

Актуальные проблемы математической физики, посвященная
памяти профессора В.Ф. Бутузова

Стабилизация решения типа движущегося фронта в уравнении реакция-диффузия

Коцюбинский Константин Алексеевич
Левашова Наталия Тимуровна
Мельникова Алина Александровна

Москва
2022

Постановка задачи

Постановка задачи с решением вида движущегося фронта:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} = f(v, x, \varepsilon), & x \in (0, 1), t > 0, \\ v(0, t) = h_0, v(1, t) = h_1, & t > 0, \\ v(x, 0) = v_{init}(x), & x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь ε – малый параметр, $f(v, x, \varepsilon)$ – достаточно гладкая функция в $\mathbb{R} \times (0, 1) \times (0, \varepsilon_0)$.

- (A1)** Уравнение $f(v, x, 0) = 0$ имеет три упорядоченных корня $\varphi^{(-)}(x) < \varphi^{(0)}(x) < \varphi^{(+)}(x)$ при $x \in [0, 1]$.
Причем: $f_v(\varphi^{(\mp)}(x), x, 0) > 0$.

Если существует стационарное решение задачи (1) вида фронта, то оно определяется как решение задачи:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \frac{d^2 v}{dx^2} = f(v, x, \varepsilon), & x \in (0, 1), \\ v(0) = h_0, v(1) = h_1. \end{cases} \quad (2)$$

Ранее полученные результаты

1. Васильева А.Б. Об устойчивости контрастных структур.// Матем. моделирование. 1991. Т.3. №4. С.114–123.
Доказано существование решения задачи (2) и указана локальная область устойчивости $\sim O(\varepsilon^2)$.
2. Бутузов В.Ф., Неделько И.В. О глобальной области влияния устойчивых решений с внутренними слоями.//Матем. сб., Т. 192 №5 (2001), С. 13–52.
Установление глобальной области влияния устойчивого стационарного решения в виде интервала для функций из класса C^2 . В работе применялся метод параметрических барьеров.
3. Божевольнов Ю.В., Нефёдов Н.Н. Движение фронта в параболической задаче реакция-диффузия.// Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2010г., том 50, номер 2, 276–285.
Доказано существование решение вида фронта задачи (1) и указан способ построения верхнего и нижнего решений как модификаций асимптотического приближения решения задачи.

Результаты настоящей работы

1. Уточнение локальной области устойчивости стационарного решения (1) с использованием понятий верхнего и нижнего решений.
2. Использование в качестве барьеров верхнего и нижнего решений вида движущихся фронтов для параболической задачи позволило уточнить время, за которое фронт оказывается внутри локальной области влияния стационарного решения, то есть совпадает с ним с точностью $O(\varepsilon^2)$.
3. Расширение класса возможных начальных функций v_{init} до непрерывных-кусочно гладких с конечным числом точек негладкости.

Теоретическая и практическая значимость — на примере этой задачи был отработан алгоритм обоснования процесса стабилизации решений вида фронта. Результат может быть расширен на системы автоволновых уравнений, использующиеся для математических моделей биофизики.

Исследование фазовой плоскости

Присоединенные задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{v}^{(\mp)}}{\partial \xi^2} + W \frac{\partial \tilde{v}^{(\mp)}}{\partial \xi} = f(\tilde{v}^{(\mp)}, \hat{x}, 0), \quad \mp \xi > 0, \\ \tilde{v}^{(\mp)}(0, \hat{x}, W) = \varphi^{(0)}(\hat{x}), \\ \tilde{v}^{(\mp)}(\mp \infty, \hat{x}, W) = \varphi^{(\mp)}(\hat{x}), \end{cases}$$

$$\xi = \frac{x - \hat{x}}{\varepsilon},$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{v}_s^{(\mp)}}{\partial \xi_s^2} = f(\tilde{v}_s^{(\mp)}, \hat{x}_s, 0), \quad \mp \xi_s > 0, \\ \tilde{v}_s^{(\mp)}(0, \hat{x}_s) = \varphi^{(0)}(\hat{x}_s), \\ \tilde{v}_s^{(\mp)}(\mp \infty, \hat{x}_s) = \varphi_0^{(\mp)}(\hat{x}_s), \end{cases}$$

