Московский государственный университет
Физический факультет
Кафедра математики
А.А.Быков

План лекций по курсу «Математический анализ»

Версия 09 от 30 августа 2018

Каждые две недели читаются 3 лекции.

Общее количество лекций в каждом семестре 22 (на 23 лекции дается обзор всей программы данного семестра). Расписание лекций может измениться в связи с объявлением праздничных дней.

Основная рекомендуемая литература:

1. {ИП} В.А.Ильин, Э.Г.Позняк, Основы математического анализа, часть 1.
2. {ИП2} В.А.Ильин, Э.Г.Позняк, Основы математического анализа, часть 2.
3. {ИСС1} В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Б.Х.Сендов, Математический анализ-1, МГУ, 1985.
4. {ИСС2} В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Б.Х.Сендов, Математический анализ-2, МГУ, 1987.
5. {БФ} Будак, Фомин, Кратные интегралы и ряды.
6. {Демидович} Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1999.
7. [МАВЗ] Математический анализ в вопросах и задачах, В.Ф.Бутузов, Н.Ч.Крутицкая, Г.Н.Медведев, А.А.Шишкин, 5 изд., М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 480с.
8. {ЗУМА1} И.А.Виноградова, С.Н.Олехник, А.А.Садовничий. Задачи и упражнения по математическому анализу, часть 1. Изд-во МГУ, 1988.: – 416с.

9. {ЗУМА2} И.А.Виноградова, С.Н.Олехник, А.А.Садовничий. Задачи и упражнения по математическому анализу, часть 2. Изд-во МГУ, 1991.: – 351с.

10. {Кудрявцев 1} Математический анализ в двух томах, том 1.

11. {Кудрявцев 2} Математический анализ в двух томах, том 2.

Предполагается, что учебники [ИП1] и [ИП2], а также [БФ] являются основными пособиями. Поэтому ссылки на эти пособия в тексте программы не приводятся.

Содержание

1. Семестр 1, МА–1

Продолжительность каждой лекции составляет 2 академических часа, т.е. 90 минут. В название лекции вынесена только основная тема данной лекции. Количество семинаров

1.1. Предел функции одной переменной.

Лекция МА1–1 (2019-09-09–01) Вещественные числа

1.1.1. Понятие вещественного числа.

Рациональные числа. Арифметические операции. Сравнение рациональных чисел. Бесконечные десятичные дроби. Периодические дроби и рациональные числа. Бесконечные непериодические дроби (пример). Равные вещественные числа. Сравнение вещественных чисел. Свойства отношения «больше» и «меньше».

1.1.2. Грани и точные грани числового множества.

Множества вещественных чисел. Счетные и несчетные множества. Ограниченные и неограниченные множества. Верхние и нижние грани. Понятие точной верхней грани. Примеры.

♢ Теорема о существовании точной верхней грани у непустого ограниченного сверху множества вещественных чисел.

1.1.3. Операции над вещественными числами.

Сложение, умножение, вычитание, деление. Обоснование корректности. Свойства операций (без доказательства). Геометрическое изображение вещественных чисел, точки на координатной прямой.

1.1.4. Стандартные числовые множества.

Стандартные числовые множества: интервал, сегмент (отрезок), промежуток, полупрямая, числовая прямая. Окрестность точки, проколотая окрестность.

Читать:

[ИСС1] Глава 2, §1-5, стр. 29-54.

Лекция МА1–2 (2018-09-11–02) Предел функции

1.1.5. Понятие функции одной переменной.

Понятие функции одной переменной. Область определения, множество значений.

График функции одной переменной.

Четные и нечетные функции. Периодические функции.

Графики элементарных функций.

Преобразование графиков функций, сдвиг, отражение, растяжение.

1.1.6. Ограниченные и неограниченные функции.

Определение ограниченной и неограниченной функции на множестве. Символ $O(1)$ при $x \in X$ (ограниченная функция на множестве X). Символ $O(1)$ при $x \to a$ (локально ограниченная функция в окрестности точки $x = a$).

♢ Теоремы об ограниченности суммы (с доказательством), разности, произведения (для самостоятельной работы) двух ограниченных функций.

1.1.7. Предел функции в точке.

Определение предела функции в точке по Коши (на языке логических формул). Геометрическая интерпретация предела функции. Примеры прямого доказательства существования предела, $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 8$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1$, $\lim\limits_{x\to 2} 3^x = 9$.

♢ Теорема о локальной ограниченности функции, имеющей предел.

Методика вычисления пределов элементарных функций.

1.1.8. Односторонние пределы.

Определение одностороннего предела. n Теоремы о связи существования и равенства односторонних пределов и существования предела функции в точке. Примеры вычисления односторонних пределов типа $\lim\limits_{x\to 2+0} \frac{x-2}{|x-2|}$. Предел функции при $x \to +0$, $x \to -0$.

1.1.9. Предел в бесконечно удаленной точке.

Определение предела функции при $x \to +\infty$ (по Коши). Определение предела функции при $x \to -\infty$. Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+6}$.

 А.А.Быков, abkov@yandex.ru, abkov.ru

Читать:

[МАВЗ] Глава III, §1, 2, стр. 40-52.

[ЗУМА] Глава II, §1, стр. 48-66.

[ИСС1] Глава 3, §1-5, стр. 68-105.

Лекция МА1–3 (2018-xx-xx–03) Бесконечно малые функции

1.1.10. Бесконечно малые функции.

Определение бесконечно малой функции. Обозначение $f(x) = o(1)$ при $x \to 0$.

♢ Теорема о представлении функции, имеющей предел, в виде суммы константы и бесконечно малой функции.

♢ Арифметические операции над бесконечно малыми функциями: $o(1) + o(1) = o(1)$, $o(1) - o(1) = o(1)$, $o(1) \cdot o(1) = o(1)$. Понятие неопределенности типа $\frac{0}{0}$.

♢ Теорема о сумме бесконечно малой функции и ограниченной функции в точке, $o(1) + O(1) = O(1)$.

♢ Теорема о произведении бесконечно малой функции и ограниченной функции в точке, $o(1) \cdot O(1) = o(1)$ (для самостоятельной работы).

1.1.11. Теоремы о пределах функций.

♢ Теоремы о пределе суммы двух функций (с доказательством), о пределе разности, о пределе произведения и о пределе частного (для самостоятельной работы).

♢ Теоремы о предельном переходе в неравенствах.

1.1.12. Бесконечно большие функции.

Определение бесконечно большой положительной функции в точке. Определение бесконечно большой отрицательной функции в точке. ♢ Соотношение понятий бесконечно малой функции и бесконечно большой функции (теорема, для самостоятельной работы). ♢ Соотношение понятий бесконечно большой функции и неограниченной функции. (теорема, для самостоятельной работы). Арифметические операции над бесконечно большими функциями: сумма, произведение. Понятие неопределенности типа $+\infty-\infty$. Бесконечно большие функции при $x \to +\infty$. Бесконечно большие функции при $x \to -\infty$.

Читать:

[МАВЗ] Глава III, §3, стр. 52-58.

[ЗУМА] Глава II, §1, стр. 48-66.

[ИСС1] Глава 3, §1-5, стр. 68-105.

Лекция МА1–4 (2018-xx-xx–04) Сравнение бесконечно малых

1.1.13. Сравнение бесконечно малых функций.

Определение $o(x)$ при $x \to 0$, $o(x^n)$ при $x \to 0$. Определение $o(x^{-1})$, $o(x^{-n})$ при $x \to +\infty$.

$\diamondsuit$ Свойства $o(x^p)$.

$\diamondsuit$ Доказательство асимптотических формул

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x),$$
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2),$$
$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + o(x)$$

при $x \to 0$.

Читать:

[МАВЗ] Глава III, §3, стр. 52-58.

[ЗУМА] Глава II, §1, стр. 48-66.

[ИСС1] Глава 3, §1-5, стр. 68-105.

