Лекция 8. Слабая и сильная производные

Корпусов Максим Олегович, Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

9 апреля 2012 г.

Определение слабой производной

Определение 1. *Функция* $v(x)$ *называется слабой частной производной функции* $u(x)$ *и пишем*

$$v(x) = \partial^\alpha u(x),$$

если для всякой функции $\varphi(x) \in \mathbb{C}_c^\infty(\Omega)$ *имеет место равенство*

$$(-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega u(x) \partial^\alpha \varphi(x)\, dx = \int\limits_\Omega v(x)\varphi(x)\, dx. \qquad (1)$$

Одна лемма

Лемма

Слабая частная производная порядка α функции u, если существует, определяется единственным образом с точностью до множества меры нуль.

Пусть $v_1, v_2 \in \mathbb{L}^p(\Omega)$ такие, что

$$\int\limits_\Omega u \partial^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega v_1 \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega v_2 \varphi \, dx$$

для всех $\varphi \in \mathbb{C}_c^\infty(\Omega)$. Тогда

$$\int\limits_\Omega (v_1 - v_2) \, \varphi(x) \, dx = 0$$

для всех $\varphi \in \mathbb{C}_c^\infty(\Omega)$, откуда $v_1 - v_2 = 0$ почти всюду.

Пример 1-1

Пусть $\Omega = (0, 2)$

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

Определим

$$v(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

Покажем, что $u' = v$ в слабом смысле. Чтобы убедиться в этом, выберем произвольно $\varphi \in \mathbb{C}_c^\infty(\Omega)$. Надо показать, что

$$\int\limits_0^2 u\varphi' \, dx = -\int\limits_0^2 v\varphi \, dx.$$

Пример 1-2

Легко вычислить, что

$$\int_0^2 u\varphi' \, dx = \int_0^1 x\varphi' \, dx + \int_1^2 \varphi' \, dx = -\int_0^1 \varphi \, dx + \varphi(1) - \varphi(1) = -\int_0^2 v\varphi \, dx.$$

Пример 2-1

Пусть $\Omega = (0, 2)$.

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 2, & 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

Мы покажем, что производная u' не существует в слабом смысле. Для этого надо показать, что не существует функции $v \in \mathbb{L}^1_{loc}(\Omega)$ такой, что

$$\int\limits_0^2 u\varphi' \, dx = -\int\limits_0^2 v\varphi \, dx \tag{2}$$

для всех $\varphi \in \mathbb{C}_c^\infty(\Omega)$. Предположим противное.

Пример 2-2

Пусть (2) выполняется для некоторой функции v и всех функций φ. Тогда

$$-\int_0^2 v\varphi\,dx = \int_0^2 u\varphi'\,dx = \int_0^1 x\varphi'\,dx + 2\int_1^2 \varphi'\,dx = -\int_0^1 \varphi\,dx - \varphi(1). \tag{3}$$

Выберем последовательность $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ гладких функций таких, что

$$0 \leqslant \varphi_m \leqslant 1, \quad \varphi_m(1) = 1, \quad \varphi_m \to 0 \quad \text{для всех} \quad x \neq 1.$$

Заменив φ на φ_m в (3) и полагая $m \to +\infty$, получаем предельное равенство

$$1 = \lim_{m\to+\infty} \varphi_m(1) = \lim_{m\to+\infty} \left[\int_0^2 v\varphi_m\,dx - \int_0^1 \varphi_m\,dx\right] = 0,$$

которое противоречиво.

Сильная производная

Определение 2. *Функция* $v(x) \in \mathbb{L}^p(\Omega)$ *при* $p \geqslant 1$ *называется сильной производной* $\alpha-$*го порядка от функции* $u(x) \in \mathbb{L}^p(\Omega)$, *если найдется такая последовательность* $\{u_n(x)\} \in \mathbb{C}^{|\alpha|}(\Omega)$, *что*

$$u_n \to u \quad \textit{сильно в} \quad \mathbb{L}^p(\Omega), \quad \partial^\alpha u_n \to v \quad \textit{сильно в} \quad \mathbb{L}^p(\Omega). \tag{4}$$

Связь двух определений

Теорема

Пусть граница $\partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ достаточно гладкая. Тогда понятия слабой и сильной производной равносильны.