$$\xi_s = \frac{x - \hat{x}_s}{\varepsilon},$$

Уравнения фазовых кривых

$$\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}, x, W) := \frac{\partial \tilde{v}^{(\mp)}}{\partial \xi}, \quad \mp \xi \geq 0,$$

$$\frac{\partial \Phi^{(\mp)}}{\partial \tilde{v}^{(\mp)}} \Phi^{(\mp)} + W \Phi^{(\mp)} = f(\tilde{v}^{(\mp)}, x, 0),$$

$$\Psi^{(\mp)}(\tilde{v}_s^{(\mp)}, x) := \frac{\partial \tilde{v}_s^{(\mp)}}{\partial \xi_s}, \quad \mp \xi_s \geq 0,$$

$$\frac{\partial \Psi^{(\mp)}}{\partial \tilde{v}_s^{(\mp)}} \Psi^{(\mp)} = f(\tilde{v}_s^{(\mp)}, x, 0),$$

(3)

Исследование фазовой плоскости

Сепаратрисы

Если поставить для (3) условия:

$$\Phi^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(x), x, W) = 0,$$

$$\Psi^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(x), x) = 0,$$

То получим задачи для сепаратрис, решения которых:

$$\frac{1}{2}(\Phi^{(\mp)})^2 = \int_{\varphi^{(\mp)}(x)}^{\tilde{v}} (f(v, x, 0) - W\Phi^{(\mp)}) dv, \quad \frac{1}{2}(\Psi^{(\mp)})^2 = \int_{\varphi^{(\mp)}(x)}^{\tilde{v}_s} f(v, x, 0) dv, \quad (4)$$

Условие сшивания сепаратрис

$$\Phi^{(-)}(\varphi^{(0)}(\hat{x}), \hat{x}, W) = \Phi^{(+)}(\varphi^{(0)}(\hat{x}), \hat{x}, W), \quad \Psi^{(-)}(\varphi^{(0)}(\hat{x}_s), \hat{x}_s) = \Psi^{(+)}(\varphi^{(0)}(\hat{x}_s), \hat{x}_s) \quad (5)$$

Условия

Из (4) и (5):

$$W_0(x_0) = J(x_0) \left(\int_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{\varphi^{(+)}(x_0)} \Phi(v, x_0, W_0) dv \right)^{-1}, \quad (6)$$

где $J(x) := \int_{\varphi^{(-)}(x)}^{\varphi^{(+)}(x)} f(v, x, 0)$.

(A2) Пусть существует единственная точка $x = x_{s0}$ такая, что выполнено равенство $J(x_{s0}) = 0$.

(A3) Пусть начальная задача:

$$\begin{cases} \frac{dx_0}{dt} = W_0(x_0), \\ x_0(0) = x_{00}, \end{cases} \quad (7)$$

имеет единственное решение $x_0(t) \in (0, 1)$ при $t > 0$.

(A4) Пусть $J(x) > 0$ при $x < x_{s0}$, $J(x) < 0$ при $x > x_{s0}$ и $J_x(x_{s0}) < 0$.

Схема доказательства

1. Построим верхнее и нижнее решения начально-краевой задачи (1) как модификации асимптотического приближения решения вида движущегося фронта.
2. Для нижнего решения в начальный момент времени фронт сформирован в точке $x \in (x_{s0}, 1)$, для верхнего — в точке $\bar{x} \in (0, x_{s0})$.
3. Из теорем сравнения (C.V. Pao, *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*, New York: Plenum Press, 1992) следует, что решение задачи (1) будет заключено между этими верхним и нижним решениями, если начальная функция ограничена верхним и нижним решениями в начальный момент времени.
4. Докажем, что с течением времени верхнее и нижнее решения вида движущегося фронта окажутся внутри локальной области влияния асимптотически устойчивого стационарного решения.