1.1.14. Первый замечательный предел

$\diamondsuit$ Формула, выражающая первый замечательный предел. Геометрическая интерпретация.

Асимптотические формулы $\sin x = x + o(x)$, $\sin x = x + o(x^2)$, $\cos x = 1 + o(1)$, $\cos x = 1 + o(x)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\sin x = 1 - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + o(x^2)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$ при $x \to 0$.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \alpha x - \sin \beta x}{x}$,

А.А.Быков, abkov@yandex.ru, abkov.ru

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin a}{x}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+x)-\cos a}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-2\sin a+\sin(a-x)}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(a+x)-2\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}(x-a)}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-2\sin 2x+\sin x}{x^3}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x^2}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha x}{\operatorname{tg}\beta x}$.

Читать:

[МАВЗ] Глава III, §4, стр. 58-65.

[ЗУМА] Глава II, §1, стр. 77-80.

[ИСС1] Глава 3, §1-5, стр. 68-105.

[ИСС1] Глава 4, §4, стр. 158-162.

Лекция МА1–5 (2018-xx-xx–05) Второй замечательный предел

1.1.15. Теорема о пределе монотонной ограниченной функции.

♢ Теорема о пределе монотонной ограниченной на интервале функции.

♢ Теорема о пределе монотонной ограниченной на полупрямой функции.

1.1.16. Теорема о пределе монотонной ограниченной последовательности.

Понятие последовательности. Понятие предела последовательности. Понятие ограниченной последовательности.

♢ Теорема о пределе монотонной ограниченной последовательности.

1.1.17. Второй замечательный предел для последовательностей.

♢ Неравенство Бернулли. ♢ Монотонность последовательностей $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (с доказательством) и $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ (для самостоятельной работы).

Формула, выражающая второй замечательный предел для последовательностей. Число e.

1.1.18. Второй замечательный предел для функций.

♢ Формула, выражающая второй замечательный предел для функций.

1.1.19. Применение формулы второго замечательного предела.

Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\beta/x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}$, $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$. Асимптотические формулы $\ln(1+x)=o(1)$, $\ln(1+x)=x+o(x)$, применение для решения задач, $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ при $x\to 0$ и аналогичные. Асимптотические формулы $e^x=1+o(1)$, $e^x=1+x+o(x)$, $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ при $x\to 0$ и аналогичные и их применение для решения задач.

Вычисление пределов, включающих тригонометрические и иррациональные функции.

Читать:

[МАВЗ] Глава III, §4, стр. 58-65.

[ЗУМА] Глава II, §1, стр. 77-80.

[ИСС1] Глава 3, §1-5, стр. 68-105.

[ИСС1] Глава 4, §4, стр. 158-162.

Лекция МА1–6 (2018-xx-xx–06) Непрерывные функции

1.1.20. Непрерывные функции одной переменной.

Непрерывность функции одной переменной в точке. Односторонняя непрерывность справа и слева, связь с непрерывностью в точке. $\diamondsuit$ Арифметические операции над непрерывными функциями (с доказательством). Непрерывность основных элементарных функций (для самостоятельной работы).

1.1.21. Классификация точек разрыва.

Точки разрыва устранимые, первого рода, второго рода. Примеры.

1.1.22. Сложная функция.

Понятие сложной функции. $\diamondsuit$ Теорема о непрерывности сложной функции. Непрерывность многочлена и дробно-рациональной функции.

1.1.23. Обратная функция.

Понятие обратной функции. $\diamondsuit$ Теорема о существовании и непрерывности обратной функции (только для монотонной функции). Непрерывность обратных тригонометрических функций. Непрерывность показательной и логарифмической функции. Графики.

Читать:

[МАВЗ] Глава I, §2, стр. 48-52.
[ЗУМА] Глава I, §2, 3, стр. 14-20.
[ИСС1] Глава 4, §1-6, стр. 127-184.

Лекция МА1–7 (2018-xx-xx–07) Производная, касательная

1.2. Производные и дифференциалы

1.2.1. Уравнение касательной.

Понятие, определение и уравнение касательной.

1.2.2. Производная функции одной переменной.

Определение производной функции, ее геометрический, физический и экономический смысл. Таблица производных элементарных функций. Односторонние производные. ♢ Теорема о связи существования и равенства односторонних производных и производной функции в точке.

1.2.3. Вычисление производной.

Правила вычисления производной ♢ суммы, произведения и ♢ частного от деления двух функций. Производная степенной и показательной функций. ♢ Теорема о производной обратной функции и ее геометрическая интерпретация. ♢ Теорема о производной сложной функции.

Лекция МА1–8 (2018-xx-xx–08) Производные старших порядков

1.2.4. Производные высших порядков.

Понятие второй производной. Понятие и уравнение соприкасающейся параболы. Понятие и уравнение соприкасающейся окружности. Определение производной n-го порядка. ♢ Формула Лейбница для n-й производной произведения двух функций.

1.2.5. Вычисление старших производных.

Старшие производные степенной и показательной функций. Старшие производные логарифмической функции. Старшие производные тригонометрических функций. Старшие производные функций типа xe^x, x^2e^x. Рекуррентные методы.

Читать:
[МАВЗ] Глава IV, §1, стр. 65-74.
[ЗУМА] Глава III, §1, стр. 89-100.
[ИСС1] Глава 5, §1, стр. 189-192.

Лекция МА1–9 (2018-xx-xx–09) Дифференциал

1.2.6. Дифференциал функции одной переменной.

Определение дифференциала функции в точке. Определение дифференцируемой функции в точке. ♢ Необходимое и достаточное условие дифференцируемости. Геометрический смысл дифференциала. ♢ Теорема о непрерывности дифференцируемой функции в точке.

1.2.7. Свойства первого дифференциала.

♢ Правила вычисления дифференциала суммы, разности, произведения и частного двух функций. Вычисление первого дифференциала сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала.

1.2.8. Дифференциалы высших порядков.

Понятие дифференциала второго порядка. Понятие дифференциала n-го порядка. Дифференциал второго порядка сложной функции. Неинвариантность формы второго дифференциала.

Читать:
[МАВЗ] Глава IV, §2, 3, стр. 77-85.
[ЗУМА] Глава III, §2, стр. 101-103.
[ИСС1] Глава 5, §2-6, стр. 193-220.

Лекция МА1–10 (2018-xx-xx–10) Неопределенный интеграл

1.2.9. Первообразная и неопределенный интеграл.

Понятие первообразной функции одной переменной на промежутке. ♢ Теорема о том, что любые две первообразные для данной функции отличаются на константу. Неопределенный интеграл - совокупность всех первообразных заданной функции на заданном промежутке. ♢ Основные свойства неопределенных интегралов.

1.2.10. Табличное интегрирование.

Вычисление интегралов от простейших рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных, логарифмических функций.

1.2.11. Методы интегрирования.

Вычисление интегралов методом замены переменной. Интегрирование по частям. Двукратное интегрирование по частям. Вычисление интегралов типа $\int_a^b e^{ax}\sin bx\,dx$, $\int_a^b e^{ax}\cos bx\,dx$, $\int_a^b \sin(\ln x)\,dx$, $\int_a^b \cos(\ln x)\,dx$.

Читать:

[МАВЗ] Глава V, §1, 2, стр. 87-96.

[ЗУМА] Часть 2, Глава I, §1, 2, стр. 174-181.

[ИСС1] Глава 8, §1-3, стр. 291-327.

Лекция МА1–11 (2018-xx-xx–11) Методы интегрирования

1.2.12. Интегрирование рациональных функций.

Понятие о рациональной функции. Выделение целой и дробной частей. Деление многочленов столбиком. Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей. Практические приемы нахождения коэффициентов разложения.

Четыре вида простейших дробей и их интегрирование.

1.2.13. Интегрирование иррациональных функций.

Различные приемы интегрирования иррациональных функций. Универсальная подстановка, сведение к интегралу от рациональной функции.

1.2.14. Интегрирование тригонометрических функций.

