k^2 + (x_N - \xi_N)^2\right)^{1/2} \geqslant \left(\sum_{k=1}^{N-1} \xi_k^2\right)^{1/2} = \rho. \qquad (2.18)$$

Поэтому из (2.16) с учётом неравенств (2.17) и (2.18) приходим к оценке:

$$\left|\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\right| \leqslant \frac{b_2}{\rho^{N-1-\alpha}}, \qquad (2.19)$$

где $\rho = |x_0 - (\xi', 0)|$.

Теперь получим оценку для интеграла I_1, определенного формулой (2.7). С этой целью обозначим через $G^{'}(x_0)$ проекцию куска Γ_1 поверхности Ляпунова Γ на касательную плоскость $\xi_N = 0$ в точке $x_0 \in \Gamma_1$. В результате с учётом (2.19) получим следующую оценку:

$$|I_1(x)| \leqslant \int\limits_{\Gamma_1} |\mu(\xi)| \left|\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\right| dS_\xi \leqslant \\ \leqslant M b_2 \int\limits_{\Gamma_1} \frac{1}{\rho^{N-1-\alpha}} \, dS_\xi = M_1 \int\limits_{G^{'}(x_0)} \frac{1}{\rho^{N-1-\alpha}} \frac{d\xi_1 \cdots d\xi_{N-1}}{\cos(\nu_\xi, \mathbf{e}_N)}. \qquad (2.20)$$

Заметим, что

$$G^{'}(x_0) \subset O^{'}(x_0, \eta), \quad O^{'}(x_0, \eta) := \left\{\xi^{'} \in \mathbb{R}^{N-1} : |(\xi^{'}, 0) - x_0| < \eta\right\},$$

где $\mathbb{R}^{N-1}_{x_0}$ — это касательная плоскость в точке $x_0 \in \Gamma$. Продолжим оценивание I_1 :

$$|I_1(x)| \leqslant 2M_1 \int\limits_{O^{'}(x_0, \eta)} \frac{1}{\rho^{N-1-\alpha}} d\xi_1 \cdots d\xi_{N-1} = \\ = 2M_1 \omega_{N-1} \int\limits_0^\eta \frac{1}{\rho^{N-1-\alpha}} \rho^{N-2} \, d\rho = \frac{M_2}{\alpha} \eta^\alpha. \qquad (2.21)$$

По аналогии доказывается справедливость следующей оценки:

$$|I_1(x_0)| \leqslant \frac{M_2}{\alpha}\eta^{\alpha}, \quad M_2 > 0. \tag{2.22}$$

Шаг 3. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное фиксированное число. Выберем $\eta > 0$ следующим образом:

$$0 < \eta < \min\left\{d, \left(\frac{\alpha\varepsilon}{3M_2}\right)^{1/\alpha}\right\}. \tag{2.23}$$

Тогда из оценок (2.21) и (2.22) получаем следующие оценки:

$$|I_1(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |I_1(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.24}$$

Справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} |I(x) - I(x_0)| \leqslant |I_1(x) - I_1(x_0)| + |I_2(x) - I_2(x_0)| \leqslant \\ \leqslant |I_1(x)| + |I_1(x_0)| + |I_2(x) - I_2(x_0)|. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Поскольку $\eta > 0$ фиксировано, то можно стандартным образом как и ранее доказать, что интеграл $I_2(x)$ непрерывен в точке x_0 по направлению нормали $\mathbf{n}_{x_0}$. Следовательно, найдётся такое $\delta = \delta(\eta, \varepsilon) > 0$, что

$$|I_2(x) - I_2(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{для всех} \quad |x - x_0| < \{\eta/2, \delta\}. \tag{2.26}$$

Итак, из (2.24)–(2.26) вытекает непрерывность в точке $x_0 \in \Gamma$ выражения $I(x)$, определённого формулой (2.6).

Шаг 4. Из непрерывности суммы (2.6) в точке $x = x_0 \in \Gamma$ вытекает равенство предельных значений извне области Ω, изнутри области Ω и прямого значения суммы в точке $x_0 \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)_i + W_i[\mu](x_0) = \\ = \left(\frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)_e + W_e[\mu](x_0) = \frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} + W[\mu](x_0). \end{aligned} \tag{2.27}$$

При получении формулы (2.27) использованы результаты из прошлой лекции, из которых следует, что существуют предельные значения $W_i(x_0)$ и $W_e(x_0)$ потенциала двойного слоя. И поэтому существуют предельные значения нормальной производной потенциала простого слоя.

□ Действительно, имеем:

$$I(x) = \frac{\partial V[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} + W[\mu](x), \tag{2.28}$$

$$\lim_{\Omega \ni x \to x_0} I(x) = I(x_0) = \lim_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega} \ni x \to x_0} I(x), \tag{2.29}$$

$$I(x_0) = \frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} + W[\mu](x_0), \tag{2.30}$$

$$\lim_{\Omega \ni x \to x_0} W[\mu](x) = W_i(x_0), \qquad \lim_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega} \ni x \to x_0} W[\mu](x) = W_e(x_0). \tag{2.31}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\lim_{\Omega \ni x \to x_0} \frac{\partial V[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} &= \lim_{\Omega \ni x \to x_0} (I(x) - W[\mu](x)) = \\ &= \lim_{\Omega \ni x \to x_0} I(x) - \lim_{\Omega \ni x \to x_0} W[\mu](x) = I(x_0) - W_i(x_0),\end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega} \ni x \to x_0} \frac{\partial V[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} &= \lim_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega} \ni x \to x_0} (I(x) - W[\mu](x)) = \\ &= \lim_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega} \ni x \to x_0} I(x) - \lim_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega} \ni x \to x_0} W[\mu](x) = I(x_0) - W_e(x_0),\end{aligned} \tag{2.33}$$

т.е. предельные значения (2.1) и (2.2) существуют. ⊠

Из равенств (2.27) вытекают следующие формулы:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)_i &= \frac{\partial V[\mu]}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}(x_0) + W[\mu](x_0) - W_i[\mu](x_0) = \\ &= \frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} + \frac{(N-2)\omega_N}{2}\mu(x_0),\end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)_e &= \frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} + W[\mu](x_0) - W_e[\mu](x_0) = \\ &= \frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} - \frac{(N-2)\omega_N}{2}\mu(x_0),\end{aligned} \tag{2.35}$$

Теорема доказана.

Следствие. *При условиях теоремы имеет место следующее равенство*:

$$\frac{1}{(N-2)\omega_N}\left[\left(\frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)_i - \left(\frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)_e\right] = \mu(x_0). \tag{2.36}$$

Помимо всего прочего мы доказали следующую теорему:

Теорема 3. *Если* $\mu(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$, $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ *при* $\alpha \in (0,1]$, *то потенциал простого слоя*

$$V[\mu](x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N) \cap \mathbb{C}^{(2)}(\Omega \cap (\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega})) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n}; \overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n}; \mathbb{R}^N \setminus \Omega).$$

§ 3. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [1], [4], [10].

Лекция 10

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА

В этой лекции сформулированы альтернативы Фредгольма и доказано с их помощью существование классических решений задач Дирихле и Неймана в ограниченных и неограниченных областях.

§ 1. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа

В этом параграфе рассмотрены постановки внутренних и внешних задач Дирихле и Неймана. Пусть $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha \in (0,1]$ — это замкнутая поверхность, которая делит пространство $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$ на две области Ω и $\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}$, причём область Ω ограниченная. В этой лекции обсуждаются следующие четыре краевые задачи:

Внутренняя задача Дирихле D_i. Найти гармоническую в области Ω функцию $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую граничному условию

$$\lim_{\Omega \ni x \to x_0 \in \Gamma} u(x) = \varphi(x_0) \in \mathbb{C}(\Gamma) \tag{1.1}$$

для любой точки $x_0 \in \Gamma$.

Внешняя задача Дирихле D_e. Найти гармоническую в области $\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}$ функцию $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_w(\mathbb{R}^N \backslash \Omega)$, удовлетворяющую условиям

$$\lim_{(\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}) \ni x \to x_0 \in \Gamma} u(x) = \varphi(x_0) \in \mathbb{C}(\Gamma), \tag{1.2}$$

$$|u(x)| \leqslant \frac{c_1}{|x|^{N-2}} \quad \text{при} \quad |x| \to +\infty \tag{1.3}$$

для любой точки $x_0 \in \Gamma$.

Внутренняя задача Неймана N_i. Найти гармоническую в области Ω функцию $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n}; \overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую граничному условию

$$\lim_{\Omega \cap l \ni x \to x_0 \in \Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} = \psi(x_0) \in \mathbb{C}(\Gamma), \quad l = \{x_0 + t\mathbf{n}_{x_0}, t \in \mathbb{R}\} \tag{1.4}$$

для любой точки $x_0 \in \Gamma$.

Внешняя задача Неймана N_e. Найти гармоническую в области $\mathbb{R}^N\backslash\overline{\Omega}$ функцию $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N\backslash\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n};\mathbb{R}^N\backslash\Omega) \cap \mathbb{C}(\mathbb{R}^N\backslash\Omega)$, удовлетворяющую граничному условию

$$\lim_{(\mathbb{R}^N\backslash\overline{\Omega})\cap l\ni x\to x_0\in\Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} = \psi(x_0) \in \mathbb{C}(\Gamma), \quad l = \{x_0 + t\mathbf{n}_{x_0}, t \in \mathbb{R}\}, \tag{1.5}$$

$$|u(x)| \leqslant \frac{c_1}{|x|^{N-2}} \quad \text{при} \quad |x| \to +\infty, \tag{1.6}$$

для любой точки $x_0 \in \Gamma$.

Основная цель данной лекции — это доказать теоремы единственности для всех четырёх задач, которые для удобства будем называть соответственно D_i, D_e, N_i и N_e. Заметим, что единственность задач D_i и N_i [1]) была доказана во второй лекции, где был доказан сильный принцип максимума и теорема Олейник–Хопфа о знаке косой производной на границе. Поэтому докажем единственность решений соответствующих внешних задач D_e и N_e.

§ 2. Теоремы единственности решения задач D_e и N_e

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *При $N \geqslant 3$ задачи D_e и N_e имеют не более одного решения.*

Доказательство.

Пусть $R > 0$ настолько велико, что $\Omega \subset O(0,R)$, где

$$O(0,R) := \left\{x \in \mathbb{R}^N : \ |x| < R\right\}.$$

Рассмотрим тогда область:

$$\Omega_R := O(0,R)\backslash\overline{\Omega}, \quad \partial\Omega_R := \Gamma \cup \partial O(0,R),$$

$$\partial O(0,R) := \left\{x \in \mathbb{R}^N : \ |x| = R\right\}.$$

Шаг 1. Единственность задачи D_e. Предположим, что $u_1(x), u_2(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N\backslash\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_w(\mathbb{R}^N\backslash\Omega)$ — это два решения задачи D_e. Тогда функция $v(x) := \overline{u}_1(x) - \overline{u}_2(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N\backslash\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_w(\mathbb{R}^N\backslash\Omega)$ решение следующей задачи:

$$\Delta v = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega_R, \quad v(x) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad |v(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{на} \quad |x| = R,$$

где

$$\varepsilon := \frac{c_1}{R^{N-2}},$$

[1]) Нами было доказано, что всякое решение задачи N_i можно представить в следующем виде: $u(x) + const$, где $u(x)$ — это какое-либо классическое решение задачи N_i.

а символом $\overline{u}(x)$ обозначено продолжение функции $u(x)$ из области $\mathbb{R}^N\backslash\overline{\Omega}$ до границы Γ по непрерывности. В силу принципа максимума модуля приходим к выводу о том, что

$$\max_{x\in\overline{\Omega}_R}|v(x)| = \max_{x\in\Gamma\cup\partial O(0,R)}|v(x)| \leqslant \varepsilon = \frac{c_1}{R^{N-2}}, \quad N \geqslant 3.$$

Теперь заметим, что для любого фиксированного $x \in \mathbb{R}^N\backslash\overline{\Omega}$ найдётся достаточно большое $R > 0$, что $x \in \Omega_R$ и при этом

$$|v(x)| \leqslant \frac{c_1}{R^{N-2}} \to +0 \quad \text{при} \quad R \to +\infty \Rightarrow v(x) = 0.$$

Шаг 2. Единственность задачи N_e. Пусть $u_1(x), u_2(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N\backslash\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n}; \mathbb{R}^N\backslash\Omega) \cap \mathbb{C}(\mathbb{R}^N\backslash\Omega)$ — это два решения задачи N_e. Рассмотрим их разность:

$$v(x) := u_1(x) - u_2(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N\backslash\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n}; \mathbb{R}^N\backslash\Omega) \cap \mathbb{C}(\mathbb{R}^N\backslash\Omega),$$

которая удовлетворяет соответствующей однородной задаче. Предположим, что

$$v(x) \not\equiv const \quad \text{при} \quad x \in \Omega_R = O(0,R)\backslash\overline{\Omega},$$

где $R > 0$ настолько велико, чтобы $\Omega \subset O(0,R)$. Поэтому, с одной стороны, имеет место неравенство:

$$\min_{y\in\partial\Omega_R} v(y) < v(x) < \max_{y\in\partial\Omega_R} v(y) \quad \text{при} \quad x \in \Omega_R.$$

С другой стороны, minimum и maximum не может достигаться в точках границы Γ, поскольку тогда в силу леммы Олейник–Хопфа мы бы имели в этих точках

$$\frac{\partial v(x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} \neq 0,$$

что противоречит равенству

$$\frac{\partial v(x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} = \overline{\frac{\partial v(x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}} = 0 \quad \text{для всех} \quad x_0 \in \Gamma.$$

Значит, и минимум и максимум функции $v(x)$ достигается на границе $\partial O(0,R)$, но на этой границе выполнено следующее неравенство:

$$|v(x)| \leqslant \frac{c_1}{R^{N-2}} \quad \text{при} \quad |x| = R > 0.$$

Стало быть, имеет место следующее неравенство:

$$-\frac{c_1}{R^{N-2}} \leqslant \min_{y\in\partial\Omega_R} v(y) < v(x) < \max_{y\in\partial\Omega_R} v(y) \leqslant \frac{c_1}{R^{N-2}}.$$

Итак,

$$|v(x)| \leqslant \frac{c_1}{R^{N-2}} \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}.$$

Следовательно, для всякой фиксированной точки $x \in \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}$ в пределе при $R \to +\infty$ получается равенство

$$v(x) \equiv 0.$$

Поэтому исходное предположение, что $v(x) \not\equiv const$ не верно. Таким образом,

$$v(x) = const.$$

Воспользовавшись убыванием функции $v(x)$ при $|x| \to +\infty$, получим, что

$$v(x) = const = 0.$$

Теорема доказана.

§ 3. Теория Фредгольма. Формулировка результатов

В этом параграфе без доказательства сформулируем важную теорему об альтернативах Фредгольма для уравнения Фредгольма второго рода. Итак, пусть

$$K(\varphi): \ \mathbb{C}(\Gamma) \to \mathbb{C}(\Gamma) \tag{3.1}$$

— это вполне непрерывный интегральный оператор следующего вида:

$$K(\varphi)(x) := \int\limits_{\Gamma} K(x,\xi)\varphi(\xi)\, dS_\xi, \quad K(x,\xi) := \frac{A(x,\xi)}{|x-\xi|^\lambda}, \quad x \in \Gamma, \tag{3.2}$$

где $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha \in (0,1]$ — это замкнутая поверхность Ляпунова, $A(x,\xi) \in \mathbb{C}(\Gamma\times\Gamma)$ и $0 < \lambda < N-1$. Рассмотрим следующее уравнение:

$$\varphi(x) - \chi K(\varphi)(x) = f(x) \in \mathbb{C}(\Gamma). \tag{3.3}$$

Кроме того, введём соответствующее сопряженное уравнение с союзным оператором:

$$\psi(x) - \chi K^*(\psi)(x) = g(x) \in \mathbb{C}(\Gamma), \tag{3.4}$$

$$K^*(\psi)(x) := \int\limits_{\Gamma} K^*(x,\xi)\psi(\xi)\, dS_\xi : \mathbb{C}(\Gamma) \to \mathbb{C}(\Gamma), \tag{3.5}$$

где $K^*(x,\xi) := K(\xi,x)$.

Определение 1. *Число χ называется характеристическим, если существует нетривиальное решение $\varphi(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$ уравнения* (3.3) *при* $f(x) = 0$.

Справедлива следующая теорема *об альтернативах Фредгольма*:

Т е о р е м а 2. *Либо уравнения* (3.3) *и* (3.4) *одновременно разрешимы в* $\mathbb{C}(\Gamma)$ *при любых правых частях* $f(x), g(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$ *и тогда их решения* $\varphi(x), \psi(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$ *единственны. Либо однородные уравнения*

$$\varphi(x) - \chi K(\varphi)(x) = 0 \quad \textit{и} \quad \psi(x) - \chi K^*(\psi)(x) = 0 \tag{3.6}$$

имеют одинаковое число линейно независимых решений

$$\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}(\Gamma) \quad \textit{и} \quad \{\psi_k(x)\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}(\Gamma)$$

соответственно. И в этом случае, для того чтобы уравнение (3.3) (*соответственно* (3.4)) *имело решение, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_{\Gamma} f(x)\psi_k(x)\, dS_x = 0 \quad \textit{при} \quad k = \overline{1, n}; \tag{3.7}$$

(*соответственно*

$$\int\limits_{\Gamma} g(x)\varphi_k(x)\, dS_x = 0 \quad \textit{при} \quad k = \overline{1, n}.) \tag{3.8}$$

При этом общее решение уравнения (3.3) *имеет следующий вид*:

$$\varphi(x) = \varphi^*(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x), \tag{3.9}$$

а общее решение уравнения (3.4) *имеет следующий вид*:

$$\psi(x) = \psi^*(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k(x), \tag{3.10}$$

где $\varphi^*(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$ *— это какое–либо решение уравнения* (3.3), $\psi^*(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$ *— это какое–либо решение уравнения* (3.4), *а* $c_1, ..., c_k$ *— это произвольные постоянные.*

С л е д с т в и е. *Из единственности решения уравнения* (3.3) *в классе* $\mathbb{C}(\Gamma)$ *вытекает однозначная разрешимость уравнений* (3.3) *и* (3.4) *для любых правых частей* $f(x), g(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$. *Из единственности решения уравнения* (3.4) *вытекает однозначная разрешимость уравнений* (3.4) *и* (3.3) *для любых правых частей* $g(x), f(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$.

§ 4. Интегральные уравнения теории потенциала

Будем искать классическое решение внутренней D_i и внешней D_e задач Дирихле в виде потенциала двойного слоя:

$$u(x) = W[\sigma](x) := \int\limits_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\, dS_\xi, \quad \sigma(\xi) \in \mathbb{C}(\Gamma), \tag{4.1}$$

а решение внутренней N_i и внешней N_e задач Неймана в виде потенциала простого слоя:

$$u(x) = V[\mu](x) := \int\limits_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} \, dS_\xi, \quad \mu(\xi) \in \mathbb{C}(\Gamma). \tag{4.2}$$

Отметим, что из лекций 8 и 9 известно, что потенциал двойного слоя $W(x)$ и потенциал простого слоя $V(x)$ принадлежат следующим классам при $\sigma(\xi), \mu(\xi) \in \mathbb{C}(\Gamma)$:

$$W(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega \cup \big(\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}\big)) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_w(\mathbb{R}^N \backslash \Omega),$$

$$V(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega \cup \big(\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}\big)) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n}; \overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n}; \mathbb{R}^N \backslash \Omega) \cap \mathbb{C}(\mathbb{R}^N).$$

Для дальнейшего заметим, что в случае задачи Дирихле внутренней D_i имеем:

$$\lim_{\Omega \ni x \to x_0 \in \Gamma} u(x) = \varphi(x_0), \tag{4.3}$$

в случае внешней задачи Дирихле D_e имеем

$$\lim_{\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega} \ni x \to x_0 \in \Gamma} u(x) = \varphi(x_0), \tag{4.4}$$

в случае внутренней задачи Неймана N_i имеем

$$\lim_{\Omega \cap l \ni x \to x_0 \in \Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} = \psi(x_0), \quad l = \{x_0 + t\mathbf{n}_{x_0}, t \in \mathbb{R}\}, \tag{4.5}$$

а в случае внешней задачи Неймана N_e имеем

$$\lim_{\left(\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}\right) \cap l \ni x \to x_0 \in \Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} = \psi(x_0), \quad l = \{x_0 + t\mathbf{n}_{x_0}, t \in \mathbb{R}\}. \tag{4.6}$$

Теперь из предельных свойств потенциала двойного слоя и производной по нормали n_{x_0} потенциала простого слоя с учётом (4.3) и (4.5) получаем следующие интегральные уравнения для соответствующих задач:

$$(D_i) \quad \sigma(x_0) - \gamma \int\limits_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x_0|^{N-2}} \, dS_\xi = -\gamma \varphi(x_0), \tag{4.7}$$

$$(D_e) \quad \sigma(x_0) + \gamma \int\limits_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x_0|^{N-2}} \, dS_\xi = \gamma \varphi(x_0), \tag{4.8}$$

$$(N_i) \quad \mu(x_0) + \gamma \int\limits_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} \frac{1}{|\xi - x_0|^{N-2}} \, dS_\xi = \gamma \psi(x_0), \tag{4.9}$$

$$(N_e) \quad \mu(x_0) - \gamma \int\limits_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} \frac{1}{|\xi - x_0|^{N-2}}\, dS_\xi = -\gamma \psi(x_0), \tag{4.10}$$

где

$$\gamma := \frac{2}{(N-2)\omega_N}, \quad x_0 \in \Gamma. \tag{4.11}$$

Сделаем следующие наблюдения:

Наблюдение 1. Все интегральные операторы в уравнениях (4.7)–(4.10) являются интегральными операторами со слабой особенностью на поверхности без края $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha \in (0, 1]$.

$\square$ Действительно, ранее нами были получены следующие выражения:

$$\frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r_0^{N-2}} = -\frac{(N-2)}{r_0^{N-1}} \cos(\xi - x_0, \nu_\xi), \quad |\cos(\xi - x_0, \nu_\xi)| \leqslant a r_0^\alpha,$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} \frac{1}{r_0^{N-2}} = \frac{(N-2)}{r_0^{N-1}} \cos(\xi - x_0, n_{x_0}), \quad |\cos(\xi - x_0, n_{x_0})| \leqslant a r_0^\alpha,$$

где $r_0 = |\xi - x_0|$. $\boxtimes$

Поэтому в силу теоремы 3 соответствующие интегральные операторы являются вполне непрерывными, действующими из $\mathbb{C}(\Gamma)$ в $\mathbb{C}(\Gamma)$.

Наблюдение 2. Заметим, что ядра

$$K(x_0, \xi) := \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x_0|^{N-2}} \quad \text{и} \quad K^*(x_0, \xi) := \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} \frac{1}{|\xi - x_0|^{N-2}}$$

являются союзными, т.е. $K^*(x_0, \xi) = K(\xi, x_0)$. Поэтому интегральные уравнения (4.7) и (4.10), соответствующие задачам D_i и N_e, и интегральные уравнения (4.8) и (4.9), соответствующие задачам D_e и N_i являются взаимно сопряженными.

Наблюдение 3. Из первых двух наблюдений мы приходим к выводу о том, что для пар взаимно сопряжённых интегральных уравнений (4.7), (4.10) и (4.8), (4.9) справедлива теорема об альтернативах Фредгольма. Поэтому далее следует рассмотреть указанные интегральные уравнения двух пар задач D_i, N_e и D_e, N_i.

§ 5. Однозначная разрешимость задач D_i и N_e

Поскольку задачам D_i и N_e соответствуют взаимно сопряжённые интегральные уравнения (4.7) и (4.10), то в силу альтернатив Фредгольма их нужно исследовать совместно. Далее во всех интегральных уравнениях (4.7)–(4.10) для удобства заменим точку $x_0 \in \Gamma$ на точку $x \in \Gamma$.

Итак, рассмотрим однородное интегральное уравнение, соответствующее интегральному уравнению (4.10) внешней задачи Неймана N_e.

Неизвестную функцию в этом уравнении обозначим через $\mu_0(x) \in \in \mathbb{C}(\Gamma)$:

$$\mu_0(x) - \gamma \int\limits_{\Gamma} \mu_0(\xi) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\, dS_\xi = 0. \tag{5.1}$$

Пусть $\mu_0(\xi) \in \mathbb{C}(\Gamma)$ — это решение уравнения (5.1). Тогда рассмотрим потенциал простого слоя с плотностью, равной $\mu_0(\xi)$:

$$V_0(x) := V[\mu_0](x) = \int\limits_{\Gamma} \mu_0(\xi) \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\, dS_\xi. \tag{5.2}$$

Равенство (5.1) означает, что

$$\left(\frac{\partial V_0(x)}{\partial \mathbf{n}_x}\right)_e = \frac{\partial V(x)}{\partial \mathbf{n}_x} - \frac{(N-2)\omega_N}{2}\mu_0(x_0) =$$
$$= \frac{(N-2)\omega_N}{2}\left[-\mu_0(x) + \gamma \int\limits_{\Gamma} \mu_0(\xi) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\, dS_\xi\right] = 0 \tag{5.3}$$

для всех $x \in \Gamma$. Кроме того, заметим, что функция $V_0(x)$ убывает при $|x| \to +\infty$ как $1/|x|^{N-2}$.

$\square$ Действительно, пусть $\Gamma \subset O(0, R)$ при достаточно большом $R > 0$ и при этом

$$|x| \geqslant 2R, \quad |\xi| \leqslant R \Rightarrow -|\xi| \geqslant -R \geqslant -\frac{1}{2}|x|.$$

Тогда справедливы следующие соотношения:

$$|\xi - x| \geqslant |x| - |\xi| \geqslant |x| - \frac{1}{2}|x| = \frac{1}{2}|x|.$$

Отсюда и из (5.4) получаем оценку сверху:

$$|V_0(x)| \leqslant \left(\frac{2}{|x|}\right)^{N-2} \int\limits_{\Gamma} |\mu_0(\xi)|\, dS_\xi \quad \text{для всех} \quad |x| \geqslant 2R. \quad \boxtimes \tag{5.4}$$

Таким образом, с учетом (5.3) и (5.4) функция $V_0(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}) \cap \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n}; \mathbb{R}^N \backslash \Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ является решением следующей внешней задачи Неймана:

$$\Delta V_0(x) = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}, \tag{5.5}$$

$$|V_0(x)| \leqslant \frac{c_1}{|x|^{N-2}} \quad \text{при} \quad |x| \to +\infty, \tag{5.6}$$

$$\lim_{\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega} \cap l \ni y \to x \in \Gamma} \frac{\partial V_0(y)}{\partial \mathbf{n}_x} = \left(\frac{\partial V_0(x)}{\partial \mathbf{n}_x}\right)_e = 0, \quad l = \{x + t\mathbf{n}_x, t \in \mathbb{R}\} \tag{5.7}$$

для всех $x \in \Gamma$. По теореме единственности для внешней задачи Неймана N_e функция

$$V_0(x) \equiv 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega} \tag{5.8}$$

есть единственное решение задачи (5.5)–(5.7). С одной стороны, потенциал простого слоя $V_0(x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N)$ и поэтому в силу (5.8) имеем

$$V_0(x) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \Gamma. \tag{5.9}$$

С другой стороны, потенциал простого слоя функция гармоническая внутри Ω. Тогда с учетом (5.9) по теореме единственности для внутренней задачи Дирихле D_i в силу (5.9) имеем

$$V_0(x) \equiv 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega. \tag{5.10}$$

Но тогда, очевидно, что

$$\left(\frac{\partial V_0(x)}{\partial \mathbf{n}_x}\right)_i = \lim_{\Omega \cap l \ni y \to x \in \Gamma} \frac{\partial V_0(y)}{\partial \mathbf{n}_x} = 0, \quad l = \{x + t\mathbf{n}_x, t \in \mathbb{R}\}. \tag{5.11}$$

Поэтому с учетом следствия из теоремы 2, доказанной в предыдущей лекции, и равенств (5.3) и (5.11) имеем следующее равенство:

$$0 = \frac{1}{(N-2)\omega_N}\left[\left(\frac{\partial V_0(x)}{\partial \mathbf{n}_x}\right)_i - \left(\frac{\partial V_0(x)}{\partial \mathbf{n}_x}\right)_e\right] = \mu_0(x) \tag{5.12}$$

для любого $x \in \Gamma$.

Итак, решением однородного уравнения (5.1) в классе $\mathbb{C}(\Gamma)$ является тривиальное решение $\mu_0(x) \equiv 0$ при $x \in \Gamma$. В силу следствия из теоремы об альтернативах Фредгольма приходим к выводу о том, что для любых правых частей $\varphi(x), \psi(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$ существуют единственные решения интегральных уравнений (4.7) и (4.10).

Таким образом, доказано следующее утверждение:

Теорема 3. *Для любых $\varphi(x), \psi(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$ существуют единственные решения задач D_i и N_e.*

§ 6. Исследование пары сопряжённых интегральных уравнений D_e и N_i

Прежде всего рассмотрим однородное интегральное уравнение (4.8), соответствующее внешней задачи Дирихле D_e:

$$\sigma_0(x) + \gamma \int\limits_{\Gamma} \sigma_0(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\, dS_\xi = 0, \quad \gamma = \frac{2}{(N-2)\omega_N}. \tag{6.1}$$

В силу теоремы 4 (об интеграле Гаусса) из лекции 6 это интегральное уравнение имеет нетривиальное решение $\sigma_0(x) = 1$. В соответствии с теоремой об альтернативах Фредгольма однородное интегральное уравнение (4.9), соответствующее внутренней задаче Неймана

$$\mu_0(x) + \gamma \int\limits_{\Gamma} \mu_0(\xi) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\, dS_\xi = 0, \quad \gamma = \frac{2}{(N-2)\omega_N} \tag{6.2}$$

также имеет нетривиальное решение $\mu_0(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$. Справедливо следующее утверждение:

Л е м м а 1. *Размерность пространств решений однородных уравнений* (6.1) *и* (6.2) *равна* 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Заметим, что в силу теоремы об альтернативах Фредгольма нам необходимо и достаточно доказать сформулированный результат для однородного уравнения (6.2). Пусть $\mu_0(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$ — это указанное нетривиальное решение однородного уравнения (6.2). Составим потенциал простого слоя с плотностью $\mu_0(x)$

$$V_0(x) := \int\limits_{\Gamma} \mu_0(\xi) \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\, dS_\xi. \tag{6.3}$$

Уравнение (6.2) означает, что

$$\left(\frac{\partial V_0(x)}{\partial \mathbf{n}_x}\right)_i = \frac{\partial V_0(x)}{\partial \mathbf{n}_x} + \frac{(N-2)\omega_N}{2}\mu_0(x) =$$
$$= \frac{(N-2)\omega_N}{2}\left[\mu_0(x) + \gamma \int\limits_{\Gamma} \mu_0(\xi) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\, dS_\xi\right] = 0 \tag{6.4}$$

для всех $x \in \Gamma$. Так как $V_0(x)$ — это гармоническая в области Ω функция, то функция $V_0(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n}; \overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ является решением следующей внутренней задачи Неймана N_i:

$$\Delta V_0(x) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{6.5}$$

$$\lim_{\Omega \cap l \ni y \to x \in \Gamma} \frac{\partial V_0(y)}{\partial \mathbf{n}_x} = \left(\frac{\partial V_0(x)}{\partial \mathbf{n}_x}\right)_i = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \Gamma. \tag{6.6}$$

В силу единственности решения внутренней задачи Неймана N_i с точностью до постоянной из (6.5), (6.6) получаем, что

$$V_0(x) = c_0 \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega, \tag{6.7}$$

где c_0 — это постоянная. Докажем, что *постоянная* $c_0 \neq 0$.

□ Действительно, пусть $c_0 = 0$. Тогда, с одной стороны, из (6.7) получаем, что

$$V_0(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega \Rightarrow V_0(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma,$$

где последнее равенство имеет место в силу непрерывности потенциала простого слоя $V_0(x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N)$. С другой стороны, имеем $V_0(x)$ — это гармоническая функция в области $\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}$. Таким образом, с учетом (5.4) функция $V_0(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}(\mathbb{R}^N \backslash \Omega)$ является решением внешней задачи Дирихле:

$$\Delta V_0(x) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{6.8}$$

$$V_0(x) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{6.9}$$

$$|V_0(x)| \leqslant \frac{c_1}{|x|^{N-2}} \quad \text{при} \quad |x| \to +\infty. \tag{6.10}$$

Поэтому в силу единственности решения внешней задачи Дирихле D_e имеем:

$$V_0(x) \equiv 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega.$$

Но тогда

$$\left(\frac{\partial V_0(x)}{\partial \mathbf{n}_x}\right)_e = \lim_{(\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}) \cap l \ni y \to x \in \Gamma} \frac{\partial V_0(y)}{\partial \mathbf{n}_x} = 0, \quad l = \{x + t\mathbf{n}_x, t \in \mathbb{R}\}. \tag{6.11}$$

Следовательно, согласно следствию из теоремы 2, доказанной в предыдущей лекции, и с учетом равенств (6.7) и (6.11) имеем следующее равенство:

$$0 = \frac{1}{(N-2)\omega_N} \left[\left(\frac{\partial V_0(x)}{\partial \mathbf{n}_x}\right)_i - \left(\frac{\partial V_0(x)}{\partial \mathbf{n}_x}\right)_e \right] = \mu_0(x) \tag{6.12}$$

для всех $x \in \Gamma$, что противоречит нетривиальности функции $\mu_0(x) \in \in \mathbb{C}(\Gamma)$. ⊠

Продолжим доказательство леммы. Предположим, что уравнение (6.2) имеет ещё одно нетривиальное решение $\mu_1(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$. Рассмотрим потенциал простого слоя с этой плотностью $\mu_1(x)$:

$$V_1(x) := \int_\Gamma \mu_1(\xi) \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} \, dS_\xi. \tag{6.13}$$

Повторяя в точности рассуждения, применённые к потенциалу $V_0(x)$, и получим следующее равенство:

$$V_1(x) = c_1 \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega, \tag{6.14}$$

где c_1 — это постоянная. Рассмотрим следующую функцию:

$$\mu_2(x) := c_1\mu_0(x) - c_0\mu_1(x) \in \mathbb{C}(\Gamma) \tag{6.15}$$

и соответствующий потенциал простого слоя:

$$V_2(x) := \int\limits_{\Gamma} \mu_2(\xi) \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\, dS_\xi = c_1 V_0(x) - c_0 V_1(x). \tag{6.16}$$

Очевидно, что по построению имеют место свойства (6.7) и (6.14) и поэтому имеем:

$$V_2(x) = c_1 c_0 - c_0 c_1 = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega. \tag{6.17}$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\partial V_2(x)}{\partial \mathbf{n}_x}\right)_i = \lim_{\Omega \cap l \ni y \to x \in \Gamma} \frac{\partial V_2(y)}{\partial \mathbf{n}_x} = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \Gamma. \tag{6.18}$$

Кроме того, потенциал $V_2(x)$ является решением внешней задачи Дирихле (6.8)–(6.10), что устанавливается точно так же, как и для потенциала $V_0(x)$. В силу единственности решения внешней задачи Дирихле приходим к выводу о том, что

$$V_2(x) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \tag{6.19}$$

Но тогда имеем:

$$\left(\frac{\partial V_2(x)}{\partial \mathbf{n}_x}\right)_e = \lim_{\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega} \cap l \ni y \to x \in \Gamma} \frac{\partial V_2(y)}{\partial \mathbf{n}_x} = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \Gamma. \tag{6.20}$$

Значит, из (6.18) и (6.20) вытекает равенство:

$$0 = \frac{1}{(N-2)\omega_N} \left[\left(\frac{\partial V_2(x)}{\partial \mathbf{n}_x}\right)_i - \left(\frac{\partial V_2(x)}{\partial \mathbf{n}_x}\right)_e \right] = \mu_2(x) \tag{6.21}$$

для всех $x \in \Gamma$. Следовательно, имеем:

$$\mu_2(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma \Rightarrow \mu_1(x) = \frac{c_1}{c_0} \mu_0(x), \quad c_0 \neq 0.$$

Лемма доказана.

§ 7. Разрешимость внутренней задачи Неймана N_i

Рассмотрим соответствующее внутренней задачи Неймана интегральное уравнение: (4.9)

$$\mu(x) + \gamma \int\limits_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\, dS_\xi = \gamma \psi(x) \in \mathbb{C}(\Gamma). \tag{7.1}$$

В силу леммы 1 и теоремы об альтернативах Фредгольма для разрешимости этого интегрального уравнения необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие ортогональности:

$$\int\limits_{\Gamma} 1 \cdot \psi(\xi)\, dS_\xi = 0, \tag{7.2}$$

поскольку функция $\sigma_0(x) = 1$ образует базис пространства решений соответствующего сопряженного однородного уравнения (4.8) внешней задачи Дирихле D_e.

Однако, для внутренней задачи Неймана N_i условие (7.2) является пока только достаточным условием разрешимости. Справедлива следующая теорема:

Теорема 4. *Необходимым и достаточным условием разрешимости внутренней задачи Неймана N_i в классе $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n}; \overline{\Omega})$ является условие* (7.2).

Доказательство. Осталось доказать необходимость.

Пусть задача N_i разрешима и $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n}; \overline{\Omega})$ — это решение. Тогда в силу формулы (3.5) теоремы 3 из лекции 1 справедливо равенство:

$$\int\limits_{\Omega} \Delta u(x)\, dx = \int\limits_{\Gamma} \overline{\frac{\partial u(\xi)}{\partial \mathbf{n}_\xi}}\, dS_\xi,$$

а также с точностью до обозначений:

$$\overline{\frac{\partial u(\xi)}{\partial \mathbf{n}_\xi}} = \left(\frac{\partial u(\xi)}{\partial \mathbf{n}_\xi}\right)_i.$$

Поэтому получим следующие равенства:

$$0 = \int\limits_{\Omega} \Delta u(x)\, dx = \int\limits_{\Gamma} \overline{\frac{\partial u(\xi)}{\partial \mathbf{n}_\xi}}\, dS_\xi = \int\limits_{\Gamma} \left(\frac{\partial u(\xi)}{\partial \mathbf{n}_\xi}\right)_i dS_\xi = \int\limits_{\Gamma} \psi(\xi)\, dS_\xi.$$

Теорема доказана.

§ 8. Разрешимость внешней задачи Дирихле D_e

Если искать решение внешней задачи Дирихле в виде потенциала двойного слоя, то получим уравнение (4.8):

$$\sigma(x) + \gamma \int\limits_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\, dS_\xi = \gamma \varphi(x), \quad \gamma = \frac{2}{(N-2)\omega_N}, \tag{8.1}$$

но тогда в силу леммы 1 для разрешимости уравнения (8.1) необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие ортогональности:

$$\int\limits_{\Gamma} \varphi(\xi)\mu_0(\xi)\, dS_\xi = 0, \tag{8.2}$$

где $\mu_0(\xi)$ — это нетривиальное решение соответствующего однородного сопряжённого уравнения:

$$\mu_0(x) + \gamma \int\limits_{\Gamma} \mu_0(\xi) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\, dS_\xi = 0. \tag{8.3}$$

Однако, с точки зрения исходной внешней задачи Дирихле D_e условие (8.2) является лишь достаточным условием, а не необходимым. Поэтому либо выполнено условие (8.2), либо решение задачи D_e нельзя искать в виде потенциала двойного слоя. И это действительно так, поскольку потенциал двойного слоя убывает при $|x| \to +\infty$ как $1/|x|^{N-1}$, а внешняя задача Дирихле D_i имеет, вообще говоря, решения, убывающие при $|x| \to +\infty$ как $1/|x|^{N-2}$, т.е. медленнее.

□ Действительно, пусть $\Gamma \subset O(0,R)$ при достаточно большом $R > 0$, а $|x| \geqslant 2R$. Тогда точно так же, как при получении оценки (5.4), получим следующую оценку:

$$\left| \int\limits_{\Gamma} \sigma_0(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\, dS_\xi \right| \leqslant (N-2) \int\limits_{\Gamma} |\sigma_0(\xi)| \frac{1}{|\xi - x|^{N-1}}\, dS_\xi \leqslant \\ \leqslant (N-2) \left(\frac{2}{|x|} \right)^{N-1} \int\limits_{\Gamma} |\sigma_0(\xi)|\, dS_\xi \leqslant \\ \leqslant \frac{c_2}{|x|^{N-1}} \quad \text{при} \quad |x| \to +\infty. \quad \boxtimes \tag{8.4}$$

Поэтому если искать решения задачи D_e в виде потенциала двойного слоя, то теряются все решения, убывающие на бесконечности медленнее.

Теперь сделаем ряд нужных для дальнейшего предположения. Пусть начало координат $0 \in \Omega$. Будем искать решение внешней задачи Дирихле D_e в следующем виде:

$$u(x) = \int\limits_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\, dS_\xi + \frac{1}{|x|^{N-2}} \int\limits_{\Gamma} \sigma(\xi)\, dS_\xi. \tag{8.5}$$

Заметим, что правая часть равенства (8.5) для любой функции $\sigma(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$ является гармонической в области $\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}$. Кроме того, интегральный оператор в правой части равенства (8.5) является оператором со слабой особенностью и поэтому вполне непрерывным из $\mathbb{C}(\Gamma)$ в $\mathbb{C}(\Gamma)$.

Используя предельные свойства потенциала двойного слоя мы для внешней задачи Дирихле D_e получим следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$\sigma(x) + \gamma \int\limits_{\Gamma} \sigma(\xi) \left[\frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} + \frac{1}{|x|^{N-2}} \right] dS_\xi = \gamma \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \tag{8.6}$$

к которому применима теория альтернатив Фредгольма. Справедлива следующая теорема:

Т е о р е м а 5. *Внешняя задача Дирихле однозначно разрешима и её решение даётся формулой* (8.5).

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение:

$$\sigma_0(x) + \gamma \int\limits_\Gamma \sigma_0(\xi) \left[\frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} + \frac{1}{|x|^{N-2}} \right] dS_\xi = 0. \tag{8.7}$$

Пусть $\sigma_0(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$ — произвольное решение однородного уравнения (8.7). Построим следующую функцию:

$$u_0(x) := \int\limits_\Gamma \sigma_0(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}}\, dS_\xi + \frac{1}{|x|^{N-2}} \int\limits_\Gamma \sigma_0(\xi)\, dS_\xi. \tag{8.8}$$

Эта функция является гармонической в области $\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}$. В силу равенства (8.7) имеем:

$$\lim_{\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega} \ni x \to x_0 \in \Gamma} u_0(x) = \int\limits_\Gamma \sigma_0(\xi) \left[\frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x_0|^{N-2}} + \frac{1}{|x_0|^{N-1}} \right] dS_\xi + \\ + \frac{(N-2)\omega_N}{2} \sigma_0(x_0) = \\ = \frac{(N-2)\omega_N}{2} \left[\sigma_0(x) + \gamma \int\limits_\Gamma \sigma_0(\xi) \left[\frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|\xi - x_0|^{N-2}} + \frac{1}{|x_0|^{N-2}} \right] dS_\xi \right] = 0 \tag{8.9}$$

для всех $x_0 \in \Gamma$. Отметим, что, с одной стороны, функция

$$u_{02}(x) := \frac{1}{|x|^{N-2}} \int\limits_\Gamma \sigma_0(\xi)\, dS_\xi \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N \backslash \Omega) \tag{8.10}$$

и является гармонической в $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$, поскольку по предположению $0 \in$ $\in \Omega$. С другой стороны, функция

$$u_{01}(x) := \int\limits_\Gamma \sigma_0(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{N-2}}\, dS_\xi \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_w(\mathbb{R}^N \backslash \Omega) \tag{8.11}$$

и тоже гармоническая функция в $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$. Таким образом, из (8.9)–(8.11) вытекает, что функция $u_0(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_w(\mathbb{R}^N \backslash \Omega)$ и является решением внешней задачи Дирихле:

$$\Delta u_0(x) = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}, \tag{8.12}$$

$$\lim_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{\Omega}\ni y\to x\in\Gamma} u_0(y)=0 \quad \text{для всех} \quad x\in\Gamma, \tag{8.13}$$

$$|u_0(x)| \leqslant \frac{c_1}{|x|^{N-2}} \quad \text{при} \quad |x|\to+\infty. \tag{8.14}$$

В силу единственности решения внешней задачи Дирихле D_e имеем:

$$u_0(x)=0 \quad \text{для всех} \quad x\in\mathbb{R}^N\setminus\overline{\Omega}. \tag{8.15}$$

Из равенств (8.8) и (8.15) приходим к уравнению:

$$0=\int\limits_{\Gamma}\sigma_0(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|\xi-x|^{N-2}}\,dS_\xi+\frac{1}{|x|^{N-2}}\int\limits_{\Gamma}\sigma_0(\xi)\,dS_\xi \quad \text{при} \quad x\in\mathbb{R}^N\setminus\overline{\Omega}. \tag{8.16}$$

Поэтому из равенства (8.16) и оценки (8.4) имеем:

$$\int\limits_{\Gamma}\sigma_0(\xi)\,dS_\xi=-|x|^{N-2}\int\limits_{\Gamma}\sigma_0(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|\xi-x|^{N-2}}\,dS_\xi\to+0 \quad \text{при} \quad |x|\to+\infty.$$

Итак, имеем:

$$\int\limits_{\Gamma}\sigma_0(\xi)\,dS_\xi=0. \tag{8.17}$$

В силу (8.17) однородное уравнение (8.7) упрощается и принимает следующий вид:

$$\sigma_0(x)+\gamma\int\limits_{\Gamma}\sigma_0(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|\xi-x|^{N-2}}\,dS_\xi=0. \tag{8.18}$$

Как было показано в лемме 1 это уравнение имеет лишь одно линейно независимое решение — $\sigma_0(x)=1$. Тогда общее решение уравнения (8.18) имеет следующий вид:

$$\sigma_0(x)=C, \tag{8.19}$$

где C — это постоянная. Но тогда из (8.17) и (8.19) вытекает равенство:

$$0=\int\limits_{\Gamma}\sigma_0(\xi)\,dS_\xi=C|\Gamma|\Rightarrow C=0\Rightarrow\sigma_0(x)=0.$$

В силу теоремы об альтернативах Фредгольма уравнение (8.6) однозначно разрешимо в $\mathbb{C}(\Gamma)$.

Теорема доказана.

§ 9. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [1], [4], [10].

Тематическая лекция III

ПРИНЦИП МАКСИМУМА

Лекция 11

СЛАБЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА

§ 1. Слабый принцип максимума в случае ограниченного решения

Рассмотрим эллиптическое уравнение с переменными коэффициентами следующего вида:

$$Lu(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) u_{x_i} + c(x) u(x) = F(x), \tag{1.1}$$

при $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$, где Ω — это область с ляпуновской границей $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha \in (0, 1]$.

Определение 1. *Регулярным или классическим решением уравнения* (1.1) *в области* Ω *назовем функцию* $u(x)$ *из класса* $\mathbb{C}^{(2)}(\Omega)$, *удовлетворяющую уравнению* (1.1) *поточечно.*

Предположим, что коэффициенты $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$ и $c(x)$ уравнения принадлежат классу $\mathbb{C}_b(\overline{\Omega})$, т. е. непрерывны на $\overline{\Omega}$ и ограничены. Кроме того, предположим, что коэффициенты $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ всюду в области Ω удовлетворяют условию эллиптичности — квадратичная форма является положительно определенной:

$$Q(x; \lambda_1, ..., \lambda_n) := \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j > 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega, \quad \lambda \neq (0, ..., 0). \tag{1.2}$$

Определим равномерно эллиптический оператор.

Определение 2. *Оператор* L *вида* (1.1) *называется равномерно эллиптическим, если найдутся такие постоянные* $\vartheta > 0$ *и* $M > 0$, *что*

$$\vartheta |\lambda|^2 \leqslant \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j \leqslant M |\lambda|^2 \tag{1.3}$$

для всех $x \in \Omega$ *и* $\lambda \in \mathbb{R}^N$.

Замечание. Заметим, что в случае эллиптического оператора L второго порядка с переменными коэффициентами естественным граничным условием помимо условия Дирихле является задание не нормальной производной $\mathbf{n}_x$ на границе рассматриваемой области, а задание конормальной производной или производной по конормали, определяемый следующим образом:

$$\cos(\nu_x, \mathbf{e}_i) = \frac{1}{a(x)} \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x) \cos(\mathbf{n}_x, \mathbf{e}_j), \quad \frac{\partial}{\partial \nu_x} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} \cos(\nu_x, \mathbf{e}_i) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

где

$$a^2(x) = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x) \cos(\mathbf{n}_x, \mathbf{e}_j) \right)^2 .$$

Сначала мы рассмотрим вариант слабого принципа максимума в том случае, когда $c(x) = 0$, но при этом либо $Lu \leqslant 0$, либо $Lu \geqslant 0$ в ограниченном открытом множестве Ω. При этом решение $u(x)$ является регулярным и ограниченным.

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — область с границей Γ. Предположим, что $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ и $c(x) \equiv 0$ в Ω и оператор L является равномерно эллиптическим. Если*

$$Lu(x) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1.4}$$

то

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} \overline{u}(x) = \max_{x \in \Gamma} \overline{u}(x). \tag{1.5}$$

Если

$$Lu(x) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1.6}$$

то

$$\min_{x \in \overline{\Omega}} \overline{u}(x) = \min_{x \in \Gamma} \overline{u}(x), \tag{1.7}$$

где $\overline{u}(x)$ — непрерывное продолжение функции $u(x) \in \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ из области Ω до границы Γ.

Доказательство. Докажем, например, что из (1.4) вытекает (1.5), поскольку аналогичным образом доказывается, что из (1.6) вытекает (1.7).

Шаг 1. Сначала предположим, что выполняется строгое неравенство:

$$Lu(x) > 0 \quad \text{в} \quad \Omega \tag{1.8}$$

и существует точка $x_0 \in \Omega$ такая, что

$$u(x_0) = \max_{x \in \overline{\Omega}} \overline{u}(x). \tag{1.9}$$

Тогда в точке максимума x_0 имеем:

$$u_{x_i}(x_0) = 0, \tag{1.10}$$

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} u_{x_i x_j}(x_0)\lambda_i\lambda_j \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_N) \in \mathbb{R}^N. \qquad (1.11)$$

Шаг 2. Поскольку матрица $A = (a_{ij}(x_0))$ симметричная и положительно определенная, то существует такая ортогональная матрица $O = (o_{ij})$, что

$$O^T A O = \mathrm{diag}(d_1, ..., d_N), \quad O^T = O^{-1}, \qquad (1.12)$$

где $d_k > 0$ при $k = \overline{1, N}$. Запишем преобразование (поворот вокруг точки x_0), осуществляемое ортогональной матрицей O,

$$y - x_0 = O(x - x_0) \Rightarrow x - x_0 = O^T(y - x_0)$$

и, следовательно,

$$u_{x_i}(x) = \sum_{k=1}^{N} u_{y_k}(y) o_{ki}, \quad u_{x_i x_j} = \sum_{k,l=1,1}^{N,N} u_{y_k y_l}(y) o_{ki} o_{lj}, \quad i, j = \overline{1, N}.$$

Поэтому в точке x_0 в виду равенства

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x_0) o_{ki} o_{lj} = d_k \delta_{kl}$$

имеем:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x_0) u_{x_i x_j} = \sum_{k,l=1,1}^{N,N} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x_0) u_{y_k y_l} o_{ki} o_{lj} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} d_k u_{y_k y_k}(x_0) \leqslant 0, \qquad (1.13)$$

так как $d_k > 0$ и $u_{y_k y_k}(x_0) \leqslant 0$ при $k = \overline{1, N}$.