Асимптотические приближения решений

Нестационарная задача

$$V_2(x, t, \hat{x}, W, \varepsilon) := \begin{cases} V_2^{(-)}(x, \hat{x}, W, \varepsilon), & x \in [0, \hat{x}(t)], \\ V_2^{(+)}(x, \hat{x}, W, \varepsilon), & x \in [\hat{x}(t), 1], \end{cases} := \quad (8)$$
$$= \begin{cases} \bar{v}^{(-)}(x, \varepsilon) + Q^{(-)}(\xi, \hat{x}, W, \varepsilon) + P^{(-)}(\zeta^{(-)}, \varepsilon), & x \in [0, \hat{x}(t)], \\ \bar{v}^{(+)}(x, \varepsilon) + Q^{(+)}(\xi, \hat{x}, W, \varepsilon) + P^{(+)}(\zeta^{(+)}, \varepsilon), & x \in [\hat{x}(t), 1], \end{cases}$$

где $\xi := \frac{x - \hat{x}}{\varepsilon}$, $\zeta^{(-)} := \frac{x}{\varepsilon}$, $\zeta^{(+)} := \frac{x - 1}{\varepsilon}$.

$$\bar{v}^{(\mp)}(x, \varepsilon) := \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i \bar{v}_i^{(\mp)}(x), \quad Q^{(\mp)}(\xi, \hat{x}, W, \varepsilon) := \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i Q_i^{(\mp)}(\xi, \hat{x}, W), \quad P^{(\mp)}(\zeta^{(\mp)}, \varepsilon) := \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i P_i^{(\mp)}(\zeta^{(\mp)}).$$

Стационарная задача

$$V_{s2}(x, \hat{x}_s, \varepsilon) := \begin{cases} V_{s2}^{(-)}(x, \hat{x}_s, \varepsilon), & x \in [0, \hat{x}_s], \\ V_{s2}^{(+)}(x, \hat{x}_s, \varepsilon), & x \in [\hat{x}_s, 1], \end{cases} \quad \text{где } \xi_s := \frac{x - \hat{x}_s}{\varepsilon}. \quad (9)$$

$$V_2(x, \hat{x}, W, \varepsilon), V_{s2}(x, \hat{x}_s, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1(x \in (0, 1)).$$

Локальная устойчивость стационарного решения

Нижнее и верхнее решения стационарной задачи:

$$\alpha_s(x, \underline{x}_s, \varepsilon) = \begin{cases} \alpha_s^{(-)}(x, \underline{x}_s, \varepsilon), & x \in [0, \underline{x}_s], \\ \alpha_s^{(+)}(x, \underline{x}_s, \varepsilon), & x \in [\underline{x}_s, 1], \end{cases} \quad \beta_s(x, \bar{x}_s, \varepsilon) = \begin{cases} \beta_s^{(-)}(x, \bar{x}_s, \varepsilon), & x \in [0, \bar{x}_s], \\ \beta_s^{(+)}(x, \bar{x}_s, \varepsilon), & x \in [\bar{x}_s, 1], \end{cases}$$

$$\alpha_s^{(\mp)}(x, \underline{x}_s, \varepsilon) = V_{s2}^{(\mp)}(x, \underline{x}_s, \varepsilon) - \varepsilon^2 \left(\mu_s^{(\mp)} + Q_{s\alpha}^{(\mp)}(\underline{\xi}_s, \underline{x}_s) + P_\alpha^{(\mp)}(\zeta^{(\mp)}) \right),$$

$$\beta_s^{(\mp)}(x, \bar{x}_s, \varepsilon) = V_{s2}^{(\mp)}(x, \bar{x}_s, \varepsilon) + \varepsilon^2 \left(\mu_s^{(\mp)} + Q_{s\beta}^{(\mp)}(\bar{\xi}_s, \bar{x}_s) + P_\beta^{(\mp)}(\zeta^{(\mp)}) \right),$$

где $\underline{x}_s := \hat{x}_s + \varepsilon^2 \delta_s$ и $\underline{\xi}_s := \frac{x - \underline{x}_s}{\varepsilon}$, $\bar{x}_s := \hat{x}_s - \varepsilon^2 \delta_s$ и $\bar{\xi}_s := \frac{x - \bar{x}_s}{\varepsilon}$.

Теорема 1. При выполнении условий **(A1)** - **(A2)** решение $v_{s,\varepsilon}(x)$ задачи (2) существует и является локально единственным и асимптотически устойчивым с областью притяжения по крайней мере:

$$[\alpha_s(x, \underline{x}_s, \varepsilon), \beta_s(x, \bar{x}_s, \varepsilon)].$$

[Nikolay Nefedov](#), Comparison Principle for Reaction-Diffusion-Advection Problems with Boundary and Internal Layers. In: Dimov I., Faragó I., Vulkov L. (eds) Numerical Analysis and Its Applications. NAA 2012. Lecture Notes in Computer Science, vol 8236. Springer, Berlin, Heidelberg.