Различные приемы интегрирования тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка, сведение к интегралу от рациональной функции.

Читать:

[МАВЗ] Глава V, §3, 4, стр. 91-96.

[ЗУМА] Часть 2, Глава I, §3, 4, 5, стр. 182-208.

[ИСС1] Глава 8, §1-3, стр. 291-327.

Лекция МА1–12 (2018-xx-xx–12) Определенный интеграл

1.2.15. Понятие определенного интеграла.

Понятие плоской фигуры. Описанные и вписанные многоугольники. Внешняя площадь, внутренняя площадь. Площадь плоской фигуры. Определенный интеграл как реализация понятия площади плоских фигур определенного класса. Разбиение. Верхняя сумма, нижняя сумма. Верхний интеграл, нижний интеграл. Теоремы о точных гранях суммы и произведения. Теоремы об интегрируемости суммы, произведения функций.

1.2.16. Вычисление определенного интеграла.

Формула Ньютона-Лейбница (пока без доказательства). Дифференцирование по верхнему и нижнему пределу.

1.2.17. Приложения определенного интеграла.

Площадь плоской фигуры. Длина плоской кривой. Поверхность тела вращения. Объем тела вращения. Момент инерции.

[ИСС1] Глава 9, §4-5, стр. 347-365.

Лекция МА1–13 (2018-xx-xx–13) Числовые последовательности

1.3. Числовые последовательности.

1.3.1. Предел последовательности.

Понятие числовой последовательности. Ограниченные и неограниченные числовые последовательности. Определение предела последовательности. $\diamondsuit$ Ограниченность сходящейся последовательности. Определение бесконечно малой последовательности. $\diamondsuit$ Взаимосвязь бесконечно малых и сходящихся последовательностей. $\diamondsuit$ Арифметические операции с бесконечно малыми последовательностями. Определение бесконечно большой последовательности. $\diamondsuit$

Арифметические операции с бесконечно большими последовательностями. ♢ Теоремы о взаимосвязи между бесконечно малыми и бесконечно большими последовательностями.

1.3.2. Свойства сходящихся последовательностей.

♢ Арифметические операции, предельный переход в неравенствах. Понятие о неопределенностях типа $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$. Другие типы неопределенностей, примеры. Исследование неопределенностей методом асимптотических формул. Вычисление пределов выражений, содержащих радикалы. Понятие и определение монотонной последовательности. ♢ Необходимое и достаточное условие сходимости монотонной последовательности.

1.3.3. Эталонные последовательности.

Второй замечательный предел для последовательностей. Число e. Вычисление пределов типа $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\beta n}$. Эталонные последовательности: $\sqrt[n]{b}$, $\log_a n$, n^β, b^n, $n!$, n^n. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b}$ при $\beta > 0$. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n^\beta}$ при $\beta > 0$, $a > 1$. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^\beta}{b^n}$ при $b > 1$. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b^n}{n!}$. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$.

1.3.4. Числовые ряды.

Числовой ряд, общий член, частичная сумма, остаток. Сходящиеся числовые ряды.

[ИСС1] Глава 3, §1-3, стр. 68-105.

Лекция МА1–14 (2018-xx-xx–14) Подпоследовательности и предельные точки

1.3.5. Подпоследовательности.

Понятие подпоследовательности числовой последовательности. ♢ Теорема Больцано-Вейерштрасса: из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

1.3.6. Предельные точки.

Два эквивалентных определения предельной точки числовой последовательности. ♢ Свойства множества всех предельных точек ограниченной последовательности.

1.3.7. Верхний и нижний предел последовательности.

Множество всех верхних граней, точная верхняя грань, верхний предел. ♢ Корректность определения верхнего предела (с доказательством). Верхний и нижний пределы неограниченных последовательностей.

1.3.8. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши.

Фундаментальная последовательность. Ограниченность фундаментальной последовательности. Критерий ♢ Коши сходимости числовых последовательностей. ♢ Критерий Коши предела функции в точке.

1.3.9. Предел по Гейне.

Определение предела по Гейне (на основе понятия предела последовательности. ♢ Теорема об эквивалентности двух определений предела функции.

Читать:

[МАВЗ] Глава II, §1-5, стр. 16-33.

[ЗУМА] Глава II, §2, стр. 67-70.

[ИСС1] Глава 3, §3, стр. 92-105.

Лекция МА1–15 (2018-xx-xx–15) Теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях

1.4. Теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях.

1.4.1. Теоремы об ограниченности непрерывных функций.

♢ Теоремы о локальной ограниченности и об устойчивости знака непрерывной функции в точке. ♢ Ограниченность непрерывной на сегменте функции (первая теорема Вейерштрасса).

1.4.2. Теоремы о корнях непрерывной функции.

♢ Теорема о существовании корня непрерывной функции, принимающей значения разных знаков на концах сегмента. ♢ Теорема о прохождении непрерывной на сегменте функции через любое промежуточное значение. Метод деления отрезка пополам для решения уравнения $f(x) = 0$.

1.4.3. Возрастание и убывание функции в точке.

Возрастание и убывание функции в точке. ♢ Достаточные условия возрастания функции в точке. Пример, показывающий, что положительность производной в точке не является необходимым условием возрастания функции в этой точке.

1.4.4. Формула конечных приращений.

♢ Теорема Ролля и ее геометрическая интерпретация. ♢ Теорема Лагранжа, ее геометрический и экономический смысл. ♢ Следствия из теоремы Лагранжа: условие постоянства функции на промежутке, признак монотонности функции на промежутке. Исследование возрастания и убывания функции. Формула Коши.

1.4.5. Итерационное решение нелинейных уравнений.

Итерационный метод решения уравнения $x = f(x)$. ♢ Достаточное условие сходимости. Метод хорд для решения уравнения $f(x) = 0$. ♢ Метод касательных для решения уравнения $f(x) = 0$.

Читать:
[МАВЗ] Глава VI, §1, 3, стр. 108-111, 116-121.
[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 110-113.
[ИСС1] Глава 4, §6, стр. 167-184.
[ИСС1] Глава 11, §1-2, стр. 422-442.

1.4.6. Правило Лопиталя.

♢ Правило Лопиталя: раскрытие неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ (теорема).
Правило Лопиталя для случая, когда $x \to +\infty$ (без доказательства).
Правило Лопиталя для неопределенности типа $\frac{\infty}{\infty}$ (без доказательства).
Вычисление пределов с помощью однократного применения правила Лопиталя.

Вычисление пределов с помощью многократного применения правила Лопиталя.

Читать:
[МАВЗ] Глава VI, §4, стр. 122-125.
[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 113-117.
[ИСС1] Глава 6, §5-6, стр. 234-245.

Лекция МА1–16 (2018-xx-xx–16) Формула Тейлора (Пеано)

1.4.7. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Многочлен Тейлора. ♢ Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (теорема). Формула Маклорена. Разложение по формуле Тейлора элементарных функций.

1.4.8. Асимптотические формулы.

Понятие асимптотической формулы. ♢ Вывод и применение формул
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^4\right)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o\left(x^3\right)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^4\right)$, $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} + o\left(x\right)$, $\ln x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$, $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + o\left(x^2\right)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o\left(x^2\right)$, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o\left(x^2\right)$, $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o\left(x^5\right)$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{5} + o\left(x^5\right)$.
и аналогичных для вычисления пределов.

Лекция МА1–17 (2018-xx-xx–17) Формула Тейлора (Лагранжа)

1.4.9. Формула Тейлора с остаточным членом в общей форме.

♢ Остаточный член в общей форме.

1.4.10. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

♢ Остаточный член в форме Лагранжа. Методика оценки остаточного члена формулы Тейлора в форме Лагранжа. Вычисление наибольшего слагаемого многочлена Тейлора. Приближенное вычисление значения функции. Вычисление сложных процентов с высокой точностью. Последовательность независимых испытаний. Интерпретация распределения Пуассона, $p_n = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}, n \geq 0$.

