Тема 1. Множества точек пространства R^m.

1. Определения.

1.1. Сформулируйте определение ε-окрестности точки пространства R^m.

1.2. Сформулируйте определение прямоугольной окрестности точки пространства R^m.

1.3. Сформулируйте определение окрестности точки пространства R^m.

1.4. Сформулируйте определение внутренней точки множества D точек пространства R^m.

1.5. Сформулируйте определение изолированной точки множества D точек пространства R^m.

1.6. Сформулируйте определение граничной точки множества D точек пространства R^m.

1.7. Сформулируйте определение границы множества.

1.8. Сформулируйте определение открытого множества точек пространства R^m.

1.9. Сформулируйте определение замкнутого множества точек пространства R^m.

1.10. Сформулируйте определение предельной точки множества D точек пространства R^m.

1.11. Сформулируйте определение связного множества точек пространства R^m.

1.12. Сформулируйте определение прямой в пространстве R^m.

1.13. Сформулируйте определение непрерывной кривой в пространстве R^m.

2. Вопросы и задачи.

Замечание: *Пустое множество считается одновременно открытым и замкнутым.*

2.1. Докажите, что объединение любого числа открытых множеств является открытым множеством.

2.2. Докажите, что любая внутренняя точка множества является его предельной точкой.

2.3. Докажите, что граничная точка множества является либо предельной точкой, либо изолированной точкой этого множества.

2.4. Докажите, что граница сферы в пространстве R^m совпадает с самой сферой.

2.5. Приведите пример множества точек, отличного от пустого, которое является одновременно открытым и замкнутым.

2.6. Приведите пример непустого множества точек на плоскости, которое не имеет внутренних точек.

2.7. Может ли множество, содержащее хотя бы одну свою граничную точку, быть открытым?

2.8. Приведите пример непустого множества точек на плоскости, все точки которого граничные.

2.9. Приведите пример непустого множества точек на плоскости, все точки которого предельные.

2.10. Приведите пример непустого множества точек на плоскости, которое совпадает со своей границей.

2.11. Приведите пример непустого множества точек на плоскости, у которого множество всех предельных точек не совпадает с множеством всех граничных точек.

2.12. Приведите пример непустого замкнутого множества точек на плоскости, которое не имеет ни одной предельной точки.

2.13. Докажите, что любая точка множества точек на плоскости, которая не является внутренней, является его граничной точкой.

2.14. Приведите пример множества, каждая граничная точка которого является его предельной точкой.

2.15. Приведите пример множества, каждая граничная точка которого является его изолированной точкой.

2.16. Найдите все граничные точки множества точек на плоскости $\left\{\left(x,y\right): x^2+y^2<1\right\}$.

2.17. Найдите все предельные точки множества точек на плоскости $\left\{\left(x,y\right): x^2+y^2<1\right\}$.

3. Задачи повышенной трудности.

3.1. Докажите, что дополнение к открытому множеству является замкнутым множеством.

3.2. Докажите, что дополнение к замкнутому множеству является открытым множеством.

3.3. Докажите, что сфера в пространстве R^m является замкнутым множеством.

3.4. Докажите, что пересечение конечного числа открытых множеств является открытым множеством. Верно ли это для любого числа открытых множеств?

3.5. Докажите, что объединение конечного числа замкнутых множеств является замкнутым множеством. Верно ли это для любого числа замкнутых множеств?

3.6. Докажите, что пересечение любого числа замкнутых множеств является замкнутым множеством.

3.7. Докажите, что объединение любого числа открытых множеств является открытым множеством.

3.8. Найдите все граничные точки множества точек на плоскости $\left\{\left(\cos\dfrac{\pi}{n}, \sin\dfrac{\pi}{n}\right), n\in N\right\}$.

3.9. Найдите все предельные точки множества точек на плоскости $\left\{\left(\cos\frac{\pi}{n},\sin\frac{\pi}{n}\right),n\in N\right\}$.

Тема 2. Последовательности точек пространства R^m.

1. Определения.

1.1. Сформулируйте определение ограниченной последовательности точек пространства R^m.

1.2. Сформулируйте определение неограниченной последовательности точек пространства R^m.

1.3. Сформулируйте определение предела последовательности точек пространства R^m.

1.4. Сформулируйте определение сходящейся последовательности точек пространства R^m.

1.5. Сформулируйте определение фундаментальной последовательности точек пространства R^m.

1.6. Сформулируйте определение предельной точки последовательности точек пространства R^m.

2. Основные теоремы (без доказательства).

2.1. Сформулируйте критерий Коши сходимости последовательности точек пространства R^m.

2.2. Сформулируйте теорему Больцано-Вейерштрасса для последовательности точек пространства R^m.

3. Вопросы и задачи.

3.1. Докажите, что сходящаяся последовательность точек пространства R^m является ограниченной.

3.2. Докажите, что если числовые последовательности x_n и y_n являются сходящимися, то последовательность точек $M_n(x_n,y_n)$ на плоскости является ограниченной.

3.3. Докажите, что если числовые последовательности x_n и y_n являются фундаментальными, то последовательность точек $M_n(x_n,y_n)$ на плоскости является фундаментальной.

3.4. Докажите, что последовательность точек на плоскости, расположенных на окружности, имеет по крайней мере одну предельную точку.

3.5. Найдите предел последовательности точек $M_n\left(\cos\frac{\pi}{n}, \sin\frac{\pi}{n}\right)$ на плоскости.

4. Теоремы с доказательством.

4.1. Докажите, что ограниченная последовательность точек $M_n(x_n, y_n)$ на плоскости имеет по крайней мере одну предельную точку.

4.2. Докажите, что если последовательность точек $M_n(x_n, y_n)$ на плоскости является сходящейся, то числовые последовательности x_n и y_n являются сходящимися.

4.3. Докажите, что если числовые последовательности x_n и y_n являются сходящимися, то последовательность точек $M_n(x_n, y_n)$ на плоскости является сходящейся.

4.4. Докажите теорему о критерии Коши сходимости последовательности точек пространства R^m.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Найдите предел последовательности точек $M_n\left(x_n, y_n\right)$ на плоскости, если $x_1 = 8$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{4}{x_n}\right)$, $y_n = x_{2n}$, $n \in N$.

Тема 3. Функции, предел, непрерывность.

1. Определения.

1.1. Сформулируйте определение ограниченной сверху функции $u(M)$, заданной на множестве D точек пространства R^m.

1.2. Сформулируйте определение неограниченной сверху функции $u(M)$, заданной на множестве D точек пространства R^m.

1.3. Сформулируйте определение ограниченной снизу функции $u(M)$, заданной на множестве D точек пространства R^m.

1.4. Сформулируйте определение неограниченной снизу функции $u(M)$, заданной на множестве D точек пространства R^m.

1.5. Сформулируйте определение точной верхней грани функции m переменных на множестве D точек пространства R^m.

1.6. Сформулируйте определение точной нижней грани функции m переменных на множестве D точек пространства R^m.

1.7. Сформулируйте определение “по Коши” предела функции $u(M)$ в точке $M_0 \in R^m$.

1.8. Сформулируйте определение “по Гейне” предела функции $u(M)$ в точке $M_0 \in R^m$.

1.9. Сформулируйте определение “по Гейне” предела функции $u(M)$ при $M \to \infty$.

1.10. Сформулируйте определение “по Коши” предела функции $u(M)$ при $M \to \infty$.

1.11. Сформулируйте определение непрерывной функции $u(x,y)$ по переменной x в точке $M_0(x_0,y_0)$.

1.12. Сформулируйте определение непрерывной функции $u(x,y)$ по совокупности переменных в точке $M_0(x_0,y_0)$.

1.13. Сформулируйте определение непрерывной функции на данном множестве.

2. Основные теоремы (без доказательства).

2.1. Сформулируйте теорему о критерии Коши существования предела функции $u(M)$ в точке $M_0 \in R^m$.

2.2. Сформулируйте теорему о непрерывности суммы непрерывных функций нескольких переменных.

2.3. Сформулируйте теорему о непрерывности произведения непрерывных функций нескольких переменных.

2.4. Сформулируйте теорему о непрерывности частного двух непрерывных функций нескольких переменных.

2.5. Сформулируйте теорему о прохождении непрерывной функции нескольких переменных через любое промежуточное значение.

2.6. Сформулируйте первую теорему Вейерштрасса для функции нескольких переменных.

2.7. Сформулируйте вторую теорему Вейерштрасса для функции нескольких переменных.

2.8. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции нескольких переменных.

2.9. Сформулируйте теорему Кантора для функции нескольких переменных.

3. Вопросы и задачи.

3.1. Сформулируйте определение “по Коши” того, что функция $u(M)$ не имеет предела в точке M_0.

3.2. Сформулируйте определение “по Коши” того, что функция $u(M)$ не имеет предела при $M \to \infty$.

3.3. Сформулируйте определение “по Гейне” того, что функция $u(M)$ не имеет предела в точке M_0.

3.4. Сформулируйте определение “по Гейне” того, что функция $u(M)$ не имеет предела при $M \to \infty$.

3.5. Сформулируйте “по Гейне” отрицание того, что число b является пределом функции $u(M)$ точке M_0.

3.6. Нарисуйте семейство линий уровня функции:

3.6.1. $u\left(x,y\right) = xy$.

3.6.2. $u\left(x,y\right) = \dfrac{y}{x}$.

3.6.3. $u\left(x,y\right) = \dfrac{y}{x^2}$.

3.6.4. $u\left(x,y\right) = x^2 + 2xy + y^2$.

3.6.5. $u\left(x,y\right) = \dfrac{x^2 + y^2}{2x}$.

3.6.6. $u\left(x,y\right) = \dfrac{x^2 + y^2}{2x + 2y}$.

3.6.7. $u\left(x,y\right) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$.

3.7. Приведите пример ограниченной сверху и неограниченной снизу функции, определённой на множестве $\left\{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\right\}$.

3.8. Приведите пример неограниченной сверху и ограниченной снизу функции, определённой на множестве $\left\{(x,y) : x^2 + y^2 > 1\right\}$.