Шаг 3. Таким образом, в точке x_0 имеем:

$$Lu(x) = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x_0) u_{x_i x_j}(x_0) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x_0) u_{x_i}(x_0) \leqslant 0$$

ввиду (1.10) и (1.13), что противоречит неравенству (1.8). Следовательно, (1.8) и (1.9) несовместны и справедливо равенство (1.5).

Шаг 4. В общем случае, когда выполнено (1.4), введем следующую функцию:

$$u_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} u(x) + \varepsilon e^{\lambda x_1}, \quad x \in \Omega, \qquad (1.14)$$

где параметр $\lambda > 0$ будет выбран ниже и $\varepsilon > 0$. Отметим, что в силу условия равномерной эллиптичности выполнено следующее неравенство:

$$a_{ii}(x) \geqslant \vartheta > 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \quad i = \overline{1, N}. \tag{1.15}$$

□ Действительно, если в условии (1.3) взять $\lambda = (0, ..., 1, 0, ..., 0)$ с единицей на i–ом месте, то получим неравенство (1.15). ⊠

Поэтому справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} Lu_\varepsilon(x) = Lu(x) + \varepsilon L\left(e^{\lambda x_1}\right) \geqslant \\ \geqslant \varepsilon e^{\lambda x_1}\left[\lambda^2 a_{11}(x) + \lambda b_1(x)\right] \geqslant \\ \geqslant \varepsilon e^{\lambda x_1}\left[\lambda^2\vartheta - \lambda\|b_1\|_{L^\infty(\Omega)}\right] > 0 \quad \text{в} \quad \Omega \end{aligned} \tag{1.16}$$

при достаточно большом $\lambda > 0$. Тогда согласно шагам 1–3 имеем:

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} \overline{u}_\varepsilon(x) = \max_{x\in\Gamma} \overline{u}_\varepsilon(x).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$, получим равенство:

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} \overline{u}(x) = \max_{x\in\Gamma} \overline{u}(x).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай $c(x) \leqslant 0$ и Ω — ограниченная область с границей Γ. Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Предположим, что* $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ *и* $c(x) \leqslant 0$ *в* Ω. *Если*

$$Lu(x) \geqslant 0 \quad \textit{в} \quad \Omega, \tag{1.17}$$

то

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} \overline{u}(x) \leqslant \max_{x\in\Gamma} u^+(x), \tag{1.18}$$

где $u^+ = \max(\overline{u}, 0)$. *Если*

$$Lu(x) \leqslant 0 \quad \textit{в} \quad \Omega, \tag{1.19}$$

то

$$\min_{x\in\overline{\Omega}} \overline{u}(x) \geqslant -\max_{x\in\Gamma} u^-(x), \tag{1.20}$$

где $u^- = -\min(\overline{u}, 0)$, $\overline{u}(x)$ *— непрерывное продолжение функции* $u(x)$ *из области* Ω *до границы* Γ.

Доказательство.

Шаг 1. Пусть выполнено неравенство (1.17). Положим

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \Omega : \ u(x) > 0\},$$

$$\partial V = \partial V_1 \cup \partial V_2, \quad \partial V_1 \subset \{x \in \Omega : u(x) = 0\}, \quad \partial V_2 \subset \Gamma.$$

В силу непрерывности $u(x)$ в $\overline{\Omega}$ множество V является открытым и ограниченным множеством. [1] Тогда

$$Mu(x) \overset{\text{def}}{=} Lu(x) - c(x)u(x) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad V.$$

Оператор M не имеет членов нулевого порядка и, следовательно, в силу теоремы 1 имеют место равенства:

$$\max_{x \in \overline{V}} \overline{u}(x) = \max_{\partial V} \overline{u}(x) \leqslant \max_{x \in \Gamma} u^+.$$

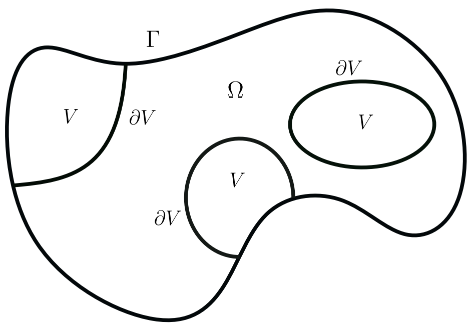


Рис. 27. Множество V его граница ∂V и множество Ω

Поскольку при $x \in \Omega \backslash V$ выполнено неравенство $u(x) \leqslant 0$, то приходим к неравенству:

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} \overline{u}(x) \leqslant \max_{x \in \Gamma} u^+.$$

Отсюда получаем (1.18) в случае $V \neq \varnothing$. В ином случае:

$$u(x) \leqslant 0 \quad \text{всюду в} \quad \Omega,$$

и снова приходим к (1.18).

Шаг 2. Утверждение (1.20) следует из (1.18) для $-u(x)$, поскольку $(-u)^+ = u^-$.

Теорема доказана.

Следствие. *При условиях теоремы 2 в случае, когда $Lu(x) = 0$ в Ω, имеет место равенство:*

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} |\overline{u}(x)| = \max_{x \in \Gamma} |\overline{u}(x)|. \tag{1.21}$$

Доказательство.

[1] Поскольку $V \subset \Omega$, а Ω ограничено.

Действительно, справедливы следующие неравенства:

$$-\max_{x\in\Gamma}|\overline{u}(x)| \leqslant -\max_{x\in\Gamma} u^{-}(x) \leqslant |\overline{u}(x)| \leqslant \max_{x\in\Gamma} u^{+}(x) \leqslant \max_{x\in\Gamma}|\overline{u}(x)|.$$

Следствие доказано.

§ 2. Слабый принцип максимума в общем случае

Справедлив следующий *слабый принцип максимума* в случае регулярного решения, т. е. решения из класса $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega)$. Ясно, что решение может не быть ограниченным. При этом будем для удобства считать, что $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это область.

Теорема 3. *Пусть выполнен один из следующих наборов условий:*

1. *всюду в области Ω имеет место неравенство $c(x) < 0$ и $F(x) = 0$;*
2. *всюду в области Ω имеют место неравенства $c(x) \leqslant 0$ и $F(x) < 0$;*
3. *всюду в области Ω имеют место неравенства $c(x) \leqslant 0$ и $F(x) > 0$.*

Тогда в случае 1 или 2 регулярное в области Ω решение $u(x)$ не может достигать отрицательного локального минимума, а в случае 1 или 3 регулярное в области решение $u(x)$ не может достигать положительного локального максимума.

Доказательство. Докажем, например, что при выполнении одного из набора условий 1 или 2 регулярное решение $u(x)$ не может достигать в области Ω отрицательного локального минимума.

Пусть в точке $x_0 \in \Omega$ достигается отрицательный локальный минимум. Тогда поскольку $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega)$, то в точке x_0 выполнены достаточные условия локального минимума функции $u = u(x)$:

$$u_{x_i}(x_0) = 0, \quad u_{x_i x_j}(x_0)\lambda_i\lambda_j \geqslant 0, \quad \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_N) \in \mathbb{R}^N. \tag{2.1}$$

Кроме того, в силу положительной определенности квадратичной формы (1.2) в точке $x_0 \in \Omega$ имеет место следующее неравенство

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x_0) u_{x_i x_j}(x_0) \geqslant 0. \tag{2.2}$$

Из неравенства (2.2), равенства (2.1) и уравнения (1.1) получим следующее неравенства:

$$c(x_0)u(x_0) \leqslant F(x_0), \quad u(x_0) < 0. \tag{2.3}$$

Тогда в силу выполнения одного из набора условий 1 или 2 из неравенства (2.3) следуют противоречивые неравенства — в случае 1:

$$0 < c(x_0)u(x_0) \leqslant Lu(x_0) = F(x_0) = 0,$$

а в случае 2:

$$0 \leqslant c(x_0)u(x_0) \leqslant Lu(x_0) = F(x_0) < 0.$$

Теорема доказана.

§ 3. Примеры решения задач

Задача 1. Рассмотрим следующий оператор в частных производных второго порядка:

$$Lu(x,y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (1-x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (1-y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

в области $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 1\}$. Доказать, что этот оператор является эллиптическим в области Ω, но не является равномерно эллиптическим.

Решение. Действительно, рассмотрим матрицу характеристической формы:

$$(a_{ij}(x,y))_{i,j=1,1}^{2,2} = \begin{pmatrix} 1-x^2 & xy \\ xy & 1-y^2 \end{pmatrix}.$$

Нужно вычислить корни характеристического уравнения, которое имеет следующий вид:

$$\lambda^2 - (2 - x^2 - y^2)\lambda + 1 - x^2 - y^2 = 0.$$

Можно проверить, что оба корня $\lambda_1(x,y) > 0$ и $\lambda_2(x,y) > 0$ в Ω. Это означает эллиптичность соответствующего оператора L. Однако, при $x^2 + y^2 \to 1$ один из корней стремится к 1, а другой к 0. Следовательно, оператор не является равномерно эллиптическим.

Задача 2. Рассмотрим следующий оператор в частных производных:

$$Lu(x,y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (1+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (1+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Записать конормальную производную решения этого оператора на границе области $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 1\}$.

Решение. Прежде всего заметим, что

$$\mathbf{n}_{(x,y)} = (x,y) \in \Gamma, \quad \Gamma \equiv \{x^2 + y^2 = 1\}, \quad \mathbf{e}_1 = (1,0), \quad \mathbf{e}_2 = (0,1).$$

Поэтому

$$\cos(\nu_{x,y}, \mathbf{e}_1) = \frac{1}{a(x,y)} \sum_{j=1}^{2} a_{1j}(x,y) \cos(\mathbf{n}_{(x,y)}, \mathbf{e}_j) = \frac{1}{a(x,y)} \left[(1+x^2)x - \frac{y}{2}\right],$$

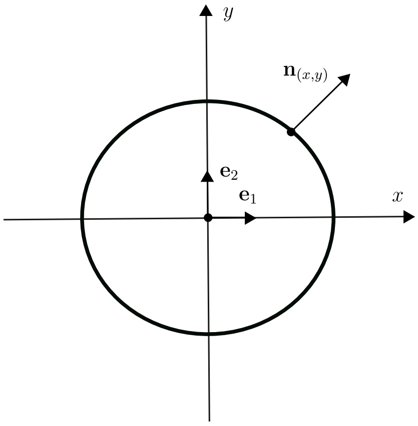


Рис. 28. Область Ω

$$\cos(\nu_{x,y}, \mathbf{e}_2) = \frac{1}{a(x,y)} \sum_{j=1}^{2} a_{2j}(x,y) \cos(\mathbf{n}_{(x,y)}, \mathbf{e}_j) = \frac{1}{a(x,y)} \left[(1+y^2)y - \frac{x}{2} \right],$$

где

$$a(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\left[(1+x^2)x - \frac{y}{2} \right]^2 + \left[(1+y^2)y - \frac{x}{2} \right]^2 \right)^{1/2}.$$

Итак,

$$\frac{\partial}{\partial \nu_{(x,y)}} = \frac{1}{a(x,y)} \left[\left(x + x^3 - \frac{y}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(y + y^3 - \frac{x}{2} \right) \frac{\partial}{\partial y} \right], \quad x^2 + y^2 = 1.$$

§ 4. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [2], [15], [16].

Лекция 12

СИЛЬНЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА

§ 1. Сильный принцип максимума

Утверждение теоремы о слабом принципе максимума (теорема 3 из лекции 11) допускает важное усиление, называемое *принципом Хопфа* или *сильным принципом максимума*.

Теорема 1. *Пусть* $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, *и* $c(x)$ *ограничены в ограниченной области* Ω, *оператор* L *является равномерно эллиптическим*, $u(x) \in \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ *и выполнен один из наборов условий*:

1. *всюду в области* Ω *выполнены неравенства*: $c(x) \leqslant 0$ *и* $F(x) \leqslant 0$;
2. *всюду в области* Ω *выполнены неравенства*: $c(x) \leqslant 0$ *и* $F(x) \geqslant 0$.

Тогда в случае условий 1 *либо ни в какой точке* $x_0 \in \Omega$ *не может достигаться отрицательный глобальный минимум, либо функция* $u(x)$ *постоянная в* Ω :

$$u(x) = u(x_0) \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega.$$

В случае выполнения условий 2 *либо ни в какой точке* $x_0 \in \Omega$ *не может достигаться положительный глобальный максимум, либо функция* $u(x)$ *постоянна в* Ω :

$$u(x) = u(x_0) \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega.$$

Доказательство. Доказательство проведем только для случая отрицательного глобального минимума.

Пусть $x_0 \in \Omega$ — это точка глобального отрицательного минимума регулярного решения $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ уравнения

$$Lu(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)u(x) = F(x). \quad (1.1)$$

Введем множество:

$$\Omega_1 = \left\{x \in \overline{\Omega} : \, \overline{u}(x) = u(x_0)\right\},$$

где $\overline{u}(x)$ непрерывное продолжение функции $u(x) \in \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ с области Ω до границы Γ. Символом $\overline{\Omega}$ обозначено замыкание области Ω. Докажем, что $\Omega_1 = \overline{\Omega}$. Пусть это не так и $\Omega_1 \neq \overline{\Omega}$. Тогда

$$\Omega_1 \subset \overline{\Omega}.$$

Шаг 1. Множество $\overline{\Omega}$ является по определению замкнутым. Докажем, что множество Ω_1 замкнуто.

□ Действительно, пусть $\{x_n\} \subset \overline{\Omega}$ и

$$|x_n - x| \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty \Rightarrow x \in \overline{\Omega}, \quad |\overline{u}(x_n) - \overline{u}(x)| \to +0$$

и, следовательно,

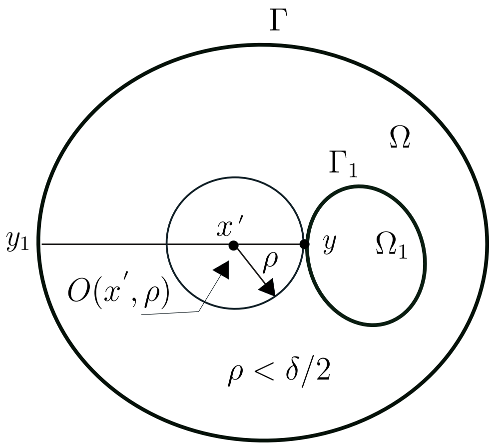
$$\overline{u}(x_n) = \overline{u}(x_0) \Rightarrow \overline{u}(x) = \overline{u}(x_0), \quad x \in \overline{\Omega} \Rightarrow x \in \Omega_1.$$

Таким образом, множество Ω_1 замкнуто. ⊠

Шаг 2. Поскольку множества $\overline{\Omega}$ и Ω_1 замкнуты и не совпадают, то

$$\exists\, y \in \Gamma_1 \cap \Omega, \quad \inf_{x \in \Gamma} |x - y| = \delta > 0.$$

Пусть точка $x' \in \Omega \backslash \Omega_1$ такова, что $|x' - y| < \delta/2$. Тогда $\overline{O}(x', \rho) \subset \Omega$



y_1 — точка из Γ такая, что $|y_1 - x| = \inf\limits_{x \in \Gamma} |x - y| = \delta$

Рис. 29. Точки y и x'

при $\rho < \delta/2$. Определим число $r' > 0$ таким образом, чтобы

$$r' = \sup_{\overline{O}(x',\rho) \subset \Omega \backslash \overline{\Omega}_1} \{\rho\}.$$

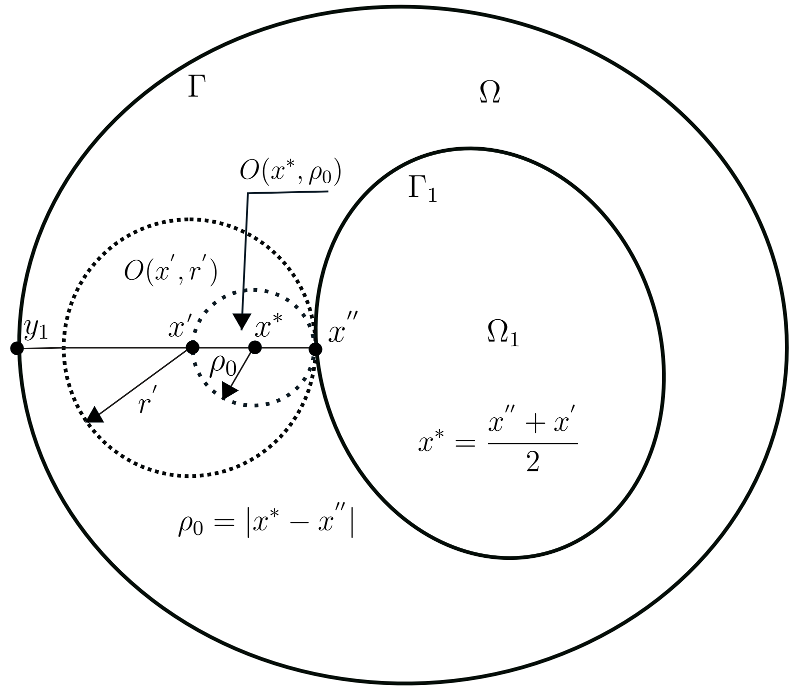


Рис. 30. Построение шаров $O(x', r')$ и $O(x^*, \rho_0)$

Тогда

$$\exists\, x'' \in \overline{O}(x', r') \cap \Gamma_1.$$

Шаг 3. Пусть x^* — середина прямолинейного отрезка, соединяющего точки x' и x'' и

$$\rho_0 = |x^* - x''|, \quad r(x) = |x - x^*|, \quad x \in \Omega. \tag{1.2}$$

Прежде всего заметим, что поскольку $x'' \in \Gamma_1 \subset \Omega_1$ и Ω_1 замкнуто, то

$$u(x'') = u(x_0) \quad \text{и} \quad u(x) > u(x_0) \quad \text{для всех} \quad x \in O(x^*, \rho_0),$$

так как шар $O(x^*, \rho_0)$ лежит в области $\Omega \backslash \Omega_1$.

Шаг 4. Выберем число $\rho_1 = \rho_0/2$. Тогда

$$\overline{O}(x'', \rho_1) \subset \Omega.$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$v(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\gamma\rho_0^2} - e^{-\gamma r^2(x)}, \quad \rho_0 = |x^* - x''|, \quad r(x) = |x - x^*|. \tag{1.3}$$

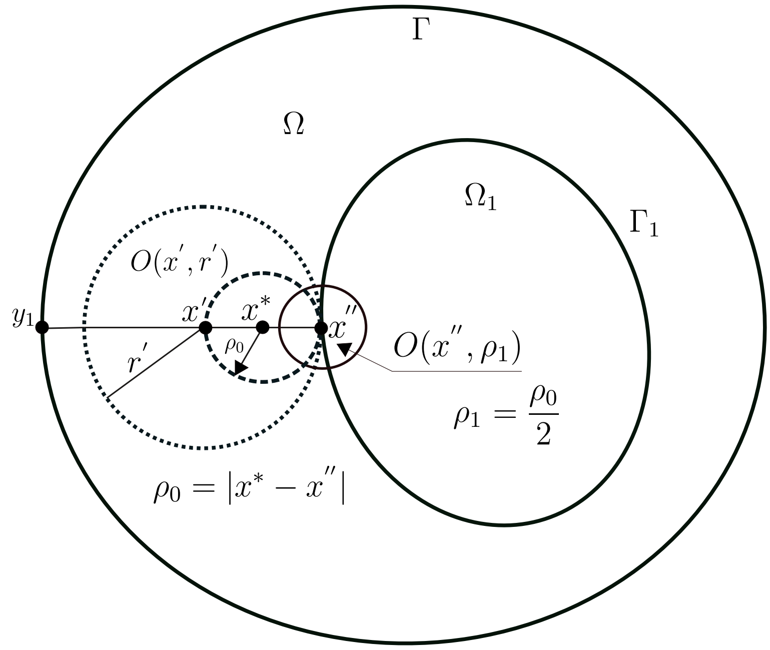


Рис. 31. Шар $O(x'', \rho_1)$

Для функции $v(x)$ справедливы равенства:

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x_i} = e^{-\gamma r^2(x)} 2\gamma (x_i - x_i^*),$$

$$\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_i \partial x_j} = -4\gamma^2 e^{-\gamma r^2(x)} (x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*) + 2\gamma e^{-\gamma r^2(x)} \delta_{ij}.$$

Поэтому

$$L(v)(x) = e^{-\gamma r^2(x)} \Bigg[-4\gamma^2 \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x)(x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*) + \\ + 2\gamma \sum_{j=1}^{N} a_{jj}(x) + 2\gamma \sum_{i=1}^{N} b_i(x)(x_i - x_i^*) + c(x) \left(e^{\gamma r^2(x) - \gamma \rho_0^2} - 1 \right) \Bigg].$$

Шаг 5. Прежде всего, заметим, что имеет место следующее неравенство:

$$\gamma r^2(x) - \gamma \rho_0^2 \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{O}(x'', \rho_1) \cap \{ r(x) = |x - x^*| \geqslant \rho_0 \}. \quad (1.4)$$

Следовательно, поскольку по условию, что существенно, $c(x) \leqslant 0$, то

$$\boxed{c(x) \left(e^{\gamma r^2(x) - \gamma \rho_0^2} - 1 \right) \leqslant 0} \qquad (1.5)$$

при $x \in \overline{O}(x'', \rho_1) \cap \{|x - x^*| \geqslant \rho_0\}$. С другой стороны,

$$1 > e^{\gamma r^2(x) - \gamma\rho_0^2} = e^{-\gamma(\rho_0^2 - r^2(x))} \to +0 \quad \text{при} \quad \gamma \to +\infty,$$

если $r(x) := |x - x^*| < \rho_0$. Поэтому в силу ограниченности $c(x)$ получим, что

$$\boxed{\left|c(x)\left(e^{\gamma r^2(x) - \gamma\rho_0^2} - 1\right)\right| \leqslant |c(x)| \leqslant c_1 := \sup_{x\in\Omega} |c(x)| < +\infty} \tag{1.6}$$

при $x \in \overline{O}(x'', \rho_1) \cap \{|x - x^*| < \rho_0\}$.

Шаг 6. Осталось заметить, что при достаточно большом $\gamma > 0$ при учёте условия ограниченности коэффициентов $a_{ij}(x)$ и $b_i(x)$, а также в силу равномерной эллиптичности оператора L получим, что

$$\begin{gathered}
-4\gamma^2 \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x)(x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*) + 2\gamma \sum_{j=1}^{N} a_{jj}(x) + \\
+ 2\gamma \sum_{i=1}^{N} b_i(x)(x_i - x_i^*) + c_1 < 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{O}(x'', \rho_1).
\end{gathered} \tag{1.7}$$

$\square$ Действительно, в силу равномерной эллиптичности оператора имеют место неравенства снизу:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x)(x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*) \geqslant \vartheta|x - x^*|^2 = \vartheta r^2(x) \geqslant d := \vartheta\frac{\rho_0^2}{4} > 0,$$

$$a_{jj}(x) \geqslant \vartheta > 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \overline{O}(x'', \rho_1).$$

Кроме того, в силу ограниченности коэффициентов $b_i(x)$ справедлива оценка сверху:

$$|b_i(x)(x_i - x_i^*)| \leqslant M_1 \quad \text{для всех} \quad x \in \overline{O}(x'', \rho_1).$$

Тогда справедлива оценка сверху:

$$\begin{gathered}
-4\gamma^2 \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x)(x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*) + \\
+ 2\gamma \sum_{j=1}^{N} a_{jj}(x) + 2\gamma \sum_{i=1}^{N} b_i(x)(x_i - x_i^*) + c_1 \leqslant \\
\leqslant -4\gamma^2 d + 2\gamma\vartheta + 2\gamma M + c_1 < 0
\end{gathered}$$

при достаточно большом $\gamma > 0$ для всех $x \in \overline{O}(x'', \rho_1)$. $\boxtimes$

Следовательно, при фиксированном $\rho_0 > 0$ и достаточно большом $\gamma > 0$ справедливо неравенство:

$$L(v)(x) < 0 \quad \text{при} \quad x \in O(x'', \rho_1). \tag{1.8}$$

Шаг 7. Введем следующую функцию:

$$\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} u(x) + \lambda v(x), \quad \lambda > 0.$$

Разобьем границу $\partial O(x'', \rho_1)$ шара $O(x'', \rho_1)$ на две части:

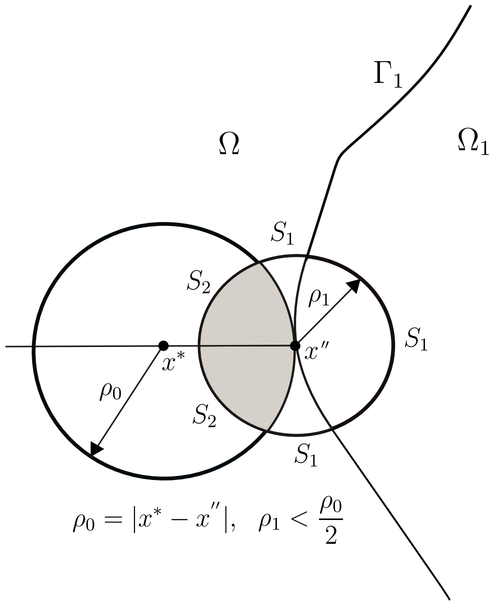


Рис. 32. Шар $O(x'', \rho_1)$ и его граница $\partial O(x'', \rho_1) = S_1 \cup S_2$

$$\partial O(x'', \rho_1) = S_1 \cup S_2,$$
$$S_1 = \{x \in \partial O(x'', \rho_1) : |x - x^*| \geqslant \rho_0\},$$
$$S_2 = \{x \in \partial O(x'', \rho_1) : |x - x^*| < \rho_0\}.$$

Тогда на границе S_1, там где $|x - x^*| > \rho_0$, имеем $v(x) > 0$ и $u(x) \geqslant u(x_0)$, а там, где $|x - x^*| = \rho_0$, мы имеем $v(x) = 0$ и $u(x) > u(x_0)$. Следовательно, всегда

$$\varphi(x) > u(x_0) \quad \text{при} \quad x \in S_1.$$

Теперь за счет выбора достаточно малого $\lambda > 0$, ограниченности функции $v(x) < 0$ при $x \in S_2$ и $u(x) > u(x_0)$ при $x \in S_2$ мы приходим к выводу о том, что

$$\varphi(x) > u(x_0) \quad \text{при} \quad x \in S_2.$$

Шаг 8. Следовательно, всегда

$$\varphi(x) > u(x_0) \quad \text{при} \quad x \in \partial O(x'', \rho_1). \tag{1.9}$$

С другой стороны, справедливо неравенство ($F(x) \leqslant 0$ в $\Omega \supset O(x'', \rho_1)$):

$$L(\varphi)(x) = F(x) + \lambda L(v)(x) < 0 \quad \text{при} \quad x \in O(x'', \rho_1). \tag{1.10}$$

Наконец, по определению функции $v(x'') = 0$ и поэтому $\varphi(x'') = u(x'') = u(x_0) < 0$.

Следовательно,

$$L(\varphi)(x) < 0, \quad c(x) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in O(x'', \rho_1).$$

При этом в точке $x = x''$ — центре шара $O(x'', \rho_1)$ имеет место неравенство:

$$\varphi(x'') = u(x_0) < 0,$$

а на границе шара:

$$\varphi(x) > u(x_0) \quad \text{при} \quad x \in \partial O(x'', \rho_1).$$

Функция $\varphi(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{O(x'', \rho_1)})$. Следовательно, либо в точке x'', либо в другой точке шара $O(x'', \rho_1)$ достигается локальный отрицательный минимум.

Стало быть, имеет место противоречие со слабым принципом максимума. Значит, $\Omega_1 = \overline{\Omega}$.

Теорема доказана.

Замечание 1. В том случае, если $c(x) = 0$ в Ω слова «положительный глобальный максимум» и «отрицательный глобальный минимум» можно заменить на соответствующие слова «глобальный максимум» и «глобальный минимум».

§ 2. Следствия из принципа Хопфа

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область. Из принципа Хопфа вытекают следующие важные следствия:

Следствие 1. *Пусть* $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ *и* $c(x) \leqslant 0$. *Если*

$$Lu(x) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \overline{u}(x) \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{2.1}$$

то имеет место следующее неравенство:

$$u(x) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{2.2}$$

Если

$$Lu(x) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \overline{u}(x) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{2.3}$$

тогда имеет место следующее неравенство:

$$u(x) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{2.4}$$

где $\overline{u}(x)$ *— непрерывное продолжение функции* $u(x) \in \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ *из области* Ω *до границы* Γ.

Доказательство.

Шаг 1. Действительно, пусть выполнены неравенства (2.1), а неравенство (2.2) нарушено в некоторой точке $x_0 \in \Omega$:

$$u(x_0) > 0.$$

Тогда это означает наличие положительного локального максимума в некоторой точке области Ω. Кроме того, поскольку область $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ является ограниченной, то существует такая точка $x_{00} \in \Omega$, возможно совпадающая с точкой x_0, что в ней достигается глобальный положительный максимум в $\overline{\Omega}$. Поэтому для всех точек $x \in \overline{\Omega}$ выполнено неравенство:

$$\overline{u}(x) \leqslant u(x_{00}) \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega},$$

но тогда в силу принципа Хопфа получим, что $\overline{u}(x) = u(x_{00})$ всюду в $\overline{\Omega}$. Поскольку

$$\overline{u}(x) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma \Rightarrow 0 \geqslant \overline{u}(x) = u(x_{00}) > 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma,$$

то приходим к противоречию.

Следовательно,

$$u(x) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Шаг 2. Доказательство свойства (2.4) при выполнении неравенств (2.3) проводится аналогичным образом на основе принципа Хопфа.

Следствие доказано.

Следствие 2. *Пусть* $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$, $u(x) \neq const$ *и*

$$Lu(x) = 0 \quad \text{и} \quad c(x) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Тогда имеет место следующее неравенство:

$$|u(x)| < \max_{x \in \Gamma} |\overline{u}(x)| \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{2.5}$$

где $\overline{u}(x)$ *— непрерывное продолжение функции* $u(x) \in \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ *из области* Ω *до границы* Γ.

Доказательство. Пусть

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x \in \Gamma} |\overline{u}(x)|.$$

Шаг 1. Рассмотрим сначала функцию

$$v(x) = \overline{u}(x) - M.$$

Тогда имеем:

$$Lv(x) = Lu(x) - Mc(x) = -Mc(x) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$v(x) \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \Gamma.$$

Следовательно, в силу следствия 1 имеем:

$$v(x) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega \Rightarrow \overline{u}(x) \leqslant M \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Шаг 2. Рассмотрим теперь функцию

$$w(x) = \overline{u}(x) + M.$$

Тогда имеем:

$$Lw(x) = Lu(x) + Mc(x) = Mc(x) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$w(x) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \Gamma.$$

Следовательно, в силу следствия 1 имеем:

$$w(x) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega \Rightarrow \overline{u}(x) \geqslant -M \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Шаг 3. Итак,

$$-M \leqslant \overline{u}(x) \leqslant M \quad \text{в} \quad \Omega \Rightarrow \max_{x \in \overline{\Omega}} |\overline{u}(x)| = \max_{x \in \Gamma} |\overline{u}(x)|.$$

Заметим, что если

$$M = 0 \Rightarrow \overline{u}(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Но это противоречит условию $u(x) \neq const$. Следовательно, заключаем, что $M > 0$.

Предположим, что существует точка $x_0 \in \Omega$, в которой $u(x_0) = M > 0$, но тогда

$$u(x_0) = \max_{x \in \Gamma} |\overline{u}(x)| = \max_{x \in \overline{\Omega}} |\overline{u}(x)|$$

и поэтому в этой точке достигается положительный глобальный максимум функции $u(x)$, что противоречит сильному принципу максимума. Следовательно, поскольку $u(x) \neq const$, то рассуждая точно так же, как на шаге 1 следствия 1, получим строгое неравенство:

$$u(x) < M \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{2.6}$$

Аналогично,

$$u(x) > -M \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{2.7}$$

С л е д с т в и е д о к а з а н о

Следующее утверждение получено из принципа Хопфа при условии, что $c(x) = 0$.

С л е д с т в и е 3. *Если* $c(x) = 0$ *всюду в* Ω, *то для непостоянного в области* Ω *решения* $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$, *соответствующего однородного эллиптического уравнения* (1.1), *выполнено неравенство*:

$$\min_{x \in \Gamma} \overline{u}(x) < u(x) < \max_{x \in \Gamma} \overline{u}(x) \quad \textit{в} \quad x \in \Omega. \tag{2.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Введем следующие обозначения:

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x \in \Gamma} \overline{u}(x), \quad m \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \Gamma} \overline{u}(x). \tag{2.9}$$

Шаг 1. Рассмотрим функции

$$v(x) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{u}(x) - M, \quad w(x) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{u}(x) - m.$$

Точно так же как и при доказательстве следствия 2 получим, что

$$v(x) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad w(x) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Итак,

$$m \leqslant u(x) \leqslant M \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{2.10}$$

Шаг 2. Теперь предположим, что найдется такая точка $x_0 \in \Omega$, что

$$u(x_0) = M.$$

Тогда функция $u(x)$ достигает глобального на $\overline{\Omega}$ максимума в этой точке. Значит, в силу принципа Хопфа с учетом замечания 1 функция $u(x) = const$ в области Ω, что противоречит условиям утверждения. Следовательно,

$$u(x) < M \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Аналогично получаем, что

$$u(x) > m \quad \text{в} \quad \Omega.$$

С л е д с т в и е д о к а з а н о.

Рассмотрим *первую краевую задачу* или *задачу Дирихле* при $c(x) \leqslant 0$ в ограниченной области Ω с границей Γ.

З а д а ч а Д и р и х л е. Найти решение $u(x)$ из класса $\mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ следующей краевой задачи в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ с границей $\Gamma \in \mathbb{C}^{(1,\alpha)}$ при $\alpha \in (0, 1]$:

$$Lu(x) = F(x) \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \lim_{\Omega \ni x \to x_0 \in \Gamma} u(x) = f(x_0), \quad x_0 \in \Gamma \tag{2.11}$$

при условии, что $F(x)$ и $f(x)$ определены на Ω и Γ соответственно.

Непосредственным приложением следствия 2 является следующая теорема:

Теорема единственности 1. *Существует не более одного решения задачи Дирихле.*

Замечание о геометрии области Ω. *Если диаметр области Ω достаточно мал, то задача Дирихле для равномерно эллиптического оператора L имеет не более одного решения.* [1])

Доказательство замечания.

Шаг 1. Пусть

$$0 < d \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x,y\in\Omega} |x-y|, \quad |x-y| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i-y_i)^2}$$

— диаметр области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

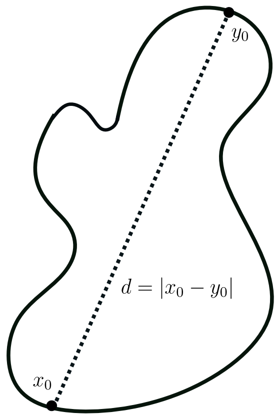


Рис. 33. Диаметр d области

Рассмотрим функцию

$$w(x) \stackrel{\text{def}}{=} 2d^2 - |x-x_0|^2,$$

где $x_0 \in \Omega$ — это любая точка (внутренняя области Ω). В частности,

$$w(x) \geqslant d^2 \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega.$$

С одной стороны, в области Ω имеет место оценка сверху:

[1]) Значение этого результата в том, что отсутствует условие на знак коэффициента $c(x) \leqslant 0$.

$$Lw(x) = -2\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x) - 2\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_{0i})b_i(x) + c(x)w(x) \leqslant$$
$$\leqslant -2\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x) + 2d\sum_{i=1}^{N}\max_{x\in\overline{\Omega}}|b_i(x)| + d^2\max_{x\in\overline{\Omega}}|c(x)|.$$

С другой стороны, в силу равномерной эллиптичности оператора L выполнено неравенство:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \vartheta|\xi|^2 \quad \text{для всех} \quad x\in\Omega$$

для всех $\xi\in\mathbb{R}^N$ при некоторой постоянной эллиптичности $\vartheta>0$. Положим в последнем неравенстве $\xi=(0,...,\xi_i,0,...,0)$ при $\xi_i=1$. Тогда получим следующее неравенство:

$$a_{ii}(x)\geqslant\vartheta>0 \quad \text{для всех} \quad x\in\Omega.$$

Следовательно,

$$-2\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x)\leqslant -2N\vartheta.$$

Поэтому при достаточно малом $d>0$ имеем:

$$Lw(x)\leqslant -2N\vartheta + 2d\sum_{i=1}^{N}\max_{x\in\overline{\Omega}}|b_i(x)| + d^2\max_{x\in\overline{\Omega}}|c(x)| < 0$$

для всех $x\in\Omega$.

Шаг 2. Введем новую функцию $u(x)$ следующим образом:

$$v(x)=u(x)w(x), \quad v(x)=u_1(x)-u_2(x) \tag{2.12}$$

где $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — это два решения задачи Дирихле класса $\mathbb{C}^{(2)}(\Omega)\cap\cap\,\mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$. Тогда с учетом равенства

$$Lv(x)=0$$

приходим к следующей задачи для $u(x)$:

$$\widehat{L}u(x)\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{i,j=1,1}^{N,N}\widehat{a}_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{N}\widehat{b}_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}+\widehat{c}(x)u(x)=0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$\widehat{c}(x)=Lw(x)<0 \quad \text{при} \quad x\in\Omega, \qquad \lim_{\Omega\ni x\to x_0\in\Gamma}u(x)=0 \quad \text{для всех} \quad x_0\in\Gamma.$$

Решение этой задачи в классе $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ единственно в силу теоремы единственности 1 и поэтому $u(x) = 0$ в Ω. Значит, из (2.12) получаем, что $v(x) = 0$, т.е. $u_1(x) = u_2(x)$ в Ω.

З а м е ч а н и е д о к а з а н о.

П р и з н а к с р а в н е н и я. Пусть функции $v(x), w(x) \in \mathbb{C}^{(2)} \cap \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ — решение следующей задачи:

$$Lv(x) \leqslant Lw(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{2.13}$$

$$\lim_{\Omega \ni y \to x \in \Gamma} v(y) \geqslant \lim_{\Omega \ni y \to x \in \Gamma} w(y) \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \tag{2.14}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с границей Γ. Тогда при условиях $a_{ij}(x), b_i(x), c(x) \in \mathbb{C}_b(\Omega)$, $c(x) \leqslant 0$ всюду в области Ω и равномерной эллиптичности оператора L, имеем

$$v(x) \geqslant w(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega.$$

□ Действительно, рассмотрим разность $u(x) = \overline{v}(x) - \overline{w}(x) \in \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, которая удовлетворяет следующей задаче:

$$Lu(x) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{2.15}$$

$$\lim_{\Omega \ni y \to x \in \Gamma} u(y) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma. \tag{2.16}$$

Предположим, что найдется точка $x \in \overline{\Omega}$, в которой $u(x) < 0$. Очевидно, что в силу (2.16) эта точка может лежать только в Ω. Но тогда в какой-то точке $x_0 \in \Omega$ функция $u(x)$ достигает глобального отрицательного минимума. С одной стороны, согласно принципа максимума из теоремы 1 приходим к выводу о том, что $u(x) = const < 0$ всюду в Ω. С другой стороны, поскольку по построению $u(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, то в силу (2.16) $u(x) = = const \geqslant 0$. Приходим к противоречию. Значит, всюду в области Ω имеем: $v(x) \geqslant w(x)$. ⊠

А п р и о р н а я о ц е н к а. В классе $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ при условии $c(x) \leqslant 0$ для любого решения задачи Дирихле

$$Lu(x) = f(x) \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \tag{2.17}$$

$$u(x) = g(x) \quad \text{для} \quad x \in \Gamma, \tag{2.18}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha \in (0, 1]$ справедлива следующая априорная оценка:

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)| \leqslant \max \left\{ \sup_{x \in \Omega} \left| \frac{f(x)}{c(x)} \right|, \sup_{x \in \Gamma} |g(x)| \right\}. \tag{2.19}$$

□ Действительно,достаточно рассмотреть случай когда правая часть в неравенстве (2.19) ограничена. Рассмотри два барьера

$$v_1(x) := \max \left\{ \sup_{x \in \Omega} \left| \frac{f(x)}{c(x)} \right|, \sup_{x \in \Gamma} |g(x)| \right\}, \tag{2.20}$$

$$v_2(x) := -\max\left\{\sup_{x\in\Omega}\left|\frac{f(x)}{c(x)}\right|, \sup_{x\in\Gamma}|g(x)|\right\}. \tag{2.21}$$

Эти барьеры удовлетворяют неравенствам

$$Lv_1(x) = c(x)v_1 \leqslant c(x)\sup_{x\in\Omega}\left|\frac{f(x)}{c(x)}\right| \leqslant$$
$$\leqslant c(x)\left|\frac{f(x)}{c(x)}\right| \leqslant c(x)\frac{f(x)}{c(x)} = f(x) \quad \text{для} \quad x\in\Omega, \tag{2.22}$$

$$v_1(x) \geqslant \sup_{x\in\Gamma}|g(x)| \geqslant g(x) \quad \text{для} \quad x\in\Gamma, \tag{2.23}$$

$$Lv_2(x) = c(x)v_2 \geqslant -c(x)\sup_{x\in\Omega}\left|\frac{f(x)}{c(x)}\right| \geqslant$$
$$\geqslant |c(x)|\left|\frac{f(x)}{c(x)}\right| = |f(x)| \geqslant f(x) \quad \text{для} \quad x\in\Omega, \tag{2.24}$$

$$v_2(x) \leqslant -\sup_{x\in\Gamma}|g(x)| \leqslant g(x) \quad \text{для} \quad x\in\Gamma. \tag{2.25}$$

В силу доказанного признака сравнения приходим к неравенствам

$$v_2(x) \leqslant u(x) \leqslant v_1(x) \quad \text{для} \quad x\in\overline{\Omega},$$

из которого вытекает искомая априорная оценка (2.19). ☒

§ 3. Признак сравнения для нелинейных эллиптических операторов и некоторые примеры

В этом параграфе доказывается признак сравнения для нелинейных эллиптических уравнений на плоскости. Пусть

$$F(x,y,u,p,q,r,s,t) \in \mathbb{C}^{(1)}(E), \quad (x,y,u,p,q,r,s,t)\in E,$$

где E — это область в $\mathbb{R}^8$. Рассмотрим следующее уравнение в области $(x,y)\in\Omega$:

$$F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x,y). \tag{3.1}$$

Уравнение (3.1) — нелинейное эллиптическое уравнение, если для всех (ξ,η) таких, что

$$\xi^2+\eta^2>0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial r}\xi^2 + \frac{\partial F}{\partial s}\xi\eta + \frac{\partial F}{\partial t}\eta^2 > 0.$$

ПРИМЕР 1. Если

$$F = (1-p^2)r + (1+q^2)t + 1,$$

то получим следующее нелинейное уравнение в частных производных:

$$\left[1-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left[1+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 1 = f(x,y).$$

Заметим, что это уравнение эллиптическое, при условии:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < 1$$

и гиперболическое, при условии:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| > 1.$$

Справедлива следующая теорема о признаке сравнения:
Теорема 2. *Пусть* $u(x,y) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ *— это решение задачи Дирихле*:

$$F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy}) = f(x,y) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{3.2}$$

$$u(x,y) = g(x,y) \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{3.3}$$

Пусть $z(x,y)$ *и* $Z(x,y)$ *того же класса* $\mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ *удовлетворяют неравенствам*:

$$F(x,y,Z,Z_x,Z_y,Z_{xx},Z_{xy},Z_{yy}) \leqslant f(x,y) \leqslant$$
$$\leqslant F(x,y,z,z_x,z_y,z_{xx},z_{xy},z_{yy}) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{3.4}$$

$$z(x,y) \leqslant g(x,y) \leqslant Z(x,y) \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{3.5}$$

Предположим, что для всех $\sigma \in [0,1]$ *функция*

$$F(x,y,m,m_x,m_y,m_{xx},m_{xy},m_{yy})$$

порождает эллиптический оператор, где

$$m = \sigma z + (1-\sigma)u \quad \text{или} \quad m = \sigma u + (1-\sigma)Z \tag{3.6}$$

и выполнено условие

$$\frac{\partial F}{\partial u} \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x,y,u,p,q,r,s,t) \in E = \Omega \times \mathbb{R}^6. \tag{3.7}$$

Тогда справедливы неравенства:

$$z(x,y) \leqslant u(x,y) \leqslant Z(x,y) \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{3.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . *Шаг 1.* Доказательство теоремы основано на принципе максимума и формулы среднего значения. Действительно, пусть

$$h(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} v(x,y) - w(x,y). \tag{3.9}$$

Рассмотрим неравенство

$$\begin{aligned} F(x,y,v,v_x,v_y,v_{xx},v_{xy},v_{yy}) - F(x,y,w,w_x,w_y,w_{xx},w_{xy},w_{yy}) = \\ = \int\limits_0^1 \frac{d}{d\sigma} F(x,y,m,m_x,m_y,m_{xx},m_{xy},m_{yy})\, d\sigma, \end{aligned} \tag{3.10}$$

где $m = \sigma v + (1-\sigma)w$. Справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma}F(x,y,m,m_x,m_y,m_{xx},m_{xy},m_{yy}) = \\ = \frac{\partial F}{\partial r}\frac{dm_{xx}}{d\sigma} + \frac{\partial F}{\partial s}\frac{dm_{xy}}{d\sigma} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{dm_{yy}}{d\sigma} + \\ + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{dm_{x}}{d\sigma} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{dm_{y}}{d\sigma} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{dm}{d\sigma} = \\ = \frac{\partial F}{\partial r}h_{xx} + \frac{\partial F}{\partial s}h_{xy} + \frac{\partial F}{\partial t}h_{yy} + \\ + \frac{\partial F}{\partial p}h_{x} + \frac{\partial F}{\partial q}h_{y} + \frac{\partial F}{\partial u}h. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Подставим итоговое равенство из (3.11) в (3.10) и получим равенство:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)_\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \\ + \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_\sigma \frac{\partial h}{\partial x} + \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_\sigma \frac{\partial h}{\partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_\sigma h \geqslant 0, \end{aligned} \tag{3.12}$$

где, например,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)_\sigma (x,y) = \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial r} F(x,y,m,m_x,m_y,m_{xx},m_{xy},m_{yy})\, d\sigma, \tag{3.13}$$

$$m(x,y) = \sigma v(x,y) + (1-\sigma) w(x,y).$$

Шаг 2. Пусть $v = z$ и $w = u$. Тогда для $h = z - u$ из (3.4) и (3.5) получим следующую задачу:

$$Lh(x,y) = \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)_\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} +$$

$$+\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_\sigma \frac{\partial h}{\partial x} + \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_\sigma \frac{\partial h}{\partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_\sigma h \geqslant 0, \quad (x,y) \in \Omega, \tag{3.14}$$

$$h(x,y) \leqslant 0 \quad \text{для} \quad (x,y) \in \Gamma. \tag{3.15}$$

Осталось воспользоваться следствием 1 из принципа максимума и получить первое неравенство из (3.8).

Шаг 3. Пусть теперь $v = u$ и $w = Z$. Тогда точно также получим второе неравенство из (3.8).

Теорема доказана.

ПРИМЕР 2. Широко известными являются два уравнения на плоскости. Первое уравнение — это уравнение минимальной поверхности:

$$\left(1+u_y^2\right)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy} = 0. \tag{3.16}$$

Второе уравнение — это уравнение Монжа–Ампера:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 = f(x,y). \tag{3.17}$$

Прежде всего отметим, что уравнение (3.16) всегда эллиптическое.

□ Действительно,

$$F = \left(1+q^2\right)r - 2pqs + \left(1+p^2\right)t,$$

$$\begin{aligned} &F_r\xi^2 + F_s\xi\eta + F_t\eta^2 = \\ &\qquad = \left(1+q^2\right)\xi^2 - 2pq\xi\eta + \left(1+p^2\right)\eta^2 = \\ &\qquad\qquad = \xi^2 + \eta^2 + (q\xi - p\eta)^2 > 0 \quad \text{при} \quad \xi^2+\eta^2 > 0. \quad \boxtimes \end{aligned}$$

Заметим, что решением уравнения (3.16) является константа и всегда

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0.$$

Поэтому если ввести константы

$$M = \max_{(x,y)\in\Gamma} u(x,y), \quad m = \min_{(x,y)\in\Gamma} u(x,y),$$

то в силу теоремы 2 получим, что

$$m \leqslant u(x,y) \leqslant M \quad \text{для всех} \quad (x,y) \in \Omega.$$

Рассмотрим теперь уравнение Монжа–Ампера. Это уравнение эллиптическое, тогда и только тогда, когда

$$rt - s^2 > 0.$$

Если потребовать, чтобы $f(x, y) > 0$ всюду в области Ω, то уравнение (3.17) эллиптическое для всех решений. Рассмотрим частный случай:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 = 1 \quad \text{в} \quad x^2 + y^2 < 1,$$

$$u(x, y) = 1 \quad \text{на} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Этой задаче удовлетворяют две функции:

$$Z(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad z(x, y) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Таким образом, единственности нет. Более того, здесь нельзя применить теорему 2, поскольку сложно проверить, что уравнение остается эллиптическим для всего семейства функций

$$u + \vartheta(z - u), \quad \vartheta \in [0, 1].$$

К примеру на функции

$$\frac{1}{2}(Z(x, y) + z(x, y))$$

оператор Монжа–Ампера не является эллиптическим.

§ 4. Примеры решения задач

Задача 1. Пусть $u = u(x, y) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ — это решение нелинейного уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u^2 = 0 \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Доказать, что это решение не достигает своего максимума в Ω за исключением решения $u(x, y) \equiv 0$.

Решение. Заметим, что каждое решение нелинейного уравнения удовлетворяет неравенству:

$$\Delta u(x, y) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Поэтому, по–доказанному, если

$$u(x, y) \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \Gamma,$$

то

$$u(x, y) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega.$$

После чего доказываем, что

$$u(x,y) \leqslant \max_{(x,y)\in\Gamma} u(x,y).$$

Теперь осталось воспользоваться сильным принципом максимума и получить, что либо

$$u(x,y) = const \quad \text{в} \quad \Omega \Rightarrow const = 0,$$

либо

$$u(x,y) < \max_{(x,y)\in\Gamma} u(x,y) \quad \text{в} \quad \Omega.$$

§ 5. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [2], [15].

Лекция 13

ЛЕММА ЖИРО

§ 1. Лемма Жиро

Пусть $\mathbf{n}_x$ — это поле внешних нормалей на ляпуновской границе $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha \in (0,1]$, l_x — это поле внешних не касательных направлений, т. е. таких векторов l_x, что

$$\cos(\mathbf{n}_x, l_x) > 0. \tag{1.1}$$

Для ляпуновской границы неравенство (1.1) означает, что в каждой точке $x_0 \in \Gamma \cap O(x_0, d)$ ($\partial O(x_0, d)$ — сфера Ляпунова) отрезок $\overrightarrow{x_0, x}$ луча, выпущенного из точки x_0 по направлению $-l_{x_0}$ (противоположного l_{x_0}) лежит внутри области Ω при достаточно малом расстоянии $|x - x_0| > 0$.

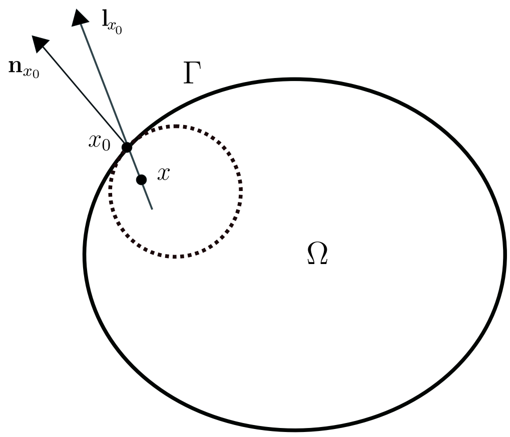


Рис. 34. Поле внешних не касательных направлений l_{x_0}

Справедлива важная лемма Жиро о знаке косой производной непостоянного решения $u(x)$ в точках границы $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha \in (0,1]$ области Ω.