1.4.11. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Коши.

♢ Остаточный член в форме Коши. Применение для исследования остаточного члена.

1.4.12. Приближенные вычисления.

 А.А.Быков, abkov@yandex.ru, abkov.ru

Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений. Использование первого дифференциала для приближенных вычислений. Использование второго дифференциала для приближенных вычислений.

Читать:

[МАВЗ] Глава VI, §5, стр. 125-130.

[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 113-117.

[ИСС1] Глава 6, §7-10, стр. 245-257.

Лекция МА1–18 (2018-xx-xx–18) Построение графиков функций-1

1.5. Построение графиков функций.

1.5.1. Классификация точек разрыва (напоминание).

Точки непрерывности и точки разрыва функций. Классификация точек разрыва: точки устранимого разрыва, точки разрыва 1 рода, точки разрыва 2 рода.

1.5.2. Асимптоты графика функции.

Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции. ♢ Необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты.

1.5.3. Возрастание и убывание функции.

Возрастание и убывание функции. Отыскание промежутков монотонности с помощью производной.

1.5.4. Локальный экстремум.

Понятие локального экстремума функции. ♢ Необходимое условие локального экстремума дифференцируемой функции (теорема Ферма). ♢ Достаточное условие локального экстремума непрерывной дифференцируемой функции. ♢ Достаточное условие локального экстремума дважды дифференцируемой функции. Исследование локального экстремума. Примеры (для этого и следующего разделов): $f(x) = 2x^3 - 3x^2$, $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x$, $f(x) = x\ln x$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, $f(x) = x^2 \ln x$, $f(x) = x\ln|x|$, $f(\mathbf{??}) = 0$, $f(x) = x^2\ln|x|$, $f(\mathbf{??}) = 0$, $f(x) = xe^{-x}$, $f(x) = x^2e^{-x}$, $f(x) = x^ne^{-x}$, $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $f(x) = \sqrt[3]{x(3-x)^2}$, $f(x) = \sqrt[5]{x^3(5-x)^2}$, $f(x) = \sqrt[5]{\frac{x^8}{(x-2)^3}}$, $f(x) = x^x$, $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$,

Читать:
[МАВЗ] Глава VIII, §1, стр. 130-136.
[МАВЗ] Глава VI, §3, стр. 116-121.
[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 110-122.
[ИСС1] Глава 7, §1-6, стр. 262-284.

Лекция МА1–19 (2018-xx-xx–19) Построение графиков функций-2

1.5.5. Выпуклость графика функции.

Понятие и определение направления выпуклости графика функции на данном интервале. ♢ Теорема о достаточном условии выпуклости вниз (вверх) графика функции на данном интервале. Геометрическая интерпретация этой теоремы.

1.5.6. Точки перегиба графика функции.

Определение точек перегиба графика функции. n уНеобходимое условие перегиба графика дважды дифференцируемой функции. Пример, показывающий, что условие не является достаточным условием перегиба дважды дифференцируемой функции. Точки возможного перегиба графика функции. n уууРазличные формы достаточных условий перегиба, использующие первые, вторые, третьи производные.

Читать:
[МАВЗ] Глава VIII, §1, стр. 130-136.
[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 117-122.
[ИСС1] Глава 7, §1-6, стр. 262-284.

Лекция МА1–20 (2018-xx-xx–20) Графики параметрических функций

1.5.7. Асимптоты графика параметрической функции.

Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции. n ууНеобходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты.

1.5.8. Возрастание и убывание параметрической функции, локальный экстремум.

Возрастание и убывание функции. Отыскание промежутков монотонности функции методом исследования знака первой производной. Точки возможного экстремума функции. n yyyДостаточные условия локального экстремума, основанные на исследовании первых и вторых производных.

1.5.9. Выпуклость графика параметрической функции, точки перегиба.

n yyyТеорема о достаточном условии выпуклости вниз (вверх) графика функции на данном интервале. n yНеобходимое условие перегиба графика дважды дифференцируемой функции. Пример, показывающий, что условие не является достаточным условием перегиба дважды дифференцируемой функции. Точки возможного перегиба графика функции.

1.5.10. Исследование и построение графиков функций, заданных параметрически.

Примеры: 1) $x = \frac{3t}{1+t^3}$, $y = \frac{3t^2}{1+t^3}$, 2) $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2xy$,
Читать:
[МАВЗ] Глава VIII, §2, стр. 137-142.
[ЗУМА] Глава III, §3, стр. 117-122.
[ИСС1] Глава 7, §1-6, стр. 262-284.

1.6. Интеграл Римана.

Лекция МА1–21 (2018-xx-xx–21) Определенный интеграл

1.6.1. Интеграл Римана.

Разбиение. Верхняя и нижняя суммы. Определенный интеграл – число, равное точной нижней грани площадей описанных ступенчатых многоугольников и точной верхней грани вписанных ступенчатых многоугольников. Теоремы о точных гранях суммы и произведения. Теоремы об интегрируемости суммы, произведения функций. Интегрируемые и неинтегрируемые функции. Пример ограниченной неинтегрируемой функции.

1.6.2. Равномерная непрерывность.

Равномерная непрерывность.

♢ Теорема Кантора для функции одной переменной.

Классы интегрируемых функций

1.6.3. Интегрируемость некоторых классов функций.

Некоторые классы интегрируемых функций: ♢ непрерывные, ♢ кусочно-непрерывные, ♢ монотонные ограниченные.

1.6.4. Свойства определенного интеграла.

♢ Формулы среднего значения.
♢ Дифференцирование по верхнему и нижнему пределам.
♢ Существование первообразной для непрерывной функции.
♢ Формула Ньютона-Лейбница.

Читать:
[МАВЗ] Глава VIII, §5, стр. 167-171
[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §1, стр. 236-246
[ИСС1] Глава 9, §1-5, стр. 330-370.

2. Семестр 2, МА–2

Обозначения:
♢ теорема с доказательством,
□ формулировка теоремы дается на лекции, доказательство в качестве упражнения для самостоятельной работы.

Для каждой лекции указана неделя, ф–февраль, м–март, а–апрель, й–май.

Лекция МА2–1 (2017-02-10–201) Точки и множества точек в пространстве

2.1. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.

2.1.1. Понятие m-мерного пространства.

Евклидово m-мерное пространство.
Скалярное произведение и его свойства.
Расстояние и его свойства. Неравенство Коши.
Шаровая, прямоугольная и кубическая окрестности точки.

Теоремы о включении шаровых и прямоугольных окрестностей.

2.1.2. Последовательности точек в пространстве.

Последовательности точек.

Ограниченные и неограниченные последовательности точек.

Бесконечно большая последовательность точек.

Предел последовательности точек.

Сходимость и покоординатная сходимость.

р Теорема о равносильности сходимости и покоординатной сходимости.

Предельные точки последовательности. р Основные теоремы. Примеры.

Условие Коши. р Критерий Коши.

♢ Теорема Больцано–Вейерштрасса.

2.1.3. Открытые, замкнутые, выпуклые множества точек.

Внутренние и граничные точки множества, предельные точки, изолированные точки. Примеры.

Открытые и замкнутые множества на плоскости и в пространстве. Замыкание множества.

Каждое непустое множество разбивает все точки пространства на 4 категории, внутренние и не внутренние точки самого множества и его дополнения.

Ограниченные и неограниченные множества на плоскости и в пространстве. Примеры.

Непрерывная кривая в пространстве. Связные и несвязные множества. Примеры.

Окрестности. Примеры окрестностей.

Выпуклые множества в пространстве. Выпуклая оболочка множества точек на плоскости. Примеры.

Читать:

[МАВЗ] Глава X, §1, 2, стр. 191-204.

[ЗУМА] Глава III, §1, стр. 286-291.

[ИСС1] Глава 12, §1, стр. 442-451.

Лекция МА2–2 (2017-02-17xx–202) Предел функции нескольких переменных

2.1.4. Предел функции нескольких переменных.