3.9. Приведите пример неограниченной снизу и неограниченной сверху функции, определённой на множестве $\left\{(x,y) : x^2 + y^2 > 1\right\}$.

3.10. Приведите пример функции двух переменных, которая является равномерно непрерывной на заданном множестве.

3.11. Приведите пример непрерывной функции, которая не является равномерно непрерывной на заданном множестве.

3.12. Приведите пример функции двух переменных, которая непрерывна на заданном ограниченном, но незамкнутом множестве, и является неограниченной на этом множестве.

3.13. Приведите пример функции двух переменных, которая непрерывна и ограничена на заданном ограниченном множестве, но не достигает на этом множестве своей точной верхней грани.

3.14. Найдите предел функции $u(x,y)$ при $M(x,y) \to \infty$ или докажите, что предел не существует:

3.14.1. $u\left(x,y\right) = \dfrac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}$;

3.14.2. $u\left(x,y\right) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^4 + y^4}$;

3.14.3. $u\left(x,y\right) = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + xy + y^2}$;

3.14.4. $u\left(x,y\right) = xy \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2}$;

3.14.5. $u\left(x,y\right) = \left(x^2 + y^2\right) \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

3.15. Найдите пределы, или докажите, что они не существуют:

3.15.1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy\ln\left(x^2+y^2\right);$

3.15.2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \left(1+xy\right)^{\frac{y}{x}};$

3.15.3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{x};$

3.15.4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right);$

3.15.5. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} \left(1+x^2y\right)^{\frac{y}{x^2+x^3y^4}};$

3.15.6. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1}{y^2+x^2}\exp\left(-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right).$

3.16. Исследуйте функцию на непрерывность по каждой из переменных и по совокупности переменных в заданной точке:

3.16.1. $u\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ в точке $(0,0)$;

3.16.2. $u\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ в точке $(0,0)$;

3.16.3. $u\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ в точке $(0,0)$;

3.16.4. $u\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ в точке $(0,0)$;

3.16.5. $u\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(xy\right)}{xy}, & xy\neq 0,\\ 1, & xy=0\end{cases}$ в точках $(0,0)$ и $(0,1)$;

3.16.6. $u\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(xy\right)}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ в точках $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$;

3.16.7. $u\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(xy\right)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 1, & x^2+y^2=0\end{cases}$ в точке $(0,0)$;

3.16.8. $u(x,y)=\begin{cases} xy\ln(|xy|), & xy\neq 0, \\ 0, & xy=0 \end{cases}$ в точке (0,0);

3.16.9. $u(x,y)=\begin{cases} x\ln(|xy|), & xy\neq 0, \\ 0, & xy=0 \end{cases}$ в точке (0,0);

3.16.10. $u(x,y)=\begin{cases} \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 1, & x^2+y^2=0 \end{cases}$ в точке (0,0).

4. Теоремы с доказательством.

4.1. Докажите теорему о непрерывности суммы двух непрерывных функций нескольких переменных.

4.2. Докажите теорему о непрерывности произведения двух непрерывных функций нескольких переменных.

4.3. Докажите теорему о непрерывности частного двух непрерывных функций нескольких переменных.

4.4. Докажите теорему о непрерывности сложной функции нескольких переменных.

4.5. Докажите теорему о прохождении непрерывной функции нескольких переменных через любое промежуточное значение.

4.6. Докажите первую теорему Вейерштрасса для функции нескольких переменных.

4.7. Докажите вторую теорему Вейерштрасса для функции нескольких переменных.

4.8. Докажите теорему Кантора для функции нескольких переменных.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Пусть вещественная функция $f(M)$ определена на всем пространстве R^m. Докажите, что функция $f(M)$ непрерывна всюду на R^m тогда и только тогда, когда для каждого открытого множества O значений функции $f(M)$ множество точек $f^{-1}(O)$ открыто. Здесь $f^{-1}(A)$ − множество всех точек M пространства R^m, для которых $f(M)\in A$.

5.2. Пусть функция $f(M)$ определена на всем пространстве R^m, а функция $g(x)$ − на всей вещественной прямой R и пусть $u(M)=g(f(M))$. Верно ли утверждение: если $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=a$ и $\lim\limits_{M\to M_0} g(x)=b$, то $\lim\limits_{M\to M_0} u(M)=b$?

Тема 4. Дифференцируемые функции.

1. Определения.

1.1. Сформулируйте определение частной производной функции $f(x_1,...,x_m)$ по переменной x_k в точке $M(x_1,x_2,...,x_m)$.

1.2. Сформулируйте определение дифференцируемой функции $f(x_1,...,x_m)$ в точке $M(x_1,x_2,...,x_m)$.

1.3. Сформулируйте определение первого дифференциала функции нескольких переменных в данной точке.

1.4. Сформулируйте определение касательной плоскости к графику функции $z=f\left(x,y\right)$ в точке $M_0\left(x_0,y_0,f\left(x_0,y_0\right)\right)$.

1.5. Сформулируйте определение n раз дифференцируемой функции нескольких переменных в данной точке.

1.6. Сформулируйте определение второго дифференциала функции $u\left(x_1,...,x_m\right)$ в данной точке.

1.7. Сформулируйте определение n – ого дифференциала функции $u\left(x_1,...,x_m\right)$ в данной точке.

1.8. Сформулируйте определение производной по направлению $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ для функции $f(x,y,z)$ в точке $M(x_0,y_0,z_0)$.

1.9. Сформулируйте определение градиента функции $f(x,y,z)$ в данной точке $M(x_0,y_0,z_0)$.

2. Основные теоремы и формулы (без доказательства).

2.1. Сформулируйте теорему о необходимых условиях дифференцируемости функции $u(x,y)$ в данной точке.

2.2. Сформулируйте теорему о достаточных условиях дифференцируемости функции $f(x_1,...,x_m)$ в точке $M_0(\overset{\circ}{x}_1,\overset{\circ}{x}_2,...,\overset{\circ}{x}_m)$.

2.3. Сформулируйте теорему о достаточных условиях равенства смешанных производных u_{xy} и u_{yx} функции $u(x,y)$ в данной точке.

2.4. Сформулируйте теорему о касательной плоскости к графику функции двух переменных.

2.5. Сформулируйте теорему о дифференцируемости сложной функции.

2.6. Запишите формулу для частных производных сложной функции нескольких переменных.

2.7. Запишите выражение производной функции $f(x,y,z)$ по заданному направлению в данной точке через частные производные функции в этой точке.

2.8. Запишите выражение производной функции $f(x,y,z)$ по заданному направлению в данной точке через градиент функции в этой точке.

2.9. Запишите формулу Лагранжа конечных приращений для функции нескольких переменных. При каких условиях эта формула верна?

2.10. Запишите выражение для второго дифференциала функции нескольких независимых переменных.

2.11. Запишите выражение для дифференциала n–го порядка функции нескольких независимых переменных.

2.12. Запишите выражение для второго дифференциала сложной функции нескольких переменных.

2.13. Сформулируйте теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x_1,...,x_m)$ с центром разложения в точке $M_0(\overset{\circ}{x}_1,\overset{\circ}{x}_2,...,\overset{\circ}{x}_m)$.

2.14. Сформулируйте теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для функции $f(x_1,...,x_m)$ с центром разложения в точке $M_0(\overset{\circ}{x}_1,\overset{\circ}{x}_2,...,\overset{\circ}{x}_m)$.

3. Вопросы и задачи.

3.1. Запишите формулы, выражающие свойство инвариантности формы первого дифференциала функции нескольких переменных.

3.2. Запишите формулы, выражающие свойство неинвариантности формы дифференциала второго порядка функции нескольких переменных..

3.3. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_1, функция $g(x)$ дифференцируема в точке x_2. Докажите, что функция $u(x,y)=f(x)+g(y)$ дифференцируема в точке $M=(x_1,x_2)$.

3.4. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_1, функция $g(x)$ дифференцируема в точке x_2. Докажите, что функция $u(x,y)=f(x)\cdot g(y)$ дифференцируема в точке $M=(x_1,x_2)$.

3.5. Для функции $z=u(x,y)$ найдите частные производные первого порядка, градиент, первый и второй дифференциалы в точке $M\left(x,y\right)$, запишите уравнение касательной плоскости к поверхности $z=u(x,y)$ в точке $(x_0,y_0,u(x_0,y_0))$, найдите вектор нормали к этой плоскости. Вычислите все указанные величины в точке $M_0(x_0,y_0)$. Вычислите производную по направлению заданного вектора $\vec{L}$ в точке $M_0\left(x_0,y_0\right)$.

3.5.1. $u\left(x,y\right)=2x+3y,\ M_0=(3;2),\ \vec{L}=(3;-2)$;

3.5.2. $u\left(x,y\right)=8x^2+2y^2-x^4-y^4,\ M_0=(2;1),\ \vec{L}=(-1;-1)$;

3.5.3. $u(x,y) = xy(3-x-y)$, $M_0 = (1;1)$, $\vec{L} = (-1;-1)$;

3.5.4. $u(x,y) = x^2y^3(6-2x-3y)$, $M_0 = (1;1)$, $\vec{L} = (-1;-1)$;

3.5.5. $u(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, $M_0 = (1;1)$, $\vec{L} = (-1;-1)$;

3.5.6. $u(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $M_0 = \left(\sqrt{3},1\right)$, $\vec{L}_1 = \left(1;-\sqrt{3}\right)$, $\vec{L}_2 = \left(\sqrt{3};1\right)$;

3.5.7. $u(x,y) = x^y - y^x$, $M_0 = (e;e)$, $\vec{L} = (1;-1)$;

3.5.8. $u(x,y) = x^y - y^x$, $M_0 = (1;1)$, $\vec{L} = (1;-1)$;

3.5.9. $u(x,y) = x^3 - x^2y + y^3 - 1$, $M_0 = (1;1)$, $\vec{L}$ образует угол $\dfrac{\pi}{6}$ с осью Ox.