Лемма Жиро. *Пусть выполнены условия принципа Хопфа относительно коэффициентов эллиптического уравнения*:

$$Lu(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)u(x) = F(x),$$

причём $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, $u(x) \neq const$ *и выполнено одно из следующих неравенств*:

$$u(y_0) = \min_{x \in \Gamma} u(x) < 0, \quad y_0 \in \Gamma, \quad F(x) \leqslant 0 \tag{1.2}$$

или

$$u(y_0) = \max_{x \in \Gamma} u(x) > 0, \quad y_0 \in \Gamma, \quad F(x) \geqslant 0. \tag{1.3}$$

Тогда в каждой точке $y_0 \in \Gamma$, *в которой достигается глобальное минимальное отрицательное значение или глобальное максимальное положительное значение, выполнены соответствующие неравенства*:

$$\frac{\partial u(y_0)}{\partial l_{y_0}} < 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u(y_0)}{\partial l_{y_0}} > 0, \tag{1.4}$$

если существует производная по направлению:

$$\frac{\partial u(y_0)}{\partial l_{y_0}} := \lim_{\Omega \cap l \ni x \to y_0 \in \Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial l_{y_0}}, \quad l = \{y_0 + t l_{y_0}, t \in \mathbb{R}\}.$$

Доказательство. Пусть выполнено неравенство (1.2).

Шаг 1. Поскольку $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha \in (0,1]$, то в каждой точке $y_0 \in \Gamma$ найдется касающийся границы в этой точке замкнутый шар

$$\overline{O}(x^*, \rho_0), \quad \rho_0 = |y_0 - x^*| > 0, \quad O(x^*, \rho_0) \subset \Omega,$$

где центр шара $x^* \in \Omega$ — принадлежит отрезку луча $\overrightarrow{y_0, x}$, выпущенного по направлению $-n_{y_0}$ — внутренней нормали в точке $y_0 \in \Gamma$.

Шаг 2. Рассмотрим шар

$$O(y_0, \rho_1), \quad 0 < \rho_1 < \rho_0$$

и пересечение

$$K = O(x^*, \rho_0) \cap O(y_0, \rho_1) \subset \Omega. \tag{1.5}$$

Шаг 3. В силу принципа Хопфа (слабый принцип максимума) и условия $u(x) \neq const$ имеем:

$$u(x) > u(y_0) \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega. \tag{1.6}$$

□ Действительно, поскольку

$$Lu(x) = F(x) \leqslant 0, \quad c(x) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

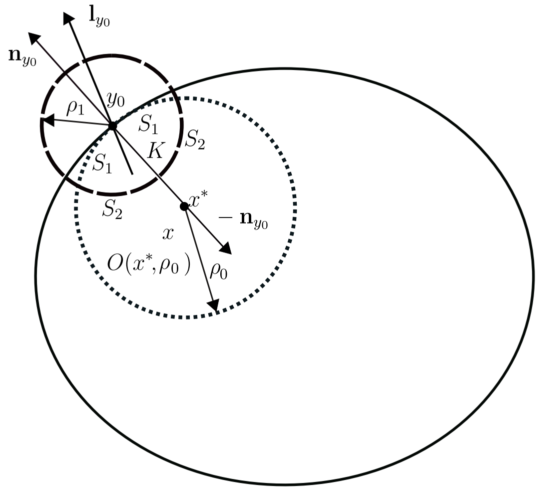


Рис. 35. Построение области K

то в силу принципа Хопфа (сильный принцип максимума) если решение $u(x) \neq const$, то ни в какой точке $x \in \Omega$ не может достигаться отрицательный глобальный минимум функции $u(x)$ на $\overline{\Omega}$. Следовательно, поскольку $\min\limits_{y\in\Gamma} u(y) = u(y_0) < 0$ и

$$\min_{x\in\Gamma} u(x) = \min_{y\in\Gamma} u(y),$$

то

$$u(x) > \min_{y\in\Gamma} u(y) = u(y_0) \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega. \quad \boxtimes$$

Шаг 4. Рассмотрим функцию

$$v(x) = e^{-\gamma\rho_0^2} - e^{-\gamma r^2(x)}, \quad \rho_0 = |x^* - y_0|, \quad r(x) = |x^* - x|. \tag{1.7}$$

Представим границу S области $K = O(x^*,\rho_0) \cap O(y_0,\rho_1)$ в виде объединения

$$S = S_1 \cup S_2,$$

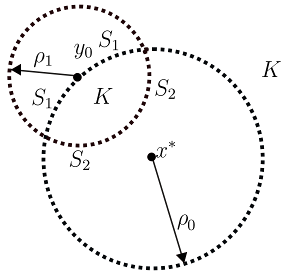
$$S_1 = S \cap \{x: \ |x - x^*| = \rho_0\}, \quad S_2 = S \cap \{x : |x - x^*| < \rho_0\},$$

причем

$$v(x)\Big|_{S_1} = 0, \quad \text{так как} \quad r(x) = |x - x^*|\Big|_{x\in S_1} = \rho_0. \tag{1.8}$$

Шаг 5. Поскольку функция $v(x)$ ограничена в K, то при достаточно малом $\lambda > 0$ из неравенства (1.6) вытекает неравенство снизу:

$$u(x) \geqslant u(y_0) - \lambda v(x) \quad \text{на} \quad S. \tag{1.9}$$



$$K = O(x^*, \rho_0) \cap O(y_0, \rho_1)$$

$$\partial K = S = S_1 \cup S_2$$

$$v(x) = e^{-\gamma\rho_0^2} - e^{-\gamma r^2(x)},$$

$$r(x) = |x^* - x|, \quad \rho_0 = |y_0 - x^*|$$

Рис. 36. Шар K и его граница $S = S_1 \cup S_2$

$\square$ Действительно, пусть $x \in S_1 \backslash \{y_0\}$. Тогда $u(x) > u(y_0)$, а при $x = y_0 \in S_1$ имеем $u(x) = u(y_0)$. Следовательно, поскольку $v(x) = 0$ при $x \in S_1$, то имеет место неравенство:

$$u(x) \geqslant u(y_0) = u(y_0) - \lambda v(x) \quad \text{при} \quad x \in S_1.$$

Пусть теперь $x \in S_2$. В этом случае $u(x) > u(y_0)$ и, кроме того, $v(x) < 0$ при $x \in S_2$. Но тогда поскольку функция $v(x)$ является ограниченной для всех $\gamma > 0$, то

$$v(x) = e^{-\gamma r^2(x)} \left(e^{-\gamma(\rho_0^2 - r^2(x))} - 1 \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow |v(x)| \leqslant 1 \quad \text{для всех} \quad x : \, r(x) = |x - x^*| < \rho_0.$$

Значит, можно выбрать величину $\lambda > 0$ настолько малой, чтобы было выполнено неравенство:

$$u(x) \geqslant u(y_0) - \lambda v(x) \quad \text{при} \quad x \in S_2. \quad \boxtimes$$

Шаг 6. Как было доказано ранее при рассмотрении теоремы о принципе Хопфа функция $v(x)$ удовлетворяет при большом $\gamma > 0$ следующему неравенству:

$$L(v)(x) < 0 \quad \text{при} \quad x \in K. \tag{1.10}$$

Введем функцию

$$\varphi(x) = u(x) - u(y_0) + \lambda v(x). \tag{1.11}$$

Поскольку

$$u(y_0) \leqslant 0, \quad c(x) \leqslant 0, \quad F(x) \leqslant 0,$$

то имеет место неравенство:

$$L(\varphi)(x) = F(x) - c(x)u(y_0) + \lambda L(v)(x) < 0, \quad x \in K. \tag{1.12}$$

Заметим, что в силу (1.9) функция

$$\varphi(x) = u(x) - u(y_0) + \lambda v(x) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad S.$$

Стало быть, в силу следствия 1 из теоремы о принципе Хопфа имеем:

$$\varphi(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{K}. \tag{1.13}$$

Шаг 7. Заметим, что поскольку l_{y_0} — направление внешнее [1]), то

$$\frac{\partial u(y_0)}{\partial l_{y_0}} = \lim_{0>\mu\to 0} \frac{u(y_0+\mu l_{y_0}) - u(y_0)}{\mu} = \lim_{K\cap l\ni x\to y_0} \frac{u(x)-u(y_0)}{-|x-y_0|}. \tag{1.14}$$

Отсюда с заменой $u(x) \mapsto v(x)$ получим равенство:

$$\frac{\partial v(y_0)}{\partial l_{y_0}} = \lim_{0>\mu\to 0} \frac{v(y_0+\mu l_{y_0}) - v(y_0)}{\mu} = \lim_{K\cap l\ni x\to y_0} \frac{v(x)-v(y_0)}{-|x-y_0|}. \tag{1.15}$$

Теперь воспользуемся тем, что $v(y_0) = 0$ и в силу неравенства (1.13) выполнено неравенство:

$$\frac{u(x)-u(y_0)}{|x-y_0|} \geqslant -\lambda \frac{v(x)}{|x-y_0|} = -\lambda \frac{v(x)-v(y_0)}{|x-y_0|}, \quad x \in K.$$

С учетом этого имеем:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial u(y_0)}{\partial l_{y_0}} &= \lim_{K\cap l\ni x\to y_0\in\Gamma} \frac{u(x)-u(y_0)}{|x-y_0|} \geqslant \\
&\geqslant -\lambda \lim_{K\cap l\ni x\to y_0\in\Gamma} \frac{v(x)-v(y_0)}{|x-y_0|} = \lambda \frac{\partial v(y_0)}{\partial l_{y_0}} = \\
&= \lambda \frac{\partial v(r)}{\partial r}\Big|_{r=\rho_0} \cos(\mathbf{n}_{y_0}, l_{y_0}) = \\
&= 2\lambda\gamma\rho_0 e^{-\gamma\rho_0^2} \cos(\mathbf{n}_{y_0}, l_{y_0}) > 0, \quad l = \{y_0 + t l_{y_0}, t \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Отсюда получаем неравенство:

$$\frac{\partial u(y_0)}{\partial l_{y_0}} < 0.$$

Лемма доказана.

Замечание. Условие в лемме Жиро, что $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha \in (0,1]$, можно заменить условием *сферичности изнутри* в каждой точке x_0 поверхности Γ.

Свойство сферичности изнутри. [14]. Пусть x_0 — это любая точка границы Γ области Ω. Если существует замкнутый шар B, такой, что $B \subset \overline{\Omega}$ и $B \cap \Gamma = \{x_0\}$, то говорят, что точка x_0 обладает *свойством сферичности изнутри.*

Контрпример к лемме Жиро. [14]. Заметим, что лемма Жиро неверна, если граница Γ области Ω содержит угловые точки.

---

[1]) $\cos(\mathbf{n}_{y_0}, l_{y_0}) > 0$, где $\mathbf{n}_{y_0}$ — внешняя нормаль.

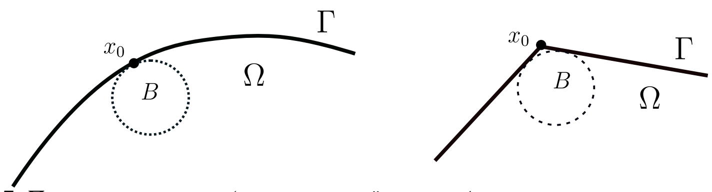


Рис. 37. Пример границы области со свойством сферичности изнутри и пример границы области с точкой без этого условия

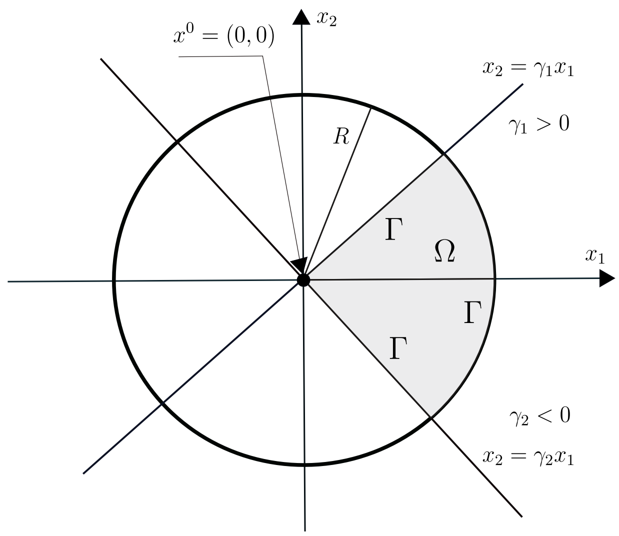


Рис. 38. Область Ω и ее граница Γ

$\square$ Действительно, пусть область Ω определена следующим образом:

$$\Omega: \; x_1^2 + x_2^2 < R^2, \quad x_2 < \gamma_1 x_1, \quad x_2 > \gamma_2 x_1, \quad \gamma_1 > 0 > \gamma_2.$$

Тогда угловая точка границы — это точка $x_0 = (0,0)$. Рассмотрим в области Ω следующее уравнение:

$$Lu(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + A\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad A > |\gamma_1 \gamma_2|.$$

Функция

$$u(x_1, x_2) = (x_2 - \gamma_1 x_1)(x_2 - \gamma_2 x_1) + 1$$

удовлетворяет следующим условиям:

$$u(x) < 1 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u(x_0) = 1, \quad Lu(x) = 2\gamma_1\gamma_2 + 2A > 0,$$

но

$$\frac{\partial u(x_0)}{\partial l_{x_0}} = 0$$

по любому направлению l_{x_0} в точке $x_0 \in \Gamma$. $\boxtimes$

§ 2. Следствия из леммы Жиро

Рассмотрим *вторую краевую задачу* или *задачу Неймана* при $c(x) \leqslant 0$ в Ω, причем $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha \in (0,1]$.

З а д а ч а Н е й м а н а. Найти решение $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n}; \overline{\Omega}) \cap \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ задачи

$$Lu(x) = F(x) \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \lim_{\Omega \cap l \ni x \to x_0 \in \Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} = f(x_0), \tag{2.1}$$

где $l = \{x_0 + t\mathbf{n}_{x_0}, t \in \mathbb{R}\}$ и $\mathbf{n}_{x_0}$ — вектор внешней нормали, а функции $F(x)$ и $f(x)$ определены на Ω и Γ соответственно,

Справедлива следующая теорема:

Т е о р е м а е д и н с т в е н н о с т и 2. *Если* $c(x) = 0$, *то решение задачи Неймана единственно с точностью до постоянной. Если* $c(x) \not\equiv 0$, *то решение задачи Неймана единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. Итак, пусть $u_1(x), u_2(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n}; \overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ — это два решения задачи (2.1). Рассмотрим функцию

$$w(x) = u_1(x) - u_2(x).$$

Эта функция удовлетворяет однородной задаче

$$Lw(x) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \lim_{\Omega \cap l \ni x \to x_0 \in \Gamma} \frac{\partial w(x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} = 0 \tag{2.2}$$

для любого $x_0 \in \Gamma$.

Шаг 2. Предположим, что $w(x) \neq 0$ на границе Γ и $w(x) \neq const$. Введем следующие величины:

$$m \stackrel{def:}{=} \min_{x \in \Gamma} w(x), \quad M \stackrel{def:}{=} \max_{x \in \Gamma} w(x). \tag{2.3}$$

Ясно, что $m \leqslant M$. Тогда возможны следующие случаи: 1. $M > 0$ или 2. $M \leqslant 0$. Предположим, например, что $M > 0$. Тогда в некоторой точке $y_0 \in \Gamma$ выполнено неравенство:

$$w(y_0) = \max_{y \in \Gamma} w(y) > 0. \tag{2.4}$$

В силу леммы Жиро имеем

$$\frac{\partial w(y_0)}{\partial \mathbf{n}_{y_0}} > 0,$$

но это противоречит (2.2). Случай $M \leqslant 0$ разбивается на следующие два: 3. $m < M \leqslant 0$ и 4. $m = M \leqslant 0$. В третьем случае имеем $m < 0$. Тогда в некоторой точке $y_0 \in \Gamma$ получаем неравенство:

$$w(y_0) = \min_{y \in \Gamma} w(y) < 0.$$

В силу леммы Жиро имеем в этой точке:

$$\frac{\partial w(y_0)}{\partial \mathbf{n}_{y_0}} < 0.$$

В итоге приходим к противоречию со вторым равенством в (2.2). Четвертый случай разбивается еще на следующие два: 5. $m = M < 0$ и 6. $m = M = 0$. В пятом случае снова $m < 0$ и мы снова приходим к противоречию с принципом Хопфа.

Шаг 3. Итак, рассмотрим шестой случай $m = M = 0$, из которого сразу же получаем, что $w(x)$ удовлетворяет следующей задаче:

$$Lw(x) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad w(x) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{2.5}$$

В силу теоремы единственности задачи Дирихле получим, что $w(x) = 0$, что противоречит следующему требованию: $w(x) \neq const$.

Итак, имеем: $w(x) = const$.

Шаг 4. Пусть в некоторой точке $x_0 \in D$ имеем $c(x_0) < 0$. Тогда с одной стороны $w(x) = c_1$, а с другой стороны:

$$0 = Lw(x_0) = c(x_0)w(x_0) = c(x_0)c_1 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow w(x) = 0.$$

Теорема доказана.

Наконец, рассмотрим *третью краевую задачу* при $c(x) \leqslant 0$.

Третья краевая задача. Найти решение $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n}; \overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ следующей задачи:

$$Lu(x) = F(x) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{2.6}$$

$$\lim_{\Omega \cap l \ni x \to x_0 \in \Gamma} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} - \alpha(x)u(x) \right) = f(x_0), \quad l = \{x_0 + t\mathbf{n}_{x_0}, t \in \mathbb{R}\} \tag{2.7}$$

где $\mathbf{n}_{x_0}$ — внешняя нормаль, а функции $F(x)$ и $f(x)$ определены на Ω и Γ соответственно.

Справедлива следующая теорема:

Теорема единственности 3. *Если $\alpha(x) \leqslant 0$ и $\alpha(x) \not\equiv 0$, то решение третьей краевой задачи единственно.*

Доказательство.

Эту теорему предлагается доказать самостоятельно, используя лемму Жиро.

Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что если $\alpha(x) < 0$ на Γ, то единственность третьей краевой задачи (2.6) может быть доказана без применения леммы Жиро. Действительно, нужно рассмотреть соответствующую однородную задачу: $F(x) \equiv 0$ и $f(x) \equiv 0$. По принципу максимума $u(x)$ должна достигать положительного максимума или отрицательного минимума в некоторых точках границы: $x_0 \in \Gamma$ и, следовательно, удовлетворять соотношению

$$\frac{\partial u(x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} \geqslant 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u(x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} \leqslant 0.$$

Но это противоречит равенству

$$\frac{\partial u(x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} = \lim_{\Omega \cap l \ni x \to x_0 \in \Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} = \alpha(x_0) u(x_0).$$

Признак сравнения. Пусть $v(x), w(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n}; \overline{\Omega}) \cap \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ — решение следующей задачи:

$$Lv(x) \leqslant Lw(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{2.8}$$

$$\lim_{\Omega \cap l \ni y \to x \in \Gamma} \frac{\partial v(y)}{\partial \mathbf{n}_x} \geqslant \lim_{\Omega \cap l \ni y \to x \in \Gamma} \frac{\partial w(y)}{\partial \mathbf{n}_x} \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \tag{2.9}$$

где $l = \{x + t\mathbf{n}_x, t \in \mathbb{R}\}$, $\mathbf{n}_x$ — внешняя нормаль по отношению к области Ω, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с границей $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha \in (0, 1]$, а $a_{ij}(x), b_i(x), c(x) \in \mathbb{C}_b(\Omega)$, $c(x) \leqslant 0$ всюду в Ω, но $c(x) \not\equiv 0$ и оператор L — равномерно эллиптический. Тогда $v(x) \geqslant w(x)$ для всех точек $x \in \Omega$.

□ Действительно, образуем разность $u(x) = v(x) - w(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n}; \overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, которая удовлетворяет задаче:

$$Lu(x) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{2.10}$$

$$\lim_{\Omega \cap l \ni y \to x \in \Gamma} \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_x} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma. \tag{2.11}$$

Предположим, что существует точка $x \in \overline{\Omega}$, в которой $u(x) < 0$. Поскольку $u(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, то найдется такая точка $x_0 \in \overline{\Omega}$, в которой достигается глобальный отрицательный минимум у функции $u(x)$. Необходимо рассмотреть два случая: $x_0 \in \Omega$ и $x_0 \in \Gamma$.

Рассмотрим случай $x_0 \in \Omega$. Тогда в силу теоремы 1 из предыдущей лекции приходим к выводу о том, что $u(x) = const < 0$ всюду в Ω. Тогда в силу (2.10) и того, что $c(x) \leqslant 0$ всюду в Ω, имеем неравенства

$$0 \leqslant c(x) const = Lu(x) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega \Rightarrow \\ \Rightarrow c(x) const = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega. \tag{2.12}$$

В силу предположения, что $c(x) \not\equiv 0$, приходим к выводу о том, что $const = 0$, но это противоречит тому, что $u(x) = const < 0$ в Ω. Значит, $x_0 \notin \Omega$.

Рассмотрим второй случай, когда $x_0 \in \Gamma$. Поскольку $u(x_0) < 0$ и граница $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha \in (0,1]$, то найдется такой шар $O(x_1,\varepsilon)$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$, что

$$O(x_1,\varepsilon) \subset \Omega, \quad \partial O(x_1,\varepsilon) \cap \Gamma = \{x_0\},$$

причем в силу леммы Жиро либо

$$u(x) = const < 0 \quad \text{в} \quad \overline{O(x_1,\varepsilon)}, \quad \text{либо} \quad \lim_{\Omega\cap l \ni y \to x_0 \in \Gamma} \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} < 0. \quad (2.13)$$

В первом случае снова приходим к неравенствам (2.12), из которых получаем, что $const = 0$, хотя $u(x) = const < 0$. Приходим к противоречию. Вторая ситуация в (2.13) противоречит неравенству (2.11). Таким образом, $x_0 \notin \Gamma$. Следовательно, точки $x_0 \in \overline{\Omega}$ с указанным свойством просто не существует. Поэтому всюду в $\overline{\Omega}$ имеет место неравенство: $v(x) \geqslant w(x)$. $\boxtimes$

Оценка градиента решения на границе. Пусть $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$ — решение следующей задачи:

$$Lu(x) := \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{N} b_j(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \quad (2.14)$$

$$u(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in \Gamma. \quad (2.15)$$

Пусть поверхность Γ обладает свойством *равномерной сферичности извне*, т.е. для каждой точки $y \in \Gamma$ найдется такой шар $O(x_0,R_0)$ с одним и тем же $R_0 > 0$, что выполнены свойства:

$$O(x_0,R_0) \cap \overline{\Omega} = \{y\}.$$

Рассмотрим барьер в произвольной точке $y \in \Gamma$:

$$w_y(x) := \exp\left(-\gamma R_0^2\right) - \exp\left(-\gamma |x-x_0|^2\right), \quad \gamma > 0. \quad (2.16)$$

Этот барьер обладает следующими свойствами:

Свойство 1. $w_y(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega})$;

Свойство 2. $w_y(y) = 0$, $w_y(x) > 0$ для всех $x \in \overline{\Omega}\backslash\{y\}$;

Свойство 3. $Lw_y(x) < -\exp\left(-\gamma d^2\right)$ для всех $x \in \overline{\Omega}$ при достаточно большом $\gamma > 0$, где

$$d := R_0 + \sup_{x\in\Omega} |x-y| > R_0,$$

причем поскольку область Ω ограничена, то для всех $y \in \Gamma$ найдется такое $R_1 > 0$, что $d \leqslant R_1$;

Свойство 4. Справедливо равенство

$$(\mathbf{n}_y, D_x w_y(x))|_{x=y} = 2\gamma R_0 \exp\left(-\gamma R_0^2\right), \tag{2.17}$$

где $\mathbf{n}_y$ — внутренняя по отношению к Ω единичная нормаль.

Введем следующие две функции:

$$v_{\pm}(x) := \pm \exp\left(\gamma R_1^2\right) \sup_{x \in \Omega} |f(x)| w_y(x). \tag{2.18}$$

Справедливы следующие неравенства:

$$Lv_+(x) < -\sup_{x \in \Omega} |f(x)| \leqslant -|f(x)| \leqslant f(x) = Lu(x) \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \tag{2.19}$$

$$Lv_-(x) > \sup_{x \in \Omega} |f(x)| \geqslant |f(x)| \geqslant f(x) = Lu(x) \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \tag{2.20}$$

$$v_-(x) \leqslant 0 = u(x) \leqslant v_+(x) \quad \text{для} \quad x \in \Gamma. \tag{2.21}$$

Согласно признаку сравнения получаем неравенство:

$$v_-(x) \leqslant u(x) \leqslant v_+(x) \quad \text{для} \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{2.22}$$

причем

$$v_-(y) = u(y) = v_+(y) = 0. \tag{2.23}$$

Из (2.22) и (2.23) получаем неравенство:

$$\frac{v_-(x) - v_-(y)}{|x-y|} \leqslant \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|} \leqslant \frac{v_+(x) - v_+(y)}{|x-y|} \quad \text{для} \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{2.24}$$

Предположим теперь, что $x \in l := \{y + t\mathbf{n}_y,\ \forall t \in \mathbb{R}\}$. Для таких x перейдем к неравенствах (2.24) к пределу при $|x-y| \to +0$. В результате получим неравенство:

$$\frac{\partial v_-(y)}{\partial \mathbf{n}_y} \leqslant \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y} \leqslant \frac{\partial v_+(y)}{\partial \mathbf{n}_y} \quad \text{для всех} \quad y \in \Gamma \tag{2.25}$$

или с учетом (2.17) неравенство

$$\left|\frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y}\right| \leqslant 2\gamma R_0 \exp\left(\gamma\left(R_1^2 - R_0^2\right)\right) \sup_{x \in \Omega} |f(x)|, \quad R_1 > R_0 > 0. \tag{2.26}$$

Заметим, что для обыкновенных точек границы $x \in \Gamma$, т.е. для таких точек, что $|D_x u(x)| > 0$, вектор

$$\mathbf{n}_y = \pm \frac{D_x u(x)}{|D_x u(x)|}$$

— есть вектор единичной нормали в точке $x \in \Gamma$. Поэтому в силу (2.26) справедлива цепочка соотношений:

$$\left|\frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y}\right| = |(\mathbf{n}_y, D_x u(x))|_{x=y\in\Gamma} = \\ = |D_x u(x)|_{x=y\in\Gamma} \leqslant 2\gamma R_0 \exp\left(\gamma\left(R_1^2 - R_0^2\right)\right) \sup_{x\in\Omega}|f(x)|. \quad (2.27)$$

В любом случае как для обыкновенных, так и для вырожденных точек границы, получим оценку:

$$\sup_{x\in\Gamma}|D_x u(x)| \leqslant 2\gamma R_0 \exp\left(\gamma\left(R_1^2 - R_0^2\right)\right) \sup_{x\in\Omega}|f(x)|, \quad (2.28)$$

где $R_1 > R_0 > 0$ при некотором достаточно большом $\gamma > 0$.

§ 3. Примеры решения задач

Задача 1. Пусть L — это равномерно эллиптический оператор в ограниченной области Ω и $c(x) \leqslant 0$, причем

$$Lu(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega.$$

Пусть $\Gamma = S_1 \cup S_2$ и $S_1 \cap S_2$, $S_1 \neq \varnothing$, а поверхность S_2 удовлетворяет условию сферичности изнутри. Функция $u(x)$ из следующего класса:

$$u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\Omega \cup S_2) \cap \mathbb{C}^{(0)}(\overline{\Omega}),$$

причем выполнены следующие граничные условия:

$$u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in S_1, \quad \sum_{i=1}^{N} \beta_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = 0 \quad \text{при} \quad x \in S_2.$$

Векторное поле $\beta(x) = (\beta_1(x), ..., \beta_N(x))$ не является касательным в каждой точке $x \in S_2$. Доказать, что $u(x) \equiv 0$ в Ω.

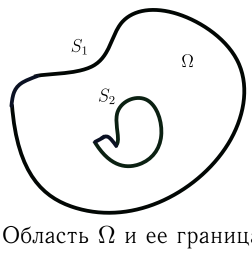


Рис. 39. Область Ω и ее граница $S_1 \cup S_2$

Решение. Пусть $u(x) \not\equiv 0$ в Ω. Следовательно, в некоторой точке $x_0 \in \Omega \cup S_2$ достигается либо положительный максимум (отрицательный минимум). Точка $x_0 \notin \Omega$ в силу сильного принципа максимума, поскольку в противном случае $u(x) = const = 0$ в силу связности множества Ω. Поэтому $x_0 \in S_2$. Тогда в этой точке в силу леммы Жиро:

$$\sum_{i=1}^{N} \beta_i(x_0) \frac{\partial u(x_0)}{\partial x_i} \neq 0,$$

что противоречит условию задачи. Значит, $u(x) \equiv 0$ всюду в Ω.

Задача 2. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$\Delta u = |u|^{p-2} u \quad \text{при} \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, \quad N \geqslant 2, \quad p > 2 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_x} + \beta(x)|u|^{q-2} u = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \quad q > 2, \tag{3.2}$$

где Ω — это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{(1,\alpha)}$ при $\beta(x) \geqslant 0$ и $\mathbf{n}_x$ — внешняя нормаль. Доказать, что в классе $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega})$ решение краевой задачи $u(x) \equiv 0$ в Ω.

Решение. Умножим обе части уравнения (3.1) на само решение и проинтегрируем по частям, в результате получим равенство:

$$-\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y} u(y)\, ds_y + \int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^2\, dx + \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p\, dx = 0,$$

из которого с учетом граничного условия (3.2) получим равенство:

$$\int\limits_{\Gamma} \beta(y)|u(y)|^q\, ds_y + \int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^2\, dx + \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p\, dx = 0 \Rightarrow u(x) \equiv 0 \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Задача 3. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$\Delta u = |u|^{p-2} u + f(x) \quad \text{при} \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, \quad N \geqslant 2, \quad p > 2 \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_x} + \beta(x)|u|^{q-2} u = g(x) \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \quad q > 2, \tag{3.4}$$

где Ω — это ограниченная область с гладкой границей $\Gamma \in \mathbb{C}^{(1,\alpha)}$ при $\beta(x) \geqslant 0$ и $\mathbf{n}_x$ — внешняя нормаль. Доказать, что в классе $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega})$ решение краевой задачи единственно.

Указание. Решить задачу предлагается самостоятельно. Нужно рассмотреть два решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ задачи (3.3) и (3.4), а затем вычесть соответствующие уравнения вида (3.3), справедливые для каждой из функций, умножить на $u_1(x) - u_2(x)$ и проинтегрировать по области Ω с учетом граничных условий.

§ 4. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [2], [8], [12], [14], [15].

Лекция 14

ЕДИНСТВЕННОСТЬ И ПРИЗНАКИ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

В этой лекции рассмотрим три задачи для нелинейных операторов эллиптического типа и докажем единственность решений этих задач в определенных классах, а также получим некоторые признаки сравнения.

§ 1. Единственность и признак сравнения для задачи Дирихле

Рассмотрим следующую задачу Дирихле для нелинейного уравнения эллиптического типа:

$$Lu(x) = f(x, u(x), D_x u(x)) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

$$\lim_{\Omega \ni y \to x \in \Gamma} u(y) = g(x) \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \tag{1.2}$$

где

$$Lu(x) := \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x) u_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) u_{x_i}(x) + c(x) u(x), \tag{1.3}$$

а $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с границей Γ. Относительно функции $f(x, p, p_1, \cdots, p_N)$ предположим, что эта функция определена на множестве $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ и является *строго монотонно* возрастающей по $p \in \mathbb{R}$ для каждой фиксированной точки $(x, p_1, \cdots, p_N) \in \Omega \times \mathbb{R}^N$. Пусть, кроме того, функция $g(x)$ определена на Γ. Тогда справедлива следующая теорема о единственности решения задачи Дирихле (1.1), (1.2):

Теорема 1. *Пусть коэффициенты* $a_{ij}(x), b_i(x), c(x) \in \mathbb{C}_b(\Omega)$ *и* $c(x) \leqslant 0$ *в области* Ω *и оператор* L *— равномерно эллиптический. Тогда если решение задачи Дирихле* (1.1), (1.2) *существует в классе* $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ *при указанных условиях на функции* $f(x, p, p_1, \cdots, p_N)$ *и* $g(x)$, *то оно единственно.*

Доказательство. *Шаг 1.* Пусть $u_1(x), u_2(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ — произвольные два решения задачи Дирихле (1.1), (1.2). Образуем их разность $u(x) = \overline{u}_1(x) - \overline{u}_2(x)$, где символом $\overline{u}_k(x)$ стандартным способом обозначаем непрерывное продолжение функции $u_k(x)$ из области

Ω до границы Γ. Предположим сначала, что есть точка (значит, точки) $x \in \Omega$ в которой $u(x) > 0$. Отметим, что функция $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ удовлетворяет следующей задаче:

$$Lu(x) = f_1(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{1.4}$$

$$u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \tag{1.5}$$

$$f_1(x) = f(x, u_1(x), D_x u_1(x)) - f(x, u_2(x), D_x u_2(x)), \quad x \in \Omega. \tag{1.6}$$

Поскольку $u(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, область $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная, а на границе $u(x) = 0$, то в какой-то точке $x_0 \in \Omega$ достигается локальный положительный максимум $u(x_0) = u_1(x_0) - u_2(x_0) > 0$. Тогда в этой точке выполнены равенства:

$$D_x u(x_0) = 0 \Leftrightarrow D_x u_1(x_0) = D_x u_2(x_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow f_1(x_0) = f(x_0, u_1(x_0), D_x u_1(x_0)) - f(x_0, u_2(x_0), D_x u_2(x_0)) > 0. \tag{1.7}$$

Стало быть, в силу (1.4) имеем:

$$Lu(x_0) > 0,$$

что противоречит ранее доказанному неравенству в лекции 11 $Lu(x_0) \leqslant 0$ в точке $x_0 \in \Omega$ — локального положительного максимума. Следовательно, $u_1(x) \leqslant u_2(x)$ в Ω.

Шаг 2. Пусть теперь есть точка (значит, точки), в которой $u(x) < < 0$. Тогда с учетом равенства (1.5) найдется точка $x_1 \in \Omega$, в которой достигается отрицательный локальный минимум:

$$u(x_1) = u_1(x_1) - u_2(x_1) < 0. \tag{1.8}$$

Тогда в этой точке

$$D_x u(x_1) = 0 \Leftrightarrow D_x u_1(x_1) = D_x u_2(x_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow f_1(x_1) = f(x_1, u_1(x_1), D_x u_1(x_1)) - f(x_1, u_2(x_1), D_x u_2(x_1)) < 0. \tag{1.9}$$

В силу равенства (1.4) получаем, что $Lu(x_1) < 0$, хотя нами в лекции 11 доказано, что в точке локального отрицательного минимума должно выполняться неравенство: $Lu(x_1) \geqslant 0$. Следовательно, $u_1(x) \geqslant u_2(x)$.

С учетом результата шага 1 приходим к выводу о том, что $u_1(x) = = u_2(x)$ в области Ω.

Теорема доказана.

Теперь докажем признак сравнения для решений следующих нелинейных дифференциальных неравенств:

$$Lv(x) \leqslant f(x, v(x), D_x v(x)) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{1.10}$$

$$Lw(x) \geqslant f(x, w(x), D_x w(x)) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{1.11}$$

$$\lim_{\Omega \ni y \to x \in \Gamma} v(y) \geqslant \lim_{\Omega \ni y \to x \in \Gamma} w(y) \quad \text{при} \quad x \in \Gamma. \tag{1.12}$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть коэффициенты* $a_{ij}(x), b_i(x), c(x) \in \mathbb{C}_b(\Omega)$ *и* $c(x) \leqslant 0$ *в области* Ω, *оператор* L *— равномерно эллиптический, и функции* $v(x), w(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ *— решения дифференциальных неравенств* (1.10) *и* (1.11) *соответственно, причем выполнены предельные неравенства* (1.12) *в каждой точке* $x \in \Gamma$. *Тогда при указанных ранее условиях на функцию* $f(x, p, p_1, \cdots, p_N)$ *выполнено неравенство* $v(x) \geqslant w(x)$ *в каждой точке* $x \in \Omega$.

Доказательство.

Пусть при условиях теоремы найдется такая точка $x_0 \in \Omega$, в которой имеет место неравенство:

$$v(x_0) < w(x_0). \tag{1.13}$$

Образуем разность $h(x) = \overline{v}(x) - \overline{w}(x)$. Тогда с учетом неравенств (1.10) и (1.11) получим следующие неравенства:

$$Lv(x) \leqslant f(x, v(x), D_x v(x)) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{1.14}$$

$$-Lw(x) \leqslant -f(x, w(x), D_x w(x)) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{1.15}$$

сложив которые, получим

$$Lh(x) \leqslant f_2(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{1.16}$$

$$f_2(x) = f(x, v(x), D_x v(x)) - f(x, w(x), D_x w(x)) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{1.17}$$

$$h(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \quad h(x_0) < 0. \tag{1.18}$$

Следовательно, в силу (1.18) внутри области Ω достигается локальный отрицательный минимум. Без ограничения общности можно считать, что это точка $x_0 \in \Omega$. Но тогда в этой точке:

$$\begin{gathered} D_x h(x_0) = 0 \Leftrightarrow D_x v(x_0) = D_x w(x_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow f_2(x_0) = f(x_0, v(x_0), D_x v(x_0)) - f(x_0, w(x_0), D_x w(x_0)) < 0. \end{gathered} \tag{1.19}$$

Значит, в силу (1.16) в точке $x_0 \in \Omega$ выполнено неравенство:

$$Lh(x_0) < 0,$$

хотя в лекции 11 доказано, что в точке локального отрицательного минимума $x_0 \in \Omega$ функции $h(x) = v(x) - w(x)$ должно выполняется неравенство:

$$Lh(x_0) \geqslant 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что всюду в Ω выполнено неравенство $v(x) \geqslant w(x)$.

Теорема доказана.

Устойчивость по граничному условию задачи Дирихле. Пусть выполнены все условия теоремы 1 и $u_k(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ — это решение нелинейной задачи Дирихле и $k = 1, 2$:

$$Lu_k(x) = f(x, u_k(x), D_x u_k(x)) \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \tag{1.20}$$

$$u_k(x) = g_k(x) \quad \text{для} \quad x \in \Gamma, \tag{1.21}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ. Рассмотрим три функции

$$v(x) = u_1(x) - u_2(x), \tag{1.22}$$

$$v_1(x) = \sup_{x\in\Gamma} |g_1(x) - g_2(x)|, \quad v_2(x) = -\sup_{x\in\Gamma} |g_1(x) - g_2(x)|. \tag{1.23}$$

Заметим, что справедливы следующие равенства:

$$f(x, u_1, D_x u_1) - f(x, u_2, D_x u_2) = \int\limits_0^1 \frac{d}{ds} f(x, u_s, D_x u_s)\, ds =$$

$$= \sum_{j=1}^N \overline{b}_j(x) \frac{\partial(u_1(x) - u_2(x))}{\partial x_j} + \overline{c}(x)(u_1(x) - u_2(x)), \tag{1.24}$$

где

$$u_s = su_1 + (1-s)u_2, \quad \overline{b}_j(x) = \int\limits_0^1 \frac{\partial f(x, u_s, D_x u_s)}{\partial u_{sx_j}}\, ds, \tag{1.25}$$

$$\overline{c}(x) = \int\limits_0^1 \frac{\partial f(x, u_s, D_x u_s)}{\partial u_s}\, ds. \tag{1.26}$$

Предположим, что

$$\frac{\partial f(x, p, p_j)}{\partial p} \geqslant 0 \quad \text{для} \quad (x, p, p_1, \ldots, p_N) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N. \tag{1.27}$$

Тогда

$$\overline{c}(x) \geqslant 0 \quad \text{для} \quad x \in \Omega. \tag{1.28}$$

Тогда, с одной стороны, для функции $v(x)$ справедлива система уравнений

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{N}\bigl(b_j(x) - \overline{b}_j(x)\bigr)\frac{\partial v(x)}{\partial x_j} + \\ + (c(x) - \overline{c}(x))v(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \quad (1.29)$$

$$v(x) = g_1(x) - g_2(x) \quad \text{для} \quad x \in \Gamma. \quad (1.30)$$

С другой стороны, для функций $v_1(x)$ и $v_2(x)$ справедливы задачи

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 v_1(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{N}\bigl(b_j(x) - \overline{b}_j(x)\bigr)\frac{\partial v_1(x)}{\partial x_j} + \\ + (c(x) - \overline{c}(x))v_1(x) \leqslant 0 \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \quad (1.31)$$

$$v_1(x) \geqslant g_1(x) - g_2(x) \quad \text{для} \quad x \in \Gamma, \quad (1.32)$$

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 v_2(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{N}\bigl(b_j(x) - \overline{b}_j(x)\bigr)\frac{\partial v_2(x)}{\partial x_j} + \\ + (c(x) - \overline{c}(x))v_2(x) \geqslant 0 \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \quad (1.33)$$

$$v_2(x) \leqslant g_1(x) - g_2(x) \quad \text{для} \quad x \in \Gamma. \quad (1.34)$$

В силу принципа сравнения для задачи (2.13) и (2.14) из лекции 12 мы получим, что выполнены неравенства

$$v_2(x) \leqslant v(x) \leqslant v_1(x) \quad \text{для} \quad x \in \overline{\Omega}. \quad (1.35)$$

Стало быть, приходим к неравенству

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} |u_1(x) - u_2(x)| \leqslant \sup_{x\in\Gamma} |g_1(x) - g_2(x)|, \quad (1.36)$$

из которого вытекает устойчивость задачи Дирихле (1.20), (1.21) по граничному условию.

Устойчивость по граничному условию и по коэффициенту задачи Дирихле. Пусть $u_k(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ — решение соответствующих задач Дирихле и $k = 1, 2$:

$$L_k u_k(x) = f(x, u_k) \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \quad (1.37)$$

$$u_k(x) = g_k(x) \quad \text{для} \quad x \in \Gamma, \quad (1.38)$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей Γ,

$$L_k u_k(x) = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u_k(x)}{\partial x_i \partial x_j} + c_k(x)u_k(x), \quad (1.39)$$

причем $a_{ij}(x), c_k(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, $c_k(x) \leqslant 0$ и

$$m := \min_{x\in\overline{\Omega}} \sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x), \quad d := \max_{x\in\overline{\Omega}} |x|, \tag{1.40}$$

причем предположим, что матрица $(a_{ij}(x))$ является положительно определенной для всех $x \in \overline{\Omega}$ и в этом случае $m > 0$. Справедливы следующие равенства:

$$f(x,u_1) - f(x,u_2) = \int\limits_0^1 \frac{d}{ds} f(x,u_s)\, ds = \overline{c}(x)(u_1 - u_2), \tag{1.41}$$

$$\overline{c}(x) := \int\limits_0^1 \frac{\partial f(x,u_s)}{\partial u_s}\, ds \geqslant 0, \quad u_s = su_1 + (1-s)u_2, \tag{1.42}$$

если потребовать, чтобы

$$\frac{\partial f(x,p)}{\partial p} \geqslant 0 \quad \text{для} \quad (x,p) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{1.43}$$

Введем в рассмотрение три функции

$$v(x) := u_1(x) - u_2(x), \tag{1.44}$$

$$v_1(x) := \frac{1}{2m}\left(|x|^2 - d^2\right) \sup_{x\in\Omega} |h(x)| - \sup_{x\in\Gamma} |g(x)|, \tag{1.45}$$

$$v_2(x) := -\frac{1}{2m}\left(|x|^2 - d^2\right) \sup_{x\in\Omega} |h(x)| + \sup_{x\in\Gamma} |g(x)|. \tag{1.46}$$

Из уравнений (1.37) и (1.38) с учетом (1.41) вытекает, что функция $v(x)$ удовлетворяет задаче

$$\widetilde{L}v(x) = h(x) := (c_2(x) - c_1(x))u_2(x) \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \tag{1.47}$$

$$v(x) = g(x) := g_1(x) - g_2(x) \quad \text{для} \quad x \in \Gamma, \tag{1.48}$$

$$\widetilde{L}v(x) := \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_i \partial x_j} + (c_1(x) - \overline{c}(x))v(x). \tag{1.49}$$

Отдельно рассмотрим следующую задачу:

$$L_2 u_2(x) = f(x, u_2(x)) \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \tag{1.50}$$

$$u_2(x) = g_2(x) \quad \text{для} \quad x \in \Gamma. \tag{1.51}$$

Введем еще две функции:

$$w_1(x) = \sup_{x\in\Gamma} |g_2(x)|, \quad w_2(x) = -\sup_{x\in\Gamma} |g_2(x)|. \tag{1.52}$$

Потребуем, чтобы

$$f(x,0) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega. \tag{1.53}$$

Тогда с учетом (1.43) и (1.53) функции $w_1(x)$ и $w_2(x)$ удовлетворяют следующим задачам:

$$L_2 w_1(x) = c_2(x) w_1(x) \leqslant 0 = f(x,0) \leqslant f(x, w_1(x)) \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \tag{1.54}$$

$$w_1(x) \geqslant g_2(x) \quad \text{для} \quad x \in \Gamma, \tag{1.55}$$

$$L_2 w_2(x) = c_2(x) w_2(x) \geqslant 0 = f(x,0) \geqslant f(x, w_2(x)) \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \tag{1.56}$$

$$w_2(x) \leqslant g_2(x) \quad \text{для} \quad x \in \Gamma. \tag{1.57}$$

Теперь воспользуемся признаком сравнения для задачи (1.10)–(1.12) и получим неравенства

$$w_2(x) \leqslant u_2(x) \leqslant w_1(x) \quad \text{для} \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{1.58}$$

из которых получаем искомую оценку

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} |u_2(x)| \leqslant \sup_{x\in\Gamma} |g_2(x)|. \tag{1.59}$$

Теперь заметим, что из определений (1.40) постоянных $m > 0$ и $d > 0$ вытекает, что функции $v_1(x)$ и $v_2(x)$, определенные равенствами (1.45) и (1.46), соответственно, удовлетворяют неравенствам

$$v_1(x) \leqslant 0, \quad v_2(x) \geqslant 0 \quad \text{для} \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{1.60}$$

Из явного вида (1.45) и (1.46) функций $v_1(x)$ и $v_2(x)$ получаем, что они удовлетворяют следующим задачам:

$$\widetilde{L} v_1(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x) \sup_{x\in\Omega} |h(x)| + (c_1(x) - \overline{c}(x)) v_1(x) \geqslant$$
$$\geqslant \sup_{x\in\Omega} |h(x)| \geqslant h(x) = \widetilde{L} v(x) \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \tag{1.61}$$

$$v_1(x) \leqslant -\sup_{x\in\Gamma} |g(x)| \leqslant g(x) = v(x) \quad \text{для} \quad x \in \Gamma, \tag{1.62}$$

$$\widetilde{L} v_2(x) = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x) \sup_{x\in\Omega} |h(x)| + (c_1(x) - \overline{c}(x)) v_2(x) \leqslant$$

$$\leqslant -\sup_{x\in\Omega}|h(x)| \leqslant h(x) = \widetilde{L}v(x) \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \tag{1.63}$$

$$v_2(x) \geqslant \sup_{x\in\Gamma}|g(x)| \geqslant g(x) = v(x) \quad \text{для} \quad x \in \Omega. \tag{1.64}$$

В силу принципа сравнения для задачи (2.13) и (2.14) из лекции 12 мы получим, что выполнены неравенства

$$v_1(x) \leqslant v(x) \leqslant v_2(x) \quad \text{для} \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{1.65}$$

Таким образом, отсюда с учетом (1.59) получаем следующее неравенство:

$$\max_{x\in\overline{\Omega}}|u_1(x)-u_2(x)| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2m}\max_{x\in\overline{\Omega}}\left(d^2-|x|^2\right)\sup_{x\in\Gamma}|g_2(x)|\sup_{x\in\Omega}|c_1(x)-c_2(x)|+ \\ +\sup_{x\in\Gamma}|g_1(x)-g_2(x)|, \tag{1.66}$$

из которого, делая допустимую замену индексов $1 \leftrightarrow 2$, получим следующее неравенство:

$$\max_{x\in\overline{\Omega}}|u_2(x)-u_1(x)| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2m}\max_{x\in\overline{\Omega}}\left(d^2-|x|^2\right)\sup_{x\in\Gamma}|g_1(x)|\sup_{x\in\Omega}|c_2(x)-c_1(x)|+ \\ +\sup_{x\in\Gamma}|g_2(x)-g_1(x)|. \tag{1.67}$$

Таким образом, из (1.66) и (1.67) получаем искомое неравенство

$$\max_{x\in\overline{\Omega}}|u_1(x)-u_2(x)| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2m}\max_{x\in\overline{\Omega}}\left(d^2-|x|^2\right)\min\left\{\sup_{x\in\Gamma}|g_1(x)|,\sup_{x\in\Gamma}|g_2(x)|\right\}\sup_{x\in\Omega}|c_1(x)-c_2(x)|+ \\ +\sup_{x\in\Gamma}|g_1(x)-g_2(x)|, \tag{1.68}$$

из которого вытекает устойчивость решений задач Дирихле (1.37), (1.38) по коэффициенту и по граничному условию.

§ 2. Единственность и признак сравнения для задачи Неймана

Рассмотрим следующую задачу Неймана для полулинейного уравнения эллиптического типа:

$$Lu(x) = f(x, u(x)) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{2.1}$$

$$\lim_{\Omega\cap l\ni y\to x\in\Gamma}\frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_x}=g(x)\quad\text{при}\quad x\in\Gamma, \tag{2.2}$$

где $l=\{x+t\mathbf{n}_x, t\in\mathbb{R}\}$, а $\mathbf{n}_x$ — внешняя нормаль по отношению к области Ω. Относительно функций $f(x,p)$ и $g(x)$ потребуем, чтобы эти функции были определены на множествах $\Omega\times\mathbb{R}$ и Γ соответственно, причем функция $f(x,p)$ должна быть *строго монотонной* по $p\in\mathbb{R}$ для каждого фиксированного $x\in\overline{\Omega}$ и $f(x,u)\in\mathbb{C}(\overline{\Omega}\times\mathbb{R})$. Справедлива следующая теорема единственности:

Теорема 3. *Пусть коэффициенты* $a_{ij}(x), b_i(x), c(x)\in\mathbb{C}_b(\Omega)$ *и* $c(x)\leqslant 0$ *в области* Ω, *оператор* L — *равномерно эллиптический. Тогда если* $\Gamma\in\mathbb{C}^{1,\alpha}$ *при* $\alpha\in(0,1]$ *и решение задачи Неймана* (2.1), (2.2) *существует, то оно единственно в классе* $u(x)\in\mathbb{C}^{(2)}(\Omega)\cap\cap\,\mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n};\overline{\Omega})\cap\mathbb{C}(\overline{\Omega})$ *при указанных условиях на функцию* $f(x,u)$.

Доказательство. *Шаг 1.* Пусть $u_1(x), u_2(x)\in\mathbb{C}^{(2)}(\Omega)\cap\cap\,\mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n};\overline{\Omega})\cap\mathbb{C}(\overline{\Omega})$ — произвольные два решения задачи Неймана (2.1), (2.2). Образуем разность этих решений:

$$u(x)=u_1(x)-u_2(x). \tag{2.3}$$

Предположим сначала, что найдется такая точка в $\overline{\Omega}$, в которой $u(x)>>0$. Поскольку $u(x)\in\mathbb{C}(\overline{\Omega})$, а $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ — ограниченная область, то в некоторой точке $x_0\in\overline{\Omega}$ достигается глобальный положительный максимум функции $u(x)$. Необходимо рассмотреть два случая: $x_0\in\Omega$ и $x_0\in\Gamma$.