Нижнее и верхнее решения задачи (1)

Построим теперь нижнее и верхнее решения задачи (1) как модификации асимптотических приближений решения этой задачи, вида фронта, в каждый момент времени локализованного во внутренней точке $\hat{x}_\alpha(t)$ отрезка $[\hat{x}_s, 1]$ (для нижнего решения), и во внутренней точке $\hat{x}_\beta(t)$ отрезка $[0, \hat{x}_s]$ (для верхнего решения):

$$\hat{\alpha}(x, t, \underline{x}, \underline{W}, \varepsilon) = \begin{cases} \hat{\alpha}^{(-)}(x, t, \underline{x}, \underline{W}, \varepsilon), & x \in [0, \underline{x}], \\ \hat{\alpha}^{(+)}(x, t, \underline{x}, \underline{W}, \varepsilon), & x \in [\underline{x}, 1], \end{cases} \quad \hat{\beta}(x, t, \bar{x}, \bar{W}, \varepsilon) = \begin{cases} \hat{\beta}^{(-)}(x, t, \bar{x}, \bar{W}, \varepsilon), & x \in [0, \bar{x}], \\ \hat{\beta}^{(+)}(x, t, \bar{x}, \bar{W}, \varepsilon), & x \in [\bar{x}, 1], \end{cases}$$

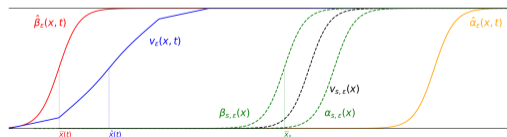
$$\hat{\alpha}^{(\mp)}(x, t, \underline{x}, \underline{W}, \varepsilon) = V_2^{(\mp)}(x, t, \underline{x}, \underline{W}, \varepsilon) - \varepsilon^2 \left(\mu^{(\mp)} + Q_\alpha^{(\mp)}(\underline{\xi}, \underline{x}, \underline{W}) + P_\alpha^{(\mp)}(\zeta^{(\mp)}) \right),$$

$$\hat{\beta}^{(\mp)}(x, t, \bar{x}, \bar{W}, \varepsilon) = V_2^{(\mp)}(x, t, \bar{x}, \bar{W}, \varepsilon) + \varepsilon^2 \left(\mu^{(\mp)} + Q_\beta^{(\mp)}(\bar{\xi}, \bar{x}, \bar{W}) + P_\beta^{(\mp)}(\zeta^{(\mp)}) \right),$$

$$\text{здесь } \underline{x}(t) = \hat{x}_\alpha(t) + \varepsilon^2 \delta(t), \quad \underline{\xi} = \frac{x - \underline{x}(t)}{\varepsilon},$$

$$\underline{W} = \frac{d\underline{x}(t)}{dt} \quad \text{и} \quad \bar{x}(t) = \hat{x}_\beta(t) - \varepsilon^2 \delta(t), \quad \bar{\xi} =$$

$$\frac{x - \bar{x}(t)}{\varepsilon}, \quad \bar{W} = \frac{d\bar{x}(t)}{dt}.$$



Область устойчивости стационарного решения

Теорема 2. При выполнении условий **(A1)** - **(A4)** для любого $T > 0$ и гладкой начальной функции $v_{init}(x)$, заключенной в интервале $[\hat{\alpha}(x, 0, \bar{x}, \overline{W}, \varepsilon), \hat{\beta}(x, 0, \underline{x}, \underline{W}, \varepsilon)]$, существует единственное решение $v_\varepsilon(x, t)$ задачи (1), принадлежащее пространству $C^{2,1} \{x \in (0, 1), t \in (0, T)\} \cap C^{0,1} \{x \in [0, 1], t \in [0, T]\}$ и при достаточно малых ε выполняется предельное равенство:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |v_\varepsilon(x, t) - v_{s,\varepsilon}(x)| = 0, \quad x \in [0, 1], \quad (10)$$

где $v_{s,\varepsilon}(x)$ — решение задачи (2).