3.6. Имеет ли функция $u(x,y)$ частные производные первого порядка в точке $(0,0)$? Если имеет, найдите их и исследуйте эти частные производные на непрерывность в точке $(0,0)$:

3.6.1. $u(x,y) = \sqrt[3]{xy(x+y)}$;

3.6.2. $u(x,y) = \sqrt[3]{x^2y}$;

3.6.3. $u(x,y) = \sqrt[3]{xy}$;

3.6.4. $u(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$;

3.6.5. $u(x,y) = \sqrt[3]{xy(x^2+y^2)}$;

3.6.6. $u(x,y) = \sqrt[3]{x^4 - y^4}$;

3.6.7. $u(x,y) = \sqrt[3]{x^5 - y^5}$;

3.6.8. $u(x,y) = \sqrt[3]{yx^4 + xy^4}$.

3.7. Является ли функция $u(x,y)$ дифференцируемой в точке $(0,0)$?

3.7.1. $u(x,y) = \sqrt[3]{xy}$;

3.7.2. $u(x,y) = \sqrt[3]{x^2y}$;

3.7.3. $u(x,y) = xy \cdot \sqrt[3]{xy}$;

3.7.4. $u(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$;

3.7.5. $u(x,y) = \sqrt[3]{x^4 - y^4}$;

3.7.6. $u(x,y) = \sqrt[3]{xy(x^2+y^2)}$;

3.7.7. $u(x,y) = \sqrt[3]{xy(x+y)}$;

3.7.8. $u(x,y) = xy\ln\left(x^2+y^2\right)$, если $x^2 + y^2 > 0$, $u(0,0) = 0$;

3.7.9. $u(x,y) = xy\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$, если $x^2 + y^2 > 0$, $u(0,0) = 0$;

3.7.10. $u(x,y) = xy \cdot \sqrt[3]{x^3+y^3}\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$, если $x^2 + y^2 > 0$, $u(0,0) = 0$.

3.8. Приведите пример функции двух переменных, непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, но не дифференцируемой в этой точке.

3.9. Приведите пример функции двух переменных, у которой существуют первые производные в точке $(0;0)$, но функция не является дифференцируемой в этой точке.

3.10. Для функции $f(x,y,z)$ найдите частные производные первого порядка, градиент, первый и второй дифференциалы в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Найдите производную по направлению заданного вектора $\vec{L}$ в точке $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$:

3.10.1. $u\left(x,y,z\right) = x^3 + x + y + xyz\,, M_0 = (1;1;1), \qquad \vec{L} = \left(1,1,1\right);$

3.10.2. $u\left(x,y,z\right) = \ln(xyz),\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ M_0 = (1;1;1),\ \vec{L} = \left(1,1,1\right);$

3.10.3. $u\left(x,y,z\right) = xyz(4 - x - y - z),\ M_0 = (1;1;1),\ \vec{L} = \left(1,1,1\right);$

3.10.4. $u\left(x,y,z\right) = x^3y^4z^5(13 - 3x - 4y - 5z),\ M_0 = (1;1;1), \vec{L} = \left(1,1,1\right).$

3.10.5. $u\left(x,y,z\right) = x^3 + x + y + xyz\,, M_0 = (1;1;1), \vec{L} = \left(1,1,1\right).$

3.11. Для функции $u\left(x,y,z\right) = e^{x^2+y^2+z^2}$ найдите $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$ и $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$

Вычислите указанные дифференциалы в точке $M_0\left(x,y\right)$:

3.11.1. $d^5\left[\left(x+y\right)^2 e^{x-y}\right], M_0\left(1;1\right);$

3.11.2. $d^{100}\left(\left(x+y\right)e^{x-y}\right),\ M_0\left(1;1\right);$

3.11.3. $d^{100}\left(\left(x+y\right)e^{x+y}\right),\ M_0\left(1;1\right);$

3.11.4. $d^{20}\left(x^2 \sin y\right),\ M_0\left(1;\pi\right).$

3.12. Найдите дифференциалы первого и второго порядка сложной функции $u(x,y)$, если f — дважды дифференцируемая функция, x и y — независимые переменные:

3.12.1. $u = f(\xi,\theta), \qquad \xi = x^2 + y^2, \quad \theta = x^2 - y^2\,;$

3.12.2. $u = f(\xi,\eta,\theta), \qquad \xi = xy, \quad \eta = x - y, \quad \theta = x + y\,.$

3.13. Предполагая, что функции φ и ψ дифференцируемы достаточное число раз, проверить справедливость следующих равенств:

3.13.1. $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$, если $z = y\varphi(x^2 - y^2)$;

3.13.2. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy + z$, если $z = xy + x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$;

3.13.3. $a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $z = \varphi(x - ay) + \psi(x + ay)$.

3.14. Запишите формулу Тейлора порядка n с центром разложения в точке M_0 и с остаточным членом в форме Пеано для функций:

3.14.1. $u(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \quad M_0(2,3), \quad n = 2$;

3.14.2. $u = x^y, \quad M_0(e,e), \quad n = 2$;

3.14.3. $u = e^x \sin y, \quad M_0(0,0), \quad n = 3$;

3.14.4. $u = \ln(1 + x + y), \quad M_0(0,0), \quad n = 3$;

3.14.5. $u(x,y,z) = x^3 + x + y + xyz, \quad M_0(x_0, y_0, z_0), n = 3$.

4. Теоремы с доказательством.

4.1. Докажите теорему о необходимых условиях дифференцируемости функции $f(x_1,...,x_m)$ в точке $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_m)$.

4.2. Докажите теорему о достаточных условиях дифференцируемости функции $f(x_1,...,x_m)$ в точке $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_m)$.

4.3. Докажите теорему о достаточных условиях равенства смешанных производных u_{xy} и u_{yx} функции $u(x,y)$ в данной точке. .

4.4. Докажите теорему о касательной плоскости к графику функции двух переменных.

4.5. Докажите теорему о дифференцируемости сложной функции.

4.6. Докажите, что производная дифференцируемой в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ функции $f(x,y,z)$ по направлению $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ равна скалярному произведению вектора $\vec{l}$ и градиента функции f в точке M .

4.7. Докажите теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x_1,...,x_m)$ с центром разложения в точке $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_m)$.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Докажите, что если функция $u(x,y)$ имеет частные производные первого порядка в любой точке круга единичного радиуса и $\left|u_x(x,y)\right| \le 1$, $\left|u_y(x,y)\right| \le 1$, то для любых двух точек M и N этого круга справедливо неравенство $\left|u(M) - u(N)\right| < 3$.

5.2. Приведите пример функции $u(x,y)$, у которой существуют равные смешанные частные производные u_{xy} и u_{yx} в точке $M_0(0;0)$, но функция $u(x,y)$ не является дважды дифференцируемой в этой точке.

5.3. Приведите пример функции $u(x,y)$, у которой существуют непрерывные смешанные частные производные u_{xy} и u_{yx} в точке $M_0(1;2)$, но функция $u(x,y)$ не является дважды дифференцируемой в этой точке.

5.4. Пусть $u = f(x,y)$, d^2u в точке $M_0(x_0, y_0)$ существует и является положительно определённой квадратичной формой. Докажите, что при этом условии в некоторой окрестности точки $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ касательная плоскость к графику функции $u = f(x,y)$ в точке N_0 имеет единственную общую точку с графиком.

5.5. Пусть функция $u(x,y)$ дважды дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$ и в некоторой окрестности точки $N_0(x_0,y_0,u(x_0,y_0))$ касательная плоскость к графику функции в этой точке имеет единственную общую точку с графиком. Докажите, что второй дифференциал в указанной точке является либо знакоопределённой, либо квазизнакоопределенной квадратичной формой.

5.6. Известно, что касательная плоскость к графику в точке $N_0(x_0,y_0,u(x_0,y_0))$ дважды дифференцируемой функции $z = u(x,y)$ имеет в любой окрестности точки N_0 не менее двух общих точек с графиком. Может ли при этом условии второй дифференциал d^2u в точке $M_0(x_0,y_0)$ являться знакоопределенной квадратичной формой?

5.3. Докажите, что отличный от нуля градиент дифференцируемой функции $z = u(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ направлен перпендикулярно касательной к линии уровня функции $u(x,y)$ в точке M_0.

5.7. Пусть функция $u(x,y)$ дифференцируема два раза в точке $M_0(x_0, y_0)$ и $R_3(x,y) = u(x,y) - P_2(x,y)$ – остаточный член формулы Тейлора, где $P_2(x,y)$ – многочлен Тейлора второго порядка. Докажите, что функция $R_3(x,y)$ и все её частные производные первого и второго порядка обращаются в нуль в точке M_0.

5.8. Пусть функция $u(x,y)$ такова, что в точке $M_0(x_0,y_0)$ $u(M_0) = 0,\quad du\big|_{M_0} = 0,\quad d^2u\big|_{M_0} = 0$. Докажите, что $u(x,y) = o(\rho^2)$ при $\rho \to 0$, где $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$.

Тема 5. Локальный экстремум.

1. Определения.

1.1. Сформулируйте определение локального экстремума функции нескольких переменных.

2. Основные теоремы (без доказательства).

2.1. Сформулируйте необходимое условие локального экстремума в точке $M_0\left(x_0, y_0\right)$ функции $u\left(x, y\right)$, дифференцируемой в этой точке.

2.2. Сформулируйте достаточные условия локального экстремума в точке $M_0\left(x_0, y_0\right)$ дважды дифференцируемой в этой точке функции $u\left(x, y\right)$.

3. Вопросы и задачи.

3.1. Пусть функции $u\left(x, y\right)$ и $v\left(x, y\right)$ имеют локальный минимум в точке $M_0\left(x_0, y_0\right)$. Докажите, что функция $u\left(x, y\right) + v(x, y)$ также имеет локальный минимум в указанной точке.

3.2. Приведите пример функций $u\left(x, y\right)$ и $v\left(x, y\right)$, которые имеют локальный минимум в точке $M_0\left(x_0, y_0\right)$, а функция $u\left(x, y\right) \cdot v(x, y)$ имеет локальный максимум в указанной точке.

3.3. Приведите пример функций $u\left(x, y\right)$ и $v\left(x, y\right)$, которые имеют локальный минимум в точке $M_0\left(x_0, y_0\right)$, а функция $u\left(x, y\right) \cdot v(x, y)$ не имеет локального экстремума в указанной точке.