Шаг 2. $x_0\in\Omega$. Тогда в этой точке имеем:

$$Lu(x_0)=f(x_0,u_1(x_0))-f(x_0,u_2(x_0))>0, \tag{2.4}$$

хотя по аналогии с лекцией 11 можно доказать, что в точке локального положительного максимума имеет место неравенство:

$$Lu(x_0)\leqslant 0.$$

Следовательно, $x_0\notin\Omega$.

Шаг 3. $x_0\in\Gamma$. Заметим, что поскольку $f(x,u)\in\mathbb{C}(\overline{\Omega}\times\mathbb{R})$, то функция

$$f_1(x)=f(x,u_1(x))-f(x,u_2(x))\in\mathbb{C}(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}) \tag{2.5}$$

для всех $u_1(x), u_2(x)\in\mathbb{C}(\overline{\Omega})$. Поскольку $f(x_0)>0$ и $\Gamma\in\mathbb{C}^{1,\alpha}$, то найдется такой шар $O(x_1,\varepsilon)\subset\Omega$ при достаточно малом $\varepsilon>0$, что $\overline{O(x_1,\varepsilon)}\cap\overline{\Omega}=\{x_0\}$, причем

$$f_1(x)>0\quad\text{для всех}\quad x\in\overline{O(x_1,\varepsilon)}. \tag{2.6}$$

С одной стороны, из (2.5) и (2.6) вытекает, что функция $u(x)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству:

$$Lu(x)>0\quad\text{для всех}\quad x\in O(x_1,\varepsilon). \tag{2.7}$$

С другой стороны, в силу (2.2) в рассматриваемом классе $u(x) \in \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n}; \overline{\Omega})$ имеем:

$$\lim_{\Omega \cap l \ni y \to x_0 \in \Gamma} \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} = 0. \tag{2.8}$$

Поэтому в силу леммы Жиро, примененной к шару $O(x_1, \varepsilon)$ получим, что либо $u(x) = const > 0$ в $O(x_1, \varepsilon)$, либо $x_0 \notin \Gamma$. Первый случай невозможен, поскольку выполнено строгое неравенство (2.7) и функция $u(x) = const > 0$ имеет локальный положительный максимум в точке $x_1 \in O(x_1, \varepsilon)$ и, значит, $Lu(x_1) \leqslant 0$. Приходим к противоречию. Следовательно, $x_0 \notin \Gamma$. Таким образом, из результатов этого шага и шагов 1 и 2 приходим к выводу о том, что $u_1(x) \leqslant u_2(x)$ в области Ω.

Шаг 4. На этом шаге нужно предположить, что найдется такая точка $x_0 \in \overline{\Omega}$, в которой достигается глобальный отрицательный минимум, и снова рассмотреть два случая: $x_0 \in \Omega$ и $x_0 \in \Gamma$. Эти рассмотрения полностью аналогичны шагам 2 и 3. И снова можно доказать, что эти случаи невозможны. Следовательно, $u(x) = 0$ всюду в $\overline{\Omega}$. Единственность доказана.

Теорема доказана.

Теперь докажем признак сравнения для задачи Неймана (2.1) и (2.2). Рассмотрим следующие дифференциальные неравенства:

$$Lv(x) \leqslant f(x, v(x)) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{2.9}$$

$$Lw(x) \geqslant f(x, w(x)) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{2.10}$$

$$\lim_{\Omega \cap l \ni y \to x \in \Gamma} \frac{\partial v(y)}{\partial \mathbf{n}_x} \geqslant \lim_{\Omega \cap l \ni y \to x \in \Gamma} \frac{\partial w(y)}{\partial \mathbf{n}_x} \quad \text{для всех} \quad x \in \Gamma, \tag{2.11}$$

где $\mathbf{n}_x$ — внешняя нормаль по отношению к области Ω. Тогда справедлива

Теорема 4. *Пусть коэффициенты* $a_{ij}(x), b_i(x), c(x) \in \mathbb{C}_b(\Omega)$ *и* $c(x) \leqslant 0$ *в области* Ω, *оператор* L *— равномерно эллиптический. Тогда если* $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ *при* $\alpha \in (0, 1]$, *то в классе* $v(x), w(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbf{n}; \overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ *решения задачи* (2.9)–(2.11) *удовлетворяют неравенству* $v(x) \geqslant w(x)$ *для всех* $x \in \overline{\Omega}$ *при указанных условиях на функцию* $f(x, u)$.

Доказательство. *Шаг 1.* Рассмотрим разность $h(x) = v(x) - - w(x)$. Заметим, что $h(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область. Предположим, что найдется такая точка $x_0 \in \overline{\Omega}$, в которой $h(x_0) < 0$. Значит, где-то на $\overline{\Omega}$ достигается глобальный отрицательный минимум функции $h(x)$. Без ограничения общности можно считать, что он достигается в этой точке x_0.

Шаг 2. $x_0 \in \Omega$. Тогда, с одной стороны, имеем:

$$Lh(x_0) \leqslant f(x_0, v(x_0)) - f(x_0, w(x_0)) < 0, \tag{2.12}$$

хотя согласно лекции 11 в точке локального отрицательного минимума выполняется неравенство:

$$Lh(x_0) \geqslant 0. \tag{2.13}$$

Полученное противоречие доказывает, что $x_0 \notin \Omega$.

Шаг 3. $x_0 \in \Gamma$. Функция $h(x)$ в силу (2.9)–(2.11) удовлетворяет следующей задаче:

$$Lh(x) \leqslant f_1(x) = f(x, v(x)) - f(x, w(x)), \quad x \in \Omega, \tag{2.14}$$

$$\lim_{\Omega\cap l\ni y\to x\in\Gamma} \frac{\partial h(y)}{\partial \mathbf{n}_x} \geqslant 0, \tag{2.15}$$

где $\mathbf{n}_x$ — внешняя нормаль по отношению к области Ω. При этом в точке $x_0 \in \Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ имеет место строгое неравенство: $f_1(x_0) < 0$. Значит, найдется такой шар $O(x_1, \varepsilon)$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$, что

$$O(x_1, \varepsilon) \subset \Omega, \quad \overline{O(x_1, \varepsilon)} \cap \overline{\Omega} = \{x_0\}$$

и при этом

$$Lh(x) \leqslant f_1(x) < 0, \quad x \in O(x_1, \varepsilon), \quad \lim_{\Omega\cap l\ni y\to x_0\in\Gamma} \frac{\partial h(y)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} \geqslant 0. \tag{2.16}$$

Точно так же как на шаге 3 теоремы 3 в силу леммы Жиро приходим к выводу о том, что $h(x) = const < 0$ в шаре $O(x_1, \varepsilon)$. Тогда в точке $x = x_1$ достигается отрицательный локальный минимум функции $h(x)$ и, значит, $Lh(x_1) \geqslant 0$, что противоречит неравенству $Lh(x_1) < 0$. Следовательно, $x_0 \notin \Gamma$. Таким образом, $v(x) \geqslant w(x)$ для всех $x \in \overline{\Omega}$.

Теорема доказана.

§ 3. Периодическая задача

Рассмотрим следующую задачу:

$$\Delta u(x) = f(x, u(x), D_x u(x)) \quad \text{при} \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.1}$$

$$u(x_1 + T, x_2) = u(x_1, x_2) \quad \text{при} \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad T > 0, \tag{3.2}$$

$$\sup_{x_1\in[0,T]} |u(x_1, x_2)| \to +0 \quad \text{при} \quad x_2 \to \pm\infty, \tag{3.3}$$

Относительно функции $f(x, p, p_1, \ldots, p_N)$ предположим, что для каждого $(x, p_1, \ldots, p_N) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N$ она *строго монотонна* по $p \in \mathbb{R}$ и для всяких $(x, p, p_1, \ldots, p_N) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ имеем $f(x_1 + T, x_2, p, p_1, \ldots, p_N) = f(x_1, x_2, p, p_1, \ldots, p_N)$. Справедлива следующая теорема единственности:

Т е о р е м а 5. *Если выполнены условия на функцию* $f(x, p, p_1, \ldots, p_N)$ *и решение периодической задачи* (3.1)–(3.3) *существует в классе* $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^2)$, *то оно единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Шаг 1.* Пусть $u_1(x), u_2(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^2)$ — два решения задачи (3.1)–(3.3). Образуем их разность

$$u(x) = u_1(x) - u_2(x). \tag{3.4}$$

Рассмотрим полосу

$$\Pi_T := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \quad -NT < x_1 < NT\}, \quad N \in \mathbb{N}$$

при любом фиксированном $N \in \mathbb{N}$. Пусть $R > 0$ — произвольное фиксированное число. Рассмотрим открытый прямоугольник:

$$\Pi_{T,R} := \{(x_1, x_2) \in (-NT, NT) \times (-R, R)\}. \tag{3.5}$$

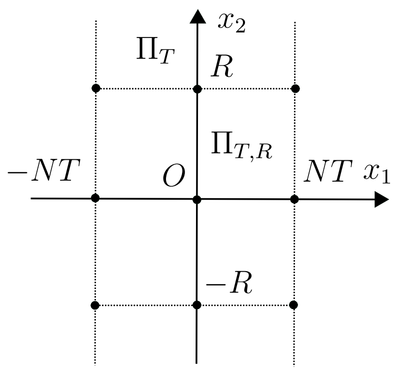


Рис. 40. Полоса Π_T и прямоугольник $\Pi_{T,R}$

В этом прямоугольнике функция (3.4) удовлетворяет следующей задаче:

$$\Delta u(x) = f_1(x) \quad \text{при} \quad x = (x_1, x_2) \in \overline{\Pi}_{T,R}, \tag{3.6}$$

$$u(-NT, x_2) = u(0, x_2) = u(NT, x_2) \quad \text{при} \quad x_2 \in (-R, R), \tag{3.7}$$

$$\sup_{x_1 \in [-NT, NT]} |u(x_1, \pm R)| = \sup_{x_1 \in [0, T]} |u(x_1, \pm R)| \leqslant a(R) \to +0 \tag{3.8}$$

при $R \to +\infty$, причем функция $a(R)$ от $N \in \mathbb{N}$ не зависит и $f_1(x) = f(x, u_1(x), D_x u_1(x)) - f(x, u_2(x), D_x u_2(x))$. Предположим, что есть точка в $\overline{\Pi}_{T,R}$, в которой достигается глобальный по $\overline{\Pi}_{T,R}$ минимум. Возможны два случая: $x_0 \in \Pi_{T,R}$ и $x_0 \in \partial\Pi_{T,R}$.

Шаг 2. $x_0 \in \Pi_{T,R}$. Тогда в этой точке

$$D_x u(x_0) = 0 \Leftrightarrow D_x u_1(x_0) = D_x u_2(x_0)$$

и в силу (3.6) выполнено неравенство:

$$\Delta u(x_0) = f_1(x_0) = \\ = f(x_0, u_1(x_0), D_x u_1(x_0)) - f(x_0, u_2(x_0), D_x u_2(x_0)) < 0, \quad (3.9)$$

хотя в точке локального минимума должно выполняться неравенство:

$$\Delta u(x_0) \geqslant 0.$$

Следовательно, $x_0 \notin \Pi_{T,R}$.

Шаг 3. $x_0 \in \partial \Pi_{T,R}$. Здесь нужно отдельно рассмотреть два подслучая:

$$x_0 \in \partial \Pi^1_{T,R} \quad \text{и} \quad x_0 \in \partial \Pi^2_{T,R}, \quad \partial \Pi_{T,R} = \partial \Pi^1_{T,R} \cup \partial \Pi^2_{T,R},$$

$$\partial \Pi^1_{T,R} = \{x_1 = -T,\ x_2 \in (-R, R)\} \cup \{x_1 = T,\ x_2 \in (-R, R)\}, \quad (3.10)$$

$$\partial \Pi^2_{T,R} = \{x_1 \in [-T, T],\ x_2 = R\} \cap \{x_1 \in [-T, T],\ x_2 = -R\}. \quad (3.11)$$

Если $x_0 \in \partial \Pi^1_{T,R}$, то в силу периодичности $u(x)$ найдется точка $x_{00} = (0, x_{20})$, $x_{20} \in (-R, R)$, в которой тоже достигается глобальный минимум и эта точка внутренняя для $\Pi_{T,R}$. Поэтому в силу результатов, полученных на шаге 2, это невозможно. Значит, глобальный минимум функции $u(x)$ может достигаться только в точке $x_0 \in \partial \Pi^2_{T,R}$. Следовательно, выполнено неравенство:

$$u(x) > \min_{y \in \partial \Pi^2_{T,R}} u(y) \geqslant -a(R), \quad x \in \Pi_{R,T}. \quad (3.12)$$

Аналогичным образом рассматривается случай глобального максимума функции $u(x)$. Тогда получим неравенство:

$$u(x) < \max_{y \in \partial \Pi^2_{T,R}} u(y) \leqslant a(R), \quad x \in \Pi_{R,T}. \quad (3.13)$$

Итак, из (3.12) и (3.13) находим, что

$$|u(x)| \leqslant a(R) \quad \text{для любого} \quad x \in \Pi_{R,T}. \quad (3.14)$$

Для каждого фиксированного $x \in \Pi_T$ найдется такое достаточно большое $R > 0$, что $x \in \Pi_{T,R}$. В пределе при $R \to +\infty$ в силу (3.8) из (3.14) получим, что

$$u(x) = 0 \quad \text{для любого} \quad x \in \Pi_T. \quad (3.15)$$

Ясно, что для любого $x \in \mathbb{R}^2$ найдется такое достаточно большое $N \in \mathbb{N}$, что $x \in \Pi_T$. Следовательно, $u(x) = 0$ для любого $x \in \mathbb{R}^2$.

Теорема доказана.

Теперь докажем признак сравнения для периодической задачи (3.1)–(3.3). Рассмотрим следующие периодические задачи для соответствующих дифференциальных неравенств:

$$\Delta v(x) \leqslant f(x, v(x), D_x v(x)) \quad \text{при} \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.16}$$

$$v(x_1 + T, x_2) = v(x_1, x_2) \quad \text{при} \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad T > 0, \tag{3.17}$$

$$\sup_{x_1 \in [0,T]} |v(x_1, x_2)| \to +0 \quad \text{при} \quad x_2 \to \pm\infty, \tag{3.18}$$

$$\Delta w(x) \geqslant f(x, w(x), D_x w(x)) \quad \text{при} \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.19}$$

$$w(x_1 + T, x_2) = w(x_1, x_2) \quad \text{при} \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad T > 0, \tag{3.20}$$

$$\sup_{x_1 \in [0,T]} |w(x_1, x_2)| \to +0 \quad \text{при} \quad x_2 \to \pm\infty. \tag{3.21}$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 6. *Если для функции $f(x, p, p_1, \ldots, p_N)$ выполнены все условия данного параграфа, то для решений $v(x)$ и $w(x)$ периодических задач* (3.16)–(3.18) *и* (3.19)–(3.21) *в классе $v(x), w(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N)$ для всех $x \in \mathbb{R}^2$ выполнено неравенство $v(x) \geqslant w(x)$.*

Доказательство. Образуем разность $u(x) = v(x) - w(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^2)$. Предположим, что в некоторой точке $y_0 \in \mathbb{R}^2$ выполнено неравенство $u(y_0) < 0$. Тогда найдутся такие $N \in \mathbb{N}$ и $R > 0$, что $y_0 \in \Pi_{T,R}$. В обозначениях шага 1 теоремы 5 функция $u(x)$ удовлетворяет следующей задаче:

$$\Delta u(x) \leqslant f_1(x) \quad \text{для любого} \quad x \in \overline{\Pi}_{T,R}, \tag{3.22}$$

$$u(-NT, x_2) = u(0, x_2) = u(NT, x_2) \quad \text{при} \quad x_2 \in (-R, R), \tag{3.23}$$

$$\sup_{x_1 \in [-NT, NT]} |u(x_1, \pm R)| = \sup_{x_1 \in [0,T]} |u(x_1, \pm R)| \leqslant 2a(R) \to +0 \tag{3.24}$$

при $R \to +\infty$, причем функция $a(R)$ от $N \in \mathbb{N}$ не зависит,

$$f_1(x) = f(x, v(x), D_x v(x)) - f(x, w(x), D_x w(x)).$$

Поскольку $u(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Pi}_{T,R})$, то в некоторой точке достигается глобальный отрицательный минимум. Без ограничения общности пусть это точка $x_0 \in \overline{\Pi}_{T,R}$. Необходимо рассмотреть два случая: $x_0 \in \Pi_{T,R}$ и $x_0 \in \partial\Pi_{T,R}$. Если $x_0 \in \Pi_{T,R}$, то в этой точке выполнены одновременно два противоречащих друг другу неравенства:

$$\Delta u(x_0) = f_1(x_0) < 0 \quad \text{и} \quad \Delta u(x_0) \geqslant 0. \tag{3.25}$$

Если $x_0 \in \partial\Pi^1_{T,R}$, то в силу периодичности функции $u(x)$ найдется точка внутри области $\Pi_{T,R}$, в которой опять будут одновременно выполнены неравенства (3.25). Поэтому точка x_0 может принадлежать только $\partial\Pi^2_{T,R}$. Таким образом, из (3.24) получаем оценку снизу:

$$u(x) > \min_{y\in\partial\Pi^2_{T,R}} u(y) \geqslant -2a(R) \quad \text{для всех} \quad x \in \Pi_{T,R}. \tag{3.26}$$

В частности, отсюда получим неравенство:

$$u(y_0) > -2a(R), \tag{3.27}$$

из которого в пределе при $R \to +\infty$ получим, что $u(y_0) \geqslant 0$, хотя по свойству точки $y_0 \in \mathbb{R}^2$ справедливо неравенство $u(y_0) < 0$. Приходим к противоречию.

Теорема доказана.

§ 4. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [11], [14], [16], [17].

Тематическая лекция IV

ОЦЕНКИ ШАУДЕРА

Л е к ц и я 15

ПРОСТРАНСТВА ГЁЛЬДЕРА

В этой лекции определены пространства Гёльдера $\mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ и $\mathbb{C}^{\alpha}(\overline{\Omega})$ и рассмотрены интерполяционные теоремы, необходимые для вывода априорных оценок Шаудера.

§ 1. Определения пространств Гёльдера

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — область. Определим пространства Гёльдера $\mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.

О п р е д е л е н и е 1. *Пространством функций Гёльдера $f(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ при $\alpha \in (0,1]$ называется линейное пространство функций $f(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega})$ таких, что*

$$\max_{|\beta|=2} \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{|\partial^\beta f(x) - \partial^\beta f(y)|}{|x-y|^\alpha} = c_\alpha < +\infty, \tag{1.1}$$

где использованы следующие обозначения:

$$\beta = (\beta_1, ..., \beta_N) \in \mathbb{Z}_+^N := \mathbb{Z}_+ \times \cdots \times \mathbb{Z}_+, \quad \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$|\beta| := \beta_1 + \cdots + \beta_N, \quad \partial^\beta := \partial_{x_1}^{\beta_1} \cdots \partial_{x_N}^{\beta_N}.$$

З а м е ч а н и е. Пространство Гёльдера $\mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ является банаховым пространством относительно нормы:

$$|f|_{2+\alpha;\Omega} \stackrel{\mathrm{def}}{=} |f|_{2;\Omega} + [f]_{2+\alpha;\Omega}, \tag{1.2}$$

$$[f]_{2+\alpha;\Omega} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max_{|\beta|=2} \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{|\partial^\beta f(x) - \partial^\beta f(y)|}{|x-y|^\alpha}, \tag{1.3}$$

$$|f|_{2;\Omega} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{|\beta|\leqslant 2} \sup_{x\in\Omega} |\partial^\beta f(x)|. \tag{1.4}$$

Кроме того, банаховым пространством является пространство Гёльдера $\mathbb{C}^{\alpha}(\overline{\Omega})$ относительно нормы:

$$|f|_{\alpha;\Omega} \stackrel{\mathrm{def}}{=} |f|_{0;\Omega} + [f]_{\alpha;\Omega}, \tag{1.5}$$

$$[f]_{\alpha;\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}, \quad |f|_{0;\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\in\Omega} |f(x)|. \tag{1.6}$$

В том случае, когда $\Omega = \mathbb{R}^N$ индекс Ω в нормах и полунормах, указанных выше, опускается.

Справедлива следующая

Лемма 1. *Пусть* $\{f_m(x)\} \subset \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ *и равномерно по* $m \in \mathbb{N}$ *ограничена в* $\mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$:

$$|f_m|_{2+\alpha;\Omega} \leqslant M < +\infty. \tag{1.7}$$

Тогда найдется такая подпоследовательность $\{f_{m_n}(x)\} \subset \{f_m(x)\}$, *что*

$$f_{m_n}(x) \to f(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \textit{сильно в} \quad \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega})$$

и

$$|f|_{2+\alpha;\Omega} \leqslant M. \tag{1.8}$$

Доказательство. *Шаг 1.* Прежде всего заметим, что

$$\mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \subset \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega}).$$

По условию леммы последовательность $\{f_m\} \subset \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega})$ является равномерно ограниченной:

$$|f_m|_{2;\Omega} \leqslant M < +\infty.$$

Кроме того, заметим, что имеет место следующее равенство:

$$f_m^{(l)}(x'') - f_m^{(l)}(x') = \int\limits_{x'}^{x''} dx_i \, \frac{\partial f_m^{(l)}(x)}{\partial x_i} \quad \text{при} \quad |l| \leqslant 1,$$

из которого вытекает неравенство:

$$\left| f_m^{(l)}(x'') - f_m^{(l)}(x') \right| \leqslant \left| f_m^{(l+1)} \right|_{0;\Omega} |x''-x'| \leqslant M\, |x''-x'|\,.$$

С другой стороны,

$$\left| f_m^{(k)}(x'') - f_m^{(k)}(x') \right| \leqslant M\, |x''-x'|^\alpha\,, \quad x', x'' \in \Omega \quad \text{при} \quad |k| = 2.$$

Следовательно, последовательность $\{f_m\} \subset \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega})$ является равностепенно непрерывной. Поэтому по теореме Арцела последовательность $\{f_m(x)\}$ является предкомпактной в $\mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega})$ и поэтому найдется такая подпоследовательность $\{f_{m_n}\} \subset \{f_m\}$, которая

$$f_{m_n}(x) \to f(x) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad m_n \to +\infty.$$

В частности, имеем:

$$|f_{m_n}|_{2;\Omega} \to |f|_{2;\Omega} \quad \text{при} \quad m_n \to +\infty. \tag{1.9}$$

В силу (1.7) справедлива следующая оценка:

$$\sum_{k_1+\cdots+k_N=2} \frac{1}{|x''-x'|^\alpha} \left| \frac{\partial^2 f_{m_n}(x'')}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_N^{k_N}} - \frac{\partial^2 f_{m_n}(x')}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_N^{k_N}} \right| \leqslant M < +\infty.$$

В пределе при $m_n \to +\infty$ получим выражение:

$$\sum_{k_1+\cdots+k_N=2} \frac{1}{|x''-x'|^\alpha} \left| \frac{\partial^2 f(x'')}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_N^{k_N}} - \frac{\partial^2 f(x')}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_N^{k_N}} \right| \leqslant M < +\infty.$$

Следовательно, с учетом результат первого шага $f(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Шаг 2. Осталось доказать, что справедливо неравенство (1.8). С этой целью заметим, что в силу (1.7) справедлива цепочка неравенств

$$|f_{m_n}|_{2;\Omega} + \sum_{k_1+\cdots+k_N=2} \frac{1}{|x''-x'|^\alpha} \left| \frac{\partial^2 f_{m_n}(x'')}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_N^{k_N}} - \frac{\partial^2 f_{m_n}(x')}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_N^{k_N}} \right| \leqslant \\ \leqslant |f_{m_n}|_{2+\alpha;\Omega} \leqslant M < +\infty. \tag{1.10}$$

Предельным переходом при $m_n \to +\infty$ с учетом (1.9) из (1.10) получим неравенство:

$$|f|_{2;\Omega} + \sum_{k_1+\cdots+k_N=2} \frac{1}{|x''-x'|^\alpha} \left| \frac{\partial^2 f(x'')}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_N^{k_N}} - \frac{\partial^2 f(x')}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_N^{k_N}} \right| \leqslant M. \tag{1.11}$$

Осталось взять supremum от обеих частей неравенства (1.11) по $x'' \neq x'$, $x'', x' \in \Omega$ и получить неравенство:

$$|f|_{2;\Omega} + [f]_{2+\alpha;\Omega} \leqslant M, \tag{1.12}$$

т.е. неравенство (1.8).

Лемма доказана.

Рассмотрим «сглаживание» функции $f(x) \in \mathbb{C}_0^{(2)}(\Omega)$:

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \omega_\varepsilon(x-y) f(y)\, dy,$$

где

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} c_\varepsilon \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-|x|^2}\right\}, & \text{если} \quad |x|<\varepsilon; \\ 0, & \text{если} \quad |x| \geqslant \varepsilon, \end{cases} \qquad c_\varepsilon = \frac{c_0}{\varepsilon^N},$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega_\varepsilon(x)\,dx = 1. \text{ [1)]}$$

Пусть $\operatorname{supp} f(x) \subset \Omega$ и тогда $\operatorname{supp} f_\varepsilon \subset \Omega$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ и, кроме того, $f_\varepsilon(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$. Заметим, что имеет место следующее неравенство:

$$\frac{|f_\varepsilon(x'') - f_\varepsilon(x')|}{|x'' - x'|^\alpha} = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega_h(y) \frac{|f(x''-y) - f(x'-y)|}{|x''-x'|^\alpha}\,dy \leqslant \\ \leqslant c_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega_\varepsilon(y)\,dy = c_\alpha.$$

Следовательно, справедливо следующее неравенство:

$$[f_\varepsilon]_{\alpha;\Omega} \leqslant [f]_{\alpha;\Omega} \quad \text{для всех} \quad f(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\overline{\Omega}), \quad \operatorname{supp} f(x) \subset \Omega. \tag{1.13}$$

Кроме этого, имеет место следующее равенство:

$$\frac{\partial^2 f_\varepsilon(x)}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_N^{k_N}} = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial^2 \omega_\varepsilon(x-y)}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_N^{k_N}} f(y)\,dy = \\ = (-1)^2 \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial^2 \omega_\varepsilon(x-y)}{\partial y_1^{k_1} \cdots \partial y_N^{k_N}} f(y)\,dy = (-1)^4 \int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega_\varepsilon(x-y) \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y_1^{k_1} \cdots \partial y_N^{k_N}}\,dy,$$

где $k_1 + \cdots + k_N = 2$. Следовательно,

$$\left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_N^{k_N}} \right)_\varepsilon = \frac{\partial^2 f_\varepsilon(x)}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_N^{k_N}}. \tag{1.14}$$

§ 2. Интерполяционные неравенства

Введём следующее общее обозначение:

$$\mathbb{C}^s(\overline{\Omega}) = \begin{cases} \mathbb{C}^{(s)}(\overline{\Omega}), & \text{если } s \in \mathbb{N}; \\ \mathbb{C}^{[s]+\delta_s}(\overline{\Omega}), & \text{если } s = [s] + \delta_s,\ \delta_s \in (0,1), \end{cases}$$

где $[s]$ — это целая часть неотрицательного числа s. Введём следующее обозначение:

$$[u]_{s;\Omega} := \begin{cases} \max\limits_{|\alpha|=s} \sup\limits_{x\in\Omega} |\partial_x^\alpha u(x)|, & \text{если} \quad s \in \mathbb{N} \cup \{0\}; \\ \max\limits_{|\alpha|=[s]} \sup\limits_{x,y\in\Omega} \frac{|\partial_x^\alpha u(x) - \partial_y^\alpha u(y)|}{|x-y|^{\delta_s}}, & \text{если} \quad s = [s] + \delta_s, \quad \delta_s \in (0,1). \end{cases} \tag{2.1}$$

Справедлива следующая интерполяционная теорема:

[1)] Этим условием однозначно определяется постоянная c_0.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $s \in [0, r]$ *и* $u(x) \in \mathbb{C}^r(\overline{\Omega})$. *Тогда справедливо следующее неравенство*:

$$[u]_{s;\Omega} \leqslant c_1 \left(\varepsilon^{r-s}[u]_{r;\Omega} + \varepsilon^{-s}|u|_{0;\Omega}\right) \tag{2.2}$$

для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$*, где* $c_1 > 0$ *и не зависит от* $\varepsilon > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 0. Прежде всего заметим, что если ограниченная область $\Omega \ni 0$, то она содержит малый шар $O(0, \varepsilon)$ положительного радиуса ε с центром в точке $x_0 = 0 \in \Omega$.

Кроме того, заметим, что для любого $v(x) := u(\varepsilon x)$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ и при

$$s = [s] + \delta_s, \quad \delta_s \in (0, 1)$$

имеет место равенство:

$$[v]_{s;\Omega} := \max_{|\alpha|=[s]} \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|\partial_x^\alpha v(x) - \partial_y^\alpha v(y)|}{|x-y|^{\delta_s}} =$$

$$= \varepsilon^{[s]+\delta_s} \max_{|\alpha|=[s]} \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|\partial_{\varepsilon x}^\alpha u(\varepsilon x) - \partial_{\varepsilon y}^\alpha u(\varepsilon y)|}{|\varepsilon x - \varepsilon y|^{\delta_s}} = \varepsilon^s [u]_{s;\Omega}$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Аналогичным образом рассматривается случай, когда $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Заметим, что неравенство (2.2) можно переписать в следующем виде:

$$\varepsilon^s [u]_{s;\Omega} \leqslant c_1 \left(\varepsilon^r [u]_{r;\Omega} + |u|_{0;\Omega}\right) \Rightarrow [v]_{s;\Omega} \leqslant c_1 \left([v]_{r,\Omega} + |v|_{0;\Omega}\right),$$

где напомним $v(x) := u(\varepsilon x)$. Поэтому достаточно доказать неравенство (2.2) при $\varepsilon = 1$, а потом перейти к функции $u(\varepsilon x)$ и получить требуемое неравенство для произвольного $\varepsilon > 0$.

Докажем неравенство:

$$[u]_{s;\Omega} \leqslant c_1 [u]_{r;\Omega} + c_1 |u|_{0;\Omega}. \tag{2.3}$$

Доказательство этого неравенства разобьем на несколько шагов. Итак, пусть

$$s = j + \gamma, \quad r = k + \delta, \quad j, k \in \mathbb{N}, \quad j \leqslant k, \quad \gamma,\ \delta \in [0, 1].$$

Шаг 1. Сначала предположим, что $j = k$. Заметим, что по условию $s \leqslant r$ и поэтому имеет место неравенство $\gamma \leqslant \delta$. При этом сначала нужно доказать неравенство:

$$[u]_{j+\gamma;\Omega} \leqslant c_1 [u]_{j+\delta;\Omega} + c_1 [u]_{j;\Omega}. \tag{2.4}$$

Пункт 1. Если $\delta = 1$, то при $|x - y| \leqslant 1$ имеет место неравенство:

$$\left|\partial_x^\alpha u(x) - \partial_y^\alpha u(y)\right| \leqslant c_2 |x-y| [u]_{j+1;\Omega} \leqslant c_2 |x-y|^\gamma [u]_{j+1;\Omega}, \tag{2.5}$$

где $j = |\alpha|$.

$\square$ Действительно, с учетом обозначения (2.1) справедливы следующие равенства и оценки:

$$\partial_x^\alpha u(x) - \partial_y^\alpha u(y) = \int\limits_0^1 \frac{d}{ds}\partial_{x_s}^\alpha u(x_s)\, ds, \quad x_s = sx + (1-s)y, \tag{2.6}$$

$$\frac{d}{ds}\partial_{x_s}^\alpha u(x_s) = \sum_{m=1}^N \partial_{x_{sm}}\partial_{x_s}^\alpha u(x_s)[x_m - y_m] = \left(D_{x_s}\partial_{x_s}^\alpha u(x_s), x-y\right), \tag{2.7}$$

$$\left|\frac{d}{ds}\partial_{x_s}^\alpha u(x_s)\right| = \left|D_{x_s}\partial_{x_s}^\alpha u(x_s)\right| |x-y|, \tag{2.8}$$

из которых вытекает искомая оценка (2.5). $\boxtimes$

При $|x-y| \geqslant 1 \Rightarrow |x-y|^\gamma \geqslant 1$ имеет место следующее неравенство:

$$\left|\partial_x^\alpha u(x) - \partial_y^\alpha u(y)\right| \leqslant 2[u]_{j;\Omega} \leqslant 2|x-y|^\gamma [u]_{j;\Omega}.$$

Поэтому комбинируя эти неравенства, мы приходим к неравенству:

$$\max_{|\alpha|=j} \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{\left|\partial_x^\alpha u(x) - \partial_y^\alpha u(y)\right|}{|x-y|^\gamma} \leqslant c_1\left([u]_{j+1;\Omega} + [u]_{j;\Omega}\right), \quad c_1 = \max\{2, c_2\}.$$

Окончательно имеем:

$$[u]_{j+\gamma;\Omega} \leqslant c_1[u]_{j+\delta;\Omega} + c_1[u]_{j;\Omega} \quad \text{при} \quad \delta = 1. \tag{2.9}$$

Пункт 2. Пусть теперь $0 < \delta < 1$. Поскольку $\gamma \leqslant \delta$, то имеет место следующее неравенство:

$$\left|\partial_x^\alpha u(x) - \partial_y^\alpha u(y)\right| \leqslant |x-y|^\gamma \frac{\left|\partial_x^\alpha u(x) - \partial_y^\alpha u(y)\right|}{|x-y|^\delta}|x-y|^{\delta-\gamma}.$$

Отсюда в силу ограниченности области Ω справедливо неравенство:

$$[u]_{j+\gamma;\Omega} \leqslant c_3(\Omega)[u]_{j+\delta;\Omega} \Rightarrow [u]_{j+\gamma;\Omega} \leqslant c_1[u]_{j+\delta;\Omega} + c_1[u]_{j;\Omega}$$

при $j \geqslant 1$, $0 \leqslant \gamma \leqslant \delta \leqslant 1$.

Итак,

$$\boxed{[u]_{j+\gamma;\Omega} \leqslant c_1[u]_{j+\delta;\Omega} + c_1[u]_{j;\Omega} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \gamma \leqslant \delta, \quad j \in \mathbb{N}.}$$

Шаг 2. Пусть $j = k$. Докажем справедливость следующего неравенства:

$$[u]_{j;\Omega} \leqslant c_1[u]_{j+\delta;\Omega} + c_1|u|_{0;\Omega}, \quad j \geqslant 1. \tag{2.10}$$

Очевидно, что достаточно рассмотреть случай при $\delta > 0$. Пусть $x \in \Omega$ и $x_0 = 0 \in \Omega$. Тогда имеет место следующее неравенство:

$$
\begin{aligned}
|\partial_x^\alpha u(x)| \leqslant |\partial_x^\alpha u(x) - \partial_x^\alpha u(y)| + |\partial_x^\alpha u(y)| \leqslant \\
\leqslant \frac{|\partial_x^\alpha u(x) - \partial_x^\alpha u(y)|}{|x-y|^\delta}|x-y|^\delta + |\partial_x^\alpha u(y)| \leqslant \\
\leqslant \lambda^\delta [u]_{j+\delta} + |\partial_x^\alpha u(y)|, \quad \lambda = \sup_{x\in\Omega} |x|.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Справедлива следующая вспомогательная

Лемма 2. *Пусть $u \in \mathbb{C}^{(k)}(\overline{O_r})$, $|\alpha| = k$. Тогда найдется такая точка $y = y(\alpha) \in O_r$, что*

$$
|\partial_x^\alpha u(y)| \leqslant \frac{(2k)^k}{r^k}|u|_{0;O_r}, \tag{2.12}
$$

где $O_r := O(0,r) = \left\{x \in \mathbb{R}^N : \; |x| < r\right\}$.

Доказательство.

Введём следующий разностный оператор:

$$
\delta_h^\alpha u(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \delta_{h,1}^{\alpha_1}\delta_{h,2}^{\alpha_2}\cdots\delta_{h,N}^{\alpha_N}u(x), \quad \delta_{h,j}u(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{u(x+h\mathbf{e}_j) - u(x)}{h}, \tag{2.13}
$$

причём выберем

$$
h := \frac{r}{k}.
$$

По теореме о среднем найдется такое $y_1 \in O_r$, что имеет место следующее равенство:

$$
u(x + h\mathbf{e}_j) = u(x) + hu_{x_j}(y_1),
$$

из которого получаем равенство:

$$
\delta_{h,j}u(x) = u_{x_j}(y_1), \quad |x - y_1| \leqslant h.
$$

Аналогичным образом мы приходим к выводу о том, что в силу теоремы о среднем найдется такое $y_2 : |y_2 - y_1| < h$, что справедливо следующее равенство:

$$
\delta_{h,i}\delta_{h,j}u(x) = \left(\delta_{h,j}u\right)_{x_i}(y_1) = \delta_{h,j}(u_{x_i})(y_1) = u_{x_i x_j}(y_2), \tag{2.14}
$$

причем

$$
|x - y_2| \leqslant |x - y_1| + |y_1 - y_2| \leqslant h + h = 2h.
$$

Итак, найдется такое $y = y(h) : \; |y - x| < kh = r$, что имеет место неравенство:

$$
\delta_h^\alpha u(x) = \partial_x^\alpha u(y), \quad |y - x| < r. \tag{2.15}
$$

Кроме того, имеют место неравенства:

$$
|h\delta_{h,j}u(x)| \leqslant 2|u|_{0;O_r} \quad |\delta_{h,j}u(x)| \leqslant \frac{2}{h}|u|_{0;O_r}. \tag{2.16}
$$

Применяя крайнее неравенство в (2.16) $|\alpha| = k$–раз мы получим неравенство: [1])

$$|\delta_h^\alpha u(x)| \leqslant \left(\frac{2}{h}\right)^k |u|_{0;O_r} \Rightarrow |\partial_x^\alpha u(y)| \leqslant \left(\frac{2k}{r}\right)^k |u|_{0;O_r}.$$

Лемма доказана.

Продолжим неравенство (2.11):

$$|\partial_x^\alpha u(x)| \leqslant \lambda^\delta [u]_{j+\delta;\Omega} + |\partial_x^\alpha u(y)| \leqslant c_1 [u]_{j+\delta;\Omega} + c_1 |u|_{0;\Omega}. \tag{2.17}$$

Итак,

$$\boxed{[u]_{j;\Omega} \leqslant c_1 [u]_{j+\delta;\Omega} + c_1 |u|_{0;\Omega} \quad \text{при} \quad j \in \mathbb{N}, \quad \delta > 0.}$$

Шаг 3. Итак, из неравенств (2.4) и (2.10) получим нужное для нас неравенство: [2])

$$\boxed{[u]_{j+\gamma;\Omega} \leqslant c_1 [u]_{j+\delta;\Omega} + c_1^2 [u]_{j+\delta;\Omega} + c_1^2 |u|_{0;\Omega}.} \tag{2.18}$$

Шаг 4. Пусть теперь $j < k$ и соотношение между γ и δ не имеет значение. Тогда последовательно применяя неравенства (2.4) и (2.10), получим неравенство:

$$[u]_{j+\gamma;\Omega} \leqslant c_1 [u]_{j+1;\Omega} + [u]_{j;\Omega} \leqslant$$
$$\leqslant (c_1 + c_1^2)[u]_{j+1;\Omega} + c_1^2 |u|_{0;\Omega} \leqslant \cdots \leqslant \sum_{l=1}^k c_1^l [u]_{k;\Omega} + k c_1^2 |u|_{0;\Omega} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{l=1}^k c_1^{l+1} [u]_{k+\delta;\Omega} + \left(k c_1^2 + \sum_{l=1}^k c_1^{l+1}\right) |u|_{0;\Omega}. \tag{2.19}$$

Переобозначив

$$c_1 \leftarrow \max\left\{\left(k c_1^2 + \sum_{l=1}^k c_1^{l+1}\right), \sum_{l=1}^k c_1^{l+1}\right\},$$

мы получим утверждение интерполяционной теоремы.

Теорема доказана.

Из интерполяционной теоремы вытекает важное для вывода априорных оценок Шаудера неравенство.

Введем срезающую функцию. Пусть $\psi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

$$\psi_R^y(x) \stackrel{\text{def}}{=} \psi\left(\frac{x-y}{R}\right), \quad \psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 \leqslant |x| \leqslant R; \\ 0, & \text{если} \ |x| \geqslant 2R. \end{cases} \tag{2.20}$$

[1]) Напомним, что $h = r/k$ по определению.

[2]) В целях сокращения количества используемых констант для всех постоянных в оценках используется обозначение c_1.

Лемма 3. *Для всех* $u(x) \in \mathbb{C}^{n+\vartheta}(\mathbb{R}^N)$ *найдется такое* $K = K(N, n, \vartheta) > 0$, *что для всех* $n \in \mathbb{N}$, $\vartheta \in [0,1]$ *и любом* $R \geqslant 1$ *выполнено неравенство*: [1])

$$|u|_{n+\vartheta} \leqslant K \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \left([u\psi_R^y(x)]_{n+\vartheta} + |u\psi_R^y|_0 \right). \tag{2.21}$$

Доказательство.

Шаг 1. Для всех $\tau \in [0,1]$ имеет место следующее неравенство:

$$[u]_{r+\tau} \leqslant 2 \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \left([u]_{r+\tau;O_1(y)} + [u]_{r;O_1(y)} \right), \tag{2.22}$$

где $O_1(y) := O(y,1) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \ |x-y| < 1 \right\}$.

□ Доказательство.

Пункт 1. Случай $\tau = 0$ или $\tau = 1$. Действительно, в обоих случаях имеем:

$$[u]_{r+\tau} = \max_{|\alpha|=r+\tau} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\partial_x^\alpha u(x)| = \sup_{y\in\mathbb{R}^N} [u]_{r+\tau;O_1(y)}.$$

В этих случаях неравенство (2.22) выполнено.

Пункт 2. Случай $\tau \in (0,1)$. Рассмотрим отношение

$$I(x_1,x_2) = \frac{|\partial_x^\alpha u(x_1) - \partial_x^\alpha u(x_2)|}{|x_1-x_2|^\tau}, \quad r = |\alpha|. \tag{2.23}$$

С одной стороны, при $|x_1 - x_2| \leqslant 1$, т. е. $x_1, x_2 \in O_1(y)$ при некотором $y \in \mathbb{R}^N$ справедливо неравенство:

$$\sup_{|x_1-x_2|\leqslant 1} I(x_1,x_2) \leqslant \sup_{y\in\mathbb{R}^N} [u]_{r+\tau;O_1(y)}.$$

С другой стороны, при $|x_1 - x_2| \geqslant 1$ имеет место оценка:

$$\sup_{|x_1-x_2|\geqslant 1} I(x_1,x_2) \leqslant 2 \sup_{|x_1-x_2|\geqslant 1} \left[|\partial_x^\alpha u(x_1)| + |\partial_x^\alpha u(x_2)| \right] \leqslant 2 \sup_{y\in\mathbb{R}^N} [u]_{r;O_1(y)}.$$

Итак,

$$\boxed{[u]_{r+\tau} \leqslant K \left(\sup_{y\in\mathbb{R}^N} [u]_{r+\tau;O_1(y)} + \sup_{y\in\mathbb{R}^N} [u]_{r;O_1(y)} \right)}, \tag{2.24}$$

поскольку

$$[u]_{r+\tau} = \sup_{x_1\neq x_2,\ x_1,\,x_2\in\mathbb{R}^N} I(x_1,x_2). \quad \boxtimes$$

---

[1]) Величина $|\cdot|_{n+\vartheta}$ — это норма банахова пространства $\mathbb{C}^{n+\vartheta}(\mathbb{R}^N)$.

Шаг 2. Справедливо равенство:

$$u(x) = \frac{c_1}{R^N} \int\limits_{|x-y|\leqslant 3R} u(x)\psi_R^z(x)\,dz, \quad c_1 = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \psi(z)\,dz \right)^{-1}, \tag{2.25}$$

где

$$\psi_R^z(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \psi\left(\frac{x-z}{R}\right).$$

□ Действительно,

$$\psi_R^z(x) = 0 \quad \text{при} \quad |x-z| \geqslant 2R.$$

Поэтому

$$\int\limits_{|x-z|\leqslant 3R} \psi_R^z(x)\,dz = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \psi\left(\frac{x-z}{R}\right)dz =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \psi\left(\frac{y}{R}\right)dy = R^N \int\limits_{\mathbb{R}^N} \psi(w)\,dw = c_1 R^N. \quad \boxtimes \tag{2.26}$$

Следовательно, имеет место следующее неравенство:

$$[u]_{r+\tau;O_1(y)} \leqslant \frac{c_1}{R^N} \int\limits_{|x-y|\leqslant 3R} [u\psi_R^z]_{r+\tau}\,dz \leqslant K_1 \sup_{z\in\mathbb{R}^N} [u\psi_R^z]_{r+\tau}. \tag{2.27}$$

Итак, из неравенств (2.24) и (2.27) получаем следующее неравенство:

$$[u]_{r+\tau} \leqslant 2K_1 \sup_{z\in\mathbb{R}^N} \left([u\psi_R^z]_{r+\tau} + [u\psi_R^z]_r\right). \tag{2.28}$$

Шаг 3. Теперь воспользуемся интерполяционным неравенством (2.2) и получим следующие два неравенства:

$$[u\psi_R^z]_r \leqslant K[u\psi_R^z]_{r+\tau} + K|u\psi_R^z|_0, \tag{2.29}$$

$$[u\psi_R^z]_{r+\tau} \leqslant K[u\psi_R^z]_{n+\vartheta} + K|u\psi_R^z|_0. \tag{2.30}$$

Таким образом, неравенство (2.28) преобразуется к виду:

$$[u]_{r+\tau} \leqslant K_2 \sup_{z\in\mathbb{R}^N} \left([u\psi_R^z]_{n+\vartheta} + |u\psi_R^z|_0\right). \tag{2.31}$$

Это неравенство справедливо при $\tau = \vartheta$ и при $r = \overline{0,n}$. Поэтому с учетом равенства

$$|u|_{n+\vartheta} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{r=0}^{n} |u|_r + [u]_{n+\vartheta} \tag{2.32}$$

получаем искомое неравенство:

$$\boxed{|u|_{n+\vartheta} \leqslant K_3 \sup_{z\in\mathbb{R}^N} \left([u\psi^z_R]_{n+\vartheta} + |u\psi^z_R|_0\right).} \tag{2.33}$$

Лемма доказана.

§ 3. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [5], [6], [7], [15].

Лекция 16

$\mathbb{C}^{2+\alpha}$–АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ШАУДЕРА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

§ 1. Постановка задачи

Напомним, что норму $|\cdot|_{2+\alpha;\Omega}$ банахова пространства $\mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ и норму $|\cdot|_{\alpha;\Omega}$ банахова пространства $\mathbb{C}^{\alpha}(\overline{\Omega})$ можно ввести следующим образом:

$$
|v|_{2+\alpha;\Omega} = \sup_{x\in\Omega}|v(x)| + \sup_{x\in\Omega}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\right| + \sup_{x\in\Omega}\sum_{i,j=1,1}^{N,N}\left|\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_i\partial x_j}\right| + \\
+ \sup_{x'\neq x'',\, x',x''\in\Omega}\sum_{i,j=1,1}^{N,N}\frac{1}{|x'-x''|^{\alpha}}\left|\frac{\partial^2 v(x')}{\partial x_i\partial x_j} - \frac{\partial^2 v(x'')}{\partial x_i\partial x_j}\right|, \quad (1.1)
$$

$$
|v|_{\alpha;\Omega} = \sup_{x\in\Omega}|v(x)| + \sup_{x'\neq x'',\, x',x''\in\Omega}\frac{|v(x')-v(x'')|}{|x'-x''|^{\alpha}}. \quad (1.2)
$$

Получим априорную оценку Шаудера

$$
\boxed{|u|_{2+\alpha;\Omega} \leqslant c(\alpha,\Omega)|\Delta u|_{\alpha;\Omega}}
$$

для функций $u(x)\in\mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, у которых носитель $\operatorname{supp}\{u(x)\}\subset\Omega$ в предположении, что граница Γ области Ω достаточно гладкая.

Пусть

$$
f(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\Delta u(x), \quad u(x)\in\mathbb{C}_0^{\infty}(\Omega) \Rightarrow f(x)\in\mathbb{C}_0^{\infty}(\Omega). \quad (1.3)
$$

Поэтому функцию $f(x)$ можно продолжить нулем в $\mathbb{R}^N\backslash\Omega$ и $f(x)\in \in\mathbb{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$. Следовательно, (см. лекцию 1)

$$
\boxed{u(x) = \frac{1}{(N-2)\omega_N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{f(y)}{|x-y|^{N-2}}\,dy, \quad \operatorname{supp} f\subset\Omega\subset O(0,R_0)} \quad (1.4)
$$

при некотором достаточно большом $R_0>0$.

§ 2. Гёльдеровские оценки второй смешанной производной

Рассмотрим следующий объемный потенциал:

$$U(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x-y|^{N-2}} f(y)\, dy. \tag{2.1}$$

Пусть $z \in \mathbb{R}^N$ — произвольное фиксированное. Справедливы следующие равенства:

$$U(x) = U_1(x) + U_2(x), \quad x \subset O(z,1), \tag{2.2}$$

$$U_1(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus O(z,2)} \frac{1}{|x-y|^{N-2}} f(y)\, dy, \tag{2.3}$$

$$U_2(x) = \int\limits_{O(z,2)} \frac{1}{|x-y|^{N-2}} f(y)\, dy. \tag{2.4}$$

Справедлива следующая лемма:
Лемма 4. *Если* $f(x) \in \mathbb{C}_0(\mathbb{R}^N)$, *то функция* $U_1(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(O(z,1))$, *причем имеет место следующее равенство*:

$$\frac{\partial^2 U_1(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus O(z,2)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{|x-y|^{N-2}} \right) f(y)\, dy. \tag{2.5}$$

Доказательство. *Шаг 1.* $U_1(x) \in \mathbb{C}(O(z,1))$. Действительно, пусть $x_1, x_2 \in O(z,1)$. Тогда имеет место равенство:

$$|U_1(x_1) - U_1(x_2)| \leqslant |U_{11}(x_1)| + |U_{11}(x_2)| + |U_{12}(x_1) - U_{12}(x_2)|\,, \tag{2.6}$$

где

$$U_{11}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus O(z,M)} \frac{f(y)}{|y-x|^{N-2}}\, dy, \quad M \in \mathbb{N}, \quad M \geqslant 3, \tag{2.7}$$

$$U_{12}(x) = \int\limits_{O(z,M) \setminus O(z,2)} \frac{f(y)}{|y-x|^{N-2}}\, dy, \quad N \in \mathbb{N}, \quad M \geqslant 3. \tag{2.8}$$

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое достаточно большое $M \in \mathbb{N}$, что

$$|U_{11}(x)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus O(x,M)} \frac{|f(y)|}{|y-x|^{N-2}}\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(M-1)^{N-2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |f(y)|\, dy < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (2.9)$$

поскольку для любого $x \in O(z,1)$ и $y \in \mathbb{R}^N \backslash O(z,M)$ имеет место неравенство:

$$|y-x| \geqslant |y-z| - |x-z| \geqslant M-1.$$

Фиксируем данное $M \in \mathbb{N}$. Справедливо следующее утверждение:

Лемма 5. *При* $|y-z| \geqslant 2$, $\max\{|z-x_1|, |z-x_2|\} < 1$ *и* $\lambda > 0$ *справедливо неравенство*:

$$\left| \frac{1}{|y-x_1|^\lambda} - \frac{1}{|y-x_2|^\lambda} \right| \leqslant \lambda |x_1 - x_2|. \quad (2.10)$$

Доказательство. Справедливы следующие равенства:

$$\frac{1}{|y-x_1|^\lambda} - \frac{1}{|y-x_2|^\lambda} = \int\limits_0^1 \frac{d}{ds} \frac{1}{|y-x_s|^\lambda}\, ds, \quad x_s = sx_1 + (1-s)x_2, \quad (2.11)$$

$$\frac{d}{ds} \frac{1}{|y-x_s|^\lambda} = -\lambda \sum_{j=1}^N \frac{(y_j - x_{sj})(x_{1j} - x_{2j})}{|y-x_s|^{\lambda+2}} = $$

$$= -\lambda \frac{(y-x_s, x_1-x_2)}{|y-x_s|^{\lambda+1}}, \quad y \neq x_s. \quad (2.12)$$

Справедливы неравенства:

$$|z-x_s| \leqslant s|z-x_1| + (1-s)|z-x_2| \leqslant$$
$$\leqslant \max\{|z-x_1|, |z-x_2|\} < 1, \quad (2.13)$$

$$|y-x_s| \geqslant |y-z| - |z-x_s| \geqslant 2-1 = 1. \quad (2.14)$$

Поэтому имеет место оценка:

$$\left| \frac{d}{ds} \frac{1}{|y-x_s|^\lambda} \right| \leqslant \lambda |x_1 - x_2|. \quad (2.15)$$

Из (2.11) и (2.15) получаем (2.10).