Понятие функции нескольких переменных (ФНП).

Способы визуализации. Карта линий равного уровня. Квазитрехмерный график. Примеры.

Два определения предела функции в точке (по Коши и по Гейне).

Определение предела по Коши и по Гейне. n Теорема о равносильности двух определений.

Бесконечно малые функции в точке.

Примеры 1: $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} \sqrt[3]{x^3+y^3} = 0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} = 0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} x\ln\sqrt{x^2+y^2} = 0$,

Примеры 2: $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ не существует, $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ не существует.

Предел функции в бесконечно удаленной точке.

Примеры: $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} \frac{x+y}{x^2+y^2} = 0$, $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = 0$, $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} \frac{xy}{x^2+y^2}$ не существует.

p Арифметические операции над бесконечно малыми функциями.

p Арифметические операции над ограниченными и бесконечно малыми функциями.

p Арифметические операции над функциями, имеющими предел в данной точке.

Предел по совокупности переменных и повторные пределы. Примеры.

[ИСС1] Глава 12, §2, стр. 451-460.

2.1.5. Непрерывные функции нескольких переменных.

Непрерывность функции нескольких переменных по совокупности переменных и по каждой переменной. Соотношение между ними.

Примеры: 1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ не существует,

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ не существует.

p Теоремы об арифметических операциях над непрерывными функциями.

p Понятие сложной функции. Теорема о непрерывности сложной функции.

2.1.6. Свойства непрерывных функций.

р Теорема о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение.

р Первая теорема Вейерштрасса.

р Вторая теорема Вейерштрасса.

Читать:

[МАВЗ] Глава X, §3, 4, стр. 205-212.

[ЗУМА] Глава III, §1, стр. 286-291.

[ИСС1] Глава 12, §3, стр. 460-469.

Лекция МА2–3 (2018-02-19–203) Дифференцируемые функции

2.2. Дифференцируемые функции нескольких переменных.

2.2.1. Частные производные.

Частные приращения. Частные производные. Геометрический смысл частной производной.

Примеры (дифференцируемых) функций, имеющих частные производные:

1) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, 2) $f(x,y) = x^y$, 3) $f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x \neq 0 \bigcap y \neq 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$,

Еще примеры (не дифференцируемых) функций, имеющих частные производные:

1) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$, 2) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 > 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$

2.2.2. Дифференцируемые функции.

Определение дифференцируемой ФНП.

♢ Теорема о связи между дифференцируемостью и существованием частных производных функции в точке.

♢ Теорема о связи между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке.

♢ Теорема о необходимом условии дифференцируемости функции в точке.

♢ Теорема о достаточных условиях дифференцируемости функции.

 А.А.Быков, abkov@yandex.ru, abkov.ru

Примеры дифференцируемых функций:

1) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, 2) $f(x,y) = x^y$,

3) $f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x \neq 0 \bigcup y \neq 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$,

Примеры не дифференцируемых функций:

1) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$, 2) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 > 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$

2.2.3. Дифференциал функции нескольких переменных.

Дифференциал функции нескольких переменных. Оператор дифференцирования.

Правила дифференцирования.

♢ Дифференциал суммы, р разности, произведения и частного двух функций.

2.2.4. Касательная плоскость.

Определение касательной плоскости.

n Теорема о существовании касательной плоскости к графику дифференцируемой функции двух переменных. Уравнение касательной плоскости.

Геометрический смысл дифференцируемости функции двух переменных.

[ИСС1] Глава 12, §4, стр. 469-485.

Лекция МА2–4 (2017-02-24–204) Дифференцирование сложной функции

2.2.5. Дифференцирование сложной функции нескольких переменных.

Понятие сложной функции. Частные производные сложной функции.

♢ Дифференциал сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала.

2.2.6. Градиент и производная по направлению.

Понятие производной по направлению. Градиент. Направление градиента и направление линии равного уровня дифференцируемой функции в заданной точке. Геометрический смысл градиента функции в точке.

♢ Теорема о выражении производной по направлению дифференцируемой ФНП через ее градиент.

Примеры не дифференцируемых функций, имеющих производную по любому направлению в точке $(0;0)$:

1) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$, 2) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2y}$, 3) $f(x,y,z) = \sqrt[3]{xyz}$, 4) $f(x,y,z) = \sqrt[3]{x^3+y^3+z^3}$.

p Теорема Эйлера об однородных функциях.

2.2.7. Векторные функции нескольких переменных

Понятие векторной функции нескольких переменных.

Дифференцирование сложных векторных функций.

Векторно-матричная форма записи первого дифференциала.

Отображения, задаваемые простейшими векторными функциями и их геометрическая интерпретация. Функции размерности 2 и 3 от двух и трех переменных.

Понятия однозначного и однолистного отображения.

Матрица Якоби и якобиан. Геометрическая интерпретация якобиана.

Читать:

[МАВЗ] Глава X, §4, стр. 213-224.

[ЗУМА] Глава III, §2, 3, стр. 291-302.

[ИСС1] Глава 12, §4, стр. 469-485.

Лекция МА2–5 (2017-03-03–205) Старшие производные и дифференциалы

2.2.8. Производные и дифференциалы высших порядков.

Частные производные высших порядков.

♢ Теорема о достаточных условиях равенства смешанных производных.

2.2.9. Дифференциалы высших порядков.

Дифференциал второго порядка. Дифференциалы высших порядков.

Оператор дифференцирования. Вычисление степени оператора дифференцирования.

♢ Формула Лейбница.

2.2.10. Второй дифференциал сложной функции.

Второй дифференциал функции независимых переменных. Второй дифференциал сложной функции.

Неинвариантность формы дифференциала второго порядка.

Векторно-матричная форма записи первого и второго дифференциалов ФНП. Матрица Гессе.

[ИСС1] Глава 12, §5, стр. 485-504.

Лекция МА2–6 (2017-03-05–206) Формула Тейлора

2.3. Формула Тейлора и локальный экстремум.

2.3.1. Формула Тейлора–Пеано.

Многочлен Тейлора. Остаточный член.

♢ Теорема о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

2.3.2. Формула Тейлора–Лагранжа.

Остаточный член в форме Лагранжа.

♢ Теорема о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для выпуклой области.

Методика оценки остаточного члена для функции с ограниченными производными.

Геометрический смысл формулы Тейлора с остаточным членом первого порядка.

Геометрический смысл формулы Тейлора с остаточным членом второго порядка.

Читать:

[МАВЗ] Глава X, §5, стр. 225-235.

[ЗУМА] Глава III, §4, стр. 303-309.

[ИСС1] Глава 12, §5, стр. 485-504.

Лекция МА2–7 (2017-03-10–207) Локальный экстремум

2.3.3. Локальный экстремум функции нескольких переменных.

Понятие локального экстремума ФНП.

♢ Теорема о необходимом условии локального экстремума дифференцируемой ФНП.

Понятие квадратичной формы и ее матрицы. Понятие знакоопределенной квадратичной формы. Критерий Сильвестра.

♢ Теорема о достаточном условии экстремума ФНП.

Исследование локального экстремума. Особенности графика и карты линий равного уровня дважды дифференцируемой функции в окрестности точки локального экстремума.

р Выпуклые и строго выпуклые функции. Экстремум выпуклой функции.

Читать:

[МАВЗ] Глава X, §6, стр. 236-242.

[ЗУМА] Глава III, §8, стр. 336-351.

[ИСС1] Глава 12, §6, стр. 504-514.

Лекция МА2–8 (2017-03-17–208) Неявные функции-1

2.4. Неявные функции.

2.4.1. Неявные функции, определяемые одним уравнением.

Понятие неявной функции.

♢ Теорема о существовании и непрерывности неявной функции, определяемой одним уравнением.

♢ Теоремы о дифференцируемой неявной функции, определяемой одним уравнением, заданным в окрестности точки. Формула для производных неявной функции.

Примеры: $x^2 + y^2 = 1$, $x^3 + y^3 = 3xy$, $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2xy$.