3.4. Пусть функция $u(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ имеет локальный экстремум в точке $M(x_1, x_2)$, функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_1, $f(x_1) \neq 0$, функция $g(x)$ дифференцируема в точке x_2, $g(x_2) \neq 0$. Докажите, что $f'(x_1) = 0$, $g'(x_2) = 0$.

3.5. Пусть функция $f(x)$ имеет локальный минимум в точке x_1, $f(x_1) > 0$, функция $g(x)$ имеет локальный минимум в точке x_2, $g(x_2) > 0$. Докажите, что функция $u(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ имеет локальный минимум в точке $M(x_1, x_2)$.

3.6. Приведите пример функции, $u\left(x, y\right)$, имеющей в точке $M_0\left(1; 1\right)$ локальный экстремум, у которой не существует $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}$.

3.7. Приведите пример функции, $u\left(x, y\right)$,удовлетворяющей условию $\left.du\right|_{\left(0;0\right)} = 0$, но не имеющей в точке $M_0\left(0; 0\right)$ локального экстремума.

3.8. Найдите все точки локального экстремума функций:

3.8.1. $u\left(x, y\right) = x^2 + xy + y^2$;

3.8.2. $u\left(x, y\right) = x^3 + y^3 - 3xy$;

3.8.3. $u\left(x,y\right)=\left(5-2x+y\right)e^{x^2-y}$;

3.8.4. $u\left(x,y,z\right)=x^2+y^2-z^2$;

3.8.5. $u\left(x,y,z\right)=xy+xz+yz$;

3.8.6. $u\left(x,y,z\right)=xyz(4-x-y-z)$;

3.8.7. $u\left(x,y\right)=xy+\dfrac{8}{x}+\dfrac{8}{y}$;

3.8.8. $u\left(x,y,z\right)=x+\dfrac{y^2}{4x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{2}{z}$;

3.8.9. $u\left(x,y,z\right)=x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz$.

3.9. Исследуйте на экстремум функцию $u=x\cos y+z\cos x$ в точке $M\left(\dfrac{\pi}{2};0;1\right)$.

3.10. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $u(x,y)$ в заданной области: $u(x,y)=xy-x^2y-\dfrac{1}{2}y^2x,\quad 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 2$.

4. Теоремы с доказательством.

4.1. Докажите теорему о необходимом условии локального экстремума функции нескольких переменных.

4.2. Докажите теорему о достаточных условиях локального экстремума функции нескольких переменных.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Докажите, что если $d^2u\left(M_0\right)$ - знакопеременная квадратичная форма, то функция u не имеет локального экстремума в точке M_0.

5.2. Докажите, что если в точке $M_0\left(x_0,y_0\right)$ функция $u(x,y)$ трижды дифференцируема, $du\Big|_{M_0}=0, d^2u\Big|_{M_0}=0, d^3u\Big|_{M_0}\ne 0,$ то функция u не имеет локального экстремума в точке M_0.

5.3. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_1, $f'(x_1)=0$, функция $g(x)$ дважды дифференцируема в точке x_2, $g'(x_2)=0$, $f(x_1)g(x_2)f''(x_1)g''(x_2)>0$. Докажите, что функция $u(x,y)=f(x)\cdot g(y)$ имеет локальный экстремум в точке $M(x_1,x_2)$.

5.4. Пусть функция $f(x)$ имеет локальный минимум в точке x_1, $f(x_1)>0$, функция $g(x)$ имеет локальный максимум в точке x_2, $g(x_2)>0$. Докажите, что функция $u(x,y)=f(x)\cdot g(y)$ не имеет локального экстремума в точке $M(x_1,x_2)$.

5.5. Пусть непрерывные функции $x=\varphi\left(t,s\right)$ и $y=\psi\left(t,s\right)$ имеют локальный максимум в точке $K_0\left(s_0,t_0\right)$, а дифференцируемая в точке $M_0\left(x_0,y_0\right)$ функция

$u\left(x,y\right)$ такова, что $\dfrac{\partial u}{\partial x}(M_0) > 0$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}(M_0) > 0$, причем $x_0 = \varphi\left(t_0, s_0\right)$ и $y_0 = \psi\left(t_0, s_0\right)$. Докажите, что сложная функция $u\left(\varphi(t,s), \psi(t,s)\right)$ имеет локальный максимум в точке K_0.

Тема 6. Неявные функции.

1. Определения.

1.1. Объясните, что такое неявная функция, определяемая уравнением: а) $F(x,y)=0$; б) $F(x_1, x_2, ..., x_n, y) = 0$.

1.2. Объясните, что такое система неявных функций, определяемая системой уравнений: $F_1(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ...y_m) = 0, ...F_m(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ...y_m) = 0$.

1.3. Сформулируйте определение зависимости функций $y_1 = f_1\left(x_1, x_2, ..., x_n\right), ..., y_k = f_k\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$.

1.4. Сформулируйте определение независимости функций $y_1 = f_1\left(x_1, x_2, ..., x_n\right), ..., y_k = f_k\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$.

2. Основные теоремы (без доказательства).

2.1. Сформулируйте теорему о существовании и непрерывности функции $y = f\left(x\right)$, заданной неявно уравнением $F\left(x,y\right) = 0$.

2.2. Сформулируйте теорему о дифференцируемости функции $y = f\left(x\right)$, заданной неявно уравнением $F\left(x,y\right) = 0$.

2.3. Сформулируйте теорему о существовании и непрерывности функции $y = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, заданной неявно уравнением $F(x_1, x_2, ..., x_n, y) = 0$.

2.4. Сформулируйте теорему о дифференцируемости функции $y = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, заданной неявно уравнением $F(x_1, x_2, ..., x_n, y) = 0$.

2.5. Сформулируйте теорему о существовании и дифференцируемости функций $y = f(x)$, $z = g(x)$, заданных неявно системой уравнений

$$\begin{cases} F\left(x,y,z\right) = 0, \\ G\left(x,y,z\right) = 0. \end{cases}$$

2.6. Сформулируйте теорему о достаточных условиях независимости функций.

2.7. Сформулируйте теорему о зависимости и независимости функций.

3. Вопросы и задачи.

3.1. Докажите, что уравнение $x^2+xy+y^2=3$ в окрестности точки $(1;1)$ определяет единственную функцию вида $y=y(x)$.

3.2. Докажите, что уравнение $xy+\ln\left(xy\right)=1$ в окрестности точки $(2;0.5)$ определяет единственную функцию вида $y=y(x)$.

3.3. Пусть функции $y=u\left(x\right)$, $z=v\left(x\right)$ заданы системой уравнений $f\left(x,y,z\right)=0,\quad g\left(x,y,z\right)=0$. Вычислите первый дифференциал функции $u(x)$.

3.4. Пусть функции $x=f\left(u,v\right)$, $y=g\left(u,v\right)$ заданы неявно системой уравнений $\begin{cases}F\left(x,y\right)=u,\\ G\left(x,y\right)=v.\end{cases}$ Найдите $\dfrac{\partial x}{\partial v}$.

3.5. Пусть функции $y=f\left(x\right)$, $z=g\left(x\right)$ заданы неявно системой уравнений $\begin{cases}F\left(x,y,z\right)=0,\\ G\left(x,y,z\right)=0.\end{cases}$. Найдите $\dfrac{dz}{dx}$.

3.6. Докажите, что дифференцируемая функция $z\left(x,y\right)$, определяемая уравнением $F\left(z^2-y^2,x^2+(y-z)^2\right)=0$, где F – дифференцируемая функция, является решением уравнения $(z-y)^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+xz\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy$.

3.7. Проверьте, что дифференцируемая функция $z\ (x,y)$, определяемая уравнением $F\left(x^2+y^2,\dfrac{z}{x}\right)=0$, где F – дифференцируемая функция, является решением уравнения $xy\dfrac{\partial z}{\partial x}-x^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=yz$.

3.8. Докажите, что в некоторой окрестности точки M_0 существует единственная дифференцируемая функция $y=f(x)$, определяемая уравнением $F\left(x,y\right)=0$ и найдите её первый дифференциал dy, если:

3.8.1. $F\left(x,y\right)=y^2-y-\sin x$, $M_0\left(\pi;1\right)$;

3.8.2. $F\left(x,y\right)=x^2y+xy^3-2$, $M_0\left(1;1\right)$;

3.9. Докажите, что в некоторой окрестности точки M_0 существует единственная дифференцируемая функция вида $z=z(x,y)$, определяемая уравнением $F\left(x,y,z\right)=0$, и найдите её первый дифференциал dz, если:

3.9.1. $F\left(x,y,z\right)=x^2+y^2+z^2-xyz-2$, $M_0\left(1;1;1\right)$.

3.9.2. $F\left(x,y,z\right)=z^3x+x^2+yz-3$, $M_0\left(1;1;1\right)$.

3.9.3. $F\left(x,y,z\right)=y^2+z^3+x^2yz-3$, $M_0\left(1;1;1\right)$.

3.9.4. $F\left(x,y,z\right)=y^2-xz^3+yz$, $M_0\left(0;1;-1\right)$.

3.10. Найдите первую и вторую производные, найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение достаточных условий экстремума для дифференцируемой неявной функции $y=f(x)$, определяемой уравнением $F\left(x,y\right)=0$:

3.10.1. $F\left(x,y\right)=x^3+y^3-3xy=0$;

3.10.2. $F\left(x,y\right)=8x^2y-x^4-y^4=0,\quad x>0,\quad y>0$;

3.10.3. $F\left(x,y\right)=y^2-ay-\sin x=0,\quad 0\le x\le 2\pi$.

3.11. Найдите частные производные первого порядка и первый дифференциал дифференцируемой функции $z=z(x,y)$, заданной неявно уравнением

3.11.1. $xyz=x^2+y^2+z^2$;

3.11.2. $z\cos x+y\cos z+x\cos y=3$;

3.11.3. $x^2+zx+z^2+y=0$.