Доказательство-1

Пусть $v(x)$ — это сильная производная функции $u(x)$. Значит, существует такая последовательность $\{u_n(x)\} \in \mathbb{C}^{|\alpha|}(\Omega)$, что

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^p(\Omega), \quad \partial^\alpha u_n \to v \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^p(\Omega).$$

Заметим, что для каждой функции $u_n(x) \in \mathbb{C}^{|\alpha|}(\Omega)$ справедливо равенство:

$$(-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega u_n(x) \partial^\alpha \varphi(x)\, dx = \int\limits_\Omega \partial^\alpha u_n(x) \varphi(x)\, dx \qquad (5)$$

для всех $\varphi(x) \in \mathbb{C}_c^\infty(\Omega)$.

Доказательство-2

Поскольку из сильной сходимости в $\mathbb{L}^p(\Omega)$ вытекает слабая сходимость в этом же пространстве, то переходя к пределу в равенстве (5) при $n \to \infty$ мы получим следующее равенство:

$$(-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\Omega} u(x) \partial^\alpha \varphi(x)\, dx = \int\limits_{\Omega} v(x) \varphi(x)\, dx \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in \mathbb{C}_c^\infty(\Omega),$$

т. е. пришли к определению слабой производной функции $u(x) \in \mathbb{L}^p(\Omega)$.

Теперь докажем, что из определения слабой производной вытекает определение сильной производной. Пусть $v(x) \in \mathbb{L}^p(\Omega)$ — это слабая производная функции $u(x) \in \mathbb{L}^p(\Omega)$:

$$(-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\Omega} u(x) \partial^{\alpha} \varphi(x)\, dx = \int\limits_{\Omega} v(x) \varphi(x)\, dx \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in \mathbb{C}_c^{\infty}(\Omega). \tag{6}$$

Рассмотрим срезку функции $u(x)$ с параметром срезки $\varepsilon = 1/n$.

Итак,

$$u_n(x) = n^N \int\limits_{\Omega} \omega(n|x-y|)u(y)\,dy \in \mathbb{C}^{\infty}(\Omega).$$

Теперь заметим, что имеет место следующая цепочка равенств:

$$\partial^{\alpha} u_n(x) = n^N \int\limits_{\Omega} \partial_x^{\alpha}\omega(n|x-y|)u(y)\,dy =$$

$$= (-1)^{|\alpha|} n^N \int\limits_{\Omega} \partial_y^{\alpha}\omega(n|x-y|)u(y)\,dy =$$

$$= (-1)^{|\alpha|} n^N (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\Omega} \omega(n|x-y|)v(y)\,dy \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0 \in \mathbb{N}.$$

Доказательство-5

Важный момент!!! При переходе к последнему равенству мы воспользовались формулой (6), поскольку функция $\omega(n|z|) \in \mathbb{C}_c^\infty(\Omega)$ при достаточно большом $n \in \mathbb{N}$. Теперь осталось воспользоваться теоремой 39 второй главе и получить, что

$$u_n(x) \to u(x) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^p(\Omega), \quad \partial^\alpha u_n(x) \to v(x) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^p(\Omega$$

т. е. мы пришли к определению сильной производной.