Оценка времени стационарирования

Введем функцию $\Delta(t) = \bar{x}_s - \bar{x}(t) = \Delta_0(t) + \varepsilon \Delta_1(t) + \varepsilon^2 \Delta_2(t) + \varepsilon^2(\delta(t) - \delta_s)$, где $\Delta_i(t) = x_{si} - x_i(t)$ при $0 \leq i \leq 2$. Из условия **(A3)** следует, что функция $\Delta_0(t)$ определяется как решение задачи:

$$\begin{cases} \frac{d\Delta_0}{dt} = -W_0(x_0) = -W_0(x_{s0} - \Delta_0), \\ \Delta_0(0) = x_{s0} - x_{00}. \end{cases} \quad (11)$$

Из условий **(A2)** и **(A4)** следует, что $W_0(x_{s0}) = 0$, и $\frac{dW_0}{dx_0}(x_{s0}) < 0$, следовательно $\Delta_0 = 0$ — асимптотически устойчивая точка покоя уравнения (11), потому при достаточно больших t будет выполнена оценка $\Delta_0(t) = O(\varepsilon^2)$. Разложив правую часть (11) в ряд Тейлора, можно перейти к представлению:

$$\Delta_0 = x_{00} \exp \left(\frac{dW_0}{dx_0}(x_{s0})t - \int_0^t \frac{1}{2} \frac{d^2 W_0}{dx_0^2}(x^*(t')) \Delta_0(t') dt' \right),$$

Положив $\Delta_0(t) \sim \varepsilon^2$, получим оценку для T_0 :

$$T_0 = 2 \left| \frac{dW_0}{dx_0}(x_{s0}) \right|^{-1} |\ln \varepsilon|. \quad (12)$$

Результат для непрерывных кусочно-гладких $v_{init}(x)$

Утверждение. Результат теоремы 2 можно обобщить на случай непрерывных кусочно-гладких начальных функций $v_{init}(x)$.

1. Определим решение задачи (1), как функцию удовлетворяющую условиям почти всюду.
2. По аналогии с работой (C.V. Pao, Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations, New York: Plenum Press, 1992) построим последовательности нижних и верхних решений:
 $\hat{\alpha}(x, t, \varepsilon) = \underline{v}^{(0)}(x, t, \varepsilon), \underline{v}^{(1)}(x, t, \varepsilon) \dots$ и $\hat{\beta}(x, t, \varepsilon) = \bar{v}^{(0)}(x, t, \varepsilon), \bar{v}^{(1)}(x, t, \varepsilon) \dots$

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{v}^{(k)}}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial \bar{v}^{(k)}}{\partial t} - c \bar{v}^{(k)} = f(\bar{v}^{(k-1)}, x, \varepsilon) - c \bar{v}^{(k-1)} = F(\bar{v}^{(k-1)}, x, \varepsilon), \\ c > 0, x \in (0, 1), t \in (0, t_0], t_0 > 0, \\ \bar{v}^{(k)}(0, t) = h_0, \bar{v}^{(k)}(1, t) = h_1, \quad t \in [0, t_0], \\ \bar{v}^{(k)}(x, 0) = v_{init}(x), \quad x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (13)$$

3. У C.V. Pao $v_{init}(x)$ – гёльдерово непрерывна, однако:

$$\begin{aligned} \bar{v}^{(k)}(x, t, \varepsilon) = & \int_0^{t_0} \int_0^1 G(x, \eta, t, \tau) F(\bar{v}^{(k-1)}(\eta), \eta, \varepsilon) d\eta d\tau + \\ & + \int_0^1 G(x, \eta, t, 0) (v_{init}(\eta) - h_0 - \eta(h_1 - h_0)) d\eta \in \underline{C^1}(x \in (0, 1)). \end{aligned} \quad (14)$$

Результат для непрерывных кусочно-гладких $v_{init}(x)$

4. Получим решение $v_\varepsilon^*(x, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{v}^k(x)$ задачи (1) в объявленном смысле при $t < t_0$, где $t_0 > 0$ — некоторая величина, достаточная, чтобы решение имело непрерывную первую производную по x .
5. Поставим новую задачу того же вида, что и (1), но с новым начальным условием:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} = f(v, x, \varepsilon), & x \in (0, 1), t > t_0, \\ v(0, t) = h_0, v(1, t) = h_1, & t > t_0, \\ v(x, t_0) = v_\varepsilon^*(x, t_0), & x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (15)$$

6. Воспользуемся результатами [C.V. Pao](#), чтобы показать существование классического решения с данного момента времени, для которого будет выполнена теорема 2.