2.4.2. Экстремум неявной функции.

Экстремум неявной функции, определяемой одним уравнением. Методика анализа экстремума неявной функции.

Примеры: $x^2 + y^2 = 1$, $x^3 + y^3 = 3xy$, $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2xy$.

Читать:

[МАВЗ] Глава XI, §1, стр. 243-256.

[ЗУМА] Глава III, §5, стр. 310-319.
[ИСС1] Глава 13, §1, стр. 609-619.

Лекция МА2–9 (2017-03-19–209) Неявные функции-2

2.4.3. Неявные функции, определяемые системой уравнений.

$\diamondsuit$ Теоремы о дифференцируемой неявной функции, определяемой системой уравнений. Формула для производных неявной функции. Дифференцирование неявных функций, определяемых системой уравнений.

Вычисление старших производных неявной функции, определяемой системой уравнений.

Примеры: $\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2, \\ \frac{y}{x} = tg\phi, \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x + y + z = 4, \end{cases}$.

2.4.4. Экстремум неявной функции, определяемой системой уравнений.

Экстремум неявной функции, определяемой системой уравнений. Методика расчета точек возможного экстремума и проверка достаточных условий.

Примеры: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x + y + z = 4, \end{cases}$.

Читать:
[МАВЗ] Глава XI, §1, стр. 243-256.
[ЗУМА] Глава III, §5, стр. 310-319.
[ИСС1] Глава 13, §2, стр. 619-626.

2.4.5. Замена переменных.

Замена переменных в дифференциальных выражениях (для разбора на семинаре).

Лекция МА2–10 (2017-03-24–210) Условный экстремум-1

2.5. Условный экстремум.

2.5.1. Зависимые и независимые функции.

 А.А.Быков, abkov@yandex.ru, abkov.ru

Понятия зависимости функций и независимости функции. Линейная зависимость и зависимость общего вида. Функциональная матрица. Якобиан. Примеры.

♢ Теорема о зависимости функций.

♢ Теорема о независимости функций.

2.5.2. Понятие условного экстремума.

Понятие условного экстремума.

Метод исключения переменных, сведение задачи об условном экстремуме к задаче о безусловном экстремуме.

Необходимое условие условного экстремума.

2.5.3. Метод Лагранжа.

Метод Лагранжа и его геометрическая интерпретация.

♢ Необходимые условия условного экстремума в форме Лагранжа.

♢ Достаточные условия условного экстремума в форме Лагранжа (доказательство для одного условия с двумя переменными).

□ Метод окаймленного гессиана для исследования достаточных условий.

Читать:

[МАВЗ] Глава XI, §3, стр. 261-269.

[ЗУМА] Глава III, §8, стр. 326-350.

[ИСС1] Глава 13, §4, стр. 632-638.

Лекция МА2–11 (2017-03-31–211) Условный экстремум-2

2.5.4. Метод Лагранжа с несколькими условиями связи.

Метод Лагранжа и его геометрическая интерпретация.

♢ Необходимые условия условного экстремума в форме Лагранжа.

♢ Достаточные условия условного экстремума в форме Лагранжа.

Читать:

[МАВЗ] Глава XI, §3, стр. 261-269.

[ЗУМА] Глава III, §8, стр. 326-350.

[ИСС1] Глава 13, §4, стр. 632-638.

Лекция МА2–12 (2017-04-02–212) Длина кривой

2.6. Приложения определенного интеграла.

2.6.1. Длина кривой.

Понятие длины плоской кривой.

♢ Длина плоской кривой, заданной явным образом.

Вычисление длины плоской кривой, заданной параметрически. Вычисление длины плоской кривой, заданной неявным образом.

Физические приложения: центр масс и момент инерции.

2.6.2. Площадь поверхности вращения.

Понятие площади поверхности вращения. Вычисление площади.

Физические приложения: центр масс и момент инерции.

[ИСС1] Глава 10, §1-3, стр. 391-422.

Лекция МА2–13 (2017-04-07–213) Площади и объемы

2.6.3. Площадь фигуры.

Понятие площади плоской фигуры. Вычисление площади плоской фигуры, заданной явным образом. Вычисление площади плоской фигуры, заданной параметрически. Вычисление площади плоской фигуры, заданной неявным образом.

2.6.4. Объем тела.

Понятие объема. Вычисление объема тела вращения, полученного вращением плоской фигуры, заданной явным образом. Вычисление объема тела вращения, полученного вращением плоской фигуры, заданной параметрически. Вычисление объема тела вращения, полученного вращением плоской фигуры, заданной неявным образом.

Физические приложения: вычисление координат центра масс и момента инерции кривой, плоской фигуры, тела вращения.

Читать:

[МАВЗ] Глава VIII, §5, стр. 167-171

[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §2, 3, стр. 246-265.
[ИСС1] Глава 10, §1-3, стр. 391-422.

2.6.5. Приближенное вычисление определенного интеграла.

Методы приближенного вычисления определенного интеграла.
Формулы прямоугольников, трапеций, парабол.
Оценка погрешности (для метода прямоугольников – с обоснованием).
[ИСС1] Глава 11, §1-2, стр. 422-442.

Лекция МА2–14 (2017-04-14–214) Кратные интегралы

2.7. Кратные интегралы

2.7.1. Двойной интеграл

Понятие двойного интеграла. Разбиение. Верхняя и нижняя суммы. Понятие потомка двух разбиений. Теорема о верхней и нижней сумме потомка. Теорема об ограниченности множества верхних и нижних сумм. Верхний и нижний интегралы. Определение двойного интеграла. Теорема о необходимом и достаточном условии интегрируемости ограниченной функции в прямоугольнике. Теорема об интегрируемости непрерывной функции. Свойства двойного интеграла. Линейность, аддитивность. Интегрируемость модуля и произведения.

2.7.2. Интеграл Римана.

Выборка, интегральные суммы. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Лемма Дарбу.

2.7.3. Вычисление двойного интеграла.

Сведение двойного интеграла к повторному.
Ортогональные координаты на плоскости. Полярные координаты.
Замена переменных в двойном интеграле. Якобиан.

2.7.4. Тройной интеграл

Понятие и свойства тройного интеграла. Сведение тройного интеграла к повторному. Ортогональные координаты в пространстве. Цилиндрические и сферические координаты. Замена переменных в тройном интеграле. Якобиан.

 А.А.Быков, abkov@yandex.ru, abkov.ru

2.7.5. Приложения кратных интегралов

Вычисление координат центра масс. Вычисление среднего значения и дисперсии.

Читать:

[МАВЗ] Глава XII, §1, 2, стр. 279-300.

[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §2, 3, стр. 43-67.

Лекция МА2–15 (2018-04-16–215) Криволинейные интегралы

2.8. Кривые на плоскости и в пространстве

2.8.1. Касательная и нормаль

Формы задания кривых. Уравнение касательой. Уравнение нормали. Уравнение ортогональной плоскости.

2.8.2. Длина кривой

Дифференциал длины дуги. Определение длины кривой. Формулы длины кривой в различных формах.

2.9. Криволинейные интегралы

2.9.1. Криволинейный интеграл первого рода

Криволинейные интегралы первого рода (определение, вычисление с помощью определенного интеграла).

2.9.2. Криволинейный интеграл второго рода

Криволинейные интегралы второго рода (определение, вычисление с помощью определенного интеграла, связь с криволинейными интегралами первого рода).

Лекция МА2–16 (2017-04-21–216) Формула Грина

2.9.3. Формула Грина.

А.А.Быков, abkov@yandex.ru, abkov.ru

Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Физические приложения криволинейных интегралов первого и второго рода.

Лекция МА2–17 (2017-04-28–217) Плоские кривые, 1

2.9.4. Касание плоских кривых

Понятие плоской кривой. Различные формы уравнения плоской кривой.

Касание плоских кривых. Порядок касания. Необходимые и достаточные условия касания заданного порядка. Соприкасающаяся окружность.