Лемма

Пусть функции $u(x), v(x) \in \mathbb{L}^p(\Omega)$ *имеют слабые производные* $\partial u(x), \partial v(x) \in \mathbb{L}^p(\Omega)$ *и граница* $\partial\Omega$ *области* Ω *достаточно гладкая, тогда справедлива следующая формула*

$$\partial(uv) = u\partial v + v\partial u, \tag{7}$$

понимаемая в слабом смысле, т. е. для любой функции $\varphi(x) \in \mathbb{C}_c^\infty(\Omega)$:

$$\int\limits_\Omega \partial(u(x)v(x))\varphi(x)\,dx = \int\limits_\Omega u(x)\partial v(x)\varphi(x)\,dx + \int\limits_\Omega v(x)\partial u(x)\varphi(x)\,dx.$$

Доказательство-1

Пусть сначала $v(x) \in \mathbb{C}^1(\Omega)$, а функция $u(x) \in \mathbb{L}^p(\Omega)$ имеет слабую производную $\partial u(x) \in \mathbb{L}^p(\Omega)$. Тогда из теоремы 1 и определения 2 мы получим, что существует такая последовательность $\{u_n(x)\} \in \mathbb{C}^1(\Omega) \cap \mathbb{L}^p(\Omega)$, причем имеет место следующие свойства:

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^p(\Omega) \quad \text{и} \quad \partial u_n \to \partial u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^p(\Omega).$$

Тогда справедлива классическая формула дифференцирования произведения двух функций. Действительно,

$$\partial(u_n v) = u_n \partial v + v \partial u_n.$$

Доказательство-2

Умножим это равенство на произвольную функцию $\varphi(x) \in \mathbb{C}_c^\infty(\Omega)$ и проинтегрируем по области Ω, тогда получим равенство

$$\int\limits_\Omega \partial(u_n(x)v(x))\varphi(x)\,dx = \int\limits_\Omega u_n(x)\partial v(x)\varphi(x)\,dx + \\ + \int\limits_\Omega v(x)\partial u_n(x)\varphi(x)\,dx. \quad (8)$$

Рассмотрим отдельно два слагаемых в правой части равенства (8). Действительно,

$$\int\limits_\Omega u_n(x)\partial v(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_\Omega [u_n(x) - u(x)]\,\partial v(x)\varphi(x)\,dx + \\ + \int\limits_\Omega u(x)\partial v(x)\varphi(x)\,dx = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2.$$

Доказательство-3

Рассмотрим интеграл I_1. Справедлива следующая оценка:

$$|\mathrm{I}_1| \leqslant \int\limits_{\Omega} |u_n(x) - u(x)|\, |\partial v(x)\varphi(x)|\; dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\Omega} |u_n(x) - u(x)|^p\; dx \right)^{1/p} \left(\int\limits_{\Omega} |\partial v(x)\varphi(x)|^{p'}\; dx \right)^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant [\mathrm{meas}(\Omega)]^{1/p'} \sup_{x \in \mathrm{K}} |\partial v(x)\varphi(x)| \left(\int\limits_{\Omega} |u_n(x) - u(x)|^p\; dx \right)^{1/p}$$

Доказательство-4

Отметим здесь следующий тонкий момент. Функция $\partial v(x) \in \mathbb{C}(\Omega)$ и, естественно, функции из этого класса могут быть неограниченными в окрестности границы $\partial\Omega$ области Ω, но функция $\varphi(x)$ имеет компактный носитель $\mathrm{K} \Subset \Omega$, и поэтому $\partial v(x) \in \mathbb{C}_b(\mathrm{K})$.

Доказательство-5

Теперь осталось заметить, что из сильной сходимости $u_n \to u$ в $\mathbb{L}^p(\Omega)$ интеграл в конце цепочки неравенств для $|\mathrm{I}_1|$ стремится к нулю. Следовательно,

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\Omega} u_n(x)\partial v(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\Omega} u(x)\partial v(x)\varphi(x)\,dx.$$

Аналогичным образом, доказывается, что

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\Omega} v(x)\partial u_n(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\Omega} v(x)\partial u(x)\varphi(x)\,dx.$$

и

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\Omega} \partial(u_n(x)v(x))\varphi(x)\,dx = -\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\Omega} u_n(x)v(x)\partial\varphi(x)\,dx =$$

$$= -\int\limits_{\Omega} u(x)v(x)\partial\varphi(x)\,dx.$$

Доказательство-6

Таким образом, из (8) предельным переходом при $n \to +\infty$ мы получим равенство:

$$-\int\limits_{\Omega} u(x)v(x)\partial\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\Omega} \left[u(x)\partial v(x) + v(x)\partial u(x)\right]\varphi(x)\,dx,$$

т.е. имеет место равенство в слабом смысле

$$\partial(u(x)v(x)) = u(x)\partial v(x) + v(x)\partial u(x) \tag{9}$$

для функции $u(x) \in \mathbb{L}^p(\Omega)$, $\partial u(x) \in \mathbb{L}^p(\Omega)$ и $v(x) \in \mathbb{C}^1(\Omega)$.