3.12. Пусть известно, что в окрестности точки (x_0,y_0,z_0) данное уравнение определяет единственную дифференцируемую функцию вида $z=z(x,y)$. Найдите указанные частные производные функции $z=z(x,y)$ в точке (x_0,y_0):

3.12.1. $\operatorname{arctg}\dfrac{z}{x}=z+x+y$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$;

3.12.2. $\ln(xy+yz)=z^2+x^2+y^2-2$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

3.13. Докажите, что в окрестности точки $(1;0;1)$ уравнение $2e^{x+y-z}=x^2+z^2$ определяет единственную дважды непрерывно дифференцируемую неявную функцию вида $z=z(x,y)$, и найдите частную производную $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1;0)}$.

3.14. Докажите, что в окрестности точки $(1;1;1)$ уравнение $\operatorname{arctg} z=x+y+z-3+\dfrac{\pi}{4}$ определяет единственную дважды непрерывно дифференцируемую неявную функцию вида $z=z(x,y)$, и найдите $\left.d^2z\right|_{(1;1)}$.

3.15. Найдите такую точку $M\left(x_0, y_0, z_0\right)$, в окрестности которой система уравнений $\begin{cases} \sin x + \cos y = \sin z \\ \cos x + \sin y = \cos z \end{cases}$ определяет единственную пару дифференцируемых неявных функций вида $x\left(z\right)$, $y\left(z\right)$, и найдите $x'\left(z\right)$, $y'\left(z\right)$.

3.16. Докажите, что система уравнений $\begin{cases} x^3 + y^3 + xy = z \\ xy + yz + xz = 1 \end{cases}$ определяет единственную пару дважды дифференцируемых неявных функций вида $x\left(z\right)$, $y\left(z\right)$ в окрестности точки $M_0\left(0;1;1\right)$, и найдите $x'\left(1\right)$, $y'\left(1\right)$, $x''\left(1\right)$, $y''\left(1\right)$.

3.17. Найдите первый и второй дифференциалы функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, заданных неявно системой уравнений $\begin{cases} xu + yv = 1, \\ x + y + u + v = 0. \end{cases}$

3.18. Найдите $du(x,y)$ и $dv(x,y)$, если $u(x,y)$ и $v(x,y)$ - пара неявных функций, определяемых системой уравнений $\begin{cases} uv + xy = 2 \\ ux^2 + vy^2 = 2. \end{cases}$

3.19. Найдите такую точку $M(x_0, y_0, u_0, v_0)$, в окрестности которой система уравнений $\begin{cases} u^2 + v^2 = x \\ uv = y \end{cases}$ определяет единственную пару дифференцируемых неявных функций вида $u = u\left(x,y\right)$ и $v = v\left(x,y\right)$ и найдите $u_x(x,y)$, $v_x(x,y)$.

3.20. Преобразуйте дифференциальное уравнение, введя новую независимую переменную t:

3.20.1. $x^2 y'' + xy' + 4y = 0$, если $x = e^t$.

3.20.2. $y^2 + (x^2 - xy)y' = 0$, если $y = tx$.

3.21. Преобразуйте дифференциальное уравнение, введя новые переменные t и u, где $u = u(t)$:

3.21.1. $x^3 y'' + xyy' - y^2 = 0$, $u = u(t)$, если $x = e^t$, $y = u \cdot e^t$.

3.21.2. $\left(1 - x^2\right)^2 y'' = -y$, если $x = \operatorname{th} t$, $y = \dfrac{u}{\operatorname{ch} t}$

3.22. Преобразуйте дифференциальное уравнение, перейдя к полярным координатам $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$, где $\rho = \rho(\varphi)$:

3.22.1. $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$.

3.22.2. $\dfrac{x + yy'}{xy' - y} = 1$.

3.23. Преобразуйте дифференциальное уравнение в частных производных, введя новые независимые переменные u и v:

3.23.1. $yz_x - xz_y = 0$, если $u = x,\, v = x^2 + y^2$.

3.23.2. $(x+y)z_x - \left(x-y\right)z_y = 0$, если $u = \ln\sqrt{x^2+y^2},\, v = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

3.24. Преобразуйте дифференциальное уравнение в частных производных, введя новую функцию $v = v(x,y),\, u = ve^{-x-y}$:

$$u_{xy} + u_x + u_y = -u.$$

3.25. Преобразуйте дифференциальное уравнение в частных производных, введя новые переменные u, v и w, где $w = w(u,v)$:

3.25.1. $z_x + z_y = 4x$, если $u = x, \quad v = x - y, \quad w = x - y + z$;

3.25.2. $(x+z)z_x + (y+z)z_y = x + y + z$, если $u = x + z,\, v = y + z$.

3.25.3. $2z_{xx} + z_{xy} - z_{yy} + z_x + z_y = 0$, если $u = x + 2y + 2,\, v = x - y - 1$.

3.25.4. $yz_{yy} + 2z_y = \dfrac{2}{x}$, $w = w(u,v)$, если $yu = x,\, v = x,\, w = xz - y$.

3.25.5. $z_{xx} + 2z_{xy} + z_{yy} + z_{yy} = 0$, если $u = x + y,\, v = x - y,\, w = xy - z$.

4. Теоремы с доказательством.

4.1. Докажите теорему о существовании и непрерывности функции $y = f\left(x\right)$, заданной неявно уравнением $F\left(x,y\right) = 0$.

4.2. Докажите теорему о дифференцируемости функции $y = f\left(x\right)$, заданной неявно уравнением $F\left(x,y\right) = 0$.

4.3. Докажите теорему о существовании и непрерывности функции $y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, заданной неявно уравнением $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$.

4.4. Докажите теорему о существовании и дифференцируемости функций $y = f(x)$, $z = g(x)$, заданных неявно системой уравнений $\begin{cases} F\left(x,y,z\right) = 0, \\ G\left(x,y,z\right) = 0, \end{cases}$

где $x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$.

4.5. Докажите теорему о достаточных условиях независимости функций.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Найдите du и dv, если функции $u = f(x,y)$, $v = g(x,y)$, заданы неявно системой уравнений $\begin{cases} F\left(x,y,u,v\right) = 0, \\ G\left(x,y,u,v\right) = 0. \end{cases}$ Сформулируйте достаточные условия существования и дифференцируемости этих неявных функций.

5.2. Найдите du и dv, если функции $u = f(x,y)$, $v = g(x,y)$, заданы неявно системой уравнений $\begin{cases} x = F(u,v), \\ y = G(u,v). \end{cases}$ Сформулируйте достаточные условия существования и дифференцируемости этих неявных функций.

Тема 7. Условный экстремум.

1. Определения.

1.1. Сформулируйте определение условного экстремума функции $u = f(x_1,...,x_m)$ при условии связи $F_i(x_1,...,x_n) = 0 \ \ (i = 1,2,...,m < n)$.

1.2. Напишите выражение для функции Лагранжа в задаче об условном экстремуме.

2. Основные теоремы (без доказательства).

2.1. Сформулируйте теорему о необходимых условиях Лагранжа условного экстремума функции $u = f(x_1,...,x_m)$ с условием связи $F_i(x_1,...,x_n) = 0 \ \ (i = 1,2,...,m < n)$.

3. Вопросы и задачи.

Используя метод Лагранжа, найдите все точки условного экстремума функции u при заданных условиях связи:

3.1. $u(x,y) = x^2 + y^2$ при условии $x + y = 2$;

3.2. $u(x,y) = x + y$ при условии $x^2 + y^2 = 2$;

3.3. $u(x,y) = x + y$ при условии $xy = 1$ в области $x > 0, y > 0$;

3.4. $u(x,y) = xy$ при условии $x + y = 2$ в области $x > 0, y > 0$;

3.5. $u(x,y) = xy$ при условии $x^3 + y^3 - 2xy = 0$;

3.6. $u(x,y) = x^2 y$ при условии $2x + y - 3 = 0$ в области $x > 0$, $y > 0$;

3.7. $u(x,y) = 2x + y$ при условии $x^2 y - 1 = 0$ в области $x > 0, y > 0$;

3.8. $u(x,y) = xy^3$ при условии $x + 3y - 4 = 0$ в области $x > 0, y > 0$;

3.9. $u(x,y,z) = x + y + z$ при условии $xyz = 1$;

3.10. $u(x,y) = x + 3y$ при условии $xy^3 = 1$ в области $x > 0$, $y > 0$;

3.11. $u(x,y) = 2x + 3y$ при условии $x^2 y^3 - 1 = 0$ в области $x > 0, y > 0$;

3.12. $u(x,y) = x^2 y^3$ при условии $2x + 3y - 5 = 0$ в области $x > 0, y > 0$;

3.13. $u(x,y,z) = xyz$ при условии $x+y+z=3$ в области $x>0, y>0, z>0$;

3.14. $u(x,y,z) = xyz$ при условиях $x^2+y^2+z^2=1, \quad x+y+z=0$;

3.15. $u(x,y,z) = x^2y^3z^4$ при условии $2x+3y+4z=9$.

4. Теоремы с доказательством.

4.1. Докажите теорему о необходимых условиях экстремума функции $u(x,y)$ с условием связи $f(x,y)=0$ в форме Лагранжа.

4.2. Докажите теорему о необходимых условиях экстремума функции $u(x,y,z)$ с условием связи $f(x,y,z)=0$ в форме Лагранжа.

4.3. Докажите теорему о необходимых условиях экстремума функции $u(x,y,z)$ с двумя условиями связи $f(x,y,z)=0$, $g(x,y,z)=0$ в форме Лагранжа.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Пусть в точке $M_0(x_0,y_0)$ выполнены необходимые (в форме Лагранжа) условия экстремума функции $u(x,y)$ при условии связи $f(x,y)=0$ и пусть $grad u(x_0,y_0) \neq 0$, $grad f(x_0,y_0) \neq 0$. Докажите, что в точке $M_0(x_0,y_0)$ градиенты функций $u(x,y)$ и $f(x,y)$ колинеарны.

5.2. Пусть в точке $M_0(x_0,y_0)$ выполнены необходимые (в форме Лагранжа) условия экстремума функции $u(x,y)$ с условием связи $ax+by=c$ и знакоопределенной квадратичной формой $d^2u\big|_{M_0} > 0$, $M_0(x_0,y_0)$. Докажите, что в точке $M_0(x_0,y_0)$ имеет место экстремум указанной функции с указанным условием связи.