Лемма доказана.

Тогда справедливо неравенство:

$$|U_{12}(x_1) - U_{12}(x_2)| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{y \in \mathbb{R}^N} |f(y)| \int\limits_{O(z,M)\backslash O(z,2)} \left| \frac{1}{|y-x_1|^{N-2}} - \frac{1}{|y-x_2|^{N-2}} \right| dy \leqslant$$

$$\leqslant (N-2)\alpha_N M^N \sup_{y\in\mathbb{R}^N} |f(y)||x_1 - x_2|. \quad (2.16)$$

Из (2.16) вытекает, что при фиксированном ранее $M \in \mathbb{N}$ найдется такое $\delta = \delta(M(\varepsilon), \varepsilon) > 0$, что

$$|U_{12}(x_1) - U_{12}(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при} \quad |x_1 - x_2| < \delta. \quad (2.17)$$

Из (2.6)–(2.9) и (2.17) получаем, что $U(x) \in \mathbb{C}(O(z,1))$.

Шаг 2. $U_1(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(O(z,1))$. Введем функцию

$$U_{1j}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus O(z,2)} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right) f(y)\,dy. \quad (2.18)$$

Рассуждая аналогично тому, как на шаге 1 можно доказать, что $U_{1j}(x) \in \mathbb{C}(O(z,1))$. Справедлива следующие равенства:

$$\frac{1}{h}\left[U_1(x+h\mathbf{e}_j) - U_1(x)\right] = \\ = \frac{1}{h}\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus O(z,2)} \left[\frac{1}{|x+h\mathbf{e}_j - y|^{N-2}} - \frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right] f(y)\,dy, \quad (2.19)$$

$$\frac{1}{|x+h\mathbf{e}_j - y|^{N-2}} - \frac{1}{|x-y|^{N-2}} = \\ = \int\limits_0^1 \frac{d}{ds}\frac{1}{|x_s - y|^{N-2}}\,ds, \quad x_s = x + sh\mathbf{e}_j, \quad |h| < \frac{1}{2}. \quad (2.20)$$

$$\frac{d}{ds}\frac{1}{|x_s-y|^{N-2}} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_{sk}}\frac{1}{|x_s-y|^{N-2}}\frac{\partial x_{sk}}{\partial s} = \\ = h\frac{\partial}{\partial x_{sj}}\frac{1}{|x_s-y|^{N-2}}, \quad x_s \neq y. \quad (2.21)$$

Из (2.18)–(2.21) следуют равенства:

$$I_{jh} := \frac{1}{h}\left[U_1(x+h\mathbf{e}_j) - U_1(x)\right] - U_{1j}(x) = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus O(z,2)} f(y)\int\limits_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x_{sj}}\frac{1}{|x_s-y|^{N-2}} - \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right] ds\,dy, \quad (2.22)$$

причем поскольку $|y-z| \geqslant 2$, $|z-x| < 1$ и $|h| < 1/2$, то имеем:

$$|z-x_s| \leqslant |z-x| + |h| < 3/2,$$

$$|y-x_s| \geqslant |y-z| - |z-x_s| \geqslant 2 - 3/2 = 1/2, \quad s \in [0,1]. \tag{2.23}$$

Выражение (2.22) можно представить в следующем виде:

$$I_{jh} := I_{1jh} + I_{2jh} + I_{3jh}, \tag{2.24}$$

$$I_{1jh} = \int\limits_{O(z,M)\setminus O(z,2)} f(y) \int\limits_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x_{sj}} \frac{1}{|x_s-y|^{N-2}} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|x-y|^{N-2}} \right] ds\, dy, \tag{2.25}$$

$$I_{2jh} = \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus O(z,M)} f(y) \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial x_{sj}} \frac{1}{|x_s-y|^{N-2}}\, ds\, dy, \tag{2.26}$$

$$I_{3jh} = -\int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus O(z,M)} f(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|x-y|^{N-2}}\, dy. \tag{2.27}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное фиксированное. По аналогии с получением оценки (2.9) с учетом (2.23) можно доказать, что для всех $|h| < 1/2$ найдется такое достаточно большое $M \in \mathbb{N}$ и $M \geqslant 3$, что справедливо неравенство:

$$\max\{|I_{2jh}|, |I_{3jh}|\} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.28}$$

Фиксируем данное $M \in \mathbb{N}$. Заметим, что в силу (2.23) подынтегральная функция в выражении (2.25) равномерно непрерывна по совокупности переменных:

$$(x,y,s,h) \in \overline{O(z,1)} \times \overline{O(z,M)\setminus O(z,2)} \times [0,1] \times [-1/2, 1/2].$$

Поэтому найдется такое $\delta = \delta(M(\varepsilon), \varepsilon) > 0$, что

$$\sup_{(x,y,s) \in \overline{O(z,1)} \times \overline{O(z,M)\setminus O(z,2)} \times [0,1]} \left| \frac{\partial}{\partial x_{sj}} \frac{1}{|x_s-y|^{N-2}} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|x-y|^{N-2}} \right| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3K_1}, \quad K_1 = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} |f(y)| \alpha_N M^N \tag{2.29}$$

как только $|h| < \delta$, поскольку $x_s = x + sh\mathbf{e}_j$. Следовательно, из (2.25) с учетом (2.29) получаем, что

$$|I_{1jh}| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при} \quad |h| < \delta. \tag{2.30}$$

Итак, из (2.24) с учетом (2.28) и (2.30) получаем, что

$$\sup_{x\in O(z,1)} I_{jh}(x) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{2.31}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial U_1(x)}{\partial x_j} = \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus O(z,2)} f(y)\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\,dy \in \mathbb{C}(O(z,1)) \tag{2.32}$$

для всех $j=\overline{1,N}$.

Шаг 3. $U_1(x)\in\mathbb{C}^{(2)}(O(z,1))$. На этом шаге необходимо доказать, что

$$\frac{\partial^2 U_1(x)}{\partial x_k\partial x_j} = \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus O(z,2)} f(y)\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\,dy \in \mathbb{C}(O(z,1)) \tag{2.33}$$

для всех $j,k=\overline{1,N}$. Для этого необходимо ввести функцию

$$U_{1jk}(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus O(z,2)} f(y)\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\,dy. \tag{2.34}$$

Точно так же как на шаге 1 можно доказать, что $U_{1jk}(x)\in\mathbb{C}(O(z,1))$. Затем, нужно рассмотреть следующее разностное отношение:

$$I_{jk}(x) := \frac{1}{h}\left[U_j(x+h\mathbf{e}_k)-U_j(x)\right]-U_{jk}(x) \tag{2.35}$$

и точно так же как на шаге 2 можно доказать, что

$$I_{jk}(x)\to 0 \quad \text{при} \quad h\to 0. \tag{2.36}$$

Следовательно, выполнено выражение (2.33).

Лемма доказана.

Имеет место ранее доказанное утверждение (см. теорему 2 из лекции 7):

Лемма 6. *Если $f(x)\in\mathbb{C}_0(\mathbb{R}^N)$ и локально гельдеровская, то функция $U_2(x)\in\mathbb{C}^{(2)}(O(z,1))$, причем*

$$\frac{\partial U_2(x)}{\partial x_j} = \int\limits_{O(z,2)} f(y)\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{|y-x|^{N-2}}\,dy, \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial^2 U_2(x)}{\partial x_k\partial x_j} = \int\limits_{O(z,2)} [f(y)-f(x)]\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\,dy-$$

$$- f(x) \int\limits_{\partial O(z,2)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-\xi|^{N-2}} \cos(\nu_\xi, \mathbf{e}_j)\, dS_\xi \qquad (2.38)$$

для всех $x \in O(z,1)$ *и любых* $j, k = \overline{1,N}$.

Замечание. Поскольку в потенциале $U_2(x)$ интегрирование ведется по шару $O(z,2)$ и по этому справедлива теорема Остроградского–Гаусса–Грина, то нет необходимости продолжать плотность объемного потенциала продолжать нулем вне шара $O(z,2)$.

Замечание. В утверждениях лемм 4 и 6 можно заменить $x \in \in O(z,1) \mapsto x \in O(z,R)$ одновременно с заменой $O(z,2) \mapsto O(z,2R)$. С учетом этого замечания из лемм 4 и 6 вытекает следующая теорема:

Теорема 2. *Если функция* $f(x) \in \mathbb{C}_0(\mathbb{R}^N)$ *и локально гельдеровская, то потенциал* $U(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N)$ *и справедливы равенства*

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x_j} = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|y-x|^{N-2}}\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^N, \qquad (2.39)$$

$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_k \partial x_j} = \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus O(z,2R)} f(y) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \frac{1}{|x-y|^{N-2}}\, dy +$$

$$+ \int\limits_{O(z,2R)} [f(y) - f(x)] \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \frac{1}{|x-y|^{N-2}}\, dy -$$

$$- f(x) \int\limits_{\partial O(z,2R)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-\xi|^{N-2}} \cos(\nu_\xi, \mathbf{e}_j)\, dS_\xi \qquad (2.40)$$

для произвольного $z \in \mathbb{R}^N$ *и любого* $R > 0$ *со свойством* $x \in O(z,R)$.

Справедлива следующая

Теорема 3. *Если* $f(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^N)$ *и имеет компактный носитель* $\operatorname{supp} f \subset O(0, R_0)$ *при* $R_0 > 0$, *то* $U(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^N)$ *и справедлива оценка*:

$$\boxed{|U(x)|_{2+\alpha} \leqslant c(\alpha, N, R_0)|f|_\alpha, \quad \alpha \in (0,1].} \qquad (2.41)$$

Доказательство. *Шаг 1. Гельдеровская оценка* $\partial^2_{x_j x_k} U(x)$. Пусть $x', x'' \in \mathbb{R}^N$, $|x' - x''| = \rho$,

$$x_0 = \frac{x' + x''}{2} \Rightarrow |x' - x_0| = |x'' - x_0| = \frac{\rho}{2}.$$

Тогда $x', x'' \in O(x_0, \rho) \subset O(x_0, R)$ при $\rho \in (0,1]$ и $R > 1$. Сначала в равенстве (2.40) положим $z = x_0$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial^2 U(x'')}{\partial x_k \partial x_j} = \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus O(x_0,2R)} f(y) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \frac{1}{|x''-y|^{N-2}}\,dy + \\ + \int\limits_{O(x_0,2R)} [f(y)-f(x'')] \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \frac{1}{|x''-y|^{N-2}}\,dy - \\ - f(x'') \int\limits_{\partial O(x_0,2R)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x''-\xi|^{N-2}} \cos(\nu_\xi, \mathbf{e}_j)\,dS_\xi, \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial^2 U(x')}{\partial x_k \partial x_j} = \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus O(x_0,2R)} f(y) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \frac{1}{|x'-y|^{N-2}}\,dy + \\ + \int\limits_{O(x_0,2R)} [f(y)-f(x')] \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \frac{1}{|x'-y|^{N-2}}\,dy - \\ - f(x') \int\limits_{\partial O(x_0,2R)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x'-\xi|^{N-2}} \cos(\nu_\xi, \mathbf{e}_j)\,dS_\xi. \quad (2.43)$$

Вычитая выражение (2.43) из (2.42) и группируя слагаемые, получим следующее выражение:

$$\frac{\partial^2 U(x'')}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial^2 U(x')}{\partial x_k \partial x_j} = f(x') I_1 + (f(x') - f(x''))I_2 + I_3 + I_4 + \\ + (f(x') - f(x''))I_5 + I_6 + I_7, \quad (2.44)$$

$$I_1 = \int\limits_{\partial O(x_0,2R)} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x'-\xi|^{N-2}} - \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x''-\xi|^{N-2}} \right) \cos(\nu_\xi, \mathbf{e}_j)\,dS_\xi, \quad (2.45)$$

$$I_2 = \int\limits_{\partial O(x_0,2R)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x''-\xi|^{N-2}} \cos(\nu_\xi, \mathbf{e}_j)\,dS_\xi, \quad (2.46)$$

$$I_3 = \int\limits_{O(x_0,\rho)} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \frac{1}{|x'-y|^{N-2}} (f(x') - f(y))\,dy, \quad (2.47)$$

$$I_4 = \int\limits_{O(x_0,\rho)} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \frac{1}{|x''-y|^{N-2}} (f(y) - f(x''))\,dy, \quad (2.48)$$

$$I_5 = \int\limits_{O(x_0,2R) \setminus O(x_0,\rho)} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \frac{1}{|x'-y|^{N-2}}\,dy, \quad (2.49)$$

$$I_6 = \int\limits_{O(x_0,2R)\setminus O(x_0,\rho)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \frac{1}{|x' - y|^{N-2}} - \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \frac{1}{|x'' - y|^{N-2}} \right) \times \\ \times (f(x'') - f(y))\, dy, \quad (2.50)$$

$$I_7 = \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus O(x_0,2R)} f(y) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \frac{1}{|x'' - y|^{N-2}} - \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \frac{1}{|x' - y|^{N-2}} \right) dy. \quad (2.51)$$

Ранее были получены следующие равенства при $x \neq y$:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|x - y|^{N-2}} = -(N-2) \frac{x_j - y_j}{|x - y|^N}, \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \frac{1}{|x - y|^{N-2}} = \\ = -(N-2) \left[\frac{\delta_{jk}}{|x - y|^N} - N \frac{(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{|x - y|^{N+2}} \right]. \quad (2.53)$$

Из равенства (2.53) получаем равенство, справедливое при $x \neq y$:

$$\frac{\partial^3}{\partial x_l \partial x_k \partial x_j} \frac{1}{|x - y|^{N-2}} = \\ = (N-2)N \left[\delta_{jk} \frac{x_l - y_l}{|x - y|^{N+2}} + \delta_{jl} \frac{x_k - y_k}{|x - y|^{N+2}} + \delta_{kl} \frac{x_j - y_j}{|x - y|^{N+2}} \right] - \\ - N(N^2 - 4) \frac{(x_j - y_j)(x_k - y_k)(x_l - y_l)}{|x - y|^{N+4}}. \quad (2.54)$$

Справедлива следующая вспомогательная

Л е м м а 7. *При $\xi \in \partial O(x_0, 2R)$ имеет место неравенство*:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x' - \xi|^{N-2}} - \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x'' - \xi|^{N-2}} \right| \leqslant \\ \leqslant (N-2)(N+1) \left(\frac{4}{3} \right)^N \frac{|x'' - x'|}{|\xi - x_0|^N}. \quad (2.55)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $x_s = sx' + (1-s)x'' \neq y$ для всех $s \in \in [0, 1]$ справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x' - \xi|^{N-2}} - \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x'' - \xi|^{N-2}} = \int\limits_0^1 \frac{d}{ds} \frac{\partial}{\partial x_{sk}} \frac{1}{|x_s - \xi|^{N-2}}\, ds, \quad (2.56)$$

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial}{\partial x_{sk}}\frac{1}{|x_s-\xi|^{N-2}} = \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_{sj}}\frac{\partial}{\partial x_{sk}}\frac{1}{|x_s-\xi|^{N-2}}\frac{\partial x_{sj}}{\partial s} =$$

$$= -(N-2)\frac{x'_k-x''_k}{|\xi-x_s|^N} + (N-2)N(x_{sk}-\xi_k)\frac{(x_s-\xi, x'-x'')}{|x_s-\xi|^{N+2}} \quad (2.57)$$

из которых получаем оценку:

$$\left|\frac{d}{ds}\frac{\partial}{\partial x_{sk}}\frac{1}{|x_s-\xi|^{N-2}}\right| \leqslant (N-2)(N+1)\frac{|x''-x'|}{|\xi-x_s|^N}. \quad (2.58)$$

Поскольку $\xi\in\partial O(x_0,2R)$ и

$$|x_1-x_0| = |x_2-x_0| = \frac{\rho}{2}, \quad \rho=|x''-x'|, \quad 0<\rho<R,$$

то имеем

$$|x_s-x_0| = |sx'+(1-s)x''-x_0| \leqslant$$

$$\leqslant s|x'-x_0| + (1-s)|x''-x_0| = \frac{s\rho}{2}+\frac{(1-s)\rho}{2} = \frac{\rho}{2}, \quad (2.59)$$

$$|\xi-x_0| = 2R > 2\rho \Rightarrow -2\rho > -|\xi-x_0| \Rightarrow -\frac{\rho}{2} > -\frac{1}{4}|\xi-x_0|, \quad (2.60)$$

$$|\xi-x_s| \geqslant |\xi-x_0| - |x_s-x_0| \geqslant$$

$$\geqslant |\xi-x_0| - \frac{\rho}{2} > |\xi-x_0| - \frac{1}{4}|\xi-x_0| = \frac{3}{4}|\xi-x_0|. \quad (2.61)$$

Из (2.56), (2.58) и (2.61) получаем искомую оценку (2.55).

Лемма доказана.

Из выражения (2.45) для интеграла I_1 и неравенства (2.55) получаем следующую оценку:

$$|I_1| \leqslant (N-2)\left(\frac{4}{3}\right)^{N-1}\frac{1}{(2R)^N}\omega_N(2R)^{N-1}|x''-x'| =$$

$$= (N-2)\left(\frac{4}{3}\right)^{N-1}\frac{1}{2R}\omega_N|x''-x'|. \quad (2.62)$$

С учетом (2.61) при $s=0$ и оценки (2.52) получаем:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{|\xi-x''|^{N-2}}\right| \leqslant (N-2)\left(\frac{4}{3}\right)^{N-1}\frac{1}{|\xi-x_0|^{N-1}}. \quad (2.63)$$

Тогда из выражения (2.46) для I_2 с учетом (2.63) получаем неравенство:

$$|I_2| \leqslant (N-2)\left(\frac{4}{3}\right)^{N-1}\frac{1}{(2R)^{N-1}}\omega_N(2R)^{N-1} = \\ = (N-2)\omega_N\left(\frac{4}{3}\right)^{N-1}. \quad (2.64)$$

Теперь приступим к оценке I_3 и I_4. Заметим, что оцениваются эти функции одинаковым образом. Оценим, например, I_3. С этой целью заметим, что в силу равенства (2.53) справедлива оценка:

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}\frac{1}{|y-x'|^{N-2}}\right| \leqslant \frac{(N-2)(N+1)}{|x'-y|^N}, \quad y \neq x'. \quad (2.65)$$

С учетом (2.65) из (2.47) вытекает неравенство:

$$|I_3| \leqslant (N-2)(N+1)[f]_\alpha \int\limits_{O(x_0,\rho)} \frac{1}{|x'-y|^{N-\alpha}}\,dy. \quad (2.66)$$

Заметим, что поскольку $|x'-x_0| = \rho/2$, то $O(x_0,\rho) \subset O(x', 3\rho/2)$. Действительно,

$$|y-x'| \leqslant |y-x_0| + |x'-x_0| \leqslant \rho + \rho/2 = 3\rho/2.$$

Поэтому неравенство (2.66) можно продолжить:

$$|I_3| \leqslant (N-2)(N+1)[f]_\alpha \int\limits_{O(x',3\rho/2)} \frac{1}{|x'-y|^{N-\alpha}}\,dy \leqslant \\ \leqslant (N-2)(N+1)[f]_\alpha\omega_N \int\limits_0^{3\rho/2} r^{\alpha-1}\,dr = \\ = (N-2)(N+1)[f]_\alpha\omega_N\frac{(3/2)^\alpha}{\alpha}|x''-x'|^\alpha = \\ = c_1(N,\alpha)[f]_\alpha|x''-x'|^\alpha. \quad (2.67)$$

Для функции I_4, которая определена равенством (2.48), получим в точности такое же неравенство:

$$|I_4| \leqslant c_1(N,\alpha)[f]_\alpha|x''-x'|^\alpha. \quad (2.68)$$

Используя теорему Остроградского–Гаусса-Грина для интеграла (2.49):

$$I_5 = -\int\limits_{\partial O(x_0,2R)} \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{|x'-\xi|^{N-2}}\cos(\nu_\xi, \mathbf{e}_k)\,dS_\xi +$$

$$+ \int\limits_{\partial O(x_0,\rho)} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|x' - \xi|^{N-2}} \cos(\nu_\xi, \mathbf{e}_k)\, dS_\xi = I_{51} + I_{52}, \quad (2.69)$$

где ν_ξ в обоих интегралах внешняя нормаль к границе. Теперь воспользуемся оценкой (2.52) и получим следующую оценку:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|x - \xi|^{N-2}} \right| \leqslant \frac{N-2}{|x - \xi|^{N-1}}, \quad x \neq \xi. \quad (2.70)$$

Для оценки интеграла I_{52} заметим, что при $|\xi - x_0| = \rho$ справедливы неравенства:

$$|\xi - x'| \geqslant |\xi - x_0| - |x' - x_0| = \rho - \rho/2 = \rho/2. \quad (2.71)$$

Поэтому из (2.70) вытекает оценка:

$$|I_{52}| \leqslant (N-2) \left(\frac{2}{\rho}\right)^{N-1} \omega_N \rho^{N-1} = (N-2) 2^{N-1} \omega_N. \quad (2.72)$$

Интеграл I_{51} оценивается точно как интеграл I_2 (см. (2.46) и (2.64)). Справедлива итоговая оценка:

$$|I_{51}| \leqslant (N-2)\omega_N \left(\frac{4}{3}\right)^{N-1}. \quad (2.73)$$

Итак, из (2.69), (2.72) и (2.73) вытекает оценка:

$$|I_5| \leqslant c_2(N). \quad (2.74)$$

Для того, чтобы оценить интеграл I_6, определенный равенством (2.50), нужно доказать следующую

Л е м м а 8. *При $|y - x_0| \geqslant \rho > 0$ справедлива следующая оценка:*

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \frac{1}{|x' - y|^{N-2}} - \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \frac{1}{|x'' - y|^{N-2}} \right| \leqslant c_4(N) \frac{|x'' - x'|}{|y - x_0|^{N+1}}. \quad (2.75)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливо следующее равенство:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \frac{1}{|x' - y|^{N-2}} - \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \frac{1}{|x'' - y|^{N-2}} =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{d}{ds} \frac{\partial^2}{\partial x_{sk} \partial x_{sj}} \frac{1}{|x_s - y|^{N-2}}\, ds, \quad x_s = s x' + (1-s) x'' \quad (2.76)$$

при $x_s \neq y$ для всех $s \in [0,1]$. Имеет место равенство:

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial^2}{\partial x_{sk}\partial x_{sj}}\frac{1}{|x_s-y|^{N-2}} = \sum_{l=1}^{N}\frac{\partial^3}{\partial x_{sl}\partial x_{sk}\partial x_{sj}}\frac{1}{|x_s-y|^{N-2}}\frac{\partial x_{sl}}{\partial s} =$$
$$= \sum_{l=1}^{N}\frac{\partial^3}{\partial x_{sl}\partial x_{sk}\partial x_{sj}}\frac{1}{|x_s-y|^{N-2}}(x'_l - x''_l) =$$
$$= (N-2)N\left[\delta_{jk}\frac{(x_s-y, x'-x'')}{|x_s-y|^{N+2}} + \frac{(x'_j-x''_j)(x_{sk}-y_k)}{|x_s-y|^{N+2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{(x'_k-x''_k)(x_{sj}-y_j)}{|x_s-y|^{N-2}}\right] - N(N^2-4)\frac{(x_{sj}-y_j)(x_{sk}-y_k)(x_s-y, x'-x'')}{|x_s-y|^{N+4}}, \tag{2.77}$$

из которой вытекает следующая оценка:

$$\left|\frac{d}{ds}\frac{\partial^2}{\partial x_{sk}\partial x_{sj}}\frac{1}{|x_s-y|^{N-2}}\right| \leqslant c_3(N)\frac{|x'-x''|}{|y-x_s|^{N+1}}, \tag{2.78}$$

где $c_3(N) = (N-2)(N^2+5N)$. Кроме того, при $|y-x_0| \geqslant \rho$ справедливы следующие неравенства:

$$|y-x_0| \geqslant \rho, \quad |x_s - x_0| \leqslant s|x'-x_0| + (1-s)|x''-x_0| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{s\rho}{2} + \frac{(1-s)\rho}{2} = \frac{\rho}{2} \leqslant \frac{1}{2}|y-x_0|, \tag{2.79}$$

$$|y-x_s| \geqslant |y-x_0| - |x_s-x_0| \geqslant |y-x_0| - \frac{1}{2}|y-x_0| = \frac{1}{2}|y-x_0|. \tag{2.80}$$

Из (2.78) с учетом (2.80) получаем оценку:

$$\left|\frac{d}{ds}\frac{\partial^2}{\partial x_{sk}\partial x_{sj}}\frac{1}{|x_s-y|^{N-2}}\right| \leqslant c_4(N)\frac{|x'-x''|}{|y-x_0|^{N+1}}, \tag{2.81}$$

где $c_4(N) = c_3(N)2^{N+1}$. Таким образом, из (2.76) с учетом (2.81) получаем оценку (2.75).

Лемма доказана.

Теперь с учетом оценки (2.75) и неравенства треугольника

$$|f(x'') - f(y)| \leqslant |f(x'') - f(x_0)| + |f(y) - f(x_0)|$$

для интеграла I_6 получаем оценку:

$$|I_6| \leqslant c_4(N)|x''-x'||f(x'') - f(x_0)| \int\limits_{O(x_0,2R)\setminus O(x_0,\rho)} \frac{1}{|y-x_0|^{N+1}}\,dy +$$
$$+ c_4(N)|x''-x'|[f]_\alpha \int\limits_{O(x_0,2R)\setminus O(x_0,\rho)} \frac{1}{|y-x_0|^{N+1-\alpha}}\,dy = I_{61} + I_{62}, \tag{2.82}$$

$$\int\limits_{O(x_0,2R)\setminus O(x_0,\rho)} \frac{1}{|y-x_0|^{N+1}}\,dy = \omega_N \int\limits_{\rho}^{2R} \frac{1}{r^2}\,dr = \omega_N \left[\frac{1}{\rho} - \frac{1}{2R}\right], \quad (2.83)$$

$$\int\limits_{O(x_0,2R)\setminus O(x_0,\rho)} \frac{1}{|y-x_0|^{N+1-\alpha}}\,dy = \\ = \omega_N \int\limits_{\rho}^{2R} \frac{1}{r^{2-\alpha}}\,dr = \frac{\omega_N}{1-\alpha}\left[\frac{1}{\rho^{1-\alpha}} - \frac{1}{(2R)^{1-\alpha}}\right]. \quad (2.84)$$

Таким образом, для I_{61} с учетом (2.83) получаем оценку:

$$I_{61} \leqslant c_4(N)\omega_N[f]_\alpha \rho^{1+\alpha}\left[\frac{1}{\rho} - \frac{1}{2R}\right] \leqslant \\ \leqslant c_4(N)\omega_N[f]_\alpha \rho^\alpha = c_5(N)[f]_\alpha |x'' - x'|^\alpha, \quad (2.85)$$

а для I_{62} с учетом (2.84) получаем такую оценку:

$$I_{62} \leqslant c_4(N)|x''-x'|[f]_\alpha \frac{\omega_N}{1-\alpha}\left[\frac{1}{\rho^{1-\alpha}} - \frac{1}{(2R)^{1-\alpha}}\right] \leqslant \\ \leqslant c_4(N)[f]_\alpha \frac{\omega_N}{1-\alpha}\rho\frac{1}{\rho^{1-\alpha}} = c_6(N,\alpha)[f]_\alpha |x''-x'|^\alpha. \quad (2.86)$$

Итак, из (2.82)–(2.86) вытекает следующая оценка:

$$|I_6| \leqslant c_7(N,\alpha)[f]_\alpha |x''-x'|^\alpha. \quad (2.87)$$

Наконец, получим оценку для I_7. Поскольку $R > \rho$, то для $|y - x_0| \geqslant 2R$ тем более справедлива оценка (2.75) из леммы 8. Поэтому из (2.51) получим оценку:

$$|I_7| \leqslant c_4(N)|x''-x'| \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus O(x_0,2R)} \frac{|f(y)|}{|y-x_0|^{N+1}}\,dy \leqslant \\ \leqslant c_4(N)|f|_0|x''-x'| \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus O(x_0,2R)} \frac{1}{|y-x_0|^{N+1}}\,dy = \\ = c_4(N)|f|_0|x''-x'|\omega_N \int\limits_{2R}^{+\infty} \frac{1}{r^2}\,dr = \frac{c_4(N)\omega_N}{2R}|f|_0|x''-x'|. \quad (2.88)$$

Таким образом, из (2.44) с учетом оценок (2.62), (2.64), (2.67), (2.68), (2.74), (2.87) и (2.88) приходим к оценкам следующего вида:

$$\left|\frac{\partial^2 U(x'')}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial^2 U(x')}{\partial x_k \partial x_j}\right| \leqslant$$
$$\leqslant c_8(N,\alpha)\,[|f|_0|x''-x'| + [f]_\alpha |x''-x'|^\alpha] \leqslant$$
$$\leqslant c_8(N,\alpha)|f|_\alpha |x''-x'|^\alpha, \quad |x''-x'| \leqslant 1. \tag{2.89}$$

Теперь рассмотрим случай $|x''-x'| \geqslant 1$. В этом случае справедливы неравенства:

$$\left|\frac{\partial^2 U(x'')}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial^2 U(x')}{\partial x_k \partial x_j}\right| \leqslant 2\left|\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_k \partial x_j}\right|_0 \leqslant 2\left|\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_k \partial x_j}\right|_0 |x''-x'|. \tag{2.90}$$

Оценим величину

$$\left|\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_k \partial x_j}\right|_0 .$$

С этой целью воспользуемся равенством (2.40), в котором положим $z = x$ и $R = 1$ и получим следующее равенство:

$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_k \partial x_j} = \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus O(x,2)} f(y) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \frac{1}{|x-y|^{N-2}}\, dy +$$
$$+ \int\limits_{O(x,2)} [f(y) - f(x)] \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \frac{1}{|x-y|^{N-2}}\, dy -$$
$$- f(x) \int\limits_{\partial O(x,2)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-\xi|^{N-2}} \cos(\nu_\xi, \mathbf{e}_j)\, dS_\xi = J_1 + J_2 + J_3. \tag{2.91}$$

Оценим сначала интеграл J_1. Воспользуемся условием компактности носителя функции $f(x)$. Пусть $\operatorname{supp} f \subset O(0, R_0)$. Тогда с учетом (2.53) имеет место следующая оценка:

$$|J_1| \leqslant (N-2)(N+1) \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus O(x,2)} |f(y)| \frac{1}{|x-y|^N}\, dy =$$
$$= (N-2)(N+1) \int\limits_{O(0,R_0) \setminus O(x,2)} |f(y)| \frac{1}{|x-y|^N}\, dy \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(N-2)(N+1)}{2^N} \int\limits_{O(0,R_0) \setminus O(x,2)} |f(y)|\, dy \leqslant a_1(N, R_0)|f|_0. \tag{2.92}$$

Для J_2 справедливо неравенство:

$$|J_2| \leqslant (N-2)(N+1)[f]_\alpha \int\limits_{O(x,2)} \frac{1}{|x-y|^{N-\alpha}}\, dy =$$

$$= \frac{(N-2)(N+1)\omega_N 2^\alpha}{\alpha}[f]_\alpha = a_2(N,\alpha)[f]_\alpha. \quad (2.93)$$

Для J_3 имеют место оценка:

$$|J_3| \leqslant |f|_0(N-2) \int\limits_{\partial O(x,2)} \frac{1}{|\xi - x|^{N-1}}\, dS_\xi = (N-2)\omega_N |f|_0. \quad (2.94)$$

Таким образом, из (2.91) с учетом (2.92)–(2.94) получаем оценку:

$$\left|\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_k \partial x_j}\right|_0 \leqslant a(N,\alpha,R_0)|f|_\alpha, \quad \operatorname{supp} f \subset O(0,R_0), \quad R_0 > 0. \quad (2.95)$$

Итак, из (2.90) и (2.95) получаем неравенство:

$$\left|\frac{\partial^2 U(x'')}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial^2 U(x')}{\partial x_k \partial x_j}\right| \leqslant 2a(N,\alpha,R_0)|f|_\alpha |x''-x'| \leqslant$$
$$\leqslant b(N,\alpha,R_0)|f|_\alpha |x''-x'|^\alpha, \quad |x''-x'| \geqslant 1. \quad (2.96)$$

Из неравенств (2.89), (2.95) и (2.96) следует оценка:

$$\left|\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_k \partial x_j}\right|_\alpha \leqslant c(N,\alpha,R_0)|f|_\alpha, \quad \operatorname{supp} f \subset O(0,R_0), \quad R_0 > 0. \quad (2.97)$$

Шаг 2. Оценки $U(x)$ и $\partial_{x_j} U(x)$. Учитывая определение (2.1) потенциала $U(x)$ и равенство (2.39) получаем очевидные оценки:

$$|U(x)|_0 \leqslant b(N,R_0)|f|_0, \quad \left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_j}\right|_0 \leqslant b(N,R_0)|f|_0. \quad (2.98)$$

Учитывая (2.97) и (2.98), приходим к утверждению теоремы.

Теорема доказана.

Таким образом, из (1.4) и (2.98) мы приходим к следующей оценке Шаудера решения $u(x)$:

$$|u|_{2+\alpha;\Omega} \leqslant |u|_{2+\alpha} \leqslant c(\alpha,N,R_0)|f|_\alpha = c(\alpha,N,R_0)|f|_{\alpha;\Omega}, \quad (2.99)$$

поскольку $\operatorname{supp} f \subset \Omega$.

□ Действительно, поскольку $\operatorname{supp} f \subset \Omega$, то справедливы следующие соотношения:

$$|f|_0 = |f|_{0;\Omega}, \quad [f]_\alpha = \sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^N} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} = \max\{I_1, I_2, I_3\}, \quad (2.100)$$

$$I_1 = \sup_{x\neq y,\, x,y\in\Omega} \varphi(x,y), \quad I_2 = \sup_{x \neq y,\, x,y \in \mathbb{R}^N\setminus\Omega} \varphi(x,y), \quad (2.101)$$

$$I_3 = \sup_{\Omega \ni x, y \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega} \varphi(x,y), \quad \varphi(x,y) = \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}. \tag{2.102}$$

Отметим, что $I_2 = 0$, поскольку $f(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Подробнее рассмотрим выражение для I_3. Пусть

$$x \in \Omega, \; y \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega.$$

Тогда найдется такая точка $z \in \partial\Omega \cap [x, y]$, что

$$|x-y| \geqslant |x-z| \Rightarrow \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \leqslant \frac{|f(x)|}{|x-z|^\alpha} = \frac{|f(x)-f(z)|}{|x-z|^\alpha} \leqslant I_1.$$

Отсюда с учетом (2.100) получаем неравенство:

$$[f]_\alpha \leqslant [f]_{\alpha;\Omega}. \tag{2.103}$$

Отметим, что обратное неравенство

$$[f]_{\alpha;\Omega} \leqslant [f]_\alpha \tag{2.104}$$

очевидно. Итак, имеет место равенство:

$$[f]_{\alpha;\Omega} = [f]_\alpha. \quad \boxtimes \tag{2.105}$$

Теперь рассуждаем следующим образом:

Пункт 1. Прежде всего, возьмём сглаживание $u_m(x)$ функции $u(x)$ с параметром $\varepsilon = 1/m$, где $u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ и $\operatorname{supp}\{u(x)\} \subset \Omega$. Тогда по доказанному ранее имеем:

$$\Delta u_m(x) = (\Delta u(x))_m = (f(x))_m = f_m(x),$$

$$|f_m|_{\alpha;\Omega} \leqslant |f|_{\alpha;\Omega} = |\Delta u|_{\alpha;\Omega} =: M.$$

Пункт 2. Рассмотрим последовательность $\{u_m\} \subset \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$, для которой выполнено неравенство:

$$|u_m|_{2+\alpha;\Omega} \leqslant c(\alpha,\Omega)|f_m|_{\alpha;\Omega} \leqslant c(\alpha,\Omega)M, \quad |f_m|_{\alpha;\Omega} \leqslant M < +\infty,$$

где M не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Для этой последовательности, как уже доказано в лемме 1 предыдущей лекции, существует подпоследовательность $\{u_{m_n}\}$ такая, что

$$u_{m_n}(x) \to u(x) \in \mathbb{C}^{(2+\alpha)}(\overline{\Omega}) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega})$$

при $m_n \to +\infty$, причём для предельной функции $u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ с носителем $\operatorname{supp}\{u(x)\} \subset \Omega$ выполнена искомая *априорная оценка Шаудера* [1]:

$$\boxed{|u|_{2+\alpha;\Omega} \leqslant c(\alpha,\Omega)M = c(\alpha,\Omega)|\Delta u|_{\alpha;\Omega}.} \tag{2.106}$$

[1] Смотри доказательство леммы 1 предыдущей лекции.

Довольно трудоёмким способом оценка Шаудера (2.106) может быть расширена до функций $u(x)$ класса $\mathbb{C}_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, который определяется следующим образом:

$$\mathbb{C}_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{ u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) : \ u(x) = 0 \ \text{на} \ \Gamma \Big\}.$$

Отметим, что это пространство Банаха относительно нормы $|\cdot|_{2+\alpha;\Omega}$.

§ 3. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [5], [6], [7].

Лекция 17

$\mathbb{C}^{2+\alpha}$–АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ШАУДЕРА ДЛЯ РАВНОМЕРНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

§ 1. Гёльдеровские оценки

Рассмотрим в классе $u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ при $\alpha \in (0,1]$ следующую краевую задачу Дирихле:

$$Lu(x) \stackrel{\text{def}}{=} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} = f(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}(\overline{\Omega}), \quad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

$$u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma. \tag{1.2}$$

Докажем следующую теорему об априорной оценке Шаудера во всем пространстве $\mathbb{R}^N$.

Теорема 1. *Существует такая постоянная $c_1 = c_1(\alpha, N)$, что имеет место следующее неравенство*: [1])

$$|u|_{2+\alpha} \leqslant c_1(\alpha, N)|Lu|_{\alpha} \quad \textit{для всех} \quad u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^N). \tag{1.3}$$

Доказательство.

Шаг 1. Воспользуемся методом «замороженных» коэффициентов. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Рассмотрим матрицу $\{a_{ij}(x_0)\}$, которая в силу равномерной эллиптичности является матрицей положительно определенной квадратичной формы. Ортогональным поворотом исходной системы координат мы преобразуем матрицу $\{a_{ij}(x_0)\}$ в единичную:

$$y = Bx \Rightarrow \{a_{ij}(x_0)\} \to \{\delta_{ij}\}, \quad y_0 = Bx_0,$$

$$L_x \to \widehat{L}_y = \widehat{a}_{ij}(y)\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}, \quad \widehat{a}_{ij}(y_0) = \delta_{ij}, \quad \widehat{L}_{y_0} = \Delta_y.$$

При этом ортогональном преобразовании неравенство (1.3) переходит в неравенство:

$$|v|_{2+\alpha} \leqslant \widehat{c}_1(\alpha, D)\left|\widehat{L}_y v\right|_{\alpha}, \quad v(y) \stackrel{\text{def}}{=} u(B^{-1}y). \tag{1.4}$$

---

[1]) В случае $\Omega = \mathbb{R}^N$ символ Ω в соответствующих нормах мы не пишем.

Шаг 2. Введем срезающую функцию

$$\psi_R^{y_0}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \psi\left(\frac{y-y_0}{R}\right), \quad R \geqslant 1,$$

$$\psi(z) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 \leqslant |z| \leqslant R; \\ 0, & \text{если } |z| \geqslant 2R, \end{cases} \qquad \psi(z) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Кроме того, предположим, что

$$\max_{i,j=\overline{1,N}} [\widehat{a}_{ij}(y)]_\alpha \leqslant \gamma \leqslant 1, \qquad \max_{i,j=\overline{1,N}} |\widehat{a}_{ij}(y)|_0 \leqslant A.$$

В силу оценки из предыдущего параграфа об априорной оценке Шаудера для оператора Лапласа справедливо следующее неравенство:

$$|v(y)\psi_R^{y_0}(y)|_{2+\alpha} \leqslant c_1(\alpha, N) \left|\widehat{L}_{y_0}(v(y)\psi_R^{y_0}(y))\right|_\alpha. \tag{1.5}$$

Шаг 3. Заметим, что согласно определению срезающей функции $\psi_R^{y_0}(y)$ справедливы следующие выражения:

$$\partial_{y_i}\psi_R^{y_0}(y) = \frac{1}{R}\partial_{z_i}\psi_R^{y_0}(z), \quad z = \frac{y-y_0}{R},$$

$$[\partial_{y_i}\psi_R^{y_0}(y)]_\alpha = \frac{1}{R^{1+\alpha}}[\partial_{z_i}\psi_R^{y_0}(z)]_\alpha, \quad [\Delta_y\psi_R^{y_0}(y)]_\alpha = \frac{1}{R^{2+\alpha}}[\Delta_z\psi_R^{y_0}(z)]_\alpha,$$

$$|\partial_{y_i}\psi_R^{y_0}(y)|_0 \leqslant \frac{c_1}{R}, \quad |\Delta_y\psi_R^{y_0}(y)|_0 \leqslant \frac{c_2}{R^2}.$$

Кроме того, справедливо неравенство,

$$[v_1v_2]_\alpha \leqslant |v_1|_0[v_2]_\alpha + [v_1]_\alpha|v_2|_0. \tag{1.6}$$

□ Действительно, имеет место следующее очевидное неравенство:

$$|v_1(x)v_2(x) - v_1(y)v_2(y)| \leqslant |v_1(x) - v_1(y)||v_2(x)| + |v_1(y)||v_2(x) - v_2(y)|,$$

из которого и следует утверждение. ☒

Наконец, справедливо равенство:

$$\Delta_y(v(y)\psi_R^{y_0}(y)) = \\ = \psi_R^{y_0}(y)\Delta_y v(y) + v(y)\Delta_y\psi_R^{y_0}(y) + 2\sum_{i=1}^N \frac{\partial v(y)}{\partial y_i}\frac{\partial\psi_R^{y_0}(y)}{\partial y_i}. \tag{1.7}$$

Шаг 4. Поскольку $\widehat{L}_{y_0} = \Delta_y$, то справедливо следующее неравенство:

$$
\begin{aligned}
&[\widehat{L}_{y_0}(v(y)\psi_R^{y_0}(y))]_\alpha \leqslant [\psi_R^{y_0}(y)\Delta_y v(y)]_\alpha + \\
&\qquad + [\Delta_y \psi_R^{y_0}(y)]_\alpha |v|_0 + |\Delta_y \psi_R^{y_0}(y)|_0 [v]_\alpha + \\
&\quad + 2\sum_{i=1}^{N} \Big(|\partial_{y_i} v(y)|_0 [\psi_{Ry_i}^{y_0}(y)]_\alpha + [\partial_{y_i} v(y)]_\alpha |\psi_{Ry_i}^{y_0}(y)|_0 \Big) \leqslant \\
&\qquad \leqslant [\psi_R^{y_0}(y)[\Delta_y - \widehat{L}_y]v(y)]_\alpha + [\psi_R^{y_0}(y)\widehat{L}_y v(y)]_\alpha + \\
&\qquad + [\Delta_y \psi_R^{y_0}(y)]_\alpha |v|_0 + |\Delta_y \psi_R^{y_0}(y)|_0 [v]_\alpha + \\
&\quad + 2\sum_{i=1}^{N} \Big(|\partial_{y_i} v(y)|_0 [\psi_{Ry_i}^{y_0}(y)]_\alpha + [\partial_{y_i} v(y)]_\alpha |\psi_{Ry_i}^{y_0}(y)|_0 \Big) \leqslant \\
&\qquad \leqslant \Big[\psi_R^{y_0}(y)[\Delta_y - \widehat{L}_y]v(y)\Big]_\alpha + [\psi_R^{y_0}(y)\widehat{L}_y v(y)]_\alpha + \\
&\qquad\qquad + \frac{c_1}{R^{2+\alpha}}|v|_0 + \frac{c_2}{R^2}[v]_\alpha + \frac{c_3}{R^{1+\alpha}}|v|_1 + \frac{c_4}{R}[v]_{1+\alpha}. \qquad (1.8)
\end{aligned}
$$

Отдельно рассмотрим выражение:

$$
\begin{aligned}
&[\psi_R^{y_0}(y)[\Delta_y - \widehat{L}_y]v(y)]_\alpha \leqslant \left[\psi_R^{y_0}(y) \sum_{i,j=1,1}^{N,N} [\delta_{ij} - \widehat{a}_{ij}(y)] \frac{\partial^2 v(y)}{\partial y_i \partial y_j}\right]_\alpha \leqslant \\
&\qquad \leqslant \sum_{i,j=1,1}^{N,N} |\psi_R^{y_0}(y)[\delta_{ij} - \widehat{a}_{ij}(y)]|_0 \left[\frac{\partial^2 v(y)}{\partial y_i \partial y_j}\right]_\alpha + \\
&\qquad + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} [\psi_R^{y_0}(y)(\delta_{ij} - \widehat{a}_{ij}(y))]_\alpha \left|\frac{\partial^2 v(y)}{\partial y_i \partial y_j}\right|_0 \leqslant \\
&\quad \leqslant c_1 \gamma R^\alpha \left[\frac{\partial^2 v(y)}{\partial y_i \partial y_j}\right]_\alpha + \left(\frac{c_3}{R^\alpha} + c_2\gamma\right) \left|\frac{\partial^2 v(y)}{\partial y_i \partial y_j}\right|_0 \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant \left(c_1\gamma R^\alpha + c_2\gamma + c_3 R^{-\alpha}\right)|v|_{2+\alpha}, \qquad (1.9)
\end{aligned}
$$

где используются следующие оценки ($\widehat{a}_{ij}(y_0) = \delta_{ij}$):

$$
\begin{aligned}
&|\widehat{a}_{ij}(y) - \widehat{a}_{ij}(y_0)|\psi_R^{y_0}(y) = \\
&\qquad = \frac{|\widehat{a}_{ij}(y) - \widehat{a}_{ij}(y_0)|}{|y - y_0|^\alpha}\psi_R^{y_0}(y)|y - y_0|^\alpha \leqslant c_1\gamma R^\alpha, \qquad (1.10)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1,1}^{N,N} [\psi_R^{y_0}(y)(\delta_{ij} - \widehat{a}_{ij}(y))]_\alpha \leqslant \\
&\qquad \leqslant \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \delta_{ij}\, [\psi_R^{y_0}(y)]_\alpha + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} [\psi_R^{y_0}(y)\widehat{a}_{ij}(y)]_\alpha \leqslant
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \delta_{ij} \left[\psi_R^{y_0}(y)\right]_\alpha + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \left|\widehat{a}_{ij}(y)\right|_0 \left[\psi_R^{y_0}(y)\right]_\alpha +$$

$$+ \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \left|\psi_R^{y_0}(y)\right|_0 \left[\widehat{a}_{ij}(y)\right]_\alpha \leqslant \frac{N}{R^\alpha} + \frac{N^2 A}{R^\alpha} + N^2\gamma = c_2\gamma + \frac{c_3}{R^\alpha}. \quad (1.11)$$

Кроме того, имеет место оценка:

$$[\psi_R^{y_0}(y)\widehat{L}_y v(y)]_\alpha \leqslant$$
$$\leqslant |\psi_R^{y_0}(y)|_0 \left[\widehat{L}_y v(y)\right]_\alpha + [\psi_R^{y_0}(y)]_\alpha |\widehat{L}_y v(y)|_0 \leqslant$$
$$\leqslant \left(c_5 + c_6 R^{-\alpha}\right) |\widehat{L}_y v(y)|_\alpha. \quad (1.12)$$

Итак, в силу (1.8), (1.9) и (1.12) имеет место оценка:

$$\left[\widehat{L}_{y_0}(v(y)\psi_R^{y_0}(y))\right]_\alpha \leqslant$$
$$\leqslant \left[\psi_R^{y_0}(y)\left[\Delta_y - \widehat{L}_y\right] v(y)\right]_\alpha + \left[\psi_R^{y_0}(y)\widehat{L}_y v(y)\right]_\alpha + \frac{c_4}{R}|v|_{2+\alpha} \leqslant$$
$$\leqslant \left(c_1\gamma R^\alpha + c_2\gamma + \frac{c_3}{R^\alpha} + \frac{c_4}{R}\right)|v|_{2+\alpha} +$$
$$+ \left(c_5 + c_6 R^{-\alpha}\right) |\widehat{L}_y v(y)|_\alpha \quad (1.13)$$

Аналогичным образом из равенства (1.7) получаем неравенство:

$$\left|\widehat{L}_{y_0}\left(v(y)\psi_R^{y_0}(y)\right)\right|_0 \leqslant$$
$$\leqslant \left|\psi_R^{y_0}(y)\widehat{L}_y v(y)\right|_0 + \left|\psi_R^{y_0}(y)\left[\widehat{L}_{y_0} - \widehat{L}_y\right] v(y)\right|_0 +$$
$$+ \left|v(y)\widehat{L}_{y_0}\psi_R^{y_0}(y)\right|_0 + 2\sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial v(y)}{\partial y_i}\right|_0 \left|\frac{\partial \psi_R^{y_0}(y)}{\partial y_i}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\widehat{L}_y v(y)\right|_0 + \left(c_1\gamma R^\alpha + \frac{c_7}{R^2}\right)|v|_0 + \frac{c_8}{R}|v|_1 \leqslant$$
$$\leqslant \left|\widehat{L}_y v(y)\right|_0 + \left(c_1\gamma R^\alpha + \frac{c_9}{R}\right)|v|_{2+\alpha}. \quad (1.14)$$

Таким образом, в силу неравенств (1.13) и (1.14) из оценки Шаудера (1.5) мы приходим к следующему неравенству:

$$\left|v(y)\psi_R^{y_0}(y)\right|_{2+\alpha} \leqslant c_1(\alpha, D)\left|\widehat{L}_{y_0}(v(y)\psi_R^{y_0}(y))\right|_\alpha =$$
$$= c_1(\alpha, D)\left[\left|\widehat{L}_{y_0}\left(v(y)\psi_R^{y_0}(y)\right)\right|_0 + \left[\widehat{L}_{y_0}(v(y)\psi_R^{y_0}(y))\right]_\alpha\right] \leqslant$$
$$\leqslant \left(K_1\gamma R^\alpha + K_2\gamma + \frac{K_3}{R^\alpha}\right)|v|_{2+\alpha} + K_4\left|\widehat{L}_y v(y)\right|_\alpha. \quad (1.15)$$

В силу леммы 3 из лекции 12 имеет место оценка:

$$|v|_{2+\alpha} \leqslant \sup_{y_0 \in \mathbb{R}^N} |v(y)\psi_R^{y_0}(y)|_{2+\alpha} \leqslant$$
$$\leqslant \left(K_1\gamma R^\alpha + K_2\gamma + \frac{K_3}{R^\alpha}\right)|v|_{2+\alpha} + K_4\left|\widehat{L}_y v(y)\right|_\alpha. \quad (1.16)$$

Сначала выберем величину $R \geqslant 1$ достаточно большой, а затем $\gamma > 0$ достаточно малой, чтобы было выполнено следующее неравенство:

$$K_1\gamma R^\alpha + K_2\gamma + \frac{K_3}{R^\alpha} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Тогда из (1.16) приходим к *априорной оценке Шаудера для общего вида равномерно эллиптического оператора*:

$$|v(y)|_{2+\alpha} \leqslant K(\alpha, N)|\widehat{L}_y v(y)|_\alpha. \quad (1.17)$$

Теорема доказана.