Доказательство-7

Для того чтобы распространить формулу (9) на случай $v(x) \in \mathbb{L}^p(\Omega)$, $\partial v(x) \in \mathbb{L}^p(\Omega)$ надо снова взять существующую в силу теоремы 1 последовательность $\{v_n(x)\} \in \mathbb{C}^1(\Omega)\mathbb{L}^p(\Omega)$ такую, что

$$v_n \to v \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^p(\Omega) \quad \text{и} \quad \partial v_n \to \partial v \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^p(\Omega).$$

И далее воспользоваться той же схемой, что и ранее в доказательстве этой леммы.

Производная сложной функции

Лемма

Пусть функция $f(t) \in \mathbb{C}^1\left(\mathbb{R}^1\right)$ *и* $f^{'}(t) \in \mathbb{L}^\infty\left(\mathbb{R}^1\right)$ *и функция* $u(x) \in \mathbb{L}^p(\Omega)$ *и имеет слабую производную* $\partial u(x) \in \mathbb{L}^p(\Omega)$. *Тогда справедлива следующая формула слабой производной сложной функции:*

$$\partial f(u)(x) = f^{'}(u)\partial u(x). \tag{10}$$

Доказательство-1

Пусть $\{u_m(x)\} \in \mathbb{C}^1(\Omega) \cap \mathbb{L}^p(\Omega)$ и

$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^p(\Omega), \quad \partial u_m \to \partial u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^p(\Omega).$$

Тогда для каждой функции $u_m(x) \in \mathbb{C}^1(\Omega)$ справедлива формула производной (классической) сложной функции

$$\partial f(u_m)(x) = f'(u_m)\partial u_m(x).$$

Умножим обе части этого равенства на функцию $\varphi(x) \in \mathbb{C}_c^\infty(\Omega)$ и проинтегрируем по области Ω, тогда получим равенство

$$\int_\Omega \partial f(u_m)(x)\varphi(x)\, dx = \int_\Omega f'(u_m)\partial u_m(x)\varphi(x)\, dx.$$

Доказательство-2

Рассмотрим отдельно эти два интеграла. Имеет место следующая цепочка равенств:

$$\int\limits_{\Omega} \partial f(u_m)(x)\varphi(x)\,dx = -\int\limits_{\Omega} f(u_m)(x)\partial\varphi(x)\,dx =$$
$$= -\int\limits_{\Omega} \left[f(u_m)(x) - f(u)(x)\right]\partial\varphi(x)\,dx - \int\limits_{\Omega} f(u)(x)\partial\varphi(x)\,dx. \tag{11}$$

Заметим, что справедливо следующее неравенство:

$$|f(u_m)(x) - f(u)(x)| \leqslant c\,|u_m(x) - u(x)|\,,$$

поскольку $f^{'}(t) \in \mathbb{L}^{\infty}(\mathbb{R}^1)$.

Доказательство-3

Поэтому имеет место неравенство

$$\left|\int_\Omega [f(u_m)(x) - f(u)(x)]\,\partial\varphi(x)\,dx\right| \leqslant c\int_\Omega |u_m(x) - u(x)|\,\partial\varphi(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c\mathrm{K}^{1/p'}\left(\int_{\mathrm{K}} |u_m(x) - u(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \to 0, \quad \operatorname{supp}\{\varphi\} \subset \mathrm{K}$$