2.9.5. Кривизна плоской кривой

Кривизна плоской кривой. Круг, центр и радиус кривизны.

Лекция МА2–18 (2017-04-30–218) Плоские кривые

2.9.6. Огибающая семейства плоских кривых

Огибающая однопараметрического семейства кривых. Необходимое условие огибающей. Дискриминантная кривая параметрического семейства кривых.

Лекция МА2–19 (2017-05-05–219) Поверхностные интегралы первого рода

2.10. Поверхностные интегралы

2.10.1. Понятие поверхности

Понятие поверхности. Способы задания поверхностей. Гладкая поверхность. Особые точки. Гладкая поверхность без особых точек. Кусочно–гладкая поверхность. Касательная плоскость. Нормаль. Односторонние и двусторонние поверхности.

2.10.2. Площадь поверхности

Элемент площади. Определение площади гладкой поверхности без особых точек. Выражение площади поверхности в параметрической форме. Выражение площади поверхности в декартовой форме.

Лекция МА2–20 (2017-05-12–220) Поверхностные интегралы второго рода

2.10.3. Поверхностные интегралы первого рода

Интегральная сумма первого рода. Поверхностные интегралы первого рода. Момент заданной функции по заданной поверхности. Среднее значение заданной функции по заданной поверхности. Среднее значение координаты x, y, z. Координаты центра масс поверхности. Координаты центра масс поверхности с заданной поверхностной плотностью.

2.10.4. Поверхностные интегралы второго рода

Интегральная сумма второго рода. Предел интегральной суммы. Поверхностные интегралы второго рода.

Лекция МА2–21 (2017-05-14–221) Основные интегральные тождества

2.10.5. Формула Гаусса–Остроградского

Теорема Гаусса–Остроградского. Формула Гаусса–Остроградского.

2.10.6. Формула Стокса

Теорема Стокса. Формула Стокса.

3. Курс 2, семестр 3, МА–3

Лекция МА3–1 (2017-09-xx–301) Дифференциальные операции

3.1. Скалярные и векторные поля

3.1.1. Дифференциальные операции

Дифференциальные операции в скалярных и векторных полях. Оператор Гамильтона.

Инвариантные определения градиента, дивергенции и ротора. Формулы векторного анализа первого порядка.

Лекция МА3–2 (2017-09-xx–302) Дифференциальные операции второго порядка

3.1.2. Дифференциальные операции второго порядка

Дифференциальные операции второго порядка в скалярных и векторных полях. Квадрат оператора Гамильтона.

Формулы векторного анализа второго порядка.

Лекция МА3–3 (2017-09-xx–303) Потенциальные и соленоидальные поля

3.1.3. Потенциальные векторные поля

Понятие потенциального поля. Скалярный потенциал.

Поверхностно односвязные области.

Теорема о независимости работы потенциального поля от пути интегрирования. Методика вычисления потенциала.

3.1.4. Соленоидальные векторные поля

Понятие соленоидального поля.

Объемно односвязные области.

Теорема о потоке. Понятие векторного потенциала. Методика вычисления.

Лекция МА3–4 (2017-xx-xx–304) Числовые ряды с положительными членами

3.2. Числовые ряды

3.2.1. Сходящиеся и расходящиеся числовые ряды

Числовой ряд и его основные элементы. Общий член, частичная сумма, остаток.

Сходимость и свойства сходящихся рядов. Арифметические операции с числовыми рядами.

3.2.2. Прямое вычисление суммы ряда

Методика вычисления суммы рядов типа $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$, $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^k$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

3.2.3. Критерий Коши

Условие Коши. Критерий Коши.

Необходимое условие сходимости ряда.

Примеры применения критерия Коши для доказательства сходимости и расходимости.

3.2.4. Признаки сходимости рядов с положительными членами

Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами.

Общий признак сравнения. Общий признак сравнения в предельной форме.

Интегральный признак. Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$ при различных значениях p.

Признак сравнения с обобщенным гармоническим рядом. Сходимость ряда $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ при различных значениях q.

Признаки Даламбера и Коши.

Читать:

[Кудрявцев, том 1] Глава 4, §35.1-35.4, стр. 477-495.

[ИСС2] Глава 1, §1-2, стр. 7-28.

Лекция МА3–5 (2017-xx-xx–305) Ряды с членами произвольного знака

3.2.5. Знакочередующиеся ряды

Знакочередующиеся ряды, признак сходимости Лейбница. Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$.

3.2.6. Знакопеременные ряды

Абсолютно и условно сходящиеся ряды.

Перестановка членов абсолютно и условно сходящихся рядов. Теоремы Римана.

3.2.7. Признаки сходимости знакопеременных рядов

Признаки Дирихле и Абеля.

Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k^p}$ при различных значениях k и p.

Читать:

А.А.Быков, abkov@yandex.ru, abkov.ru

[Кудрявцев, том 1] Глава 4, §35.5-35.7, стр. 496-513 (доказательства опускаем).

[ИСС2] Глава 1, §3-5, стр. 28-43.

Лекция МА3–6 (2017-xx-xx–306) Функциональные последовательности и ряды

3.3. Функциональные ряды.

3.3.1. Понятие равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда

Понятие равномерной сходимости.

Определение равномерной сходимости.

Примеры исследования равномерной сходимости последовательностей:
1) $f_n(x) = x^n$, $x \in [0;1]$.
2) $f_n(x) = x^n$, $x \in (0;1)$.
3) $f_n(x) = x^n$, $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$.
4) $f_n(x) = nx^n\,(1-x)$, $x \in [0;1]$.

Примеры исследования равномерной сходимости рядов:
1) $S\,(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} x^k$, $x \in [0;1)$.
2) $S\,(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$, $x \in [0;1)$.
3) $S\,(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$, $x \in [0,b]$, $b > 0$.

3.3.2. Признаки равномерной сходимости функциональных рядов

Критерий Коши.

Признак Вейерштрасса.

Признак Абеля-Дирихле.

Читать:

[Кудрявцев, том 1] Глава 4, §36.1-36.3, стр. 514-535, §37.6, стр. 560-562.

[ИСС2] Глава 2, §1-2, стр. 67-83.

Лекция МА3–7 (2017-xx-xx–307) Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов

 А.А.Быков, abkov@yandex.ru, abkov.ru

3.3.3. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов

Предельный переход, дифференцирование и интегрирование по параметру. Теоремы о корректности этих операций.

Вычисление суммы ряда методом дифференцирования по параметру.

Читать:

[Кудрявцев, том 1] Глава 4, §36.1-36.3, стр. 514-535, §37.6, стр. 560-562.

[ИСС2] Глава 2, §3-4, стр. 83-97.

Лекция МА3–8 (2017-xx-xx–308) Степенные ряды

3.3.4. Степенные ряды.

Понятие степенного ряда. Область сходимости. Радиус сходимости.

Почленное дифференцирование степенного ряда.

Вычисление суммы степенного ряда методом дифференцирования и интегрирования по параметру.

Читать:

[Кудрявцев, том 1] Глава 4, §37.1, стр. 536-542.

[ИСС2] Глава 2, §6-7, стр. 102-116.

Лекция МА3–9 (2017-xx-xx–309) Ряды Тейлора

3.3.5. Ряды Тейлора

Ряд Тейлора. Область сходимости, радиус сходимости и формула для его вычисления.

Степенные ряды, порожденные геометрической прогрессией.

Ряды Тейлора для экспоненциальной, логарифмической функции.

Разложение в ряд Тейлора тригонометрических и обратных тригонометрических функций.

Приближенные вычисления с помощью степенных рядов.

Читать:

[Кудрявцев, том 1] Глава 4, §37.4, стр. 547-560.

[ИСС2] Глава 2, §7, стр. 102-116.

Лекция МА3–10 (2017-xx-xx–310) Сходимость в среднем

3.3.6. Сходимость в среднем

Сходимость в среднем. Теорема Арцела.

[ИСС2] Глава 2, §4, стр. 94-97.