5.3. Пусть в точке $M_0(x_0,y_0)$ выполнены необходимые (в форме Лагранжа, $\lambda \neq 0$) условия экстремума функции $u(x,y)=ax+by$ с условием связи $f(x,y)=0$ и знакоопределенной квадратичной формой $d^2f\big|_{M_0} > 0$. Докажите, что в точке $M_0(x_0,y_0)$ имеет место экстремум указанной функции с указанным условием связи.

Тема 8. Кратные интегралы.

1. Определения.

1.1. Сформулируйте определение квадрируемой плоской фигуры.

1.2. Напишите формулу площади криволинейной трапеции.

1.3. Сформулируйте определение интегральной суммы (для двойного интеграла).

1.4. Сформулируйте определение предела интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю.

2. Основные теоремы (без доказательства).

2.1. Сформулируйте теорему о сведении двойного интеграла к повторному.

2.2. Сформулируйте теорему о формуле замены переменных для двойного интеграла.

2.3. Сформулируйте теорему о сведении тройного интеграла к повторному.

2.4. Сформулируйте теорему о формуле замены переменных для тройного интеграла.

2.5. Напишите формулы для массы и координат центра тяжести плоской фигуры (материальной пластины).

2.6. Напишите формулы для моментов инерции плоской фигуры (материальной пластины).

3. Вопросы и задачи.

3.1. Измените порядок интегрирования в повторных интегралах. Вычислите повторный интеграл:

3.1.1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 xy\,dx$;

3.1.2. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x} y\,dy$;

3.1.3. $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{0.5y-2}^{0.5y} \left(x+1\right)dx$;

3.1.4. $\int\limits_0^1 \left(y+1\right)dy \int\limits_0^{3-y} dx$;

3.1.5. $\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} 2y\,dy$;

3.1.6. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} 2y\,dy$;

3.1.7. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\arcsin x}^{\pi/2} \cos y\,dy$.

3.2. Сведите двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ к повторному двумя способами:

3.2.1. $D = \left\{(x,y) : \left|x\right| + \left|y\right| \le 1\right\}$;

3.2.2. $D = \left\{(x,y) : y^2 \le x+2,\ y \ge x\right\}$.

3.3. Что такое якобиан отражения при замене переменных в двойном интеграле? Каков его геометрический смысл?

3.4. Вычислите:

3.4.1. $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy, \quad D=\left\{x^2+y^2\le 6\right\};$

3.4.2. $\iint\limits_D \left(x^2-y^2\right)dxdy, \quad D=\left\{1\le x^2+y^2\le 4\right\}\bigcap\left\{\dfrac{\pi}{6}\le \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\le\dfrac{\pi}{4}\right\}\bigcap x>0.$

3.5. Найдите замену переменных $\left(u,v\right)\leftrightarrow\left(x,y\right)$, при которой область D на плоскости (x,y), ограниченная линиями $xy=1, \quad xy=2, \quad x^2y^3=3, \quad x^2y^3=4$, $x>0, \quad y>0$, переходит в прямоугольник на плоскости (u,v). Вычислите площадь области D.

3.6. Найдите замену переменных $\left(u,v\right)\leftrightarrow\left(x,y\right)$, при которой область D на плоскости (x,y), ограниченная линиями $xe^y=1, \quad xe^y=2, \quad x=e^y, \quad x=2e^y$, переходит в прямоугольник на плоскости (u,v). Вычислите площадь области D.

3.7. Найдите замену переменных $\left(u,v\right)\leftrightarrow\left(x,y\right)$, при которой область D на плоскости (x,y), ограниченная линиями $x^2y=1, \quad x^2y=8, \quad x=y, \quad x=27y$, $x>0, \quad y>0$, переходит в прямоугольник на плоскости (u,v). Вычислите площадь области D.

3.8. Вычислите массу, статические моменты и моменты инерции однородной пластинки с плотностью $\rho=1$, ограниченной линиями:

3.8.1. $0\le x\le 2, 0\le y\le x;$

3.8.2. $0\le x\le 4, 0\le y\le x(4-x);$

3.8.3. $0\le x\le \pi, 0\le y\le \sin x;$

3.8.4. $10^{-3}\le x\le 1, 0\le y\le x^{-1}$.

3.9. Вычислите координаты центра тяжести и моменты инерции относительно осей координат плоской фигуры с плотностью $\rho=1$, если фигура ограничена линиями $x=1, \quad x=2, \quad y=0, \quad y=x$.

3.10. Вычислите координаты центра масс плоской фигуры плотностью $\rho=1$, ограниченной кривыми $y=\cos x, \quad y=\sin x \quad \left(\pi/4\le x\le 5\pi/4\right)$.

3.11. Вычислите момент инерции относительно оси Oy плоской фигуры плотностью $\rho=1$, ограниченной линиями $x=0, \quad x=1, \quad y=0, \quad y=\arcsin x$.

3.12. Сведите тройной интеграл $\iiint\limits_G f\left(x,y,z\right)dxdydz$ к повторному, если G - область, ограниченная поверхностями $x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad x+y+z=2$.

3.13. Вычислите:

3.13.1. $\iint\limits_{x^2+y^2\le 4} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$;

3.13.2. $\iint\limits_{x^2+y^2\le \pi/4} \sin\left(x^2+y^2\right)dxdy$;

3.13.3. $\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\le 1\\ z\ge 0}} e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\,dxdydz$.

3.14. Вычислите тройной интеграл $\iiint\limits_G (x^2+y^2)dxdydz$, где область G ограничена поверхностями $x^2+y^2=2z,\ \ z=2$.

3.15. С помощью тройного интеграла вычислите объём фигуры, ограниченной поверхностями:

3.15.1. $x^2+y^2=z,\quad x^2+y^2=1,\quad z>0,\quad x>0$;

3.15.2. $x^2+y^2+z^2\le 4,\ \ z=1,\left(z\ge 1\right)$;

3.15.3. $x^2+y^2+z^2=2z+1,\ \ z\ge 0$.

3.16. Вычислите моменты инерции относительно координатных плоскостей однородного тела с плотностью $\rho=1$, ограниченного поверхностями $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad z=0,\quad \left(z\ge 0\right)$.

3.17. Вычислите координаты центра масс и момент инерции относительно начала координат тела с плотностью $\rho\left(x,y,z\right)=x^2+y^2+z^2$, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=4,\quad x^2+y^2=z^2\quad \left(z\ge 0\right)$.

3.18. Пусть G – однородное тело, ограниченное поверхностями $x^2+y^2+z^2=4,\quad z=1\quad \left(z\ge 1\right)$ с плотностью $\rho=1$. Найдите силу притяжения этим телом материальной точки массы m_0, находящейся в начале координат.

4. Теоремы с доказательством.

4.1. Докажите теорему о сведении двойного интеграла к повторному.

4.2. опишите схему доказательства теоремы о замене переменных в двойном интеграле.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Измените порядок интегрирования в интеграле $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz$ (решите задачу всеми возможными различными способами).

5.2. С помощью тройного интеграла вычислить объём фигуры, ограниченной поверхностью $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 = z,\ x > 0$.

5.3. С помощью тройного интеграла вычислите объём меньшей части сферы, $x^2+y^2+z^2=1$, вырезаемой из нее гиперболическим параболоидом $x^2-y^2=z$.

5.4. Вычислите $\iiint\limits_G \frac{dxdydz}{2a+z}$, если область G ограничена цилиндрами $x^2+z^2=a^2$ и $y^2+z^2=a^2$.

Тема 9. Криволинейные интегралы.

1. Определения.

1.1. Сформулируйте определение длины дуги кривой.

1.2. Сформулируйте определение криволинейного интеграла I рода от функции $f\left(x,y\right)$ по заданной кривой.

1.3. Сформулируйте определение криволинейного интеграла II рода $\int\limits_{AB} P\left(x,y\right)dx$.

1.4. Сформулируйте определение криволинейного интеграла II рода $\int\limits_{AB} Q\left(x,y\right)dy$.

2. Основные теоремы и формулы (без доказательства).

2.1. Напишите формулу длины кривой, заданной:

2.1.1. параметрически;

2.1.2. уравнением $y=f\left(x\right),\ a \le x \le b$.

2.2. Сформулируйте теорему о вычислении криволинейного интеграла $\int\limits_L f\left(x,y\right)dl$ с помощью определенного интеграла.

2.3. Сформулируйте теорему о вычислении криволинейного интеграла $\int\limits_{AB} P\left(x,y\right)dx$ с помощью определенного интеграла.

2.4. Сформулируйте теорему о вычислении криволинейного интеграла $\int\limits_{AB} Q(x,y)\,dy$ с помощью определенного интеграла.

2.5. Напишите формулы для вычисления массы, координат центра тяжести и моментов инерции материальной плоской кривой с плотностью $\rho(x,y)$.

2.6. Напишите формулу, связывающую криволинейные интегралы первого и второго рода.

2.7. Сформулируйте теорему о формуле Грина.

2.8. Сформулируйте теорему об условиях независимости интеграла второго рода от пути интегрирования.

3. Вопросы и задачи.

3.1. Пусть G – ограниченная область на плоскости с гладкой границей L. Запишите формулу, выражающую площадь области G через интеграл вида $\oint\limits_{L} f(x,y)\,dx$.

3.2. Пусть G – ограниченная область на плоскости с гладкой границей L, площадью S и поверхностной плотностью $\rho = 1$. Запишите формулы для вычисления x и y – координат центра тяжести области G через интегралы вида $\oint\limits_{L} f(x,y)\,dx$; $\oint\limits_{L} f(x,y)\,dy$.

3.3. Пусть G – ограниченная область на плоскости с гладкой границей L. Запишите в виде двойного интеграла по области G выражение для работы силы $\vec{F}(x,y) = (P(x,y);Q(x,y))$ при перемещении материальной точки по замкнутому контуру L против часовой стрелки, если функции P и Q непрерывно дифференцируемы в G.