Оценка функций переходного слоя при $t > T_0$

Запишем задачи для функций переходного слоя в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_0^{(\mp)}}{\partial \bar{\xi}} = \Phi^{(\mp)}(\bar{\xi}, \bar{x}, \bar{W}), \\ Q_0^{(\mp)}(0, \bar{x}, \bar{W}) = \varphi^{(0)}(\bar{x}) - \varphi^{(\mp)}(\bar{x}), \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial Q_{s0}^{(\mp)}}{\partial \bar{\xi}_s} = \Psi^{(\mp)}(\bar{\xi}_s, \bar{x}_s) = \Phi^{(\mp)}(\bar{\xi}_s, \bar{x}_s, \mathbf{0}), \\ Q_0^{(\mp)}(0, \bar{x}_s) = \varphi^{(0)}(\bar{x}_s) - \varphi^{(\mp)}(\bar{x}_s). \end{cases}$$

По теореме о зависимости решения задачи Коши от параметра и учитывая оценку $\Delta_0(t) = O(\varepsilon^2)$ при $t > T_0$, получим равенство:

$$\begin{aligned} Q_i^{(\mp)}(\bar{\xi}, \bar{x}, \bar{W}) &= Q_{si}^{(\mp)}(\bar{\xi}_s, \bar{x}_s) + \\ &+ \chi_i(\bar{\xi}) \Delta_0(t) + O(\Delta_0^2(t) + \varepsilon \Delta_0(t) + \varepsilon^2 \Delta_1(t) + \varepsilon^2) \varepsilon^{-\kappa_i |\bar{\xi}|}, \end{aligned} \tag{16}$$

где $\chi_i(\bar{\xi})$ удовлетворяет оценке $|\chi_i(\bar{\xi})| \leq C_i \exp(\kappa_i |\bar{\xi}|)$, где $C_i > 0$, а $\kappa_i > 0$ при $i \in \{0, 1\}$.

Верхнее и нижнее решение стационарной задачи

Определение 1. Функции $\beta(x) \in C[0, 1] \cap C^2\{(0, \bar{x}_s) \cup (\bar{x}_s, 1)\}$ и $\alpha(x) \in C[0, 1] \cap C^2\{(0, \underline{x}_s) \cup (\underline{x}_s, 1)\}$ удовлетворяющие требованиям:

1. $\alpha(x) \leq \beta(x)$, $x \in [0, 1]$,
2. $\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} \leq f(\beta, x, \varepsilon)$, $x \in (0, \bar{x}_s) \cup (\bar{x}_s, 1)$,
 $\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \geq f(\alpha, x, \varepsilon)$, $x \in (0, \underline{x}_s) \cup (\underline{x}_s, 1)$,
3. $\beta(0) \geq h_0, \beta(1) \geq h_1, \alpha(0) \leq h_0, \alpha(1) \leq h_1$,
4. $\frac{\partial \beta}{\partial x} \Big|_{\bar{x}_s-0} < 0, \frac{\partial \alpha}{\partial x} \Big|_{\underline{x}_s+0} > 0$.

называются, соответственно, верхним и нижним решениями задачи (2).

Верхнее и нижнее решение нестационарной задачи

Определение 2. Функции $\beta(x, t) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D \setminus \{\bar{x}(t)\})$ и $\alpha(x, t) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D \setminus \{\underline{x}(t)\})$ удовлетворяющие требованиям:

1. $\alpha(x, 0) \leq \beta(x, 0), x \in [0, 1],$
2. $\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial \beta}{\partial t} \leq f(\beta, x, \varepsilon), (x, t) \in D \setminus \{\bar{x}(t)\},$
 $\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial \alpha}{\partial t} \geq f(\alpha, x, \varepsilon), (x, t) \in D \setminus \{\underline{x}(t)\},$
3. $\beta(0, t) \geq h_0, \beta(1, t) \geq h_1, \alpha(0, t) \leq h_0, \alpha(1, t) \leq h_1, t > 0,$
4. $\frac{\partial \beta}{\partial x} \Big|_{\bar{x}-0} < 0, \frac{\partial \alpha}{\partial x} \Big|_{\underline{x}+0} > 0, t > 0.$

называются, соответственно, верхним и нижним решениями задачи (1).