Для задачи Дирихле (1.1), (1.2) в классе решений

$$u(x) \in \mathbb{C}_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{v(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) : \; v(x) = 0 \text{ на } \Gamma\right\}$$

довольно трудоёмким способом может быть получена следующая априорная оценка Шаудера:

$$\boxed{|u|_{2+\alpha;\Omega} \leqslant c(\alpha, \Omega, N)|f|_{\alpha;\Omega}} \quad (1.18)$$

при условии достаточной гладкости границы Γ ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

§ 2. Метод продолжения по параметру и доказательство однозначной разрешимости задачи Дирихле

В этом параграфе используется результат о $\mathbb{C}^{2+\alpha}$ разрешимости задачи Дирихле для оператора Лапласа и результат об априорной оценке Шаудера решения задачи Дирихле для равномерно эллиптического оператора с тем, чтобы доказать $\mathbb{C}^{2+\alpha}$ разрешимость задачи Дирихле для равномерно эллиптического оператора.

С этой целью применяется так называемый метод продолжения по параметру, идейная суть которого будет понятна из последующих рассмотрений.

Рассмотрим следующую задачу Дирихле в классе функций $u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ при $\alpha \in (0, 1]$:

$$Lu(x) \stackrel{\text{def}}{=} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} = f(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\overline{\Omega}), \quad a_{ij}(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\overline{\Omega}), \quad (2.1)$$

$$u(x) = \varphi(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\Gamma), \quad x \in \Gamma. \tag{2.2}$$

З а м е ч а н и е. Отметим, что под функцией $\varphi(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\Gamma)$ понимается функция, которая может быть продолжена на замыкании $\overline{\Omega}$ области Ω таким образом, чтобы продолжение $\overline{\varphi}(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Введем новую функцию $v(x) = u(x) - \overline{\varphi}(x)$, которая в классе $\mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ удовлетворяет задаче Дирихле:

$$Lv(x) = a_{ij}(x)\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_i \partial x_j} = f(x) - L\overline{\varphi}(x) = \overline{f}(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}(\overline{\Omega}), \tag{2.3}$$

$$v(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{2.4}$$

По доказанной априорной оценке Шаудера всякое решение $v(x)$ задачи (2.3), (2.4) класса $\mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$|v|_{2+\alpha;\Omega} \leqslant c(\alpha, \Omega)|\overline{f}|_{\alpha;\Omega}. \tag{2.5}$$

Рассмотрим однопараметрическое семейство операторов:

$$L_t \overset{\text{def}}{=} (1-t)\Delta + tL, \quad t \in [0,1]. \tag{2.6}$$

Отметим, что для равномерно эллиптического оператора L_t справедлива оценка Шаудера:

$$\boxed{|u|_{2+\alpha;\Omega} \leqslant c(\alpha, \Omega)|L_t u|_{\alpha;\Omega}, \quad u(x) \in \mathbb{C}_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega}),} \tag{2.7}$$

где постоянная $c(\alpha, \Omega) > 0$ и не зависит от $t \in [0,1]$. Пусть $E \subset [0,1]$ — это множество тех $t \in [0,1]$, при которых задача Дирихле

$$L_t v_t(x) = \overline{f}(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}(\overline{\Omega}), \tag{2.8}$$

$$v_t(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{2.9}$$

однозначно разрешима в силу принципа максимума, в пространстве Гёльдера $\mathbb{C}_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, определенного как

$$\mathbb{C}_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) := \left\{u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) : \quad u(x) = 0 \text{ при } x \in \Gamma\right\}.$$

Докажем, что это пространство является банаховым относительно нормы $|\cdot|_{2+\alpha;\Omega}$.

$\square$ Действительно, пусть последовательность $\{u_n\} \subset \mathbb{C}_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ — фундаментальна, т.е.

$$|u_n - u_m|_{2+\alpha;\Omega} \to +0 \quad \text{при} \quad n, m \to +\infty.$$

Следовательно, эта последовательность фундаментальна в банаховом пространстве $\mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Тогда найдется такое $u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, что

$$|u_n - u|_{2+\alpha;\Omega} \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Следовательно,

$$u_n(x) \to u(x) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{C}(\overline{\Omega}) \Rightarrow 0 = u_n(x)|_\Gamma \to u(x)|_\Gamma = 0.$$

Итак, $u(x) \in \mathbb{C}_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. ⊠

Докажем следующие три утверждения:

1. Множество $E \neq \varnothing$.

2. Множество E открыто в топологии метрического пространства $(X = [0,1], d(t_1,t_2) = |t_1 - t_2|)$.

3. Множество E замкнуто в топологии метрического пространства $(X = [0,1], d(t_1,t_2) = |t_1 - t_2|)$.

Поскольку множество $[0,1]$ связно, то одновременно открыто–замкнутыми множествами в этом метрическом пространстве являются либо пустое множество $\varnothing$, либо само множество $[0,1]$. Следовательно, в силу результата 1 получим, что $E = [0,1]$. Тогда приходим к выводу об однозначной разрешимости задачи Дирихле (2.8), (2.9) при $t = 1$, т.е. об однозначной $\mathbb{C}^{2+\alpha}$–разрешимости задачи Дирихле (2.3), (2.4).

Итак,

Шаг 1. Непустота множества E.

□ Действительно, непустота множества E следует из $\mathbb{C}^{2+\alpha}$–разрешимости задачи Дирихле для оператора Лапласа. ⊠

Шаг 2. Открытость множества E.

□ Действительно, пусть при $t = t_0 \in E$ задача Дирихле (2.8), (2.9) разрешима в банаховом пространстве $\mathbb{C}_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Представим задачу Дирихле (2.8), (2.9) в следующем эквивалентном виде:

$$L_{t_0} v_t(x) = \overline{f}(x) - [L_t - L_{t_0}]\, v_t(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\overline{\Omega}), \tag{2.10}$$

$$v_t(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{2.11}$$

Поскольку при $t = t_0$ задача однозначно разрешима, то определен обратный к

$$L_{t_0} : \mathbb{C}_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \to \mathbb{C}^\alpha(\overline{\Omega})$$

оператор

$$\mathbb{A} = L_{t_0}^{-1} : \mathbb{C}^\alpha(\overline{\Omega}) \to \mathbb{C}_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega}). \tag{2.12}$$

Прежде всего заметим, что при $t = t_0$ выполнена априорная оценка Шаудера (равномерная по $t \in [0,1]$):

$$|v_{t_0}(x)|_{2+\alpha;\Omega} \leqslant c_1(\alpha,\Omega)|L_{t_0} v_{t_0}|_{\alpha;\Omega} = c_1(\alpha,\Omega)|\overline{f}|_{\alpha;\Omega} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left|\mathbb{A}\overline{f}\right|_{2+\alpha;\Omega} \leqslant c_1(\alpha,\Omega)|\overline{f}|_{\alpha;\Omega}$$

для всех $\overline{f}(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\overline{\Omega})$. Следовательно, оператор $\mathbb{A}$ является ограниченным.

Из (2.10), (2.11) получим следующее равенство:

$$v(x) = \mathbb{B}v \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\overline{f}(x) - \mathbb{A}\,[L_t - L_{t_0}]\, v(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\overline{\Omega}), \tag{2.13}$$

Докажем, что оператор $\mathbb{B}$ сжимающий как оператор, действующий

$$\mathbb{B} : \mathbb{C}_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \to \mathbb{C}_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Прежде всего рассмотрим разность:

$$L_t - L_{t_0} = (1-t)L - (1-t_0)L + (t-t_0)\Delta = (t-t_0)(\Delta - L).$$

Тогда справедлива оценка:

$$|\,[L_t - L_{t_0}]\,z|_{\alpha;\Omega} \leqslant |t-t_0||(\Delta - L)z|_{\alpha;\Omega} \leqslant |t-t_0|K|z|_{2+\alpha;\Omega}, \tag{2.14}$$

где используются неравенства, следующие из определения нормы $\mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ и тот факт, что $a_{ij}(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$:

$$|\Delta z|_{\alpha;\Omega} \leqslant |z|_{2+\alpha;\Omega}, \quad |Lz|_{\alpha;\Omega} \leqslant K_1(\alpha)|z|_{2+\alpha;\Omega}, \quad K = 1 + K_1.$$

Поэтому приходим к следующим двум неравенствам:

$$|\mathbb{B}z|_{2+\alpha;\Omega} \leqslant c_1(\alpha,\Omega)|\overline{f}|_{\alpha;\Omega} + c_1(\alpha,\Omega)K|t-t_0||z|_{2+\alpha;\Omega}, \tag{2.15}$$

$$|\mathbb{B}(z_1 - z_2)|_{2+\alpha;\Omega} \leqslant c_1(\alpha,\Omega)K|t-t_0||z_1 - z_2|_{2+\alpha;\Omega} \tag{2.16}$$

для всех $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Следовательно, при условиях

$$|t-t_0| < \delta, \quad c_1(\alpha,\Omega)K\delta < \frac{1}{2}$$

получаем, что оператор $\mathbb{B}$ ограничен и сжимающий на замкнутом выпуклом и ограниченном множестве:

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ z(x) \in \mathbb{C}_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) : \ |z|_{2+\alpha;\Omega} \leqslant c_1(\alpha,\Omega)|\overline{f}|_{\alpha;\Omega} \right\}.$$

По теореме о сжимающем отображении существует единственная неподвижная точка на V. Итак, при любом $t \in E \cap \{|t-t_0| < \delta\}$ задача Дирихле (2.8), (2.9) однозначно разрешима в классе $\mathbb{C}_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. ⊠

Шаг 3. Замкнутость множества E.

□ Действительно, пусть $\{t_n\} \subset E$ и $\{u_{t_n}\} \subset \mathbb{C}_0^{2+\alpha}(\Omega)$ — это последовательность решений задачи Дирихле:

$$L_{t_n} u_{t_n}(x) = \overline{f}(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}(\Omega), \quad u_{t_n}(x) = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Пусть

$$E \ni t_n \to t \in [0,1] \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

т. е.

$$|t_n - t| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Докажем, что $t \in E$.

Прежде всего в силу априорной оценки Шаудера имеем равномерную по $n \in \mathbb{N}$ оценку:

$$|u_{t_n}|_{2+\alpha;\Omega} \leqslant c(\alpha, \Omega)|\overline{f}|_{\alpha;\Omega},$$

из которой вытекает существование подпоследовательности $\{u_{t_{n_m}}(x)\} \subset \{u_{t_n}(x)\}$ и такой функции $u_t(x) \in \mathbb{C}_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, для которой

$$u_{t_{n_m}}(x) \to u_t(x) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad n_m \to +\infty.$$

Поэтому

$$0 = u_{t_{n_m}}(x)|_{x\in\Gamma} \to u_t(x)|_\Gamma = 0 \quad \text{при} \quad n_m \to +\infty.$$

Справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} L_{t_{n_m}} &= (1 - t_{n_m})\Delta + t_{n_m} L = \\ &= (1-t)\Delta + tL + (t - t_{n_m})\Delta + (t_{n_m} - t)L. \quad (2.17) \end{aligned}$$

Поэтому справедлива оценка:

$$\begin{aligned} &|L_{t_{n_m}} u_{t_{n_m}}(x) - L_t u_t(x)|_{0;\Omega} \leqslant \\ &\leqslant |L_t[u_{t_{n_m}}(x) - u_t(x)]|_{0;\Omega} + |(t - t_{n_m})\Delta u_{t_{n_m}}(x) + (t - t_{n_m})L u_{t_{n_m}}(x)|_{0;\Omega} \leqslant \\ &\qquad \leqslant c_1 |u_{t_{n_m}} - u_t|_{2;\Omega} + |t - t_{n_m}||\Delta u_{t_{n_m}}|_{0;\Omega} + |t - t_{n_m}||L u_{t_{n_m}}|_{0;\Omega} \leqslant \\ &\qquad\qquad \leqslant c_1 |u_{t_{n_m}} - u_t|_{2;\Omega} + (1 + c_2)|t - t_{n_m}||\overline{f}|_{\alpha;\Omega} \to +0 \quad (2.18) \end{aligned}$$

при $n \to +\infty$. Следовательно, в пределе получим:

$$L_t u_t(x) = \overline{f}(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\overline{\Omega}), \quad u_t|_{x\in\Gamma} = 0 \Rightarrow t \in E. \quad \boxtimes$$

Таким образом, доказана следующая

Т е о р е м а 2. *Для любых функций* $f(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\overline{\Omega})$, $\varphi(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\Gamma)$ *при* $\alpha \in (0, 1]$ *существует единственное решение задачи Дирихле* (2.1), (2.2) *в классе* $u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ *при условии достаточной гладкости* [1]) *границы* Γ *области* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

§ 3. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [5], [6], [7].

[1]) Например, при $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,h}$, $h \in (0, 1]$.

Лекция 18

МЕТОД ВЕРХНИХ И НИЖНИХ РЕШЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ГЕЛЬДЕРА $\mathbb{C}^{2+\alpha}(\Omega)$

§ 1. Верхние и нижние решения. Определения

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей Γ, $f(x,u) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^1; \mathbb{R}^1)$ и $f(x,u)$ для всех $x \in \Omega$ дифференцируема по $u \in \mathbb{R}^1$. Пусть, кроме того, выполнены неравенства:

$$|f(x_1,u) - f(x_2,u)| \leqslant K_1 \, |x_1 - x_2|^\alpha \quad \text{для всех} \quad x_1, x_2 \in \Omega, \tag{1.1}$$

$$|f'_u(x,u)| \leqslant K_2(M) \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega, \tag{1.2}$$

где $\alpha \in (0,1]$ и $0 < K_1, K_2 < +\infty$ для $|u| \leqslant M < +\infty$ и постоянные K_1, K_2 не зависят от u.

Замечание. Из неравенства (1.2) вытекает, что

$$|f(x,u_1) - f(x,u_2)| \leqslant K_2(2M)|u_1 - u_2| \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega. \tag{1.3}$$

□ Действительно, справедливы следующие равенства и неравенства:

$$f(x,u_1) - f(x,u_2) = \int\limits_0^1 \frac{df(x,u_s)}{ds}\, ds, \quad u_s = su_1 + (1-s)u_2, \tag{1.4}$$

$$\frac{df(x,u_s)}{ds} = f'_{u_s}(x,u_s)[u_1 - u_2], \tag{1.5}$$

$$\left|\frac{df(x,u_s)}{ds}\right| \leqslant \left|f'_{u_s}(x,u_s)\right| |u_1 - u_2| \leqslant \\ \leqslant K_2(2M)|u_1 - u_2|, \quad |u_k| \leqslant M, \quad k = 1,2. \tag{1.6}$$

Из оценки (1.6) и равенства (1.4) следует искомая оценка (1.3). ⊠

Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$-\Delta u = f(x,u) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \quad u(x) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{1.7}$$

Будем рассматривать классические решения этой задачи из класса $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$.

Определим нижнее решения (субрешение).

Определение 1. *Функция $\underline{U}(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, удовлетворяющая задаче*

$$-\Delta \underline{U}(x) \leqslant f(x, \underline{U}(x)) \quad \textit{в} \quad \Omega, \quad \underline{U}(x) \leqslant 0 \quad \textit{на} \quad \Gamma \tag{1.8}$$

называется нижним решением задачи (1.7).

Определим верхнее решение (суперрешение).

Определение 2. *Функция $\overline{U}(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, удовлетворяющая задаче*

$$-\Delta \overline{U}(x) \geqslant f(x, \overline{U}(x)) \quad \textit{в} \quad \Omega, \quad \overline{U}(x) \geqslant 0 \quad \textit{на} \quad \Gamma \tag{1.9}$$

называется верхним решением задачи (1.7).

§ 2. Основная теорема

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть $\underline{U}(x)$ и $\overline{U}(x)$ — это нижнее и верхнее решение задачи* (1.7) *такие, что*

$$\underline{U}(x) \leqslant \overline{U}(x) \quad \textit{для всех} \quad x \in \Omega. \text{ [1]}$$

Тогда следующие утверждения имеют место:

(i) *существует решение $u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ задачи* (1.7), *удовлетворяющее неравенствам*:

$$\underline{U}(x) \leqslant u(x) \leqslant \overline{U}(x) \quad \textit{для всех} \quad x \in \Omega. \tag{2.1}$$

(ii) *существуют минимальное и максимальное решения $\overline{u}(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ и $\underline{u}(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ задачи* (1.7) *такие, что*

$$\underline{U}(x) \leqslant \underline{u}(x) \leqslant \overline{u}(x) \leqslant \overline{U}(x) \quad \textit{для всех} \quad x \in \Omega. \tag{2.2}$$

Доказательство.

Шаг 1. Рассмотрим функцию

$$g(x, s) := f(x, s) + as, \quad a > 0. \tag{2.3}$$

Выберем $a > 0$ настолько большим, чтобы отображение

$$u(x) \to g(x, u(x))$$

[1] Заметим, что можно привести такой пример, в котором это неравенство нарушено во всей области.

является возрастающим на сегменте $u(x) \in [\underline{U}(x); \overline{U}(x)]$ для каждого $x \in \Omega$. С этой целью достаточно взять такое $a \geqslant 0$, чтобы

$$a \geqslant \max_{x\in\overline{\Omega}} \left\{-f_u(x, u(x));\ x \in \overline{\Omega},\ u(x) \in [\underline{U}(x); \overline{U}(x)]\right\}. \qquad (2.4)$$

Замечание. Этому условию удовлетворяет, в частности, функция $f(x, u) = |u|^q u$ при $q > 0$, а также произвольного вида функция $f(u)$ такая, что $|f'(t)| \leqslant b$.

Шаг 2. Вместо исходной задачи (1.7) рассмотрим эквивалентную ей следующую задачу в классе $u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$:

$$-\Delta u + au = g(x, u) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \quad u(x) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \qquad (2.5)$$

Наконец, рассмотрим следующую линейную задачу при $n \geqslant 1$ для реккурентного определения $u_n(x)$ по $u_{n-1}(x)$:

$$-\Delta u_n + au_n = g(x, u_{n-1}) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \quad u_n(x) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \qquad (2.6)$$

причем $u_0(x) = \overline{U}(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$. В этом случае решение $u_1(x)$ линейной задачи (2.6) при $n = 1$ принадлежит классу $\mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \cap\, \mathbb{C}^{\alpha}(\overline{\Omega})$, а последующие итерации $u_n(x)$ при $n \geqslant 2$ принадлежат классу $\mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.

□ Действительно, этот вывод основан на анализе правой части уравнения (2.5). Справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned}
&|g(x_1, u(x_1)) - g(x_2, u(x_2))| \leqslant \\
&\qquad \leqslant a|u(x_1) - u(x_2)| + |f(x_1, u(x_1)) - f(x_2, u(x_2))| \leqslant \\
&\qquad \leqslant a|u(x_1) - u(x_2)| + |f(x_1, u(x_1)) - f(x_2, u(x_1))| + \\
&\qquad\qquad + |f(x_2, u(x_1)) - f(x_2, u(x_2))| \leqslant \\
&\quad \leqslant a|u(x_1) - u(x_2)| + K_1|x_1 - x_2|^{\alpha} + K_2(2M)|u(x_1) - u(x_2)| = \\
&\qquad\qquad = K_3(2M)|u(x_1) - u(x_2)| + K_1|x_1 - x_2|^{\alpha}
\end{aligned}$$

для всех $|u(x)| \leqslant M < +\infty$. [1]) Поэтому если $u(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}(\overline{\Omega})$, то и правая часть $g(x, u(x)) \in \mathbb{C}^{\alpha}(\overline{\Omega})$. С другой стороны, первое приближение $u_1(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \subset \mathbb{C}^{\alpha}(\overline{\Omega})$. Поэтому в силу теории Шаудера функции $u_n(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ при $n \geqslant 2$. ⊠

Справедлива следующая

Лемма 1. *Имеет место неравенства*:

$$\underline{U}(x) \leqslant \cdots \leqslant u_{n+1}(x) \leqslant u_n(x) \leqslant \cdots \leqslant u_0(x) = \overline{U}(x) \qquad (2.7)$$

для всех $x \in \Omega$.

---

[1]) Это условие для итерационной последовательности, как мы покажем ниже, выполнено.

Доказательство.

Шаг 2.1. Для доказательства этого утверждения воспользуемся слабым принципом максимума в классе $u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$. Прежде всего докажем, что

$$u_1(x) \leqslant u_0(x) = \overline{U}(x).$$

Согласно определению $u_1(x)$ и $\overline{U}(x)$ рассмотрим неравенство:

$$\begin{aligned} - \Delta \left(\overline{U}(x) - u_1(x)\right) + a \left(\overline{U}(x) - u_1(x)\right) \geqslant \\ \geqslant g(x, \overline{U}(x)) - g(x, u_0(x)) = \\ = g(x, \overline{U}(x)) - g(x, \overline{U}(x)) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\overline{U}(x) - u_1(x) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{2.9}$$

Согласно слабому принципу максимума имеем:

$$\overline{U}(x) \geqslant u_1(x) \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{2.10}$$

Теперь заметим, что имеет место неравенство:

$$\begin{aligned} - \Delta \left(\underline{U}(x) - u_1(x)\right) + a \left(\underline{U}(x) - u_1(x)\right) \leqslant \\ \leqslant g(x, \underline{U}(x)) - g(x, \overline{U}) \leqslant 0, \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\underline{U}(x) - u_1(x) \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{2.12}$$

В силу слабого принципа максимума имеем:

$$u_1(x) \geqslant \underline{U}(x) \quad \text{в} \quad x \in \Omega. \tag{2.13}$$

Шаг 2.2. Воспользуемся методом математической индукции. Предположим, что

$$\begin{aligned} \underline{U}(x) \leqslant \cdots \leqslant u_n(x) \leqslant u_{n-1}(x) \leqslant \\ \leqslant \cdots \leqslant u_1(x) \leqslant u_0(x) = \overline{U}(x) \quad \text{в} \quad \Omega. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Докажем, что отсюда следует

$$\underline{U}(x) \leqslant u_{n+1}(x) \leqslant u_n(x). \tag{2.15}$$

Действительно, используя реккурентные формулы для $u_{n+1}(x)$ и $u_n(x)$ при $n \geqslant 1$, получим

$$\begin{aligned} - \Delta(u_n(x) - u_{n+1}(x)) + a \left(u_n(x) - u_{n+1}(x)\right) = \\ = g(x, u_{n-1}) - g(x, u_n) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$u_n(x) - u_{n+1}(x) = 0 \geqslant 0. \tag{2.17}$$

Из слабого принципа максимума в классе $u_n(x), u_{n+1}(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ имеем

$$u_n(x) \geqslant u_{n+1}(x) \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{2.18}$$

Теперь заметим, что по определению нижнего решения $\underline{U}(x)$ имеем:

$$-\Delta\underline{U}(x) + a\underline{U}(x) \leqslant g(x, \underline{U}) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{2.19}$$

$$\underline{U}(x) \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{2.20}$$

Из реккурентного определения $u_{n+1}(x)$ следует:

$$-\Delta\left(u_{n+1}(x) - \underline{U}(x)\right) + a\left(u_{n+1}(x) - \underline{U}(x)\right) \geqslant \\ \geqslant g(x, u_n) - g(x, \underline{U}) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{2.21}$$

$$u_{n+1}(x) - \underline{U}(x) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{2.22}$$

В силу слабого принципа максимума в классе $u_{n+1}(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ имеем:

$$\underline{U}(x) \leqslant u_{n+1}(x) \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Промежуточная лемма доказана.

Шаг 3. В силу леммы 1 существует такая функция $u(x)$, что для всех $x \in \Omega$ выполнено предельное свойство:

$$u_n(x) \searrow u(x) \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{2.23}$$

Кроме того, по доказанному

$$\underline{U}(x) \leqslant u_n(x) \leqslant \overline{U}(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega. \tag{2.24}$$

Поскольку $\underline{U}(x), \overline{U}(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, то

$$|u_n(x)|_{0;\Omega} \leqslant M < +\infty, \quad M := \max_{x \in \overline{\Omega}} \left\{ |\underline{U}(x)|, |\overline{U}(x)| \right\}. \tag{2.25}$$

Текущая задача состоит в том, чтобы перейти к пределу при $n \to +\infty$ в реккурентном равенстве (2.6) и доказать, что $u(x)$ является решением предельного равенства. Рассмотрим функциональную последовательность:

$$g_n(x) \stackrel{def:}{=} g(x, u_n(x)),$$

$$g(x, \underline{U}(x)) \leqslant g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x) \leqslant g(x, \overline{U}(x)) \Rightarrow \\ \Rightarrow |g_n(x)|_{0;\Omega} \leqslant M_1 < +\infty, \tag{2.26}$$

где

$$M_1 := \max_{x \in \overline{\Omega}} \left\{ |g(x, \underline{U}(x))|, |g(x, \overline{U}(x))| \right\}.$$

В силу формулы (1.3) при $n \geqslant 1$ имеем [1]:

$$|f(x_1, u_n(x_1)) - f(x_2, u_n(x_2))| \leqslant \\ \leqslant |f(x_1, u_n(x_1)) - f(x_2, u_n(x_1))| + |f(x_2, u_n(x_1)) - f(x_2, u_n(x_2))| \leqslant \\ \leqslant K_1|x_1 - x_2|^\alpha + K_2(2M)|u_n(x_1) - u_n(x_2)| \leqslant \\ \leqslant (K_1 + K_2[u_{n-1}]_{\alpha;\Omega})\,|x_1 - x_2|^\alpha. \quad (2.27)$$

Следовательно, из неравенств (2.27) вытекает неравенство:

$$[f(x, u_{n-1})]_{\alpha;\Omega} \leqslant K_1 + K_2[u_{n-1}]_{\alpha;\Omega}. \quad (2.28)$$

Из априорной оценки Шаудераб применённой к выражению (2.6) при $n \geqslant 2$, получим неравенство:

$$|u_n|_{2+\alpha;\Omega} \leqslant K|g(x, u_{n-1}(x))|_{\alpha;\Omega}. \quad (2.29)$$

Справедливо следующее неравенство:

$$|g(x, u_{n-1}(x))|_{\alpha;\Omega} = |g(x, u_{n-1}(x))|_{0;\Omega} + [g(x, u_{n-1}(x))]_{\alpha;\Omega} \leqslant \\ \leqslant M_1 + a[u_{n-1}]_{\alpha;\Omega} + [f(x, u_{n-1})]_{\alpha;\Omega} \leqslant \\ \leqslant M_1 + K_1 + (a + K_2)[u_{n-1}]_{\alpha;\Omega}. \quad (2.30)$$

В силу неравенств (2.30) и априорной оценки Шаудера (2.29) получим неравенство:

$$|u_n|_{2+\alpha;\Omega} \leqslant M_2 + M_3[u_{n-1}]_{\alpha;\Omega}. \quad (2.31)$$

Воспользуемся интерполяционным неравенством:

$$[u_{n-1}]_{\alpha;\Omega} \leqslant \varepsilon|u_{n-1}|_{2+\alpha;\Omega} + c_1(\varepsilon)|u_{n-1}|_{0;\Omega}, \quad (2.32)$$

справедливым для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, и получиv следующее иттерационное неравенство:

$$|u_n|_{2+\alpha;\Omega} \leqslant M_2 + M_3\varepsilon|u_{n-1}|_{2+\alpha;\Omega} + M_3c_1(\varepsilon)|u_{n-1}|_{0;\Omega}, \quad n \geqslant 2. \quad (2.33)$$

В силу (2.25) неравенство (2.33) может быть переписано в следующем виде:

$$|u_n|_{2+\alpha;\Omega} \leqslant M_4(\varepsilon) + M_3\varepsilon|u_{n-1}|_{2+\alpha;\Omega}, \quad n \geqslant 2. \quad (2.34)$$

При условии, что

$$\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2M_3}\right)$$

[1] Если $f(x,u) = f(u)$, то при указанных условиях получим сразу же $f(u(x)) \in \mathbb{C}^\alpha(\overline{\Omega})$ и далее можно воспользоваться классической $\mathbb{C}^{2+\alpha}$ априорной оценкой Шаудера.

из реккурентного неравенства (2.34) следует априорная оценка:

$$|u_{n+2}|_{2+\alpha;\Omega} \leqslant M_4(\varepsilon)\sum_{m=1}^{+\infty}(M_3\varepsilon)^m + |u_2|_{2+\alpha;\Omega} \leqslant$$
$$\leqslant 2M_4(\varepsilon) + |u_2|_{2+\alpha;\Omega}, \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}. \quad (2.35)$$

Таким образом, приходим к априорной оценке:

$$\boxed{|u_n|_{2+\alpha;\Omega} \leqslant M_5 < +\infty, \quad n \geqslant 2,} \quad (2.36)$$

где $M_5 > 0$ и не зависит от n.

Шаг 4. В силу леммы 1 из лекции 14 существует такая подпоследовательность $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$, что

$$u_{n_k}(x) \to u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega}) \quad (2.37)$$

при $n_k \to +\infty$. Рассмотрим соответствующую задачу:

$$-\Delta u_{n_k} + au_{n_k} = g(x, u_{n_k-1}) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \quad (2.38)$$

$$u_{n_k}(x) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \quad (2.39)$$

В силу (2.37) можно перейти к пределу при $n_k \to +\infty$, заметив, что для подпоследовательности $\{u_{n_k-1}\} \subset \{u_n\}$ выполнено предельное свойство:

$$g(x, u_{n_k-1}) \searrow g(x, u) \quad \text{при} \quad n_k \to +\infty$$

для всех $x \in \Omega$. В результате получим равенства для $u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$:

$$-\Delta u(x) + au(x) = g(x, u) = au(x) + f(x, u(x)) \quad \text{при} \quad x \in \Omega,$$

$$u(x) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma.$$

З а м е ч а н и е. Для удобства обозначим это решение символом $\overline{u}(x)$. Не путайте с использованным ранее таким же обозначением для непрерывного продолжения функции $u(x) \in \mathbb{C}_w(\overline{\Omega})$ из области Ω до границы Γ.

Шаг 5. Итак, доказано существование решения $\overline{u}(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\Omega)$, удовлетворяющего неравенству:

$$\underline{U}(x) \leqslant \overline{u}(x) \leqslant \overline{U}(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega.$$

Если воспользоваться уже известной схемой доказательства при выборе $u_0(x) = \underline{U}(x)$, то получим в результате итерационного процесса $\{u^m(x)\}$ решение $\underline{u}(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\Omega)$, удовлетворяющего неравенству:

$$\underline{U}(x) \leqslant \underline{u}(x) \leqslant \overline{U}(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega$$

и

$$u^m(x) \nearrow \underline{u}(x) \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Исходя из итерационного процесса можно доказать, что для всех $m, n \in \mathbb{N}$ соответствующие итерационные последовательности $\{u_n(x)\}$ и $\{u^m(x)\}$ связаны неравенством:

$$\underline{U}(x) \leqslant \cdots \leqslant u^m(x) \leqslant u^{m+1}(x) \leqslant \cdots \leqslant \underline{u}(x) \leqslant \\ \leqslant \overline{u}(x) \leqslant \cdots \leqslant u_{n+1}(x) \leqslant u_n(x) \leqslant \cdots \leqslant \overline{U}(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega. \quad (2.40)$$

Шаг 6. Пусть $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ — это произвольное решение задачи Дирихле (1.7). Тогда ,очевидно, $u(x)$ — это нижнее решение задачи Дирихле. Поэтому, если взять в качестве $\underline{U}(x) = u(x)$ и провести итерационный процесс $\{u_n(x)\}$, то в результате получим, что

$$u(x) = \underline{U}(x) \leqslant \overline{u}(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega. \quad (2.41)$$

Теперь заметим, что, с другой стороны, $u(x)$ является верхним решением $\overline{U}(x)$. Поэтому если рассмотреть итерационный процесс $\{u^m(x)\}$ взяв в качестве $\overline{U}(x) = u(x)$, то получим неравенство:

$$\underline{u}(x) \leqslant \overline{U}(x) = u(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega. \quad (2.42)$$

Итак, из неравенств (2.41), (2.42) и (2.40) следуют неравенства:

$$\underline{u}(x) \leqslant u(x) \leqslant \overline{u}(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega.$$ [1)]

Поэтому $\underline{u}(x)$ — это минимальное решение, а $\overline{u}(x)$ — это максимальное решение задачи Дирихле (1.7).

Теорема доказана.

Замечание. Заметим, что нижнее решение $\underline{U}(x)$ и верхнее решение $\overline{U}(x)$ принадлежат классу $\mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, а построенное решение $u(x)$ принадлежит классу $\mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ при $\alpha \in (0, 1]$!

§ 3. Коэффициентная устойчивость решения

Рассмотрим следующую нелинейную задачу Дирихле:

$$-Lu(x) = f(x, u(x)) \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \quad (3.1)$$

$$u(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in \Gamma, \quad (3.2)$$

[1)] Заметим, что результат имеет смысл, поскольку исходная задача Дирихле при $f(x,u) = |u|^q u$ и $q > 0$ имеет счетное множество линейно независимых в $H_0^1(\Omega)$ решений.

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей Γ,

$$Lu(x) := \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + c(x)u(x), \tag{3.3}$$

причем относительно коэффициентов $a_{ij}(x), c(x)$ предположим, что

$$a_{ij}(x), c(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}(\overline{\Omega}), \quad \alpha \in (0,1], \tag{3.4}$$

$$\max_{i,j \in \overline{1,N}} \{|a_{ij}|_{\alpha;\Omega}, |c|_{\alpha;\Omega}\} \leqslant K_1 \tag{3.5}$$

и для всех $x \in \overline{\Omega}$ матрица $(a_{ij}(x))$ положительно определенная и поэтому

$$m := \min_{x \in \overline{\Omega}} \sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x) > 0. \tag{3.6}$$

Пусть, кроме того,

$$c(x) \leqslant 0 \quad \text{для} \quad x \in \Omega. \tag{3.7}$$

Наконец, пусть выполнено неравенство:

$$\max\left\{|f(x,0)|_{0;\Omega}, |D_x f(x,u(x))|_{0;\Omega}, |f_u(x,u(x))|_{0;\Omega}\right\} \leqslant K_5. \tag{3.8}$$

Будем рассматривать классические решения этой задачи из класса $\mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$. Определим нижнее решение (субрешение).

Определение 3. *Функция* $\underline{U}(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, *удовлетворяющая задаче*

$$-L\underline{U}(x) \leqslant f(x, \underline{U}(x)) \quad \textit{в} \quad \Omega, \quad \underline{U}(x) \leqslant 0 \quad \textit{на} \quad \Gamma, \tag{3.9}$$

называется нижним решением задачи (3.1), (3.2).

Определим верхнее решение (суперрешение).

Определение 4. *Функция* $\overline{U}(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, *удовлетворяющая задаче*

$$-L\overline{U}(x) \geqslant f(x, \overline{U}(x)) \quad \textit{в} \quad \Omega, \quad \overline{U}(x) \geqslant 0 \quad \textit{на} \quad \Gamma, \tag{3.10}$$

называется верхним решением задачи (3.1), (3.2).

Заметим, что из условий (3.4) и (3.7) следует справедливость оценки Шаудера (см. работу [6]):

$$|u|_{2+\alpha;\Omega} \leqslant K_2 |Lu|_{\alpha;\Omega}, \tag{3.11}$$

где постоянная $K_2 > 0$, в частности, зависит от постоянной $K_1 > 0$ из неравенства (3.5), а от функции $u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ не зависит. Используя оценку Шаудера (3.14), по аналогии с предыдущим параграфом можно доказать, что при выполнении условий (1.1) и (1.2) на функцию $f(x,u)$ справедлива следующая

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\underline{U}(x)$ *и* $\overline{U}(x)$ *— это нижнее и верхнее решения задачи* (3.1), (3.2) *такие, что*

$$\underline{U}(x) \leqslant \overline{U}(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega.$$

Тогда существует решение $u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ *задачи* (3.1), (3.2), *удовлетворяющее неравенствам*:

$$\underline{U}(x) \leqslant u(x) \leqslant \overline{U}(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega, \tag{3.12}$$

причем существует такая постоянная $M > 0$, *зависящая от* $K_1 > 0$ *из неравенства* (3.5) *и* $K_3 > 0$ *такого, что*

$$\max\left\{|\underline{U}|_{0;\Omega}, |\overline{U}|_{0;\Omega}\right\} \leqslant K_3,$$

что выполнена оценка:

$$|u|_{2+\alpha;\Omega} \leqslant M \tag{3.13}$$

Рассмотрим следующие две задачи Дирихле в классе функций $u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$:

$$-L_k u_k(x) = f(x, u_k(x)) \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \tag{3.14}$$

$$u_k(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in \Gamma, \tag{3.15}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей Γ при $k = 1, 2$,

$$L_k u(x) := \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{kij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + c_k(x) u(x), \tag{3.16}$$

причем для коэффициентов $a_{kij}(x), c_k(x)$ выполнены свойства (3.4)–(3.7). Пусть имеют место априорные оценки:

$$|u_k|_{2+\alpha;\Omega} \leqslant M_k. \tag{3.17}$$

Ниже будут получены условия на коэффициенты задачи (3.14), (3.15), при которых имеют место эти априорные оценки. Введем в рассмотрение функцию:

$$v(x) = u_1(x) - u_2(x). \tag{3.18}$$

Тогда

$$f(x, u_1) - f(x, u_2) = \int_0^1 \frac{d}{ds} f(x, u_s)\, ds = \overline{c}(x) v(x), \tag{3.19}$$

$$u_s = s u_1 + (1 - s) u_2, \quad \overline{c}(x) := \int_0^1 \frac{\partial f(x, u_s)}{\partial u_s}\, ds \leqslant 0. \tag{3.20}$$

Предположим, что выполнено неравенство:

$$\frac{\partial f(x,p)}{\partial p} \leqslant 0 \quad \text{для} \quad (x,p) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{3.21}$$

Тогда из (3.14), (3.15) с учетом (3.19) для функции $v(x)$ получим задачу:

$$-\widetilde{L}v(x) = h(x) \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \tag{3.22}$$

$$v(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in \Gamma, \tag{3.23}$$

$$\widetilde{L}v(x) := \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{1ij}(x) \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_i \partial x_j} + (c_1(x) + \overline{c}(x))v(x), \tag{3.24}$$

$$h(x) := \sum_{i,j=1,1}^{N,N} (a_{1ij}(x) - a_{2ij}(x)) \frac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_i \partial x_j} + (c_1(x) - c_2(x))\, u_2(x), \tag{3.25}$$

Введем в рассмотрение еще две функции:

$$v_1(x) = -\frac{d^2 - |x|^2}{2m_1} \sup_{x \in \Omega} |h(x)|, \quad v_2(x) = \frac{d^2 - |x|^2}{2m_1} \sup_{x \in \Omega} |h(x)|, \tag{3.26}$$

где

$$d := \max_{x \in \overline{\Omega}} |x|, \quad m_k := \min_{x \in \overline{\Omega}} \sum_{i=1}^{N} a_{kii}(x) > 0, \quad k = 1, 2. \tag{3.27}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \widetilde{L}v_1(x) \geqslant \frac{1}{m_1} \sum_{i=1}^{N} a_{1ii}(x) \sup_{x \in \Omega} |h(x)| \geqslant \\ \geqslant \sup_{x \in \Omega} |h(x)| \geqslant h(x) = \widetilde{L}v(x) \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{L}v_2(x) \leqslant -\frac{1}{m_1} \sum_{i=1}^{N} a_{1ii}(x) \sup_{x \in \Omega} |h(x)| \leqslant \\ \leqslant -\sup_{x \in \Omega} |h(x)| \leqslant h(x) = \widetilde{L}v(x) \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$v_1(x) \leqslant 0 = v(x) \leqslant v_2(x) \quad \text{для} \quad x \in \Gamma. \tag{3.30}$$

В силу принципа сравнения для задачи (2.13) и (2.14) из лекции 12 мы получим, что выполнены неравенства:

$$v_1(x) \leqslant v(x) \leqslant v_2(x) \quad \text{для} \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{3.31}$$

из которых следует оценка:

$$|u_1(x) - u_2(x)| \leqslant \frac{d^2 - |x|^2}{2m_1} \sup_{x\in\Omega} |h(x)| \leqslant M_2 \frac{d^2 - |x|^2}{2m_1} \times \\ \times \left\{ \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \sup_{x\in\Omega} |a_{1ij}(x) - a_{2ij}(x)| + \sup_{x\in\Omega} |c_1(x) - c_2(x)| \right\}, \quad (3.32)$$

где использовалась оценка (3.17). Делая допустимую замену индексов $1 \leftrightarrow 2$, получим неравенство:

$$|u_2(x) - u_1(x)| \leqslant M_1 \frac{d^2 - |x|^2}{2m_2} \times \\ \times \left\{ \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \sup_{x\in\Omega} |a_{2ij}(x) - a_{1ij}(x)| + \sup_{x\in\Omega} |c_2(x) - c_1(x)| \right\}. \quad (3.33)$$

Из неравенств (3.32) и (3.33) получаем искомую оценку:

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} |u_1(x) - u_2(x)| \leqslant \min\left\{ \frac{M_2}{m_1}, \frac{M_1}{m_2} \right\} \max_{x\in\overline{\Omega}} \left(\frac{d^2 - |x|^2}{2} \right) \times \\ \times \left\{ \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \sup_{x\in\Omega} |a_{1ij}(x) - a_{2ij}(x)| + \sup_{x\in\Omega} |c_1(x) - c_2(x)| \right\}, \quad (3.34)$$

использование которой доказывает устойчивость задачи Дирихле (3.1) и (3.2).

Теперь рассмотрим вопрос об априорной оценке (3.17). Справедлива следующая

Лемма 2. *Для решений задачи* (3.1), (3.2) *из класса функций* $u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ *из априорной оценки*

$$|u(x)|_{0;\Omega} \leqslant K_4, \quad (3.35)$$

при условии (3.8) *справедлива априорная оценка*:

$$|u(x)|_{2+\alpha;\Omega} \leqslant M, \quad (3.36)$$

где постоянная $M = M(K_2, K_4, K_5, d_1) > 0$ *и* d_1 — *диаметр ограниченной области* Ω.

Замечание. Разумеется, мажоранта $K_5 > 0$ может зависеть от нормы $|u(x)|_{0;\Omega}$. Таким образом, вопрос о наличии априорной оценки (3.17) сводится к вопросу о наличии априорной оценки (3.35).

Доказательство. В силу априорной оценки Шаудера (3.14) нам достаточно получить оценку величины $|f(x,u(x))|_{\alpha;\Omega}$. Сначала получим оценку для $|f(x,u(x))|_{0;\Omega}$. Действительно, имеем:

$$f(x,u) = f(x,0) + \int\limits_0^1 \frac{d}{ds} f(x,su)\,ds, \tag{3.37}$$

$$|f(x,u(x))|_{0;\Omega} \leqslant |f(x,0)|_{0;\Omega} + \\ + |f_u(x,u(x))|_{0;\Omega}\,|u(x)|_{0;\Omega} \leqslant K_5(1+|u(x)|_{0;\Omega}). \tag{3.38}$$

Оценим величину $[f(x,u(x))]_{\alpha;\Omega}$. Действительно, имеем:

$$f(x_1,u_1) - f(x_2,u_2) = \int\limits_0^1 \frac{d}{ds} f(x_s,u_s)\,ds = \\ = \int\limits_0^1 \frac{\partial f(x_s,u_s)}{\partial x_s}\,ds\,[x_1-x_2] + \int\limits_0^1 \frac{\partial f(x_s,u_s)}{\partial u_s}\,ds\,[u(x_1)-u(x_2)], \tag{3.39}$$

$$u_1 = u(x_1), \quad u_2 = u(x_2), \quad u_s = su_1 + (1-s)u_2,$$

$$[f(x,u(x))]_{\alpha;\Omega} \leqslant K_5\left(d_1^{1-\alpha} + [u]_{\alpha;\Omega}\right), \quad d_1 = \sup_{x_1,x_2\in\Omega}|x_1-x_2|. \tag{3.40}$$

Итак, с учетом (3.38) и (3.40) приходим к неравенству:

$$|f(x,u(x))|_{\alpha;\Omega} \leqslant K_5(1+d_1^{1-\alpha}+K_4) + K_5[u]_{\alpha;\Omega}. \tag{3.41}$$

Теперь воспользуемся оценкой Шаудера (3.14) и получим следующее неравенство:

$$|u|_{2+\alpha;\Omega} \leqslant K_2K_5(1+d_1^{1-\alpha}+K_4) + K_2K_5[u]_{\alpha;\Omega}. \tag{3.42}$$

В силу теоремы 1 из лекции 15 имеем неравенство:

$$K_2K_5[u]_{\alpha;\Omega} \leqslant K_2K_5\varepsilon_1^2|u|_{2+\alpha;\Omega} + \frac{K_2K_5c_1}{\varepsilon_1^\alpha}|u|_{0;\Omega} \leqslant \\ \leqslant K_2K_5\varepsilon_1^2|u|_{2+\alpha;\Omega} + \frac{K_4K_2K_5c_1}{\varepsilon_1^\alpha}, \quad \varepsilon_1>0. \tag{3.43}$$

Сделаем замену:

$$\varepsilon = K_2K_5\varepsilon_1^2. \tag{3.44}$$

Тогда из (3.43) следует неравенство:

$$K_2K_5[u]_{\alpha;\Omega} \leqslant \varepsilon|u|_{2+\alpha;\Omega} + K_4(c_1K_2K_5)^{1+\alpha/2}\frac{1}{\varepsilon^{\alpha/2}}. \tag{3.45}$$

Итак, из (3.42) и из (3.45) получаем неравенство

$$|u|_{2+\alpha;\Omega} \leqslant \frac{a_1}{1-\varepsilon} + \frac{a_2}{(1-\varepsilon)\varepsilon^{\alpha/2}}, \quad \varepsilon \in (0,1), \tag{3.46}$$

где

$$a_1 := K_2K_5(1 + d_1^{1-\alpha} + K_4), \quad a_2 := K_4(c_1K_2K_5)^{1+\alpha/2}. \tag{3.47}$$

Нетрудно понять, что в некоторой точке $x_0 \in (0,1)$ достигается минимум функции:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}\left(a_1 + \frac{a_2}{x^{\alpha/2}}\right).$$

Таким образом, положив $\varepsilon = x_0$ в неравенстве (3.48), получим искомую оценку (3.36). Для дальнейшего получим «грубую» оценку, положив в неравенстве (3.48) величину $\varepsilon = 1/2$

$$|u|_{2+\alpha;\Omega} \leqslant 2a_1 + 2^{1+\alpha/2}a_2. \tag{3.48}$$

Лемма доказана.

Замечание. Теперь рассмотрим вопрос об априорной оценке (3.35). Очевидно, что если существуют верхнее $\overline{U}(x)$ и нижнее решения $\underline{U}(x)$ из класса $\mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, то согласно теореме 2 существует решение задачи (3.1), (3.2) класса $u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, причем

$$\underline{U}(x) \leqslant u(x) \leqslant \overline{U}(x) \quad \text{для} \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{3.49}$$

и поэтому

$$|u(x)|_{0;\Omega} \leqslant K_4 = \max\left\{|\underline{U}(x)|_{0;\Omega}, \left|\overline{U}(x)\right|_{0;\Omega}\right\}. \tag{3.50}$$

Однако, не для всякого решения задачи (3.1), (3.2) класса $u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ существуют верхнее и нижнее решение со свойством (3.49). Тем не менее, можно предъявить некоторые условия на функцию $f(x,u)$, при которых будет иметь место априорная оценка (3.35).

Рассмотрим случай, когда

$$h(x) := f(x,0) \not\equiv 0, \quad f_p(x,p) \leqslant 0 \quad \text{для} \quad (x,p) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{3.51}$$

Тогда задачу (3.1), (3.2) можно переписать в следующем виде:

$$-Lu(x) = h(x) + F(x,u(x)) \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \tag{3.52}$$

$$u(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in \Gamma, \tag{3.53}$$

$$F(x,u) := f(x,u) - f(x,0), \quad F_u(x,u) \leqslant 0. \tag{3.54}$$

Введем в рассмотрение еще две функции:

$$w_1(x) = \frac{d^2 - |x|^2}{2m} \sup_{x\in\Omega} |h(x)| \geqslant 0, \tag{3.55}$$

$$w_2(x) = -\frac{d^2 - |x|^2}{2m} \sup_{x\in\Omega} |h(x)| \leqslant 0, \tag{3.56}$$

$$m := \min_{x\in\overline{\Omega}} \sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x) > 0, \quad d = \max_{x\in\overline{\Omega}} |x| < +\infty. \tag{3.57}$$

Для функций $w_1(x)$ и $w_2(x)$ справедливы следующие неравенства:

$$-Lw_1(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x) \sup_{x\in\Omega} |h(x)| - c(x)w_1(x) \geqslant \\ \geqslant h(x) \geqslant h(x) + F(x, w_1(x)) \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \tag{3.58}$$

$$w_1(x) \geqslant 0 \quad \text{для} \quad x \in \Gamma, \tag{3.59}$$

$$-Lw_2(x) = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x) \sup_{x\in\Omega} |h(x)| - c(x)w_2(x) \leqslant \\ \leqslant h(x) \leqslant h(x) + F(x, w_2(x)) \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \tag{3.60}$$

$$w_2(x) \leqslant 0 \quad \text{для} \quad x \in \Gamma, \tag{3.61}$$

поскольку

$$F_p(x,p) \leqslant 0, \quad w_1(x) \geqslant 0 \geqslant w_2(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow F(x, w_2(x)) \geqslant F(x,0) = 0 \geqslant F(x, w_1(x)). \tag{3.62}$$

Поэтому в силу теоремы 2 из лекции 14 получаем оценку:

$$|u(x)| \leqslant \frac{d^2 - |x|^2}{2m} \sup_{x\in\Omega} |f(x,0)| \Rightarrow \\ \Rightarrow |u(x)|_{0;\Omega} \leqslant K_4 := \max_{x\in\overline{\Omega}} \left(\frac{d^2 - |x|^2}{2m}\right) \sup_{x\in\Omega} |f(x,0)|. \tag{3.63}$$

Таким образом, доказана следующая

Лемма 3. *Если выполнены условия* (3.51), *то для всякого решения* $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ *задачи* (3.1), (3.2) *справедлива априорная оценка* (3.63).

Заметим, что функции $w_1(x)$ и $w_2(x)$, определенные равенствами (3.55) и (3.56), при условиях (3.51) на функцию $f(x,u)$, являются верхним и нижним решениями класса $\mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega})$. Поэтому согласно теореме 2 существует решение $u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ задачи (3.1), (3.2), для которого выполнены неравенства (3.63). Теперь введем следующий допустимый класс функций $a_{ij}(x)$ и $c(x)$:

$$W := \left\{ a_{ij}(x),\ c(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}(\overline{\Omega}) :\ \min_{x\in\overline{\Omega}} \sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x) \geqslant \lambda_1 > 0, \right.$$
$$\left. \max\left\{|a_{ij}(x)|_{\alpha;\Omega}, |c(x)|_{\alpha;\Omega}\right\} \leqslant K_1 \right\}, \quad (3.64)$$

где постоянные $\lambda_1 > 0$ и $K_1 > 0$ являются заданными. Таким образом, доказана следующая

Теорема 3. *Если выполнены условия* (3.8), (3.51) *на функцию* $f(x,p) \in \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}\times\mathbb{R})$, *то существует единственное нетривиальное решение* $u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ *при* $\alpha \in (0,1]$ *задачи* (3.1), (3.2), *причем выполнено неравенство*:

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} |u_1(x) - u_2(x)| \leqslant$$
$$\leqslant M_3 \left\{ \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \sup_{x\in\Omega} |a_{1ij}(x) - a_{2ij}(x)| + \sup_{x\in\Omega} |c_1(x) - c_2(x)| \right\} \quad (3.65)$$

для любых $a_{kij}(x), c_k(x) \in W$, *где* $u_k(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ — *единственные решения задач* (3.14), (3.15), $k = 1,2$ *и постоянная* $M_3 = M_3(\lambda_1, K_1, d, d_1, K_5, N, \alpha) > 0$.