3.4. Вычислите криволинейные интегралы первого рода:

3.4.1. $\int\limits_{L} 1dl$, где кривая L задана уравнениями $x = t,\quad y = \dfrac{t^2}{2}$, $0 \le t \le 1$;

3.4.2. $\int\limits_{L} ydl$, где кривая L задана уравнением $y = e^x$, $0 \le x \le 2$;

3.4.3. $\int\limits_{L} xydl,$ где $L-$ ломаная линия, заданная уравнением $y = 1-|x|, -1 \le x \le 1$.

3.4.4. $\int\limits_{L} x^2ydl,$ где $L = \left\{(x,y) : x = 4\cos t,\ y = \sin 2t,\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

3.5. Вычислите криволинейные интегралы второго рода:

3.5.1. $\int\limits_{AB} xdx + ydy$, где кривая AB задана уравнением $y = x^2,\quad A(0,0),\quad B(1,1)$.

3.5.2. $\int\limits_L (2-y)dx + xdy$, где кривая L задана уравнениями $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ \ 0 \le t \le 2\pi$ и пробегается в направлении возрастания параметра t.

3.5.3. $\oint\limits_L xdy + 2ydx$, где контур L – граница кругового сектора, состоящая из двух отрезков прямых $y = 0$ и $y = x$ и дуги окружности $x^2 + y^2 = 1$, расположенной в первом квадранте.

3.5.4. $\int\limits_L xydx - x^3y^3dy$, где L – замкнутый контур, заданный уравнением $\left|x-y\right| + \left|x+y\right| = 1$.

3.5.5. $\int\limits_L ydx + zdy + xdz$, где L – кривая, заданная уравнениями $x = \cos t,\ \ y = \sin t,\ \ z = t,\ \ 0 \le t \le 2\pi$ и пробегаемая в направлении возрастания параметра t.

3.5.6. $\int\limits_L ydx + xdy + dz$, где L – отрезок кривой, заданной в параметрическом виде уравнениями $\left\{x = \sin t,\ y = \cos t, z = t^2\right\}$, $0 \le t \le \pi$

3.5.7. $\int\limits_L ydx + ydy + \dfrac{z}{y}dz$, где L – отрезок кривой, заданной в параметрическом виде уравнениями $\left\{x = \ln t,\ y = t, z = t^2\right\}$, где $1 \le t \le e$.

3.5.8. $\int\limits_L ydx - xydy + dz$, где L – отрезок кривой, заданной в параметрическом виде уравнениями $\left\{x = e^t,\ y = t, z = t^2\right\}$, где $0 \le t \le 1$.

3.6. Вычислите длину кривой, заданной уравнением $y = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$, $0 \le x \le 3$.

3.7. Вычислите массу кривой, заданной уравнением $y = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$, $0 \le x \le 3$ если линейная плотность $\rho(x) = 2\sqrt{1+x}$.

3.8. Вычислите x-координату центра масс кривой, заданной уравнением $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, если линейная плотность постоянна.

3.9. Вычислите момент инерции относительно оси Ox кривой, заданной уравнением $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi$, если линейная плотность $\rho \equiv 1$.

3.10. Вычислите момент инерции относительно оси Ox кривой $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi$; линейная плотность $\rho(t) = \sin t$.

3.11. Найдите y-координату силы притяжения материальной точки массы m_0 дугой однородной окружности массы M и радиуса R. Материальная точка помещена в центре этой окружности, расположенной на плоскости OXY в области $x \ge 0,\ y \ge 0$. (Сила притяжения материальной точки массой m_0 однородной кривой плотности ρ_0 может быть вычислена по формуле $\vec{F} = \gamma m_0 \int\limits_L \frac{\vec{r}}{r^3} \rho_0 dl$.)

3.12. Вычислите x- координату центра тяжести кривой L, являющейся пересечением поверхности $9x^2 + y^2 = z^2$ и плоскости $z = 2x + 5$.

3.13. Вычислите z- координату центра тяжести кривой, заданной как пересечение поверхности $x^2 + 9y^2 = z^2 + 4$ и плоскости $z = 2y - 5$.

3.14. Вычислите работу силы $\mathbf{F} = \left\{x - y, 2x + y^2\right\}$ вдоль части параболы $x = y^2$, пробегаемой от точки $A(1, -1)$ до точки $B(1, 1)$.

3.15. Вычислите работу поля $\vec{F} = \left\{2 - y, x\right\}$ вдоль кривой L, заданной уравнениями $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ 0 \le t \le 2\pi$ и пробегаемой в направлении возрастания параметра t.

3.16. Вычислите работу поля $\vec{F} = \left\{-y; x\right\}$ вдоль замкнутого контура, заданного уравнением $\left|x\right| + \left|y\right| = 1$, пробегаемого против часовой стрелки.

3.17. Вычислите работу поля $\vec{F} = \left\{e^x - y; 1 + e^y\right\}$ вдоль замкнутого контура, ограниченного отрезками кривых $y = x^2,\ y = x,\ x \ge 0$, пробегаемого против часовой стрелки.

3.18. Вычислите работу поля $\vec{F} = \left\{e^x; x + y\right\}$, вдоль замкнутого контура, заданного уравнениями $x = a\cos t, y = b\sin t, 0 \le t \le 2\pi, a > 0, b > 0$. Обход контура против часовой стрелки.

3.19. Вычислите работу поля $\vec{F} = \left\{y; z; x\right\}$ вдоль кривой L, заданной уравнениями $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t, 0 \le t \le 2\pi$ и пробегаемой в направлении возрастания параметра t.

3.20. Вычислите работу силы $\mathbf{F} = \left\{y, x, 0\right\}$ вдоль контура, заданного как пересечение эллипсоида $3x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и плоскости $z = x - 2$, пробегаемого против часовой стрелки, если смотреть из точки (0,0,-3).

3.21. Вычислите интеграл $I = \oint\limits_L \left(x\cos\alpha + y\cos\beta \right) dl$, где L – замкнутая гладкая кривая, ограничивающая область площади S; α и β - углы между вектором внешней нормали **n** к кривой L в точке $M\left(x,y\right)$ и осями Ox и Oy.

3.22. Докажите, что если L – замкнутый контур, $n-$ нормаль к кривой и $\mathbf{l}$ – постоянный вектор, то $\oint\limits_L \cos\left(\mathbf{l},\mathbf{n}\right) ds = 0$.

3.23. С помощью криволинейного интеграла найдите площадь области, ограниченной:

3.23.1. эллипсом $x = a\sin t,\ y = b\cos t,\ 0 \le t \le 2\pi,\ a > 0,\ b > 0$;

3.23.2. параболой $(x+y)^2 = 2ax \quad \left(a > 0\right)$ и осью Ox.

3.23.3. астроидой $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

3.24. С помощью формулы Грина вычислите интеграл $\int\limits_C \frac{2xdx + 2dy}{x^2 + 2y}$, где С – дуга окружности $\left(x-3\right)^2 + y^2 = 1,\ \ x \ge 1$. Дуга пробегается против часовой стрелки.

3.25. С помощью формулы Грина вычислите интеграл $\int\limits_C e^{xy}\left(\left(y\cos x - \sin x\right)dx + x\cos x dy\right)$, где С – дуга окружности $x^2+y^2=1,\ y \ge 0$. Дуга пробегается против часовой стрелки.

4. Теоремы с доказательством.

4.1. Докажите теорему о длине дуги кривой, заданной параметрически.

4.2. Докажите теорему о вычислении криволинейного интеграла первого рода с помощью определённого интеграла.

4.3. Докажите теорему о вычислении криволинейного интеграла второго рода с помощью определённого интеграла.

4.4. Докажите теорему о формуле Грина.

4.5. Докажите теорему об условиях независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Пусть число $l(t)$ равно длине кривой L на плоскости, заданной уравнением $y = \frac{x^2}{2},\ 0 \le x \le t$. Найдите а) $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{l(t)}{t^2}$; б) $\frac{dl(t)}{dt}$; в) $\frac{d^2 l(t)}{dt^2}$.

5.2. Докажите, что если функция $u\left(x,y\right)$ имеет в замкнутой области G непрерывные производные второго порядка, то справедлива формула

$\iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dxdy = -\iint\limits_G u\Delta u dxdy + \int\limits_L u\frac{\partial u}{\partial n}dl$, где L – гладкий контур, ограничивающий область G, $\frac{\partial u}{\partial n}$ - производная по направлению внешней нормали к L.

5.3. Пусть функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ и их частные производные первого и второго порядка непрерывны в замкнутой области G, ограниченной гладкой кривой L. Докажите, что справедлива формула: $\oint\limits_L \begin{vmatrix} u & v \\ \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \end{vmatrix} dl = \iint\limits_G \begin{vmatrix} u & v \\ \Delta u & \Delta v \end{vmatrix} dxdy$ (вторая формула Грина), где $\frac{\partial u}{\partial n}$ - производная по направлению внешней нормали к L, $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, а интеграл в левой части есть криволинейный интеграл первого рода.

5.4. Применяя формулу Грина, найти $\lim\limits_{d(S)\to 0} \frac{1}{S}\oint\limits_L (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})dl$, где S – площадь области, ограниченной контуром L, окружающим точку (x_0, y_0), $d(S)$ - диаметр области S, $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к контуру L и $\mathbf{F} = \{x, y\}$.

Тема 10. Поверхностные интегралы.

1. Определения.

1.1. Сформулируйте определение площади поверхности.

1.2. Сформулируйте определение поверхностного интеграла первого рода.

1.3. Сформулируйте понятие стороны поверхности.

1.4. Сформулируйте определение поверхностного интеграла второго рода.

2. Основные теоремы и формулы (без доказательства).

2.1. Запишите формулу площади поверхности, заданной уравнением $z = h(x,y)$, $(x,y)\in D$, и сформулируйте условия ее применимости.

2.2. Запишите формулу площади поверхности, заданной параметрически, и сформулируйте условия ее применимости.

2.3. Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла первого рода $\iint\limits_S f\left(x,y,z\right)d\sigma$ при условии, что поверхность S задана уравнением $z = z\left(x,y\right), \quad \left(x,y\right) \in G,\ G-$ область на плоскости (x,y).

2.4. Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла первого рода $\iint\limits_S f\left(x,y,z\right)ds$ при условии, что поверхность S задана в параметрической форме.