Лекция МА3–11 (2017-xx-xx–311) Несобственные интегралы

3.4. Несобственные интегралы

3.4.1. Несобственные интегралы функции одной переменной

Несобственный интеграл - обобщение понятия площади для определенных классов неограниченных плоских областей.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (I рода).

Несобственные интегралы от неограниченных функций (II рода).

Понятие сходимости. Сходящиеся и расходящиеся несобственные интегралы.

3.4.2. Эталонные интегралы

Сходимость и расходимость $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ при различных значениях p.
Сходимость и расходимость $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ при различных значениях p и q.
Сходимость и расходимость $\int_a^{+\infty} e^{-px} dx$ при различных значениях p.

3.4.3. Методы исследования сходимости

Понятие эталонного интеграла.

Признаки сравнения для несобственных интегралов от неотрицательных функций.

Предельный признак сравнения (сравнение с $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ или с $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$).

Примеры сходящихся и расходящихся несобственных интегралов.

Читать:

[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §1, стр. 236-246.

[Кудрявцев, том 1] Глава 3, §33.1-333., стр. 442-456, §34.1-34.3, стр. 459-469.

 А.А.Быков, abkov@yandex.ru, abkov.ru

[ИСС1] Глава 9, §Д1-Д3, стр. 370-391.

[ИСС2] Глава 7, §3, стр. 259-267.

Лекция МА3–12 (2017-xx-xx–312) Свойства несобственных интегралов

3.4.4. Методы вычисления несобственных интегралов

Замена переменной в несобственных интегралах.

Интегрирование по частям.

Сходимость и расходимость $\int_a^{+\infty} e^{-px} \sin qx\, dx$ при различных значениях p, q.

Сходимость и расходимость $\int_a^{+\infty} t^{-p} \sin(q \ln t)\, dt$ при различных значениях p и q.

3.4.5. Абсолютная и условная сходимость

Абсолютно сходящиеся несобственные интегралы.

Условно сходящиеся несобственные интегралы.

Условие Коши. Критерий Коши.

3.4.6. Признаки условной сходимости

Признаки сходимости и условной сходимости.

Признак Дирихле-Абеля.

Читать:

[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §1, стр. 236-246.

[Кудрявцев, том 1] Глава 3, §33.4., стр. 457-459, §34.4, стр. 469-476 (доказательства опускаем).

[ИСС1] Глава 9, §Д1-Д3, стр. 370-391.

[ИСС2] Глава 7, §3, стр. 259-267.

3.4.7. Кратные несобственные интегралы

Признаки сходимости.

Лекция МА3–13 (2017-xx-xx–313) Интегралы, зависящие от параметра

3.5. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

3.5.1. Определенный интеграл, зависящий от параметра

Определенный интеграл, зависящий от параметра.
Дифференцирование и интегрирование по параметру.
Вычисление интегралов типа $\int_0^1 x^p\,(\ln x)^q\,dx$ при $p>0$ и $q>0$.
Читать:
[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §1, стр. 236-246.
[Кудрявцев, том 2] Глава 6, §53.1-53.2., стр. 215-220.
[ИСС2] Глава 7, §2, стр. 256-259.

3.5.2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Область сходимости.
Читать:
[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §1, стр. 236-246.
[Кудрявцев, том 2] Глава 6, §54.1-54.2 стр. 220-230.
[ИСС2] Глава 7, §3, стр. 259-267.

Лекция МА3–14 (2017-xx-xx–314) Равномерная сходимость несобственных интегралов

3.6. Равномерно сходящиеся несобственные интегралы

3.6.1. Понятие равномерной сходимости

Понятие равномерной сходимости. Определение равномерной сходимости.
Примеры равномерно сходящихся интегралов.

3.6.2. Признаки равномерной сходимости

Признак Вейерштрасса.
Признак Абеля-Дирихле.
Критерий Коши.
Читать:
[Кудрявцев, том 2] Глава 6, §54.1-54.2 стр. 220-230.
[ИСС2] Глава 7, §3, стр. 259-267.

Лекция МА3–15 (2017-xx-xx–315) Дифференцирование и интегрирование по параметру

3.6.3. Свойства равномерно сходящихся несобственных интегралов

Предельный переход, дифференцирование и интегрирование по параметру.

Теоремы о корректности этих операций.

Вычисление несобственных интегралов методом дифференцирования по параметру.

Читать:

[Кудрявцев, том 2] Глава 6, §54.1-54.2 стр. 220-230.

3.6.4. Свойства интегралов, зависящих от параметра

Применение дифференцирования и интегрирования по параметру для вычисления несобственных интегралов. Вычисление интегралов типа $\int_0^1 x^p \, (\ln x)^q \, dx$ при $p > -1$ и $q > -1$.

Читать:

[ЗУМА] Часть 2, Глава II, §1, стр. 236-246.

[Кудрявцев, том 2] Глава 6, §54.3 стр. 230-235.

[ИСС2] Глава 7, §4, стр. 267-271.

3.6.5. Приложения несобственных интегралов

Вычисление моментов случайной величины с нормальным распределением методом дифференцирования по параметру. Вычисление средних значений некоторых элементарных функций от случайной величины с нормальным распределением.

Читать:

[Кудрявцев, том 2] Глава 6, §54.3 стр. 235-240.

Лекция МА3–16 (2017-xx-xx–316) Тригонометрические ряды Фурье

3.7. Ряды и интегралы Фурье

3.7.1. Тригонометрические ряды Фурье

Тригонометрическая система функций и ее свойства. Ортогональность. Кусочно непрерывные функции. Понятие ряда Фурье. Свойства рядов Фурье. Разложение функций в ряд Фурье. Ряд Фурье в комплексной форме. Теорема о поточечной сходимости тригонометрического ряда Фурье.

Лекция МА3–17 (2017-xx-xx–317) Ряды Фурье по ортогональной системе функций

3.7.2. Ортогональные системы функций

Ортогональные системы функций. Полнота и замкнутость. Неравенство Бесселя. Замкнутые и полные системы. Равенство Парсеваля.

3.7.3. Разложение функции в ряд Фурье

Читать:

[Кудрявцев, том 2] Глава 7, §55.1, стр. 244-247, §55.9, стр. 276-278.

[ИСС2] Глава 8, §1, стр. 287-298.

Лекция МА3–18 (2017-xx-xx–318) Равномерная сходимость тригонометрического ряда Фурье

Равномерная сходимость тригонометрического ряда Фурье. Почленное дифференцирование и интегрирование ряда Фурье.

Теоремы Вейерштрасса об аппроксимации функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами. Замкнутость тригонометрической системы.

[ИСС2] Глава 8, §4-5, стр. 304-332.

Кратные тригонометрические ряды Фурье.

[ИСС2] Глава 8, §6, стр. 332-338.

Лекция МА3–19 (2017-xx-xx–319) Интеграл Фурье

3.7.4. Интеграл Фурье и его свойства

Понятие об интеграле Фурье. Свойства интеграла Фурье. Поточечная сходимость.

Лекция МА3–20 (2017-xx-xx–320) Применение интеграла Фурье

3.7.5. Интеграл Фурье в комплексной форме

Прямое и обратное преобразование Фурье. Интеграл Фурье в комплексной форме.

Читать:

[Кудрявцев, том 2] Глава 7, §56.1-56.4, стр. 278-290.

[ИСС2] Глава 8, §3, стр. 338-352.

Лекция МА3–21 (2017-xx-xx–321) Обобщенные функции

3.7.6. Обобщенные функции

Обобщенные функции.

Читать:

Владимиров В.С. Уравнения математической физики, 1981, глава 2.

Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. Обобщенные функции, выпуск 1 – М.: Гос. изд-во физико-мат. лит-ры. – 1959 г. – 470 с.

Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Пространства основных и обобщенных функций. Обобщенные функции, выпуск 2 – М.: Гос. изд-во физико-мат. лит-ры. – 1958 г. – 310 с.