

Вопросы к экзамену по дифференциальным уравнениям

1. Основные понятия.

1⁰. Понятие дифференциального уравнения.

2⁰. Решение ДУ.

Решение, общее решение, общий интеграл

3⁰. Постановка основных задач для ОДУ. Дополнительные условия.

Задача Коши, краевые задачи, периодическая задача, задача Штурма – Лиувилля.

4⁰. Геометрическая интерпретация решения для скалярного ОДУ.

2. Примеры физических задач, приводящих к дифференциальным уравнениям.

1⁰. Радиоактивный распад.

2⁰. Движение материальной точки.

3⁰. Уравнение колебаний груза на пружине.

4⁰. Математический маятник.

Уравнения первого порядка.

1. Простейшие уравнения первого порядка, интегрируемые в квадратурах.

2. Теорема существования и единственности решения скалярного ОДУ.

1⁰. Постановка задачи. Основной результат.

2⁰. Эквивалентное интегральное уравнение.

3⁰. Доказательство существования решения задачи Коши – метод последовательных приближений.

4⁰. Теорема единственности решения задачи Коши.

5⁰. Теорема существования и единственности решения задачи Коши в случае, когда правая часть непрерывна и удовлетворяет условию Липшица в полосе.

6⁰. Примеры:

О существовании решения в случае непрерывной правой части – пример, о продолжении решения – пример непродолжаемости решения.

3. Теоремы сравнения. Метод дифференциальных неравенств.

1⁰. Теорема Чаплыгина о дифференциальных неравенствах.

2⁰. Теорема Чаплыгина о существовании и единственности решения задачи Коши.

4. Непрерывная зависимость решения задачи Коши от начальных условий и параметров в правой части.

1⁰. Постановка задачи.

2⁰. Теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши от параметров в правой части.

Теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши от параметров в правой части – метод последовательных приближений.

5. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы ОДУ.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши (без док.).

Теорема существования и единственности решения задачи Коши в случае, когда правая часть непрерывна и удовлетворяет условию Липшица в полосе (без док.).

Теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши от параметров в правой части (без док.)

. 6. Уравнения n-го порядка.

Сведение их к системе уравнений 1-го порядка. Теорема существования и единственности решения задачи Коши (без док.).

Линейные уравнения n-го порядка.

1. Общие свойства.

1⁰. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

2⁰. Следствия линейности уравнения.

2. Однородное уравнение.

1⁰. Линейная зависимость системы функций. Определитель Вронского.

2⁰. Теорема о линейной зависимости системы функций.

3⁰. Теорема о линейной независимости решений однородного уравнения.

4⁰. Теорема о существовании фундаментальной системы решений (ФСР).

5⁰. Теорема о представлении общего решения через ФСР.

3. Неоднородное уравнение.

1⁰. Общее решение неоднородного уравнения.

2⁰. Функция Коши: построение частного решения неоднородного уравнения.

4. Уравнения с постоянными коэффициентами.

1⁰. Структура ФСР.

Системы линейных уравнений.

1. Общие свойства.

1⁰. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

2⁰. Следствия линейности векторного уравнения.

2. Однородная система уравнений.

1⁰. Линейная зависимость системы вектор-функций. Определитель Вронского.

2⁰. Теорема о линейной зависимости системы вектор-функций.

3⁰. Теорема о линейной независимости решений однородной системы.

4⁰. ФСР. Фундаментальная матрица. Теорема о существовании ФСР.

5⁰. Теорема о представлении общего решения через ФСР.

3. Неоднородная система.

1⁰. Общее решение неоднородной системы.

2⁰. Метод вариации постоянной. Матрица Коши.

4. Системы с постоянными коэффициентами.

1⁰. Структура ФСР в случае простых собственных значений матрицы системы.

2⁰. Структура ФСР в случае кратных собственных значений матрицы системы.

Краевые задачи.

1. Линейные задачи.

1⁰. Постановка задачи.

2⁰. Формулы Грина. Тождество Лагранжа.

3⁰. Теорема единственности решения краевой задачи.

4⁰. Теоремы о достаточных условиях существования только тривиального решения у однородной задачи.

5⁰. Функция Грина и ее свойства. Теорема о представлении решения с помощью функции Грина.

2. Нелинейные задачи.

1⁰. *Постановка задачи.*

2⁰. *Теорема существования решения в случае ограниченной правой части (метод стрельбы).*

3⁰. *Понятие нижнего и верхнего решений краевой задачи, теорема Нагумо о существовании решения.*

Теория устойчивости.

1. Постановка задачи.

1⁰. *Основные понятия.*

Устойчивость решения по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость.

2. Первый метод Ляпунова – исследование устойчивости решения по первому приближению.

1⁰. *Теоремы об асимптотической устойчивости и неустойчивости решения системы уравнений (без док.).*

2⁰. *Теорема об асимптотической устойчивости решения скалярного уравнения.*

2. Второй метод Ляпунова – метод функций Ляпунова.

1⁰. *Функция Ляпунова. Формулировка теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости.*

2⁰. *Доказательство устойчивости.*

3⁰. *Доказательство асимптотической устойчивости.*

4. Классификация точек покоя системы двух линейных уравнений первого порядка.

5. Фазовая плоскость для нелинейных автономных уравнений второго порядка.

1⁰. *Постановка задачи.*

2⁰. *Фазовые траектории.*

3⁰. *Уравнение с квадратичной нелинейностью.*

4⁰. *Уравнение с кубической нелинейностью.*

Асимптотические методы.

1. Понятие регулярно и сингулярно возмущенных задач.

2. Регулярные возмущения.

1⁰. *Теорема об асимптотическом приближении решения регулярно возмущенной задачи (без док.).*

3. Сингулярные возмущения.

Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка.

1. Линейные однородные уравнения.

1⁰. *Характеристическая система – уравнения характеристик, характеристики, первые интегралы.*

2⁰. *Теорема о взаимосвязи первого интеграла характеристической системы и решения линейного однородного уравнения.*

3⁰. *Теорема об общем решении линейного однородного уравнения.*

4⁰. *Задача Коши – постановка и схема решения в двумерном и общем случаях.*

2. Квазилинейные уравнения.

1⁰. Теорема о решении квазилинейного уравнения.

2⁰. Задача Коши – постановка и схема решения.

Численные методы.

1. Основные понятия.

1⁰. Понятие разностной схемы.

2⁰. Разностная схема Эйлера для начальной задачи.

3⁰. Разностная схема для краевой задачи.

4⁰. Сходимость разностной схемы.

5⁰. Аппроксимация разностной схемы.

6⁰. Порядок аппроксимации разностной схемы Эйлера и разностной схемы для краевой задачи.

7⁰. Устойчивость разностной схемы.

2. Теорема о связи аппроксимации, устойчивости и сходимости разностной схемы.

3. Устойчивость схемы Эйлера.