2.5. Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла второго рода $\iint\limits_S f\left(x,y,z\right)\cos\gamma ds$ при условии, что поверхность S задана в виде $z = z\left(x,y\right), \quad \left(x,y\right) \in G,$

$G-$ область на плоскости (x,y), γ - угол между нормалью к выбранной стороне поверхности и осью Oz.

2.6. Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла второго рода $\iint\limits_S f\left(x,y,z\right)\cos\alpha ds$ при условии, что поверхность S задана в параметрической форме, $\alpha-$ угол между нормалью к выбранной стороне поверхности и осью Ox.

2.7. Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла второго рода $\iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$ при условии, что поверхность S задана в параметрической форме.

3. Вопросы и задачи.

3.1. Найдите вектор нормали и запишите уравнение касательной плоскости к поверхности S в заданной точке М:

3.1.1. $S:\ z = x^2 + y^2$; $M(3,4,25)$.

3.1.2. $S:\ x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 2$; $M(1,1,0)$.

3.1.3. $S: x = 2uv, y = u + v, z = u^2 + v^2$,
$M(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$, *где* $u_0 = 1,\ v_0 = -1$.

3.2. Найдите площадь поверхности с помощью двойного интеграла:

3.2.1. $z = 3x + 4y$, $x^2 + y^2 \le 1$.

3.2.2. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \le 1$.

3.2.3. $2z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \le 1$.

3.2.4. $z = xy$, $x^2 + y^2 \le a^2$.

3.2.5. $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \ge 0$, $x^2 + y^2 \le \dfrac{1}{2}$.

3.2.6. $x = u\cos v, y = u\sin v, z = v, 0 \le u \le a, 0 \le v \le 2\pi$.

3.3. Вычислите поверхностные интегралы I рода.

3.3.1. $\iint_S ds$, где поверхность S: $x + y + z = 1$, $x \in [-1;1]$, $y \in [-1;1]$.

3.3.2. $\iint_S (x + y + z)ds$, где поверхность S: $x + y + z = 1$, $x \in [-1;1]$, $y \in [-1;1]$.

3.3.3. $\iint_S (x + y + z)ds$, где поверхность S: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \ge 0$.

3.3.4. $\iint\limits_S (x^2 + y^2)ds$, где S – граница тела $V = \{(x, y, z): \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1\}$.

3.3.5. $\iint\limits_S (x^2 + y^2 + z - \frac{1}{2})ds$, где S – часть параболоида $2z = 2 - x^2 - y^2$, $z \ge 0$.

3.4. Вычислите поверхностные интегралы второго рода:

3.4.1. $\iint\limits_S dxdy$, если S – часть конической поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 1$, нормаль к которой образует острый угол с осью Oz.

3.4.2. $\iint\limits_S dydz$, если S – часть конической поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 1$, нормаль к которой образует острый угол с осью Oz.

3.4.3. $\iint\limits_S dxdy$, если S – поверхность $x + y + z = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, нормаль к которой образует острый угол с осью Oz.

3.4.4. $\iint\limits_S dydz$, если S – поверхность $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, нормаль к которой образует острый угол с осью Oz.

3.4.5. $\iint\limits_S dxdz$, если S – поверхность $x^2 + y^2 = 1 - z$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, нормаль к которой образует острый угол с осью Oz.

3.4.6. $\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, где S – верхняя сторона поверхности $x + y + z = 1$, $x \in [-1;1]$, $y \in [-1;1]$, то есть нормаль к поверхности составляет острый угол с осью Oz.

3.4.7. $\iint\limits_S (y^2 + z^2)dxdy$, где S - часть внешней стороны цилиндрической поверхности $z = \sqrt{a^2 - x^2}$, $0 \le y \le b$.

3.4.8. $\iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2)dxdy$, где S - часть внешней стороны конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le c$ (нормаль образует тупой угол с осью Oz).

3.4.9. $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, где S - часть внутренней стороны гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = 1, 0 \le z \le 3$.

3.4.10. $\iint_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, где S – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

3.5. Вычислите площадь поверхности S: $\left\{z = xy;\ x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0\right\}$.

3.6. Найдите координаты центра тяжести части однородной сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$ с помощью поверхностного интеграла.

3.7. Вычислите x - компоненту силы притяжения материальной точки массы m, помещённой в начало координат, частью сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x \ge 0$, $y \ge 0\ z \ge 0$. Поверхностная плотность сферы $\rho \equiv 1$.

3.8. Вычислите силу притяжения материальной точки массы m_0, помещённой в начало координат, частью цилиндра $x^2 + y^2 = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ 0 \le z \le 1$. Поверхностная плотность цилиндра $\rho = 1$.

4. Теоремы с доказательством.

4.1. Докажите теорему о вычислении площади поверхности, заданной уравнением $z = h\left(x, y\right),\ \ \left(x, y\right) \in D$, с помощью двойного интеграла.

4.2. Докажите теорему о вычислении поверхностного интеграла первого рода $\iint\limits_S f\left(x, y, z\right)ds$ с помощью двойного интеграла, если поверхность S задана уравнением $z = z(x, y)$.

4.3. Докажите, что если функция $P(x,y,z)$ непрерывна на поверхности S, то поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S P\left(x, y, z\right)\cos\alpha d\sigma$ существует. Требования к поверхности S сформулируйте самостоятельно.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Вычислите площадь части конической поверхности $x^2 + y^2 = \left(z - 1\right)^2$, $z \le 1$, заключенной внутри цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = y$.

5.2. Вычислите поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S xdydz$, где S – часть внешней стороны сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, вырезанная конической поверхностью $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

5.3. Вычислите поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S z^2dxdy$, где S – часть внешней стороны сферы $x^2+y^2+z^2=4$, $z\ge 0$, вырезанная цилиндрической поверхностью $x^2+y^2=3$.

5.4. Вычислите поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S zdxdz$, где S – часть внешней стороны сферы $x^2+y^2+z^2=1$, $x\ge 0$, $z\ge 0$, вырезанной цилиндрической поверхностью $x^2+y^2=y$.

5.5. Найдите момент инерции относительно оси Oz части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, $z\ge 0$, $y\ge 0$, заключенной внутри цилиндрической поверхности $x^2+y^2=x$. Поверхностная плотность $\rho\left(x,y,z\right)=zy$.

5.6. Вычислите x – координату центра масс части гиперболического параболоида $x^2-y^2=2z$, вырезанной цилиндрической поверхностью $x^2+y^2=x$. Поверхностная плотность $\rho=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$.

Тема 11. Кривые на плоскости.

1. Определения.

1.1. Сформулируйте определение того, что две кривые на плоскости касаются (соприкасаются) в данной точке.

1.2. Сформулируйте определение порядка касания плоских кривых в данной точке.

1.3. Сформулируйте определение особой точки плоской кривой, заданной:

1.3.1. уравнением $F(x,y)=0$;

1.3.2. параметрически.

1.4. Сформулируйте определение огибающей однопараметрического семейства плоских кривых.

1.5. Сформулируйте определение кривизны плоской кривой.

2. Основные теоремы и формулы (без доказательства).

2.1. Сформулируйте теорему о необходимых и достаточных условиях для того, чтобы порядок касания двух плоских кривых в данной точке был равен *n*.

2.2. Сформулируйте теорему о необходимых условиях огибающей однопараметрического семейства плоских кривых.

2.3. Запишите формулу для вычисления кривизны плоской кривой, заданной уравнением $y=f(x)$.

2.4. Запишите формулу для вычисления в данной точке радиуса кривизны кривой, заданной уравнением $y=f(x)$.

2.5. Запишите формулу для вычисления кривизны плоской кривой, заданной в параметрической форме.

3. Вопросы и задачи.

3.1. Какой порядок касания с осью Ox имеет в начале координат кривая, заданная уравнением:

3.1.1. $y = 1 - \cos x$;

3.1.2. $y = e^x - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right)$;

3.1.3. $y = \operatorname{tg} x - \sin x$.

3.2. При каком выборе коэффициентов a, b и c порядок качания параболы $y = ax^2 + bx + c$ и кривой $y = e^x$ в точке с абсциссой $x = x_0$ равен 2?

3.3. Найдите огибающую однопараметрического семейства плоских кривых (C – параметр):

3.3.1. $y = Cx + \dfrac{a}{C} \quad (a = \text{const})$;

3.3.2. $y = Cx - \ln C$;

3.3.3. $2C^2(y - Cx) = 1$;

3.3.4. $y^2 = 2Cx + C^2$.

3.4. Найдите радиус кривизны параболы $y^2 = 2px$ в точке $(x_0, \sqrt{2px_0})$.

4. Теоремы с доказательством.

4.1. Докажите теорему о необходимых и достаточных условиях для того, чтобы порядок касания двух плоских кривых в данной точке был равен n.

4.2. Докажите теорему о необходимых условиях огибающей однопараметрического семейства кривых.

4.3. Выведите формулу для вычисления в данной точке кривизны кривой, заданной уравнением $y = f(x)$.

4.4. Выведите формулу для вычисления в данной точке кривизны кривой, заданной в параметрической форме.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Выведите формулу для вычисления в данной точке кривизны плоской кривой, заданной в неявной форме.

5.2. Выведите формулу для вычисления в данной точке радиуса кривизны плоской кривой, заданной в неявной форме.

5.3. Определите радиус кривизны кривой в произвольной точке, если кривая задана уравнением:

5.3.1. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$;

5.3.2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

5.3.3. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Литература.

1. В.А.Ильин, Э.Г.Позняк. Основы Математического анализа. Ч.1-2. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
2. Б.М.Будак, С.В.Фомин. Кратные интегралы и ряды. ФИЗМАТЛИТ, 2002.
3. Г.М.Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. М.: ФИЗМАТГИЗ, 1960.
4. В.Ф.Бутузов, Н.Ч.Крутицкая, Г.Н.Медведев, А.А.Шишкин. Математический анализ в вопросах и задачах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000.
5. Б.П.Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: АСТ, 2002.
6. И.А.Виноградова, С.Н.Олехник, В.А.Садовничий. Задачи и упражнения по математическому анализу. В 2 кн. М.: Высш.шк. 2000.