Доказательство. Докажем единственность решения задачи (3.1), (3.2). Действительно, пусть $u_1(x), u_2(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega)\cap\mathbb{C}(\overline{\Omega})$ — два различные решения задачи Дирихле (3.1), (3.2). Тогда функция $v(x) = u_1(x) - u_2(x)$ является решением следующей задачи:

$$Lv(x) + \overline{c}(x)v(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \quad (3.66)$$

$$v(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in \Gamma, \quad (3.67)$$

где использовалось равенство:

$$f(x,u_1) - f(x,u_2) = \int_0^1 \frac{d}{ds} f(x,u_s)\, ds = \overline{c}(x)v(x), \quad (3.68)$$

$$u_s = su_1 + (1-s)u_2, \quad \overline{c}(x) = \int_0^1 \frac{\partial f(x,u_s)}{\partial u_s}\, ds \leqslant 0. \quad (3.69)$$

Теперь осталось воспользоваться единственностью решения задачи Дирихле, которая была доказана в лекции 12.

Теорема доказана.

§ 4. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [16], [17].

Лекция 19

ОЦЕНКИ ТИПА БЕРНШТЕЙНА ГРАДИЕНТА РЕШЕНИЯ

§ 1. Повышенная гладкость решения

Определим еще одно пространство Гельдера $\mathbb{C}^{k+\alpha}(\Omega)$ при $k \in \mathbb{N} \cup \cup \{0\}$. Для этого сформулируем определение локально непрерывной по Гельдеру функции на Ω.

Определение 1. *Будем говорить, что функция $u(x)$ локально непрерывна по Гельдеру на множестве Ω с показателем $\alpha \in (0,1]$, если для всякого компактного множества $D \subset \Omega$ имеем*:

$$[u(x)]_{\alpha;D} := \sup_{x \neq y, x,y \in D} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} < +\infty. \tag{1.1}$$

Справедлива следующая техническая лемма:

Лемма 1. *Для того, чтобы функция $u(x)$ была локально непрерывной в области Ω, необходимо и достаточно, чтобы*

$$[u(x)]_{\alpha;\overline{O(x_0,R_0)}} < +\infty \tag{1.2}$$

для любого шара $O(x_0,R_0)$ такого, что $\overline{O(x_0,R_0)} \subset \Omega$.

Доказательство. Необходимость условия (1.2) следует из того, что $\overline{O(x_0,R_0)}$ — компакт в $\mathbb{R}^N$. Достаточность следует из того, что если $D \subset \Omega$ — компакт, то существует конечное покрытие компакта шарами $O(x_j,R_j)$ при $j=\overline{1,m}$, объединение замыкания которых

$$D \subset \bigcup_{j=1}^{m} \overline{O(x_j,R_j)} \subset \Omega,$$

и тогда

$$[u(x)]_{\alpha;D} \leqslant \max_{j=\overline{1,m}} [u(x)]_{\alpha;\overline{O(x_j,R_j)}} < +\infty. \tag{1.3}$$

Лемма доказана.

Определим пространство Гельдера $\mathbb{C}^{k+\alpha}(\Omega)$.

Определение 2. *Пространство $\mathbb{C}^{k+\alpha}(\Omega)$ есть такое подпространство функций пространства $\mathbb{C}^{(k)}(\Omega)$, что все частные произ-*

водные старшего порядка k являются локально непрерывными по Гельдеру.

Замечание. Например, если $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — область, то ранее введенные пространства $\mathbb{C}^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$ и $\mathbb{C}^{k+\alpha}(\Omega)$ не совпадают и имеет место вложение:

$$\mathbb{C}^{k+\alpha}(\overline{\Omega}) \subset \mathbb{C}^{k+\alpha}(\Omega).$$

Эти два пространства совпадают тогда, когда $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — компакт.

Замечание. Справедливо вложение: $\mathbb{C}^{(k+1)}(\Omega) \subset \mathbb{C}^{k+\alpha}(\Omega)$. Действительно, достаточно оценить величину $[D^k_x f]_{\alpha;D}$ для произвольного компакта $D \subset \Omega$. Имеет место оценка:

$$[D^k_x f(x)]_{\alpha;D} \leqslant d^{1-\alpha}|D^{(k+1)}_x f(x)|_{0;D} < +\infty, \quad d := \sup_{x,y\in D}|x-y| < +\infty.$$

Рассмотрим в произвольной ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ следующее уравнение:

$$Lu(x) = f(x) \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \tag{1.4}$$

$$Lu(x) := \sum_{ij=1,1}^{N,N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{N} b_j(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + c(x)u(x), \tag{1.5}$$

$$a_{ij}(x), b_j(x), c(x), f(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}(\Omega) \quad \text{при} \quad \alpha \in (0,1], \tag{1.6}$$

$$c(x) \leqslant 0 \quad \text{для} \quad x \in \Omega. \tag{1.7}$$

Справедлив первый результат:

Лемма 2. *Если $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega)$ — решение уравнения* (1.4), *то при условиях* (1.6), (1.7) *функция $u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $O(x_0, R_0) \subset \Omega$ — произвольный непустой шар. Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$\widetilde{L}v(x) = \widetilde{f}(x) \quad \text{для} \quad x \in O(x_0, R_0), \tag{1.8}$$

$$v(x) = u(x) \quad \text{для} \quad x \in \partial O(x_0, R_0), \tag{1.9}$$

$$\widetilde{L}v(x) := \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{1.10}$$

$$\widetilde{f}(x) = f(x) - c(x)u(x) - \sum_{j=1}^{N} b_j(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}. \tag{1.11}$$

Имеют место следующие непрерывные вложения:

$$\mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \subset \mathbb{C}^{(2)}(\overline{O(x_0,R_0)}) \subset \mathbb{C}^{1+\alpha}(\overline{O(x_0,R_0)}) \subset \mathbb{C}^{\alpha}(\overline{O(x_0,R_0)}), \tag{1.12}$$

$$\mathbb{C}^{\alpha}(\Omega) \subset \mathbb{C}^{\alpha}(\overline{O(x_0,R_0)}), \tag{1.13}$$

в силу которых с учетом условий (1.6) получаем, что

$$a_{ij}(x), \widetilde{f}(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}(\overline{O(x_0, R_0)}). \tag{1.14}$$

Поэтому в силу леммы 6.10 из работы [5] получаем, что существует единственное решение задачи Дирихле (1.8), (1.9) из класса $v(x) \in \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{O(x_0, R_0)})$, а в силу единственности решения приходим к выводу о том, что $v(x) = u(x)$. Значит, $u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{O(x_0, R_0)})$ для любого шара $O(x_0, R_0) \subset \Omega$. Таким образом, $u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\Omega)$.

Лемма доказана.

Теперь докажем результат о повышенной гладкости решения уравнения (1.4). С этой целью воспользуемся, так называемой, внутренней оценкой Шаудера для эллиптического оператора (1.5):

Внутренняя оценка Шаудера. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — произвольная ограниченная область и L — равномерно эллиптический оператор в области Ω, причем выполнены условия (1.6), (1.7) и $d > 0$ — произвольное фиксированное число. Тогда в классе функций $u(x) \in \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\Omega)$ при $\alpha \in (0, 1]$ справедлива *внутренняя оценка Шаудера*:

$$|u|_{2+\alpha;\Omega_d} \leqslant M_{sh}\left(|Lu|_{\alpha;\Omega} + |u|_{0;\Omega}\right), \tag{1.15}$$

где

$$\Omega_d := \{x \in \Omega : \ \mathrm{distance}\{x, \partial\Omega\} \geqslant d\}, \tag{1.16}$$

а постоянная $M_{sh} = M_{sh}(d, \lambda, \Lambda, |a_{ij}|_{\alpha;\Omega}, |b_j|_{\alpha;\Omega}, |c|_{\alpha;\Omega})$, где

$$\Lambda := \sup_{x \in \Omega} \sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x), \quad \lambda := \inf_{x \in \Omega, |\xi|=1} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j,$$

— это, так называемые, константы эллиптичности.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Если* $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega)$ — *решение уравнения* (1.4) *при условиях*

$$a_{ij}(x),\ b_j(x),\ c(x),\ f(x) \in \mathbb{C}^{1+\alpha}(\Omega),\ \alpha \in (0, 1], \tag{1.17}$$

то $u(x) \in \mathbb{C}^{3+\alpha}(\Omega)$.

Доказательство. *Шаг 1.* $u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\Omega)$. В силу леммы 2 получаем, что $u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\Omega)$.

Шаг 2. $u(x) \in \mathbb{C}^{3+\alpha}(\Omega)$. Пусть $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_N\}$ — некоторая прямоугольная декартова система координат. Определим разностный оператор:

$$\delta_k^h v(x) := \frac{v(x + h\mathbf{e}_k) - v(x)}{h}. \tag{1.18}$$

Для любых $x \in \Omega$ и $h \neq 0$ таких, что $x + h\mathbf{e}_k \in \Omega$ справедливы равенства:

$$\sum_{ij=1,1}^{N,N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{N} b_j(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + c(x)u(x) = f(x), \tag{1.19}$$

$$\sum_{ij=1,1}^{N,N} a_{ij}(x+h\mathbf{e}_k)\frac{\partial^2 u(x+h\mathbf{e}_k)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{N} b_j(x+h\mathbf{e}_k)\frac{\partial u(x+h\mathbf{e}_k)}{\partial x_j} + \\ + c(x+h\mathbf{e}_k)u(x+h\mathbf{e}_k) = f(x+h\mathbf{e}_k). \quad (1.20)$$

Вычитая из равенства (1.19) равенство (1.20) после деления на $h \neq 0$, имеем такое равенство:

$$\sum_{ij=1,1}^{N,N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 \delta_k^h u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{N} b_j(x)\frac{\partial \delta_k^h u(x)}{\partial x_j} + c(x)\delta_k^h u(x) = F_h(x), \quad (1.21)$$

$$F_h(x) := \delta_k^h f(x) - \sum_{ij=1,1}^{N,N} \delta_k^h a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x+h\mathbf{e}_k)}{\partial x_i \partial x_j} - \\ - \sum_{j=1}^{N} \delta_k^h b_j(x)\frac{\partial u(x+h\mathbf{e}_k)}{\partial x_j} - \delta_k^h c(x) u(x+h\mathbf{e}_k). \quad (1.22)$$

Заметим, что справедливы следующие равенства:

$$\delta_k^h f(x) = \frac{1}{h}\left[f(x+h\mathbf{e}_k) - f(x)\right] = \frac{1}{h}\int\limits_0^1 \frac{d}{ds} f(x+sh\mathbf{e}_k)\,ds = \\ = \frac{1}{h}\int\limits_0^1 \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f(x+sh\mathbf{e}_k)}{\partial x_{sj}}\frac{dx_{sj}}{ds}\,ds = \frac{1}{h}\int\limits_0^1 \frac{\partial f(x+sh\mathbf{e}_k)}{\partial x_{sk}}\,ds \cdot h = \\ = \int\limits_0^1 \frac{\partial f(x+sh\mathbf{e}_k)}{\partial x_{sk}}\,ds, \quad x_s = x + sh\mathbf{e}_k. \quad (1.23)$$

Пусть $O(x_0, R_0)$ — произвольный непустой шар такой, что $\overline{O(x_0, R_0)} \subset \subset \Omega$. Пусть $h_0 > 0$ настолько мало, что

$$\overline{O(x_0, R_0 + h_0)} \subset \Omega.$$

Тогда при $0 < |h| < h_0$ имеем:

$$|x + sh\mathbf{e}_k - x_0| \leqslant |x - x_0| + h_0 \leqslant R_0 + h_0$$

для любого $x \in O(x_0, R_0)$, т.е. если $x \in O(x_0, R_0)$, то $x + sh\mathbf{e}_k \in \in O(x_0, R_0 + h_0)$. Заметим, что в силу равенств (1.23) справедливы соотношения:

$$\delta_k^h f(x) - \delta_k^h f(y) = \int\limits_0^1 \left[\frac{\partial f(x+sh\mathbf{e}_k)}{\partial x_{sk}} - \frac{\partial f(y+sh\mathbf{e}_k)}{\partial y_{sk}}\right] ds \quad (1.24)$$

для любых $x, y \in \overline{O(x_0, R_0)}$,

$$x_s = x + sh\mathbf{e}_k, \quad y_s = y + sh\mathbf{e}_k.$$

Тогда имеет место оценка:

$$\left|\delta_k^h f(x)\right|_{\alpha;\overline{O(x_0,R_0)}} \leqslant \left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\right|_{\alpha;\overline{O(x_0,R_0+h_0)}}, \tag{1.25}$$

причем имеют место следующие вложения:

$$\mathbb{C}^{1+\alpha}(\Omega) \subset \mathbb{C}^{1+\alpha}(\overline{O(x_0, R_0 + h_0)}) \tag{1.26}$$

и, следовательно, оценка:

$$\left|\delta_k^h f(x)\right|_{\alpha;\overline{O(x_0,R_0)}} \leqslant M, \tag{1.27}$$

где постоянная $M > 0$ и от h не зависит. Ниже для простоты константы в правых частях оценок будем обозначать той же буквой $M > 0$. По аналогии можно доказать следующие оценки:

$$\left|\delta_k^h a_{ij}(x)\right|_{\alpha;\overline{O(x_0,R_0)}} \leqslant M, \quad \left|\delta_k^h b_j(x)\right|_{\alpha;\overline{O(x_0,R_0)}} \leqslant M, \tag{1.28}$$

$$\left|\delta_k^h c(x)\right|_{\alpha;\overline{O(x_0,R_0)}} \leqslant M. \tag{1.29}$$

Кроме того, в силу результата шага 1 имеем: $u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\Omega) \subset \subset \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{O(x_0, R_0 + h_0)})$ и поэтому справедлива оценка:

$$|u(x + h\mathbf{e}_k)|_{2+\alpha;\overline{O(x_0,R_0+h_0)}} \leqslant M, \tag{1.30}$$

где постоянная $M > 0$ и не зависит от h. Таким образом, из оценок (1.27)–(1.30) следует, что

$$|F_h(x)|_{\alpha;\overline{O(x_0,R_0)}} \leqslant M. \tag{1.31}$$

Кроме того, аналогично оценке (1.25) справедлива оценка:

$$|\delta_k^h u(x)|_{\alpha;\overline{O(x_0,R_0)}} \leqslant \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right|_{\alpha;\overline{O(x_0,R_0+h_0)}} \leqslant M, \tag{1.32}$$

где $M > 0$ и не зависит от h. Теперь заметим, что для решения $\delta_k^h u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{O(x_0, R_0)})$ уравнения (1.21), которое существует в этом классе, справедлива внутренняя оценка Шаудера (1.15). В частности, для любого непустого шара $O(x_1, R_1)$ такого, что $\overline{O(x_1, R_1)} \subset O(x_0, R_0)$ имеет место оценка:

$$|\delta_k^h u(x)|_{2+\alpha;O(x_1,R_1)} \leqslant M_{sh}\left(|F_h(x)|_{\alpha;\overline{O(x_0,R_0)}} + |\delta_k^h u(x)|_{0;\overline{O(x_0,R_0)}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2MM_{sh} = D_1, \quad (1.33)$$

где постоянная $D_1 > 0$ и не зависит от $h > 0$. С одной стороны, точно так же как при доказательстве леммы 1 из лекции 15 можно доказать, что семейство функций $\{\delta_h u(x)\}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно в $\mathbb{C}^{(2)}(\overline{O(x_1, R_1)})$ и поэтому по теореме Арцела любая последовательность функций $\{\delta_k^{h_n} u(x);\, n \in \mathbb{N}\}$ из множества $\{\delta_k^h u(x) : h \in \mathbb{R}\}$ содержит равномерно сходящуюся в $\mathbb{C}^{(2)}(\overline{O(x_1, R_1)})$ подпоследовательность:

$$\delta_k^{h_n} u(x) \to w_k(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{O(x_1, R_1)}) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{C}^{(2)}(\overline{O(x_1, R_1)}) \quad (1.34)$$

при $h_n \to 0$. С другой стороны, в силу (1.23) справедливо равенство:

$$\delta_k^h u(x) - \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} = \int\limits_0^1 \left[\frac{\partial u(x_s)}{\partial x_{sk}} - \frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right] ds, \quad x_s = x + sh\mathbf{e}_k, \quad (1.35)$$

из которого следует неравенство:

$$\left|\delta_k^h u(x) - \frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right|_{0;\overline{O(x_1,R_1)}} \leqslant \sup_{(x,s)\in\overline{O(x_1,R_1)}\times[0,1]} \left|\frac{\partial u(x_s)}{\partial x_{sk}} - \frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right|_{\alpha;\overline{O(x_0,R_0+h_0)}} \sup_{(x,s)\in\overline{O(x_1,R_1)}\times[0,1]} |x + sh\mathbf{e}_k - x|^\alpha =$$

$$= \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right|_{\alpha;\overline{O(x_0,R_0+h_0)}} |h|^\alpha \to +0 \quad \text{при} \quad h \to 0. \quad (1.36)$$

Значит,

$$\delta_k^h u(x) \rightrightarrows \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \quad \text{равномерно на} \quad \overline{O(x_1, R_1)} \quad \text{при} \quad h \to 0. \quad (1.37)$$

Поэтому существует последовательность $\{h_n\}$ такая, что

$$h_n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

и при этом

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \delta_k^{h_n} \rightrightarrows \frac{\partial^3 u(x)}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k} \quad \text{равномерно на} \quad \overline{O(x_1, R_1)} \quad (1.38)$$

при $n \to +\infty$. Тогда получаем, что

$$w_k(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{O(x_1, R_1)}), \quad u(x) \in \mathbb{C}^{(3)}(\overline{O(x_1, R_1)}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x) \in \mathbb{C}^{3+\alpha}(\overline{O(x_1, R_1)}) \quad (1.39)$$

для любого шара $O(x_1, R_1)$ такого, что $\overline{O(x_1, R_1)} \subset O(x_0, R_0)$. В силу произвольности в выборе шара $O(x_0, R_0)$ такого, что $\overline{O(x_0, R_0)} \subset \Omega$ приходим к выводу о том, что $u(x) \in \mathbb{C}^{3+\alpha}(\Omega)$.

Теорема доказана.

§ 2. Оценка Бернштейна градиента решения

Рассмотрим следующее нелинейное уравнение:

$$L(u) := \Delta u(x) + f(x, u, D_x u) = 0 \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \qquad (2.1)$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей Γ и $f = f(x, p, p_1, \ldots, p_N) \in \mathbb{C}^{(1)}(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$. Предположим, что решение $u(x)$ уравнения (2.1) принадлежит классу $\mathbb{C}^{(3)}(\Omega)$. Тогда, продифференцировав обе части уравнения (2.1) по переменной x_k, $k = \overline{1, N}$, получим равенство:

$$\Delta \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0, \qquad (2.2)$$

которое умножим на производную

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}$$

и просуммируем по индексу $k = 1, N$. В результате получим следующее равенство:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \Delta \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial p_j} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_k} + \\ + \frac{\partial f}{\partial p} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \right)^2 + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} = 0, \qquad (2.3)$$

в котором слагаемые можно преобразовать следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \Delta \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{N} \operatorname{div} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_k} D_x \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \right) - \\ - \sum_{k=1}^{N} \left(D_x \frac{\partial u(x)}{\partial x_k}, D_x \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \Delta \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \right)^2 -$$

$$-\sum_{j,k=1,1}^{N,N}\left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_k}\right)^2 = \frac{1}{2}\Delta v(x) - \\ - \sum_{j,k=1,1}^{N,N}\left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_k}\right)^2, \quad v(x) := |D_x u(x)|^2, \quad (2.4)$$

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial p_j}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial v(x)}{\partial x_j}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial p}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right)^2 = \frac{\partial f}{\partial p}v(x). \quad (2.6)$$

Таким образом, из (2.3) с учетом (2.4)–(2.6) получим уравнение:

$$\Delta v(x) - 2\sum_{j,k=1,1}^{N,N}\left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_k}\right)^2 + \\ + \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial v(x)}{\partial x_j} + 2\frac{\partial f}{\partial p}v(x) + 2\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial u(x)}{\partial x_k} = 0, \quad (2.7)$$

которое можно переписать в следующем виде:

$$\Delta v(x) - 2\sum_{j,k=1,1}^{N,N}\left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_k}\right)^2 + \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial v(x)}{\partial x_j} + 2\,(d_{x,p}f)\,v(x) = 0, \quad (2.8)$$

где

$$d_{x,p} = \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{p_1^2 + \cdots + p_N^2}\sum_{k=1}^{N}p_k\frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (2.9)$$

Действительно, имеют место следующие равенства:

$$\frac{\partial f}{\partial p}v(x) + \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial u(x)}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial p}v(x) + \sum_{k=1}^{N}p_k\frac{\partial f}{\partial x_k} = \\ = \frac{\partial f}{\partial p}v(x) + \frac{1}{p_1^2 + \cdots + p_N^2}\sum_{k=1}^{N}p_k\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(p_1^2 + \cdots + p_N^2\right) = \\ = \left[\left(\frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{p_1^2 + \cdots + p_N^2}\sum_{k=1}^{N}p_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)f\right]v(x). \quad (2.10)$$

Заметим, что справедливо неравенство Шварца:

$$\left(\sum_{j,k=1,1}^{N,N} a_{jk} b_{jk}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{j,k=1,1}^{N,N} a_{jk}^2\right)\left(\sum_{j,k=1,1}^{N,N} b_{jk}^2\right) \tag{2.11}$$

для любых матриц (a_{jk}) и (b_{jk}) размера $N \times N$, из которого при

$$a_{jk} = \delta_{jk}, \quad b_{jk} = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_k}$$

получим оценку:

$$(\Delta u(x))^2 = \left(\sum_{j,k=1,1}^{N,N} \delta_{jk} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_k}\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{j,k=1,1}^{N,N} \delta_{jk}^2\right)\left(\sum_{j,k=1,1}^{N,N}\left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_k}\right)^2\right) = N \sum_{j,k=1,1}^{N,N}\left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_k}\right)^2, \tag{2.12}$$

из которого получаем оценку снизу

$$\sum_{j,k=1,1}^{N,N}\left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_k}\right)^2 \geqslant \frac{1}{N}(\Delta u(x))^2 = \frac{f^2}{N}, \tag{2.13}$$

поскольку $u(x) \in \mathbb{C}^{(3)}(\Omega)$ — решение уравнения (2.1). С учетом неравенства (2.13) из уравнения (2.8) получаем неравенства:

$$\Delta v(x) + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial v(x)}{\partial x_j} = 2\sum_{j,k=1,1}^{N,N}\left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_k}\right)^2 - 2(d_{x,p}f)v(x) \geqslant$$
$$\geqslant 2\left(\frac{f^2}{N} - (d_{x,p}f)v(x)\right) \geqslant 0 \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \tag{2.14}$$

при условии на функцию $f = f(x, p, p_1, \ldots, p_N)$:

$$f^2 \geqslant N(p_1^2 + \cdots + p_N^2)(d_{x,p}f). \tag{2.15}$$

Используя признак сравнения, доказанный в лекции 12, получим следующую априорную оценку:

$$v(x) \leqslant \sup_{x\in\Gamma} v(x) \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \tag{2.16}$$

из которой следует оценка градиента решения:

$$|D_x u(x)| \leqslant \sup_{x\in\Gamma} |D_x u(x)| \quad \text{для} \quad x \in \Omega. \tag{2.17}$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. *Если для функции* $f(x,p,p_1,\ldots,p_N)\in\mathbb{C}^{(1)}(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$ *выполнено неравенство* (2.15), *то в классе функций* $u(x)\in\mathbb{C}^{(3)}(\Omega)$, *являющихся решениями уравнения* (2.1), *справедлива априорная оценка* (2.17).

Замечание. Теперь наша задача ослабить требование $u(x)\in\in\mathbb{C}^{(3)}(\Omega)$ теоремы 2.

Пусть $\varphi(x)\in\mathbb{C}_0^{(1)}(\Omega)$ — произвольная функция [1] и $u(x)\in\mathbb{C}^{(3)}(\Omega)$ — решение уравнения (2.1). Умножим обе части равенства (2.7) на функцию $\varphi(x)$ и проинтегрируем по частям по области Ω. Тогда получим следующее интегральное равенство:

$$\int\limits_{\Omega}(D_x v(x), D_x\varphi(x))\,dx+\int\limits_{\Omega}\left[-\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial v(x)}{\partial x_j}-2\,(d_{x,p}f)\,v(x)\right]\varphi(x)\,dx+$$
$$+\int\limits_{\Omega}2\sum_{j,k=1,1}^{N,N}\left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j\partial x_k}\right)^2\varphi(x)\,dx=0\quad\text{для}\quad\varphi(x)\in\mathbb{C}_0^{(1)}(\Omega).\qquad(2.18)$$

Докажем, что если равенство (2.18) справедливо для функций $u(x)\in\in\mathbb{C}^{(3)}(\Omega)$, то оно остается справедливым и для функций из класса $u(x)\in\mathbb{C}^{(2)}(\Omega)$. С этой целью рассмотрим последовательность функций $\{u_m(x)\}\subset\mathbb{C}^{(3)}(\Omega)$, которая в метрике пространства $\mathbb{C}^{(2)}(\Omega)$ аппроксимирует функцию $u(x)\in\mathbb{C}^{(3)}(\Omega)$, т.е. предположим, что для всякого компакта $D\subset\Omega$ имеет место сходимость:

$$D_x^{\beta}u_m(x)\rightrightarrows D^{\beta}u(x)\quad\text{равномерно на}\quad D\quad\text{при}\quad m\to+\infty,\qquad(2.19)$$

где $|\beta|\leqslant 2$. Применяя к функции $u_m(x)\in\mathbb{C}^{(3)}(\Omega)$ нелинейный оператор $L(\cdot)$ в правой части уравнения (2.1), получим равенство:

$$F_m(x):=L(u_m)(x),\qquad(2.20)$$

причем поскольку $L(u)(x)=0$, то имеем:

$$F_m(x)\rightrightarrows 0\quad\text{равномерно на}\quad D\quad\text{при}\quad m\to+\infty\qquad(2.21)$$

на любом компакте $D\subset\Omega$. Продифференцировав обе части равенства (2.20) по x_k и проделав все те же действия, что и при выводе интегрального равенства (2.18) для функции $u_m(x)\in\mathbb{C}^{(3)}(\Omega)$, получим интегральное равенство:

$$\int\limits_{\Omega}(D_x v_m(x), D_x\varphi(x))\,dx+$$

---

[1] т.е. функция класса $\mathbb{C}^{(1)}(\Omega)$ с компактным носителем.

$$+\int\limits_{\Omega}\left[-\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial v_m(x)}{\partial x_j}-2\,(d_{x,p}f)\,v_m(x)\right]\varphi(x)\,dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega}2\sum_{j,k=1,1}^{N,N}\left(\frac{\partial^2 u_m(x)}{\partial x_j\partial x_k}\right)^2\varphi(x)\,dx=$$

$$=\int\limits_{\Omega}F_m(x)\varphi_{x_k}(x)\,dx\quad\text{для}\quad\varphi(x)\in\mathbb{C}_0^{(1)}(\Omega),\qquad(2.22)$$

где $v_m(x)=|D_x u_m(x)|^2$. Пусть $\varphi(x)\in\mathbb{C}_0^{(1)}(\Omega)$ — произвольная фиксированная функция. Тогда найдется такой компакт $D\subset\Omega$, что $\operatorname{supp}\{\varphi\}\subset D$. Поэтому интегрирование в (2.22) фактически ведется по компакту D. Переходя к пределу при $m\to+\infty$ с учетом (2.19), (2.21) получим, что для решения $u(x)\in\mathbb{C}^{(2)}(\Omega)$ уравнения (2.1) выполнено равенство (2.18).

Теперь рассмотрим случай $\varphi(x)\geqslant 0$ и воспользуемся доказанным ранее неравенством (2.13) с целью получения следующего неравенства:

$$\int\limits_{\Omega}\left[(D_x v(x),D_x\varphi(x))-\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial v(x)}{\partial x_j}\varphi(x)\right]dx+$$

$$+2\int\limits_{\Omega}\left[\frac{f^2}{N}-(d_{x,p}f)\,v(x)\right]\varphi(x)\,dx\leqslant 0\quad\text{для}\quad\varphi(x)\in\mathbb{C}_0^{(1)}(\Omega),\qquad(2.23)$$

при $\varphi(x)\geqslant 0$ для всех $x\in\Omega$. Если выполнено неравенство (2.15), то из (2.23) следует неравенство:

$$\int\limits_{\Omega}\left[(D_x v(x),D_x\varphi(x))-\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial v(x)}{\partial x_j}\varphi(x)\right]dx\leqslant 0\qquad(2.24)$$

для всех $\varphi(x)\in\mathbb{C}_0^{(1)}(\Omega)$, причем $\varphi(x)\geqslant 0$ для всех $x\in\Omega$. Осталось воспользоваться принципом максимума для слабых решений, рассмотрение которого выходит за рамки настоящего курса лекций (см. [5]). Таким образом, справедлива следующая

Теорема 3. *Если для функции* $f(x,p,p_1,\ldots,p_N)\in\mathbb{C}^{(1)}(\Omega\times\mathbb{R}\times\times\mathbb{R}^N)$ *выполнено неравенство* (2.15), *то в классе функций* $u(x)\in\in\mathbb{C}^{(2)}(\Omega)\cap\mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$, *являющихся решениями уравнения* (2.1), *справедлива априорная оценка*:

$$\max_{x\in\overline{\Omega}}|D_x u(x)|=\max_{x\in\Gamma}|D_x u(x)|.\qquad(2.25)$$

§ 3. Оценки градиента решения на границе

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с границей $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha \in \in (0,1]$, причем все точки границы Γ обладают свойством *сферичности извне*.

Определение 3. *Точка $x_0 \in \Gamma$ обладает свойством сферичности извне, если существует такой шар $O(y,R)$ при $R > 0$, что выполнены свойства*:

$$\overline{O(y,R)} \cap \overline{\Omega} = \overline{O(y,R)} \cap \Gamma = \{x_0\}. \tag{3.1}$$

Рассмотрим функцию $\psi = \psi(d(x))$, где $\psi(d) \in \mathbb{C}^{(1)}[a,b]$ и $d(x) \in \in [a,b]$, причем $\psi'(d) \neq 0$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\Delta_x \psi(d(x)) = \operatorname{div}(D_x \psi(d(x))) = \operatorname{div}(\psi'(d) D_x d(x)) = \\ = \psi''(d) \left|D_x d(x)\right|^2 + \psi'(d) \Delta_x d(x), \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial \psi(d(x))}{\partial x_j} = \psi'(d) \frac{\partial d(x)}{\partial x_j} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left|D_x d(x)\right|^2 = \frac{1}{(\psi'(d))^2} \left|D_x \psi(d(x))\right|^2 = \frac{\mathcal{E}(\psi_{x_1}, \ldots, \psi_{x_N})}{(\psi'(d))^2}, \tag{3.3}$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(p_1, \ldots, p_N) := p_1^2 + \cdots + p_N^2. \tag{3.4}$$

Таким образом, из (3.2)—(3.4) получаем равенство:

$$\Delta_x \psi(d(x)) = \psi'(d) \Delta_x d(x) + \frac{\psi''(d)}{(\psi'(d))^2} \mathcal{E}. \tag{3.5}$$

Анализ формулы функции расстояния от точки до сферы. Пусть задана сфера $\partial O(y,R) \subset \mathbb{R}^N$ при $R > 0$ и произвольная точка $x \in \mathbb{R}^N$. Рассмотрим функцию

$$d(x) := \operatorname{distance}\{x, \partial O(y,R)\}. \tag{3.6}$$

Очевидно, что имеет место формула:

$$d(x) = |x - y| - R \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^N \backslash O(y,R). \tag{3.7}$$

Заметим, что можно доказать следующее неравенство:

$$\inf_{z \in \mathbb{R}^N \backslash O(0,1)} \max_{k=\overline{1,N}} \left|\frac{z_k}{|z|}\right| = \gamma > 0. \tag{3.8}$$

Тогда, с одной стороны, имеем

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^N\setminus O(y,R)} \max_{k=\overline{1,N}} \left|\frac{x_k-y_k}{|x-y|}\right| = \inf_{z\in\mathbb{R}^N\setminus O(0,1)} \max_{k=\overline{1,N}} \left|\frac{z_k}{|z|}\right|, \tag{3.9}$$

а с другой стороны, имеем

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^N\setminus O(y,R)} \max_{k=\overline{1,N}} \left|\frac{\partial d(x)}{\partial x_k}\right| = \inf_{x\in\mathbb{R}^N\setminus O(y,R)} \max_{k=\overline{1,N}} \left|\frac{x_k-y_k}{|x-y|}\right|, \tag{3.10}$$

поскольку

$$\frac{\partial d(x)}{\partial x_k} = \frac{x_k-y_k}{|x-y|} \quad \text{при} \quad x\neq y.$$

Таким образом, из (3.8)–(3.10) получаем, что

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^N\setminus O(y,R)} \max_{k=\overline{1,N}} \left|\frac{\partial d(x)}{\partial x_k}\right| = \gamma > 0, \tag{3.11}$$

где $\gamma > 0$ и от R и $y\in\mathbb{R}^N$ не зависит. Заметим, что для любого $k = \overline{1,N}$ справедливо равенство:

$$\frac{\partial\psi(d(x))}{\partial x_k} = \psi'(d)\frac{\partial d(x)}{\partial x_k}, \tag{3.12}$$

из которого с учетом (3.11) получаем оценку:

$$\begin{aligned}|\psi'(d)| = \min_{k=\overline{1,N}} \frac{\left|\dfrac{\partial\psi(d(x))}{\partial x_k}\right|}{\left|\dfrac{\partial d(x)}{\partial x_k}\right|} \leqslant \frac{\max\limits_{k=1,N}\left|\dfrac{\partial\psi(d(x))}{\partial x_k}\right|}{\max\limits_{k=\overline{1,N}}\left|\dfrac{\partial d(x)}{\partial x_k}\right|} \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\gamma}\max_{k=\overline{1,N}}\left|\frac{\partial\psi(d(x))}{\partial x_k}\right| \leqslant \frac{1}{\gamma}\,|D_x\psi| = \\ = \frac{(p_1^2+\dots+p_N^2)^{1/2}}{\gamma}, \quad p_k = \frac{\partial\psi}{\partial x_k}.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Заметим, что имеет место оценка:

$$\Delta_x d(x) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 d(x)}{\partial x_j^2} = \frac{N-1}{|x-y|} \leqslant \frac{N-1}{R} \quad \text{при} \quad x\in\mathbb{R}^N\setminus O(y,R). \tag{3.14}$$

Теперь перейдем к оценке градиента решения на границе в случае задачи Дирихле:

$$L(u) := \Delta u(x) + f(x,u(x),D_x u(x)) = 0 \quad \text{для} \quad x\in\Omega, \tag{3.15}$$

$$u(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in \Gamma, \tag{3.16}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с границей $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha \in (0, 1]$, причем функция $f(x, p, p_1, \ldots, p_N) \in \mathbb{C}^{(1)}(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$. Пусть $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$ — решение задачи (3.15), (3.16). Помимо оператора из (3.15) мы рассмотрим следующий оператор:

$$\overline{L}(v) := \Delta v(x) + f(x, u(x), D_x v(x)), \tag{3.17}$$

где $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$ — решение задачи (3.15), (3.16).

П р и з н а к с р а в н е н и я. Пусть $u_1(x), u_2(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{U})$ — это решение следующей задачи:

$$\overline{L}(u_1)(x) \geqslant \overline{L}(u_2)(x) \quad \text{для} \quad x \in U, \tag{3.18}$$

$$u_1(x) \leqslant u_2(x) \quad \text{для} \quad x \in \partial U, \tag{3.19}$$

где $U \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей ∂U. Рассмотрим разность этих решений $v(x) = u_1(x) - u_2(x)$, которая удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\Delta v(x) + \sum_{j=1}^{N} \overline{b}_j(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} \geqslant 0 \quad \text{для} \quad x \in U, \tag{3.20}$$

$$v(x) \leqslant 0 \quad \text{для} \quad x \in \partial U, \tag{3.21}$$

где использовалось следующее равенство:

$$f(x, u(x), D_x u_1(x)) - f(x, u(x), D_x u_2(x)) =$$
$$= \int_0^1 \frac{d}{ds} f(x, u(x), D_x u_s(x))\, ds = \sum_{j=1}^{N} \overline{b}_j(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_j}, \tag{3.22}$$

$$\overline{b}_j(x) := \int_0^1 \frac{\partial f(x, u(x), p_1, \ldots, p_N)}{\partial p_j}\, ds, \quad u_s = s u_1 + (1-s) u_2, \tag{3.23}$$

$$p_j := \frac{\partial u_s(x)}{\partial x_j}.$$

Стандартным образом из (3.20) и (3.21) получаем неравенство:

$$v(x) \leqslant 0 \quad \text{для} \quad x \in \overline{U} \Rightarrow u_1(x) \leqslant u_2(x) \quad \text{для} \quad x \in \overline{U}. \tag{3.24}$$

Предположим, что точка $x_0 \in \Gamma$ обладает свойством сферичности извне области Ω (см. определение 3) и $O(y, R) \subset \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}$ — шар из определения 3. Рассмотрим следующую сложную функцию:

$$w_+(x) := \psi(d(x)), \quad \psi(d) \in \mathbb{C}^{(2)}[0 + \infty), \quad \psi'(d) > 0, \tag{3.25}$$

где функция расстояния $d(x)$ от точки $x \in \mathbb{R}^N \backslash O(y,R)$ до сферы $\partial O(y,R)$ имеет явный вид (3.7), а явный вид функции $\psi(d)$ укажем ниже. Применяя нелинейный оператор $\overline{L}(\cdot)$ к функции $w_+(x)$ с учетом равенства (3.5) и неравенства (3.14) получим оценку:

$$\overline{L}\,(w_+) = \Delta_x \psi(d(x)) + f(x, u(x), D_x \psi(d(x))) =$$
$$= \psi'(d)\Delta_x d(x) + \frac{\psi''(d)}{(\psi'(d))^2}\left(p_1^2 + \cdots + p_N^2\right) + f(x, u, p_1, \ldots, p_N) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{N-1}{R\gamma}\left(p_1^2 + \cdots + p_N^2\right)^{1/2} + |f(x, u, p_1, \ldots, p_N)| +$$
$$+ \frac{\psi''(d)}{(\psi'(d))^2}\left(p_1^2 + \cdots + p_N^2\right), \quad p_k = \frac{\partial \psi(d(x))}{\partial x_k}. \quad (3.26)$$

Потребуем выполнения структурного условия на функцию $f(x, p, p_1, \ldots, p_N)$:

Условие 1. Пусть существует такая монотонно неубывающая, положительная функция $\mu = \mu(|p|)$, ограниченная на всяком компакте из $[0, +\infty)$, что выполнено неравенство:

$$\left(p_1^2 + \cdots + p_N^2\right)^{1/2} + |f(x, p, p_1, \ldots, p_N)| \leqslant$$
$$\leqslant \mu(|p|)\left(p_1^2 + \cdots + p_N^2\right) \quad \text{для} \quad (x, p, p_1, \ldots, p_N) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \quad (3.27)$$

таких, что

$$|p| \leqslant M, \quad \gamma\mu(M) \leqslant (p_1^2 + \cdots + p_N^2)^{1/2}, \quad (3.28)$$

где технический множитель $\gamma > 0$ определен равенством (3.8).

Замечание. Дополнительные условия (3.28) появились из-за того, что при $(p_1^2 + \cdots + p_N^2)^{1/2} \to +0$ из неравенства (3.27) следует, что

$$\mu(|p|) \geqslant \frac{1}{\left(p_1^2 + \cdots + p_N^2\right)^{1/2}} \to +\infty,$$

т. е. неравенства (3.28) есть близкие к необходимым условиям существования функции $\mu = \mu(|p|)$.

Заметим, что в неравенстве (3.26) фигурируют величины:

$$p = u(x), \quad p_k = \frac{\partial \psi(d(x))}{\partial x_k}, \quad k = \overline{1, N}.$$

Тогда в качестве постоянной $M > 0$ можно взять:

$$M := \sup_{x \in \Omega} |u(x)| \Rightarrow |u(x)| \leqslant M, \quad (3.29)$$

а для выполнения второго неравенства в (3.28) следует потребовать выполнения оценки снизу:

$$\psi'(d) \geqslant \mu(M) > 0. \quad (3.30)$$

Тогда справедлива следующая оценка снизу:

$$|p| \geqslant \max_{k=\overline{1,N}} |p_k| = \max_{k=\overline{1,N}} \left| \frac{\partial \psi(d(x))}{\partial x_k} \right| =$$
$$= |\psi'(d)| \max_{k=\overline{1,N}} \left| \frac{\partial d(x)}{\partial x_k} \right| \geqslant \psi'(d)\gamma \geqslant \gamma\mu(M). \quad (3.31)$$

С учетом неравенства (3.27) можно продолжить оценивать правую часть неравенства (3.26) и получить такую оценку:

$$\overline{L}\,(w_+) \leqslant \left(\frac{\psi''(d)}{(\psi'(d))^2} + \nu \right) \left(p_1^2 + \cdots + p_N^2 \right), \quad (3.32)$$

$$\nu := \left(1 + \frac{N-1}{\gamma R} \right) \mu(M), \quad M := \max_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

Рассмотрим явно заданную функцию $\psi = \psi(d)$:

$$\psi(d) := \frac{1}{\nu} \ln\left(1 + kd\right), \quad k > 0. \quad (3.33)$$

Заметим, что эта функция удовлетворяет следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\psi''(d) = -\nu(\psi'(d))^2, \quad d \geqslant 0. \quad (3.34)$$

Кроме того, выберем числа $a > 0$ и $k > 0$ следующим образом:

$$M = \frac{1}{\nu} \ln(1 + ka) \Rightarrow \psi(a) = M. \quad (3.35)$$

Тогда имеем:

$$\psi'(d) = \frac{k}{\nu(1+kd)} \geqslant \frac{k}{\nu(1+ka)} =$$
$$= \frac{k}{\nu \exp(\nu M)} = \mu(M) \quad \text{для} \quad 0 < a \leqslant d \quad (3.36)$$

при выполнении равенства:

$$k = \nu\mu(M)\exp(\nu M). \quad (3.37)$$

Легко проверить, что соотношения (3.35) и (3.37) совместны. Теперь рассмотрим следующее открытое множество:

$$U(x_0, a) := \{x \in \Omega : \ d(x) < a\}. \quad (3.38)$$

Тогда, с одной стороны, функция $w_+(x)$, определенная равенством (3.25), где функция $d(x)$ определена равенством (3.33), удовлетворяет дифференциальному неравенству:

$$\overline{L}\,(w_+)\,(x) \leqslant 0 \quad \text{для} \quad x \in U(x_0, a). \tag{3.39}$$

Действительно, это следует из уравнения (3.34) и неравенства (3.36). Заметим, что

$$\partial U(x_0, a) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad \Gamma_1 \subset \partial O(y, R + a), \quad \Gamma_2 \subset \Gamma. \tag{3.40}$$

При этом в силу (3.35) имеем:

$$w_+(x) = \frac{1}{\nu} \ln (1 + ka) = M \quad \text{для} \quad x \in \Gamma_1, \tag{3.41}$$

$$w_+(x) > 0 \quad \text{для} \quad x \in \Gamma_2 \backslash \{x_0\}, \quad w_+(x_0) = \frac{1}{\nu} \ln (1 + k0) = 0, \tag{3.42}$$

поскольку $x_0 \in \partial O(y, R)$ и поэтому $d(x_0) = 0$. С другой стороны, решение $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$ задачи Дирихле (3.15), (3.16) является решением следующей задачи:

$$\overline{L}(u) = 0 \quad \text{для} \quad x \in U(x_0, a), \tag{3.43}$$

$$u(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in \Gamma_2, \quad u(x) \leqslant M \quad \text{для} \quad x \in \Gamma_1. \tag{3.44}$$

Путем сравнения (3.39)–(3.42) с (3.43), (3.44) и с учетом признака сравнения из лекции 12 приходим к выводу о том, что

$$u(x) \leqslant w_+(x) \quad \text{для} \quad x \in \overline{U(x_0, a)}. \tag{3.45}$$

Рассмотрим барьер:

$$w_-(x) = -w_+(x) = -\frac{1}{\nu} \ln (1 + kd(x))\,, \tag{3.46}$$

для которого имеет место дифференциальное неравенство:

$$\begin{aligned}
\overline{L}\,(w_-) &= -\Delta_x \psi(d(x)) + f(x, u(x), -D_x \psi(d(x))) = \\
&= -\psi'(d)\Delta_x d(x) - \frac{\psi''(d)}{(\psi'(d))^2} \left(p_1^2 + \cdots + p_N^2\right) + f(x, u, -p_1, \ldots, -p_N) \geqslant \\
&\geqslant -\frac{N-1}{R\gamma} \left(p_1^2 + \cdots + p_N^2\right)^{1/2} - |f(x, u, -p_1, \ldots, -p_N)| - \\
&- \frac{\psi''(d)}{(\psi'(d))^2} \left(p_1^2 + \cdots + p_N^2\right), \quad p_k = \frac{\partial \psi(d(x))}{\partial x_k}.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Пусть выполнено

Условие 2. Существует такая монотонно неубывающая положительная функция $\mu = \mu(|p|)$, ограниченная на всяком компакте из $[0, + +\infty)$, что выполнено неравенство:

$$\left(p_1^2 + \dots + p_N^2\right)^{1/2} + |f(x, p, -p_1, \dots, -p_N)| \leqslant$$
$$\leqslant \mu(|p|)\left(p_1^2 + \dots + p_N^2\right) \quad \text{для} \quad (x, p, p_1, \dots, p_N) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \tag{3.48}$$

таких, что
$$|p| \leqslant M, \quad \gamma\mu(M) \leqslant (p_1^2 + \dots + p_N^2)^{1/2}, \tag{3.49}$$

где множитель $\gamma > 0$ определен равенством (3.8).

Замечание. Условие 2 получается из условия 1 при помощи замены $p_k \to -p_k$ и условие 1 получается из условия 2 той же заменой. Значит, эти условия эквивалентны.

По аналогии с получением неравенства (3.39) приходим к следующему неравенству:

$$\overline{L}\,(w_-)\,(x) \geqslant 0 \quad \text{для} \quad x \in U(x_0, a), \tag{3.50}$$

а также справедливы соотношения:

$$w_-(x) = -\frac{1}{\nu}\ln(1 + ka) = -M \quad \text{для} \quad x \in \Gamma_1, \tag{3.51}$$

$$w_-(x) < 0 \quad \text{для} \quad x \in \Gamma_2 \backslash \{x_0\}, \quad w_-(x_0) = \frac{1}{\nu}\ln(1 + k0) = 0. \tag{3.52}$$

Путем сравнения задач (3.50)–(3.52) и (3.43), (3.44) и с учетом признака сравнения из лекции 12, приходим к неравенству:

$$w_-(x) \leqslant u(x) \quad \text{для} \quad x \in \overline{U(x_0, a)}. \tag{3.53}$$

Следовательно, из (3.45) и (3.47) получаем двустороннее неравенство:

$$w_-(x) \leqslant u(x) \leqslant w_+(x) \quad \text{для} \quad x \in \overline{U(x_0, a)}, \tag{3.54}$$

$$w_-(x_0) = u(x_0) = w_+(x_0) = 0, \tag{3.55}$$

из которого в свою очередь имеем:

$$\frac{w_-(x) - w_-(x_0)}{|x - x_0|} \leqslant \frac{u(x) - u(x_0)}{|x - x_0|} \leqslant \frac{w_+(x) - w_+(x_0)}{|x - x_0|} \tag{3.56}$$

для $x \in \overline{U(x_0, a)}$. Рассмотрим два случая:

$$|D_x u(x_0)| = 0 \quad \text{и} \quad |D_x u(x_0)| > 0.$$

Во втором случае определено векторное поле:

$$\mathbf{n}_{x_0} := \pm \frac{D_x u(x_0)}{|D_x u(x_0)|} \quad \text{для} \quad x_0 \in \Gamma, \tag{3.57}$$

знак в котором выбирается таким образом, чтобы направление градиента $\mathbf{n}_{x_0}$ было внутренним по отношению к области Ω. Тогда можно вычислить производные по *внутреннему направлению* $\mathbf{n}_{x_0}$ функций $w_\pm(x)$. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\left.\frac{\partial w_\pm(x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right|_{x=x_0} := \lim_{\lambda \to +0} \frac{w_\pm(x_0 + \lambda \mathbf{n}_{x_0}) - w_\pm(x_0)}{\lambda}, \quad \lambda = |x - x_0|. \tag{3.58}$$

Следовательно,

$$\left.\frac{\partial w_\pm(x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right|_{x=x_0} = \pm \left(\mathbf{n}_{x_0}, D_x\right) \psi(d(x))\Big|_{x=x_0} =$$

$$= \pm \frac{k}{\nu} \frac{1}{1 + kd(x_0)} \left(\mathbf{n}_{x_0}, D_x\right) d(x)\Big|_{x=x_0} = \pm \frac{k}{\nu} \frac{(\mathbf{n}_{x_0}, x_0 - y)}{|x_0 - y|}, \tag{3.59}$$

причем справедливы следующие оценки:

$$\left.\frac{\partial w_+(x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right|_{x=x_0} \leqslant \frac{k}{\nu} \left| \frac{(\mathbf{n}_{x_0}, x_0 - y)}{|x_0 - y|} \right| \leqslant \frac{k}{\nu}, \tag{3.60}$$

$$\left.\frac{\partial w_-(x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right|_{x=x_0} \geqslant -\frac{k}{\nu} \left| \frac{(\mathbf{n}_{x_0}, x_0 - y)}{|x_0 - y|} \right| \geqslant -\frac{k}{\nu}. \tag{3.61}$$

Из (3.56) с учетом неравенств (3.58)–(3.61) получаем неравенства:

$$-\frac{k}{\nu} \leqslant \left.\frac{\partial w_-(x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right|_{x=x_0} \leqslant \left.\frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right|_{x=x_0} \leqslant \left.\frac{\partial w_+(x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right|_{x=x_0} \leqslant \frac{k}{\nu}, \tag{3.62}$$

$$|D_x u(x_0)| = |(\mathbf{n}_{x_0}, D_x u(x_0))| = \left| \left.\frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right|_{x=x_0} \right| \leqslant \frac{k}{\nu}. \tag{3.63}$$

З а м е ч а н и е. Решение $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$ задачи Дирихле (3.15), (3.16) в силу граничного условия (3.16) задает уравнением $u(x) = 0$, в частности, поверхность $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$. Поэтому в невырожденных точках $x_0 \in \Gamma$ границы направление градиента

$$\mathbf{n}_{x_0} = \pm \frac{D_x u(x_0)}{|D_x u(x_0)|} \tag{3.64}$$

есть ни что иное, как вектор нормали в точке x_0 поверхности Γ, т. е. направление $\mathbf{n}_{x_0}$ никогда не может быть *касательным к поверхности*

Г. Поэтому поводу смотри лемму 1 из лекции 7. При выборе надлежащего знака в равенстве (3.64) получаем *внутреннее направление* и рассуждения при выводе (3.62) верны.