при $m \to +\infty$ по построению последовательности $\{u_m\}$. Поэтому из (11) вытекает, что

$$\lim_{m\to+\infty}\int_\Omega \partial f(u_m)(x)\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega f(u)(x)\partial\varphi(x)\,dx. \qquad (12)$$

Доказательство-4

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int\limits_{\Omega} f^{'}(u_m)\partial u_m(x)\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \left[f^{'}(u_m)\partial u_m(x) - f^{'}(u)\partial u(x) \right] \varphi(x)\,dx + \int\limits_{\Omega} f^{'}(u)\partial u(x)\varphi(x)\,dx. \tag{13}$$

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\left|\int\limits_{\Omega}\left[f^{'}(u_m)\partial u_m(x)-f^{'}(u)\partial u(x)\right]\varphi(x)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant c_1\int\limits_{\mathrm{K}}\left|f^{'}(u_m)-f^{'}(u)\right|\left|\partial u_m(x)\right|\,dx+$$

$$+c_1\int\limits_{\mathrm{K}}\left|\partial u_m(x)-\partial u(x)\right|\left|f^{'}(u)(x)\right|\,dx=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2,\quad c_1=\sup_{x\in\mathrm{K}}|\varphi(x)|. \tag{14}$$

Доказательство-6

Справедлива следующая цепочка неравенств для I_2 :

$$\mathrm{I}_2 \leqslant c_1 \left(\int\limits_{\mathrm{K}} |\partial u_m(x) - \partial u(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \left(\int\limits_{\mathrm{K}} \left| f^{'}(u) \right|^{p^{'}} \right)^{1/p^{'}} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 c_2 \mathrm{K}^{1/p^{'}} \left(\int\limits_{\mathrm{K}} |\partial u_m(x) - \partial u(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Теперь заметим, что последовательность $\{u_m\} \in \mathbb{C}^1(\Omega)$ и, поэтому для любого компакта $\mathrm{K} \Subset \Omega$ имеем $\{u_m\} \in \mathbb{C}^1(\mathrm{K})$ и, в частности, $\partial u_m \in \mathbb{L}^{\infty}(\mathrm{K})$. В следующих оценках мы будем использовать этот факт.

Рассмотрим теперь I_1 из (14)

$$\mathrm{I}_1 = c_1 \int\limits_{\mathrm{K}} \left| f^{'}(u_m) - f^{'}(u) \right| |\partial u_m(x)| \, dx \leqslant$$

$$\leqslant c_1 c_3 \mathrm{K}^{1/p^{'}} \left(\int\limits_{\mathrm{K}} \left| f^{'}(u_m) - f^{'}(u) \right|^p dx \right)^{1/p}$$

Поскольку последовательность u_m сильно сходится к u в $\mathbb{L}^p(\Omega)$ с $p \in [1, +\infty]$, то в силу теоремы 35 второй главе вытекает, что найдется такая подпоследовательность $\{u_{m_n}\} \subset \{u_m(x)\}$, что $u_{m_n}(x)$ сходится почти всюду к $u(x)$ на Ω.

Доказательство-8

Поскольку $f^{'}(t) \in \mathbb{C}\left(\mathbb{R}^1\right)$, то приходим к выводу, что

$$f^{'}\left(u_{m_n}\right)(x) \to f^{'}(u)(x) \quad \text{при} \quad n \to +\infty \quad \text{для почти всех} \quad x \in \Omega.$$

Следовательно, по теореме Лебега приходим к выводу, что

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{I}_1(u_{m_n}) = 0.$$

Таким образом, из (13) вытекает, что

$$\lim_{n \to +\infty} \int\limits_{\Omega} f^{'}(u_{m_n}) \partial u_{m_n}(x) \varphi(x)\, dx = \int\limits_{\Omega} f^{'}(u) \partial u(x) \varphi(x)\, dx.$$

Значит, пришли к следующему равенству

$$-\int\limits_{\Omega} f(u)(x) \partial \varphi(x)\, dx = \int\limits_{\Omega} f^{'}(u) \partial u(x) \varphi(x)\, dx.$$

А отсюда и вытекает утверждение леммы.