Таким образом, и в случае $|D_x u(x_0)| = 0$, и в случае $|D_x u(x_0)| > 0$ получаем оценку:

$$|D_x u(x_0)| \leqslant \frac{k}{\nu} = \mu(M)\exp(\nu M), \tag{3.65}$$

$$M := \sup_{x\in\Omega}|u(x)|, \quad \nu := \left(1 + \frac{N-1}{\gamma R}\right)\mu(M), \tag{3.66}$$

где использовалось равенство (3.37). Теперь сделаем еще одно предположение относительно границы области Г.

Определение 4. *Будем говорить, что граница Γ области Ω обладает свойством равномерной сферичности извне, если всякая точка $x_0 \in \Gamma$ обладает свойством сферичности извне, причем для радиуса $R > 0$ соответствующего шара $O(y, R)$ выполнено неравенство: $R \geqslant R_0(\Gamma) > 0$.*

Тогда из (3.65) приходим к оценке:

$$\max_{x\in\Gamma}|D_x u(x)| \leqslant \mu(M)\exp(\nu_0 M), \tag{3.67}$$

$$M := \sup_{x\in\Omega}|u(x)|, \quad \nu_0 := \left(1 + \frac{N-1}{\gamma R_0}\right)\mu(M). \tag{3.68}$$

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 4. *Для любого решения $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$ задачи Дирихле* (3.15), (3.16) *при выполнении условий* (3.27), (3.28) *и условия равномерной сферичности извне границы Γ имеет место граничная оценка градиента решения* (3.67).

В заключение параграфа рассмотрим следующую неоднородную задачу Дирихле:

$$L(u) := \Delta u(x) + f(x, u(x), D_x u(x)) \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \tag{3.69}$$

$$u(x) = \varphi(x) \quad \text{для} \quad x \in \Gamma \tag{3.70}$$

при тех же, что и ранее, условиях на ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Предположим, что функция $\varphi(x)$ допускает продолжение такое, что $\varphi(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega})$. Сделаем замену $\overline{u}(x) = u(x) - \varphi(x)$ в задаче (3.69), (3.70):

$$Q(\overline{u}) := \Delta\overline{u}(x) + \overline{f}(x, \overline{u}(x), D_x\overline{u}(x)) \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \tag{3.71}$$

$$\overline{u}(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in \Gamma, \tag{3.72}$$

$$\overline{f}(x, \overline{u}(x), D_x\overline{u}(x)) :=$$
$$:= f(x, \overline{u}(x) + \varphi(x), D_x\overline{u}(x) + D_x\varphi(x)) - \Delta\varphi(x). \quad (3.73)$$

Тогда структурные условия на функцию $\overline{f}(x, \overline{u}(x), D_x\overline{u}(x))$ примут следующий вид:

Условие 3. Существует такая монотонно неубывающая, положительная функция $\mu = \mu(|q|)$, ограниченная на всяком компакте из $[0, +\infty)$, что выполнено неравенство:

$$\left(q_1^2 + \dots + q_N^2\right)^{1/2} + |\overline{f}(x, q, q_1, \dots, q_N)| \leqslant$$
$$\leqslant \mu(|q|)\left(q_1^2 + \dots + q_N^2\right) \quad \text{для} \quad (x, q, q_1, \dots, q_N) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \quad (3.74)$$

таких, что

$$|q| \leqslant M, \quad \gamma\mu(M) \leqslant (q_1^2 + \dots + q_N^2)^{1/2}, \quad (3.75)$$

где множитель $\gamma > 0$ определен равенством (3.8), причем

$$q = p - \varphi, \quad q_k = p_k - D_{x_k}\varphi.$$

Это структурное условие можно усилить:

Условие 4. Существует такая монотонно неубывающая, положительная функция $\mu = \mu(|q|)$, ограниченная на всяком компакте из $[0, +\infty)$, что выполнено неравенство:

$$\left(q_1^2 + \dots + q_N^2\right)^{1/2} + \sup_{x\in\Omega}|\Delta\varphi(x)| +$$
$$+ |f(x, q + \varphi, q_1 + D_{x_1}\varphi, \dots, q_N + D_{x_N}\varphi)| \leqslant$$
$$\leqslant \mu(|q|)\left(q_1^2 + \dots + q_N^2\right) \quad (3.76)$$

для $(x, q, q_1, \dots, q_N) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ таких, что

$$|q| \leqslant M, \quad \gamma\mu(M) \leqslant (q_1^2 + \dots + q_N^2)^{1/2}, \quad (3.77)$$

где множитель $\gamma > 0$ определен равенством (3.8).

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 5. *Для любого решения* $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$ *задачи Дирихле* (3.69), (3.70) *при выполнении условий* (3.76), (3.77) *и условия равномерной сферичности извне границы* Γ *имеет место граничная оценка градиента решения*:

$$\sup_{x\in\Gamma}|D_x u(x)| \leqslant \sup_{x\in\Gamma}|D_x\varphi(x)| + \mu(M)\exp(\nu_0 M), \quad (3.78)$$

$$M := \sup_{x\in\Omega}|u(x)| + \sup_{x\in\Omega}|\varphi(x)|, \quad \nu_0 := \left(1 + \frac{N-1}{\gamma R_0}\right)\mu(M).$$

§ 4. Литературные указания

Материал для лекции взят из работы [5].

Тематическая лекция V

СЛАБЫЕ РЕШЕНИЯ

Лекция 20

ПРОСТРАНСТВА С. Л. СОБОЛЕВА

В этой лекции определим слабую производную и изучим пространства С. Л. Соболева.

§ 1. Слабая производная

Напомним определение пространств Лебега $L^p_{loc}(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это открытое множество.

Определение 1. *Функция $u(x) \in L^p_{loc}(\Omega)$ при $p \geqslant 1$, если для всякого компакта* [1] $K \subset \Omega$ *измеримая на Ω функция $u(x) \in L^p(K)$.*

Определим слабую производную.

Определение 2. *Функция $v(x) \in L^p_{loc}(\Omega)$ называется слабой производной ∂^α_x функции $u(x) \in L^p_{loc}(\Omega)$ и пишем*

$$v(x) = \partial^\alpha u(x),$$

если для всякой функции $\varphi(x) \in \mathbb{C}^\infty_0(\Omega)$ имеет место равенство:

$$(-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega u(x)\partial^\alpha_x \varphi(x)\, dx = \int\limits_\Omega v(x)\varphi(x)\, dx. \tag{1.1}$$

Справедлива следующая

Лемма 1. *Слабая частная производная ∂^α_x порядка α функции u, если существует, то определяется единственным образом с точностью до множества меры нуль.*

Доказательство.

Пусть $v_1, v_2 \in L^p_{loc}(\Omega)$ такие, что

$$\int\limits_\Omega u\partial^\alpha_x \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega v_1 \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega v_2 \varphi\, dx$$

для всех $\varphi \in \mathbb{C}^\infty_0(\Omega)$. Тогда

$$\int\limits_\Omega (v_1 - v_2)\, \varphi(x)\, dx = 0$$

---

[1] т. е. ограниченное и замкнутое множество в $\mathbb{R}^N$.

для всех $\varphi \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$. Следовательно, $v_1 - v_2 = 0$ почти всюду.

Теорема доказана.

ПРИМЕР 1. Пусть $\Omega = (0, 2)$,

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

Определим

$$v(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

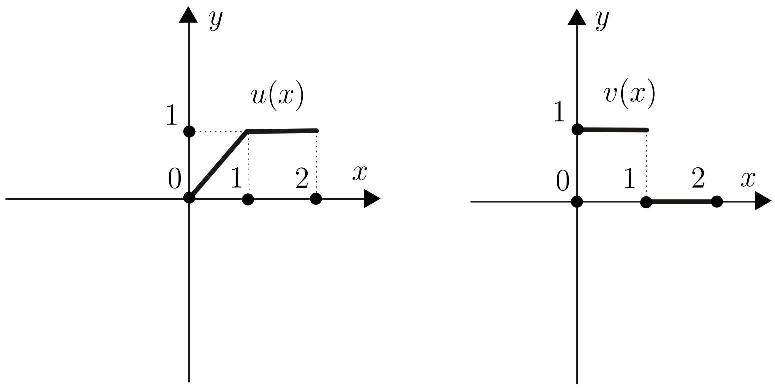


Рис. 41. Слабая производная $v(x)$ функции $u(x)$

Покажем, что $u' = v$ в слабом смысле. Чтобы убедиться в этом, выберем произвольную $\varphi \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$. Покажем, что

$$\int_0^2 u\varphi'\,dx = -\int_0^2 v\varphi\,dx.$$

Легко вычислить, что

$$\int_0^2 u\varphi'\,dx = \int_0^1 x\varphi'\,dx + \int_1^2 \varphi'\,dx = x\varphi(x)\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \varphi\,dx + \varphi(x)\Big|_{x=1}^{x=2} =$$

$$= -\int_0^1 \varphi\,dx + \varphi(1) - \varphi(1) = -\int_0^2 v\varphi\,dx,$$

где используется то, что

$$\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(0, 2) \Rightarrow \varphi(0) = \varphi(2) = 0.$$

П Р И М Е Р 2. Пусть $\Omega = (0, 2)$,

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 2, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

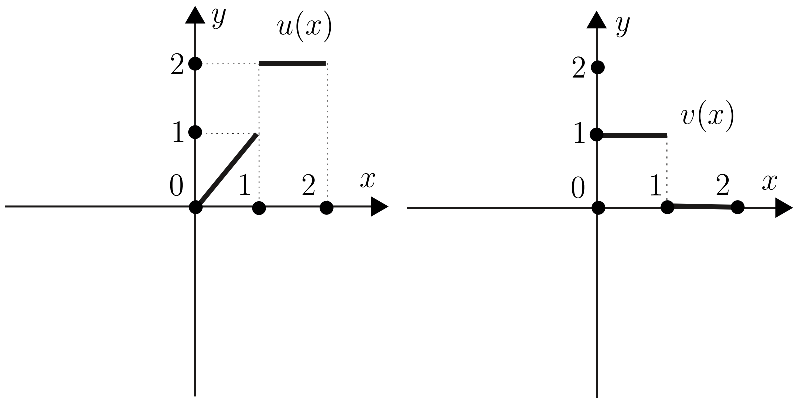


Рис. 42. Отсутствие слабой производной $v(x)$ функции $u(x)$

Покажем, что производная u' не существует в слабом смысле. Для этого достаточно показать, что не существует функции $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ такой, что

$$\int_0^2 u\varphi'\,dx = -\int_0^2 v\varphi\,dx \tag{1.2}$$

для всех $\varphi \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$.

Предположим противное. Пусть (1.2) выполняется для некоторой функции $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ и всех функций $\varphi \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$. Тогда

$$-\int_0^2 v\varphi\,dx = \int_0^2 u\varphi'\,dx = \int_0^1 x\varphi'\,dx + 2\int_1^2 \varphi'\,dx =$$
$$= x\varphi(x)\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \varphi\,dx + 2\varphi(x)\Big|_{x=1}^{x=2} = -\int_0^1 \varphi\,dx - \varphi(1), \tag{1.3}$$

где используется то, что $\varphi(0) = \varphi(2) = 0$. Выберем последовательность $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ гладких функций таким образом, чтобы

$$0 \leqslant \varphi_m \leqslant 1, \quad \varphi_m(1) = 1, \quad \varphi_m \to 0 \quad \text{для всех} \quad x \neq 1.$$

Заменив φ на φ_m в (1.3) и полагая $m \to +\infty$, в силу теоремы Лебега о предельном переходе получим предельное равенство:

$$1 = \lim_{m \to +\infty} \varphi_m(1) = \lim_{m \to +\infty} \left[\int_0^2 v\varphi_m \, dx - \int_0^1 \varphi_m \, dx \right] = 0,$$

которое противоречиво.

Справедливы следующие формулы для слабых производных, которые оформлены в виде двух лемм.

Лемма 2. *Пусть функции $u(x), v(x) \in L^p_{loc}(\Omega)$ имеют слабые производные $\partial_x u(x), \partial_x v(x) \in L^p_{loc}(\Omega)$ и граница Γ области Ω достаточно гладкая. Тогда справедлива следующая формула*:

$$\partial_x(uv) = u\partial_x v + v\partial_x u \;^{1)}, \tag{1.4}$$

понимаемая в слабом смысле, т. е. для любой функции $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$ имеет место равенство:

$$-\int_\Omega u(x)v(x)\partial_x\varphi(x)\,dx = \int_\Omega u(x)\partial_x v(x)\varphi(x)\,dx + \int_\Omega v(x)\partial_x u(x)\varphi(x)\,dx.$$

Лемма 3. *Пусть функции $f(t) \in \mathbb{C}^1\left(\mathbb{R}^1\right)$ и $f'(t) \in L^\infty\left(\mathbb{R}^1\right)$, а функция $u(x) \in L^p_{loc}(\Omega)$ имеет слабую производную $\partial_x u(x) \in L^p_{loc}(\Omega)$. Тогда справедлива следующая формула слабой производной сложной функции*:

$$\partial_x f(u)(x) = f'(u)\partial_x u(x) \;^{2)}. \tag{1.5}$$

Замечание. Заметим, что формально условиям леммы 3 не удовлетворяет сложная функция

$$f = f(t) = t^n, \quad f(u(x)) = u^n(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

но тем не менее

$$\partial_x f(u(x)) = f^{'}(t)\Big|_{t=u(x)} \partial_x u(x),$$

если существует слабая производная $\partial_x u(x) \in L^p_{loc}(\Omega)$ функции $u(x) \in \in L^p_{loc}(\Omega)$. Действительно, достаточно $(n-1)$–раз применить формулу слабой производной произведения функций (1.4).

---

[1] Символом ∂_x мы обозначаем какую–либо частную производную $\partial/\partial x_k$ при $k \in \overline{1, N}$.

[2] Символом ∂_x мы обозначаенм какую–либо частную производную ∂_{x_k} при $k = \overline{1, N}$.

§ 2. Пространства С. Л. Соболева $H^1(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$

В этом параграфе рассмотрим следующие вещественные пространства С. Л. Соболева:

$$H_0^1(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} W_0^{1,2}(\Omega), \quad H^1(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} W^{1,2}(\Omega),$$

$$H^{-1}(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} W^{-1,2}(\Omega) = (W_0^{1,2}(\Omega))^*.$$

Определим пространства Соболева $H^1(\Omega)$.

Определение 3. *Функция $u(x) \in H^1(\Omega)$, если $u(x) \in L^2(\Omega)$, а ее слабые частные производные $v_i(x) = \partial_{x_i} u(x) \in L^2(\Omega)$ при всех $i = \overline{1, N}$, причем это пространство банахово относительно нормы* [1]:

$$\|u\| \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int\limits_{\Omega} \left[|u(x)|^2 + \sum_{i=1}^{N} |v_i(x)|^2 \right] dx \right)^{1/2}.$$

Определим пространство Соболева $H_0^1(\Omega)$.

Определение 4. *Пополнение векторного пространства $\mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$ по норме банахового пространства $H^1(\Omega)$ называется банаховым пространством $H_0^1(\Omega)$.*

Замечание. Отметим, что нормой на векторном пространстве $\mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$ является также величина:

$$\||D_x u|\|_2, \quad D_x = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N}),$$

где ∂_{x_k} — это соответствующие слабые частные производные по переменной x_k. Если рассмотреть пополнение $\mathbb{C}_0^\infty$, то получим банахово пространство $\mathcal{D}^{1,2}(\Omega)$ относительно указанной нормы. Как было доказано в 10-й Лекции–Семинаре [2] в силу неравенства Фридрихса

$$\|u\|_2 \leqslant c_1 \||D_x u|\|_2 \quad \text{для всех} \quad u(x) \in H_0^1(\Omega)$$

это пространство совпадает с банаховым пространством $H_0^1(\Omega)$.

Далее мы изучим свойства пространства $H^{-1}(\Omega)$ сопряженного к банаховому пространству $H_0^1(\Omega)$. Введем следующие обозначения:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}^1$$

— это скобки двойственности между $H_0^1(\Omega)$ и

$$H^{-1}(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} (H_0^1(\Omega))^*;$$

---

[1] Это согласуется с определением слабой производной, поскольку $L^2(\Omega) \subset L^2_{loc}(\Omega)$.

[2] Линейный и нелинейный функциональный анализ. Том II. М. О. Корпусова и А. А. Панина

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_1 : (H^1(\Omega))^* \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}^1$$

— это скобки двойственности между $H^1(\Omega)$ и $(H^1(\Omega))^*$.

Рассмотрим эллиптический оператор L, определённый следующей формулой:

$$Lu(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)u(x). \quad (2.1)$$

Пусть $a_{ij}(x), b_i(x), c(x) \in L^\infty(\Omega)$, причем частные производные

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{при} \quad j = \overline{1, N}$$

в слагаемом

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right)$$

понимается в слабом смысле (точнее из $L^2(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$). Тогда при $u(x) \in H^1_0(\Omega)$ имеем:

$$a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(\Omega). \quad (2.2)$$

Теперь введем функционал, порождаемый функцией $f(x) \in L^2(\Omega)$, обозначаемый так же как и частная производная

$$\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

причем это не слабая производная, а производная регулярной обобщенной функции, порожденной функцией $f(x) \in L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ и стандартно определяемой формулой:

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} -\int\limits_D f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx, \quad \varphi(x) \in H^1_0(\Omega). \quad (2.3)$$

В частности,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$$

— это слабая производная функции $\varphi(x) \in H^1_0(\Omega)$.

З а м е ч а н и е. Отметим, что величина

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

не является слабой производной, поскольку $f(x) \notin H^1_0(\Omega)$, а всего лишь $f(x) \in L^2(\Omega)$.

Лемма 4. *Функционал* (2.3) *является линейным и непрерывным в сильной топологии пространства* $H^1_0(\Omega)$. *Иначе говоря*,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \in H^{-1}(\Omega). \tag{2.4}$$

Доказательство.

Действительно, для любой последовательности $\{\varphi_m\} \subset H^1_0(\Omega)$ такой, что

$$\varphi_m \to \varphi \quad \text{сильно в} \quad H^1_0(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty$$

имеем, в частности,

$$\| |D_x \varphi_m - D_x \varphi| \|_2 \to +0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Следовательно,

$$\left| \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi_m - \varphi \right\rangle \right| \leqslant \int\limits_D |D_x \varphi_m - D_x \varphi| \, |f(x)| \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_D |D_x \varphi_m - D_x \varphi|^2 \, dx \right)^2 \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^2 \, dx \right)^2 \to +0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Стало быть, равенством

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} -\int\limits_\Omega f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx$$

определен линейный и непрерывный функционал

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{над пространством} \quad H^1_0(\Omega) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \left(H^1_0(\Omega)\right)^* = H^{-1}(\Omega).$$

Лемма доказана.

Справедливо следующее важное утверждение:

Лемма 5. *Всякий функционал над банаховым пространством* $H^1(\Omega)$ *порождается функциями* $f_j(x) \in L^2(\Omega)$ *при* $j = \overline{0, N}$ *по формуле*:

$$\langle f^*, \varphi \rangle_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^N \int\limits_\Omega f_j(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} \, dx + \int\limits_\Omega f_0(x) \varphi(x) \, dx, \tag{2.5}$$

причем для некоторого однозначно определенного элемента $g(x) \in H^1(\Omega)$ *имеет место равенство в слабом смысле*:

$$f_j(x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x_j}, \quad f_0(x) = g(x).$$

Доказательство.

Шаг 1. Действительно, пространство $H^1(\Omega)$ является гильбертовым относительно скалярного произведения:

$$(g(x), \varphi(x))_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{N} \int_{\Omega} \frac{\partial g(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\, dx + \int_{\Omega} g(x)\varphi(x)\, dx$$

для всех $\varphi(x), g(x) \in H^1(\Omega)$. С другой стороны, для всякого элемента $f^*(x) \in \left(H^1(\Omega)\right)^*$ согласно теореме Рисса–Фреше найдется такой единственный элемент $g(x) \in H^1(\Omega)$, что имеет место равенство:

$$\langle f^*, \varphi\rangle = (g(x), \varphi(x))_1 = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Omega} f_j(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\, dx + \int_{\Omega} g(x)\varphi(x)\, dx,$$

где

$$f_j(x) = \frac{\partial g}{\partial x_j} \in L^2(\Omega), \quad j = \overline{1, N}.$$

Шаг 2. Наконец, для всякой последовательности $\{\varphi_m\} \subset H^1(\Omega)$ такой, что

$$\varphi_m(x) \to \varphi(x) \quad \text{сильно в} \quad H^1(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty$$

имеем

$$\|\varphi_m - \varphi\|_2 \to +0, \quad \||D_x\varphi_m - D_x\varphi|\|_2 \to +0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Поэтому

$$\left|\int_{\Omega} f_j(x) \left[\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial \varphi_m(x)}{\partial x_j}\right] dx\right| \leqslant \\ \leqslant \left(\int_{\Omega} \left|\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial \varphi_m(x)}{\partial x_j}\right|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} f_j^2(x)\, dx\right)^{1/2} \to +0,$$

$$\left|\int_{\Omega} g(x)[\varphi_m(x) - \varphi(x)]\, dx\right| \leqslant \\ \leqslant \left(\int_{\Omega} |\varphi_m(x) - \varphi(x)|^2\, dx\right)^2 \left(\int_{\Omega} |g(x)|^2\, dx\right)^2 \to +0$$

при $m \to +\infty$. Следовательно, формулой (2.5) задается линейный и непрерывный функционал над пространством $H^1(\Omega)$.

Лемма доказана.

Следствие 1. *Для всякого элемента $f^* \in H^{-1}(\Omega)$ найдется такой единственный элемент $g(x) \in H_0^1(\Omega)$, что имеет место явное представление*:

$$\langle f^*, \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{\Omega} f_j(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\, dx, \quad f_j(x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x_j}, \quad g(x) \in H_0^1(\Omega) \quad (2.6)$$

для всех $\varphi(x) \in H_0^1(\Omega)$.

Следствие 2. *Множество $H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^*$ всех линейных и непрерывных функционалов над банаховым пространством $H_0^1(\Omega)$, является банаховым относительно нормы* [1]:

$$\|f^*\|_{1*} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\||D_x\varphi|\|_2 = 1} \left| \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{\Omega} f_j^*(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\, dx \right|,$$

где

$$f_j^*(x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x_j}, \quad j = \overline{0, N}.$$

Пространство $\bigl(H^1(\Omega)\bigr)^*$ является банаховым относительно нормы:

$$\|f^{1*}\|_* \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\left(\||D_x\varphi|\|_2^2 + \|\varphi\|_2^2\right)^{1/2} = 1} \left| \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{\Omega} f_j^*(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\, dx + \int\limits_{\Omega} f_0(x)\varphi(x)\, dx \right|,$$

где

$$f_j^*(x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x_j}, \quad f_0(x) = g(x), \quad g(x) \in H^1(\Omega), \quad j = \overline{0, N}.$$

Справедлива следующая лемма:

Лемма 6. *Имеют место следующие равенства*:

$$\|f^*\|_{1*} = \sup_{\left(\|\varphi\|_2^2 + \||D_x\varphi|\|_2^2\right)^{1/2} = 1} |\langle f^*, \varphi \rangle_1| = \left(\|g\|_2^2 + \||D_x g|\|_2^2\right)^{1/2}, \quad g(x) \in H^1(\Omega) \quad (2.7)$$

для любого $f^*(x) \in (H^1(\Omega))^*$ и для всех $\varphi(x) \in H^1(\Omega)$;

$$\|f^*\|_* = \sup_{\||D_x\varphi|\|_2 = 1} |\langle f^*, \varphi \rangle| = \||D_x g|\|_2, \quad g(x) \in H_0^1(\Omega) \quad (2.8)$$

для любого $f^*(x) \in H^{-1}(\Omega)$ и для всех $\varphi(x) \in H_0^1(\Omega)$.

[1] Стандартная $*$–норма.

Доказательство.

Докажем, например, равенство (2.7). Действительно, во–первых, имеет место следующее неравенство:

$$\|f^*\|_{1*} \leqslant \sup_{\left(\|\varphi\|_2^2+\|D_x\varphi\|_2^2\right)^{1/2}=1} \left[\sum_{j=1}^{N}\|\partial_j g\|_2\|\partial_j\varphi\|_2 + \|g\|_2\|\varphi\|_2\right]. \qquad (2.9)$$

Во вторых, заметим, что имеет место следующее неравенство:

$$\left(\sum_{j=1}^{N} a_j^{1/2}b_j^{1/2} + a_0^{1/2}b_0^{1/2}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{N} a_j + a_0\right)\left(\sum_{j=1}^{N} b_j + b_0\right)$$

для всех $a_j \geqslant 0$, $b_j \geqslant 0$ при $j = \overline{0, N}$. Поэтому мы из (2.9) мы получим следующее неравенство:

$$\|f^*\|_{1*} \leqslant \sup_{\left(\|\varphi\|_2^2+\||D_x\varphi|\|_2^2\right)^{1/2}=1} \left(\||D_x g|\|_2^2 + \|g\|_2^2\right)^{1/2}\left(\||D_x\varphi|\|_2^2 + \|\varphi\|_2^2\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\||D_x g|\|_2^2 + \|g\|_2^2\right)^{1/2}.$$

С другой стороны, заметим, что имеет место неравенство снизу:

$$\|f^*\|_{1*} \geqslant \left|\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial g(x)}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}\,dx + \int\limits_{\Omega} g(x)\varphi(x)\,dx\right|$$

для всех $\left(\|\varphi\|_2^2 + \||D_x\varphi|\|_2^2\right)^{1/2} = 1$. Возьмем в этом неравенстве

$$\varphi(x) = \frac{g(x)}{\left(\||D_x g|\|_2^2 + \|g\|_2^2\right)^{1/2}}$$

и получим оценку снизу:

$$\|f^*\|_{1*} \geqslant \left(\||D_x g|\|_2^2 + \|g\|_2^2\right)^{1/2}.$$

Равенство (2.7) доказано.

Лемма доказана.

Продолжим рассмотрение оператора L, определенного формулой (2.1). Заметим, что в слагаемом

$$b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

производная понимается в слабом смысле, а вот производная

$$\frac{\partial}{\partial x_i},$$

примененная к выражению

$$a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad u(x) \in H^1_0(\Omega),$$

понимается уже как функционал из $H^{-1}(\Omega)$. Таким образом, мы приходим к выводу о том, что

$$a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j} : H^1_0(\Omega) \to L^2(\Omega), \tag{2.10}$$

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) : H^1_0(\Omega) \to H^{-1}(\Omega), \tag{2.11}$$

$$b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} : H^1_0(\Omega) \to L^2(\Omega), \quad c(x)I : H^1_0(\Omega) \to L^2(\Omega). \tag{2.12}$$

Теперь заметим, что имеют место плотное вложение:

$$H^1_0(\Omega) \overset{ds}{\subset} L^2(\Omega) \Rightarrow L^2(\Omega) = \Big(L^2(\Omega)\Big)^* \overset{ds}{\subset} \big(H^1_0(\Omega)\big)^* = H^{-1}(\Omega).$$

Такое обобщение оператора L, формально записанного как и ранее, действует следующим образом:

$$L \overset{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)I : H^1_0(\Omega) \to H^{-1}(\Omega). \tag{2.13}$$

Наконец, определим так называемое слабое решение следующей однородной краевой задачи Дирихле:

$$Lu(x) = f(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \quad u(x) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{2.14}$$

Определение 5. *Слабым решением однородной краевой задачи Дирихле* (2.14) *называется функция* $u(x) \in H^1_0(\Omega)$, *удовлетворяющая равенству*:

$$\langle Lu, \varphi\rangle = 0 \quad \textit{для всех} \quad \varphi(x) \in H^1_0(\Omega), \tag{2.15}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *— это скобки двойственности между* $H^1_0(\Omega)$ *и* $H^{-1}(\Omega)$, *что эквивалентно равенству:*

$$\int\limits_{\Omega}\Bigg[\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} - \\ - \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\varphi(x) - c(x)u(x)\varphi(x)\Bigg]\,dx = 0 \quad (2.16)$$

для всех $\varphi(x) \in H_0^1(\Omega)$.

Рассмотренные пространства $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ и соответствующие сопряженные используются при рассмотрении и нелинейных краевых задач с главным линейным оператором эллиптического типа второго порядка. Однако, при рассмотрении нелинейных в главном дифференциальных уравнений используются банаховы пространства $W^{1,p}(\Omega)$ и $W_0^{1,p}(\Omega)$ при $p > 2$.

§ 3. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [9], [13], [16].

Л е к ц и я 21

МЕТОД АПРИОРНЫХ ОЦЕНОК

§ 1. Вывод априорной оценки.

Рассмотрим слабую постановку следующей задачи Дирихле:

$$Lu(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) = -f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{1.2}$$

Предположим, что $a_{ij}(x) \in L^\infty(\Omega)$ и, кроме того, предположим, что оператор L является равномерно эллиптическим, т. е.

$$\vartheta|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant M|\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^N, \quad 0 < \vartheta \leqslant M < +\infty \tag{1.3}$$

для почти всех $x \in \Omega$. Определим слабое решение.

О п р е д е л е н и е 1. *Слабым решением задачи* (1.1) *называется функция* $u(x) \in H_0^1(\Omega)$, *удовлетворяющая следующему равенству*:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} \int\limits_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\,dx = \int\limits_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx, \quad f(x) \in L^2(\Omega) \tag{1.4}$$

для всех $\varphi(x) \in H_0^1(\Omega)$.

З а м е ч а н и е. Отметим, что вывод интегрального равенства (1.4) аналогичен выводу основного интегрального равенства предыдущей лекции.

В ы в о д а п р и о р н о й о ц е н к и. Пусть $u(x) \in H_0^1(\Omega)$ — это слабое решение задачи (1.4). Тогда возьмем в равенстве $\varphi(x) = u(x)$ и получим следующее неравенство:

$$\vartheta\||D_x u|\|_2^2 \leqslant \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \int\limits_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\,dx = \int\limits_\Omega f(x)u(x)\,dx \leqslant \|f\|_2\|u\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant M_1 \|f\|_2 \||D_x u|\|_2, \quad (1.5)$$

из которого найдем, что

$$\||D_x u|\|_2 \leqslant \frac{M_1}{\vartheta} \|f\|_2. \quad (1.6)$$

§ 2. Существование приближений Галёркина

Прежде всего сформулируем следующую *теорему Брауэра*, доказываемую в курсе топологии:

Теорема Брауэра. *Пусть D — это выпуклое компактное подмножество из $\mathbb{R}^n$, а отображение*

$$A : D \to D$$

непрерывно. Тогда существует неподвижная точка этого отображения $A(a) = a \in D$.

Справедлива следующая вспомогательная *лемма об остром угле*:

Лемма 1. *Пусть $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, для некоторого $R > 0$ удовлетворяющее следующему условию*:

$$(Ta, a) \geqslant 0 \quad \textit{для всех} \quad |a| = (a_1^2 + \cdots + a_N^2)^{1/2} = R. \quad (2.1)$$

Тогда существует такое $a \in \mathbb{R}^n$, что

$$|a| \leqslant R \quad \textit{и} \quad Ta = 0. \quad (2.2)$$

Доказательство.

Шаг 1. Допустим, что

$$Ta \neq 0 \quad \text{для всех} \quad a \in K_R \stackrel{\text{def}}{=} \{a | a \in \mathbb{R}^n, \ |a| \leqslant R\}.$$

Тогда отображение, определяемое по правилу

$$a \to -R \frac{Ta}{|Ta|},$$

является непрерывным отображением из K_R в K_R. Заметим, что K_R является выпуклым и компактным (замкнутым и ограниченным) множеством в $\mathbb{R}^n$.

В силу теоремы Брауэра о неподвижной точке существует $a \in K_R$, такое, что

$$a = -R \frac{Ta}{|Ta|}. \quad (2.3)$$

Шаг 2. Из (2.3) вытекает, что $|a| = R$ и

$$(a, a) = -R \frac{(Ta, a)}{|Ta|} \Rightarrow (Ta, a) = -|Ta| \frac{|a|^2}{R} = -R|Ta|.$$

Стало быть, $(Ta, a) = -R|Ta| < 0$, что противоречит предположению о том, что $(Ta, a) \geqslant 0$ для всех $|a| = R$.

Лемма доказана.

Теперь мы воспользуемся *полным методом Галёркина* для доказательства существования слабого решения задачи.

Пусть $\{w_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — это базис пространства $H_0^1(\Omega)$, составленный из собственных функций оператора Лапласа

$$\Delta w_k(x) + \lambda_k w_k(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad w_k|_\Gamma = 0 \quad \text{при} \quad k \in \mathbb{N},$$

причем предположим, что выполнены условия ортонормированности:

$$\int\limits_\Omega (D_x w_k, D_x w_l)\, dx = \delta_{kl}.$$

Определим *галёркинские приближения*:

$$u_m(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{m} c_{mk} w_k(x), \quad c_{mk} \in \mathbb{R}^1. \tag{2.4}$$

Определим галёркинские приближения задачи (1.4).

Определение 2. *Галёркинским приближением задачи* (1.4) *называется функция* $u_m(x)$ *вида* (2.4), *удовлетворяющая равенству*: [1])

$$\int\limits_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial u_m(x)}{\partial x_i} \frac{\partial w_l(x)}{\partial x_j}\, dx = \int\limits_\Omega f(x) w_l(x)\, dx \quad \textit{для всех} \quad l = \overline{1, m}. \tag{2.5}$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Галёркинское приближение задачи* (2.5) *при каждом* $m \in \mathbb{N}$ *существует.*

Доказательство.

Шаг 1. Действительно, рассмотрим следующие отображения:

$$T_l(c_m) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial u_m(x)}{\partial x_i} \frac{\partial w_l(x)}{\partial x_j}\, dx - \int\limits_\Omega f(x) w_l(x)\, dx. \tag{2.6}$$

Пусть

$$T(c_m) = (T_1(c_m), ..., T_m(c_m)).$$

Воспользуемся тем, что $a_{ij}(x) \in L^\infty(\Omega)$ удовлетворяет неравенству снизу (1.3):

$$\int\limits_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial u_m(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u_m(x)}{\partial x_j}\, dx \geqslant \vartheta |||D_x u_m|||_2^2. \tag{2.7}$$

---

[1]) Здесь и ниже мы пользуемся правилом суммирования Эйнштейна.

Кроме того, справедливо следующее неравенство:

$$\left|\int\limits_{\Omega} f(x)u_m(x)\,dx\right| \leqslant \|f\|_2\|u_m\|_2 \leqslant \|f\|_2 M_1 |||D_x u_m|||_2 \leqslant$$
$$\leqslant \vartheta\frac{\varepsilon}{2}|||D_x u_m|||_2^2 + \frac{M_1^2}{\vartheta}\frac{1}{2\varepsilon}\|f\|_2^2. \quad (2.8)$$

Поэтому имеет место следующая оценка снизу:

$$(T(c_m), c_m) = \sum_{l=1}^{m} T_l(c_m)c_{ml} =$$
$$= \int\limits_{\Omega} a_{ij}(x)\frac{\partial u_m(x)}{\partial x_i}\frac{\partial u_m(x)}{\partial x_j}\,dx - \int\limits_{\Omega} f(x)u_m(x)\,dx \geqslant$$
$$\geqslant \vartheta(1-\varepsilon/2)|||D_x u_m|||_2^2 - \frac{M_1^2}{\vartheta}\frac{1}{2\varepsilon}\|f\|_2^2, \quad \varepsilon \in (0,2).$$

Шаг 2. Заметим, что

$$|||D_x u_m|||_2^2 = \int\limits_{\Omega} (D_x u_m, D_x u_m)\,dx =$$
$$= \sum_{k,l=1,1}^{m,m} c_{mk}c_{ml}\int\limits_{\Omega} (D_x w_k, D_x w_l)\,dx = \sum_{k,l=1,1}^{m,m} c_{mk}c_{ml}\delta_{kl} = \sum_{l=1}^{m} c_{ml}^2.$$

Отметим, что

$$|c_m| = \left(\sum_{l=1}^{m} c_{ml}^2\right)^{1/2} \Rightarrow R = |c_m| = |||D_x u_m|||_2.$$

С учетом этого, при достаточно большом $R > 0$ из (2.7), (2.8) при $\varepsilon = 1/2$ следует оценка:

$$(T(c_m), c_m) \geqslant \vartheta(1-\varepsilon/2)R^2 - \frac{M_1^2}{\vartheta}\frac{1}{2\varepsilon}\|f\|_2^2 =$$
$$= \frac{3\vartheta}{4}R^2 - \frac{M_1^2}{\vartheta}\|f\|_2^2 \geqslant 0 \quad \text{при} \quad |c_m| = R > 0. \quad (2.9)$$

Тогда согласно лемме 1 найдётся c_m в замыкании шара $|c_m| < R$ такое, что

$$T(c_m) = (0, ..., 0).$$

Следовательно, $c_m \in \mathbb{R}^m$ является решением системы уравнений галёркинских приближений (2.5).

Теорема доказана.

§ 3. Предельный переход

Докажем теперь вспомогательное утверждение

Лемма 2. *Из всякой равномерно по $m \in \mathbb{N}$ ограниченной последовательности $\{u_m\} \subset H_0^1(\Omega)$:*

$$\|\,|D_x u_m|\,\|_2 \leqslant c_3$$

можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность $\{u_{m_m}\}$:

$$\langle f, u_{m_m}\rangle \to \langle f, u\rangle \quad \textit{при} \quad m \to +\infty \quad \textit{для всех} \quad f \in H^{-1}(\Omega),$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — это скобки двойственности между $H_0^1(\Omega)$ и $H^{-1}(\Omega)$.

Доказательство.

Шаг 1. Поскольку $H_0^1(\Omega)$ является сепарабельным и рефлексивным, то и $H^{-1}(\Omega)$ тоже является сепарабельным. Поэтому существует счётное всюду плотное множество $\{f_n\} \subset H^{-1}(\Omega)$.

Шаг 2. Прежде всего заметим, что для каждого $f \in H^{-1}(\Omega)$ имеет место следующая оценка:

$$|\langle f, u\rangle| \leqslant \|f\|_* \|u\| \Rightarrow |\langle f, u_m\rangle| \leqslant \|f\|_* \|u_m\| \leqslant c_3 \|f\|_* \quad \text{при} \quad \|u_m\| \leqslant c_3.$$

Поэтому для $f_1 \in H^{-1}(\Omega)$ найдётся такая подпоследовательность $\{u_{m_{n_1}}\} \subset H_0^1(\Omega)$, что числовая последовательность $\langle f_1, u_{m_{n_1}}\rangle$ сходится. Для $f_2 \in H^{-1}(\Omega)$ найдётся такая подпоследовательность $\{u_{m_{n_2}}\} \subset \subset \{u_{m_{n_1}}\}$, что числовая последовательность $\langle f_2, u_{m_{n_2}}\rangle$ сходится. Поэтому по индукции найдётся такая подпоследовательность $\{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}$, что для каждого $f \in \{f_1, ..., f_k\}$ числовая последовательность $\langle f, u_{m_{n_k}}\rangle$ сходится.

Шаг 3. Справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned}
&|\langle f, u_{m_n}\rangle - \langle f, u_{m_l}\rangle| \leqslant \\
&\qquad \leqslant |\langle f - f_k, u_{m_n}\rangle| + |\langle f_k, u_{m_n}\rangle - \langle f_k, u_{m_l}\rangle| + |\langle f - f_k, u_{m_l}\rangle| \leqslant \\
&\qquad \leqslant \|f - f_k\|_* \|u_{m_n}\| + |\langle f_k, u_{m_n}\rangle - \langle f_k, u_{m_l}\rangle| + \|f - f_k\|_* \|u_{m_l}\| \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant 2c_3 \|f - f_k\|_* + |\langle f_k, u_{m_n}\rangle - \langle f_k, u_{m_l}\rangle| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

где сначала номер $k \in \mathbb{N}$ выбираются так, чтобы

$$2c_3 \|f - f_k\|_* < \frac{\varepsilon}{2},$$

а затем номера $n, l \geqslant k$ так, чтобы

$$|\langle f_k, u_{m_n}\rangle - \langle f_k, u_{m_l}\rangle| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Шаг 4. Следовательно, числовая последовательность $\langle f, u_{m_n}\rangle$ фундаментальна в $\mathbb{R}^1$ для всякого фиксированного $f \in H^{-1}(\Omega)$ и тогда в силу слабой замкнутости рефлексивного банахова пространства $H_0^1(\Omega)$ найдётся такое $u \in H_0^1(\Omega)$, что

$$\langle f, u_{m_n} \rangle \to \langle f, u \rangle \quad \text{при} \quad m_n \to +\infty.$$

Лемма доказана.

Замечание. Отметим, что из лекции 18 известно, что скобки двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ между сопряженными гильбертовыми пространствами $H_0^1(\Omega)$ и $H^{-1}(\Omega)$ имеют явное представление:

$$\langle f^*, \varphi \rangle = \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} \, dx.$$

для всех $\varphi(x) \in H_0^1(\Omega)$ и при некотором $f(x) \in H_0^1(\Omega)$.

Наконец, справедлива следующая основная теорема:

Теорема 2. *Слабое решение задачи Дирихле* (1.4) *существует и единственно.*

Доказательство.

Шаг 1. Рассмотрим построенные галёркинские приближения $\{u_m\}$, которые по теореме 1 существуют для каждого $m \in \mathbb{N}$. Для этих галёркинских приближений справедлива априорная оценка (1.6):

$$\||D_x u_m|\|_2 \leqslant \frac{M_1}{\vartheta} \|f\|_2.$$

□ Действительно, умножим обе части равенства (2.5) на c_{ml} и просуммируем по $l = \overline{1, m}$. Тогда получим равенство:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} \int\limits_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u_m(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u_m(x)}{\partial x_j} \, dx = \int\limits_{\Omega} f(x) u_m(x) \, dx, \tag{3.1}$$

из которого точно так же как и в случае неравенств (1.5) выводим искомую априорную оценку. ⊠

В силу леммы 2 существует такое $u(x) \in H_0^1(\Omega)$ и такая подпоследовательность $\{u_{m_n}\} \subset \{u_m\}$, что

$$u_{m_n} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad H_0^1(\Omega).$$

Рассмотрим следующий функционал:

$$\left\langle w^{l,j}, \varphi \right\rangle := \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial w_l(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} \, dx, \quad l = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, N}.$$

Докажем, что функционал $w^{l,j} \in H^{-1}(\Omega)$.

□ Действительно, линейность функционала очевидна. Докажем непрерывность. Пусть

$$\varphi_m(x) \to \varphi(x) \quad \text{сильно в} \quad H^1_0(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Тогда имеет место оценка:

$$\left|\langle w^{l,j}, \varphi_m - \varphi\rangle\right| \leqslant \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} \left|a_{ij}(x)\frac{\partial w_l(x)}{\partial x_i}\right| \left|\frac{\partial \varphi_m(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\Omega} \left|\sum_{i=1}^{N} \left|a_{ij}(x)\frac{\partial w_l(x)}{\partial x_i}\right|\right|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_{\Omega} \left|\frac{\partial \varphi_m(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\right|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant M_2 \| |D_x(\varphi_m - \varphi)| \|_2 \to +0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Непрерывность доказана. ⊠

В силу этого результата имеет место следующее предельное свойство:

$$\int\limits_{\Omega} f(x) w_l(x)\, dx = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \int\limits_{\Omega} a_{ij}(x)\frac{\partial u_{m_n}(x)}{\partial x_i}\frac{\partial w_l(x)}{\partial x_j}\, dx \to$$

$$\to \int\limits_{\Omega} a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial w_l(x)}{\partial x_j}\, dx \qquad (3.2)$$

при $m_n \to +\infty$ для всех $l \in \mathbb{N}$. Таким образом, из (2.5), записанного для подпоследовательности $\{u_{m_n}(x)\}$ в пределе при $m_n \to +\infty$, приходим к равенству:

$$\int\limits_{\Omega} a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial w_l(x)}{\partial x_j}\, dx = \int\limits_{\Omega} f(x) w_l(x)\, dx \quad \text{для всех} \quad l \in \mathbb{N}. \qquad (3.3)$$

Это равенство можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\langle A(u), w_l\rangle = \langle f, w_l\rangle \quad \text{для всех} \quad l \in \mathbb{N}, \qquad (3.4)$$

где согласно лекции 18 имеем:

$$A(u) := -\sum_{i,j=1}^{N,N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) : \; H^1_0(\Omega) \to H^{-1}(\Omega). \qquad (3.5)$$

Пусть $\varphi(x) \in H^1_0(\Omega)$ — произвольная фиксированная функция. Тогда с учетом того, что $\{w_l(x)\}$ — базис в $H^1_0(\Omega)$ справедливы предельные свойства:

$$\varphi_m(x) = \sum_{l=1}^{m} c_l w_l(x) \to \varphi(x) \quad \text{сильно в} \quad H^1_0(\Omega) \qquad (3.6)$$

при $m \to +\infty$ для некоторой последовательности чисел $\{c_l\} \subset \mathbb{R}$. Теперь умножим обе части равенства (3.4) на число c_l и просуммируем по $l = \overline{1, m}$. В результате получим равенство:

$$\langle A(u), \varphi_m \rangle = \langle f, \varphi_m \rangle \quad \text{для всех} \quad m \in \mathbb{N}, \tag{3.7}$$

которое можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\langle A(u), \varphi \rangle + \langle A(u), \varphi_m - \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle + \langle f, \varphi_m - \varphi \rangle \tag{3.8}$$

для всех $m \in \mathbb{N}$. Справедливы следующие неравенства:

$$|\langle A(u), \varphi_m - \varphi \rangle| \leqslant \|A(u)\|_* \| |D_x \varphi_m - D_x \varphi| \|_2, \tag{3.9}$$

$$|\langle f, \varphi_m - \varphi \rangle| \leqslant \|f\|_* \| |D_x \varphi_m - D_x \varphi| \|_2, \tag{3.10}$$

из которых в силу (3.6) получаем, что числовые последовательности

$$\{\langle A(u), \varphi_m - \varphi \rangle\} \quad \text{и} \quad \{\langle f, \varphi_m - \varphi \rangle\}$$

сходятся к нулю при $m \to +\infty$. Отсюда и из (3.8) в пределе при $m \to \to +\infty$ получим равенство:

$$\langle A(u), \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in H_0^1(\Omega). \tag{3.11}$$

Отсюда следует равенство:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} \int_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} \, dx = \int_\Omega f(x) \varphi(x) \, dx$$

для всех $\varphi(x) \in H_0^1(\Omega)$. Поэтому $u(x)$ — это слабое решение задачи Дирихле (1.4) в смысле определения 1.

Шаг 2. Пусть существуют два слабых решения задачи Дирихле $u_1(x)$ и $u_2(x)$ из $H_0^1(\Omega)$. Для их разности $v(x) = u_1(x) - u_2(x)$ справедлива следующее равенство:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} \int_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} \, dx = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in H_0^1(\Omega).$$

Поэтому при $\varphi(x) = v(x)$ имеет место следующее неравенство:

$$\vartheta \int_\Omega |D_x v|^2 \, dx \leqslant \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \int_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} \, dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(x) = const \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow const = 0.$$

Следовательно, $u_1(x) = u_2(x)$.

Теорема доказана.

§ 4. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [9], [13], [16].

Предметный указатель

Априорная оценка
— Шаудера, 223, 239, 241, 245, 255
— в соболевском пространстве, 301
Задач Дирихле, 139
Задача
— наклонной производной, 189
— — единственность, 189
— третья краевая, 190
— — единственность, 190
Задача Дирихле
— внешняя задача
— — единственность, 140
— единственность, 35, 173
Задача Неймана, 139
— внешняя задача
— — единственность, 140
— единственность, 45
Интеграл Гаусса, 121
Лемма
— Олейник–Хопфа, 41
— об остром угле, 302
Лемма Жиро, 184
Локальная система координат, 105
Метод Галёркина, 303
Метод продолжения по параметру, 247
Метод сжимающих отображений, 248
Направляющие косинусы, 110
Нелинейная ёмкость, 69
Оператор
— компактный, 87
— равномерно эллиптический, 156
— со слабой особенностью, 81
— со слабой особенностью на поверхности Ляпунова, 111
Оператор Лапласа
— Фундаментальное решение, 12
Поверхность Ляпунова, 104
Потенциал
— двойного слоя, 94
— — предельные свойства, 125, 126
— — прямое значение, 119
— объёмный, 94
— простого слоя, 94, 129
— — предельные свойства нормальной производной, 132
Производная по конормали, 157
Пространство
— Гёльдера, 212
— — интерполяционное неравенство, 215, 220
— Соболева $H^1(\Omega)$, 293
Решение
— верхнее, 251, 258
— классическое, 156
— нижнее, 251, 258
— слабое, 301
Свойство
— сферичности изнутри, 187
Сфера Ляпунова, 105
Сферическая система координат, 17
Теорема
— Арцелла, 91
— Брауэра, 302
— Грина, 14
— Жиро, 184
— Лиувилля, 58, 63
— Остроградского–Гаусса, 14
— альтернативы Фредгольма, 142
— единственности, 147

— о среднем для оператора Лапласа, 25
— признак сравнения, 178
— принцип Хопфа, 164
— принцип максимума
— — сильный, 164
— — сильный для оператора Лапласа, 32
— — слабый, 157
— принцип максимума модуля, 34, 160, 171
Уравнение
— Монжа–Ампера, 180
— интегральные теории потенциала, 144
— минимальной поверхности, 180
Уравнение Пуассона, 19
Условие
— сферичности изнутри, 44
Формула
— Грина вторая, 73
— Грина третья, 75, 93
Функции
— субгармонические, 36
— супергармонические, 36
Функция
— Грина задачи Дирихле, 76
— производная
— — слабая, 289
Характеристическое число, 142

Список литературы

1. *Боголюбов А. Н., Кравцов В. В., Свешников А. Г.* Лекции по математической физике. М.: Издательство МГУ; Наука, 2004.— 416 с.
2. *Бицадзе А. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966, 204 с.
3. *Вентцель Т. Д., Горицкий А. Ю., Капустина Т. О. и др.* Сборник задач по уравнениям с частными производными. Под редакцией А. С. Шамаева. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005, 158 с.
4. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука. 1988, 512 с.
5. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989, 464 с.
6. *Крылов Н. В.* Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гельдера. Новосибирск: Научная книга, 1998, 178 с.
7. *Ландис Е. М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. Москва: Наука, 1971, 288 с.
8. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: ИЛ, 1957, 257 с.
9. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976, 392 с.
10. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977, 431 с.
11. *Нефедов Н. Н.* Дополнительные главы к курсу Методы математической физики. "Нелинейные эллиптические уравнения. Метод дифференциальных неравенств.". Москва: Изд-во физического факультета МГУ, 1998.
12. *Олейник О. А.* Лекции об уравнениях с частными производными. I часть. Москва: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2005. — 252 с.
13. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988, 336 с.
14. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. Москва: Мир, 1968, 428 с.
15. *Шишмарев И. А.* Введение в теорию эллиптических уравнений. М.: Издательство МГУ, 1979, 184 с.
16. *Эванс Л. К.* Уравнения с частными производными. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003, 562 с. — (Университетская серия; Т. 7).
17. *Protter M. H., Weinberger H. F.* Maximum principles in differential equations. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1967, 261 pp.

КОРПУСОВ Максим Олегович

Учебное издание

Лекции об эллиптических уравнениях
второго порядка

Подписано к печати 01.04.2023 г.
Формат А5. Объем 19,5 п. л. Тираж 25 экз.
Заказ №

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

Отпечатано в типографии
Физического Факультета МГУ им. М.В. Ломоносова