

ЛЕКЦИЯ 3

Теорема о непродолжаемом решении задачи Коши для неавтономного уравнения с ограниченно липшиц-непрерывной правой частью

В данной лекции будет доказана теорема о существовании, единственности и свойстве непродолжаемости решения абстрактного дифференциального уравнения $y' = A(t, y)$.

§ 7. Теорема о непродолжаемом решении задачи Коши

Пусть B — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Рассмотрим также метрическое пространство $\mathbb{R}_+ \times B$ с расстоянием

$$\rho((t_1, y_1), (t_2, y_2)) = \max(|t_1 - t_2|, \|y_1 - y_2\|). \quad (1)$$

Пусть отображение

$$A(t, y) : \mathbb{R}_+ \times B \rightarrow B$$

обладает свойствами (A_1) и (A_2) :

(A_1) оно непрерывно в смысле метрики (1) (т. е. «по совокупности переменных»);

(A_2) существует такая функция

$$\mu(t, s) : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

ограниченная на каждом прямоугольнике $[0; T] \times [0; S]$ ($T, S > 0$), что

$$\forall t \geq 0; \forall z_1, z_2 \in B \quad \|A(t, z_1) - A(t, z_2)\| \leq \mu(t, \max(\|z_1\|, \|z_2\|)) \|z_1 - z_2\|.$$

Замечание 1. Функции $A(t, y)$, удовлетворяющие условию (A_2) (как частный случай, они могут вообще не зависеть от t), будем называть *ограниченно липшиц-непрерывными*. Смысл названия: они липшиц-непрерывны в каждой ограниченной части пространства B (при этом константа Липшица зависит от t и ограничена конечной величиной, если t изменяется на ограниченном множестве).

Сразу отметим, что из (A_1) вытекает свойство (A_3) :

(A_3) функция $\nu(t) \equiv \|A(t, \theta)\|$ (где θ — нулевой элемент пространства B) ограничена на каждом отрезке $[0; T]$. Действительно, в силу (A_1) числовая функция $\|A(t, \theta)\|$ непрерывна при всех $t \geq 0$.

Далее, из (A_2) и (A_3) следует свойство

(A_4) существует такая функция

$$\lambda(t, s) : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

ограниченная на каждом прямоугольнике $[0; T] \times [0; S]$ ($T, S > 0$), что

$$\forall t \geq 0; \forall z \in B \quad \|A(t, z)\| \leq \lambda(t, \|z\|).$$

Действительно, имеем

$$\|A(t, z)\| \leq \|A(t, \theta)\| + \|A(t, z) - A(t, \theta)\| \leq \nu(t) + \mu(t, \|z\|)\|z\| =: \lambda(t, \|z\|)$$

(т. е. $\lambda(t, s) = \nu(t) + s\mu(s)$), причём

$$\sup_{\substack{t \in [0; T] \\ s \in [0; S]}} \lambda(t, s) \leq \sup_{t \in [0; T]} \nu(t) + S \sup_{t \in [0; T]} \mu(t, s).$$

Докажем теперь одну простую, но важную лемму.

Лемма 1. Пусть $y(t) \in C([a; b], B)$, $[a; b] \subset \mathbb{R}_+$. Тогда сложная функция $f(t) \equiv A(t, y(t))$ (где A — введённое выше отображение) непрерывна: $f(t) \in C([a; b], B)$.

Доказательство. Заметим, что отображение $F : t \mapsto (t, y(t))$, действующее из $[a; b]$ в $\mathbb{R}_+ \times B$ с метрикой (1), непрерывно. В самом деле, при $t \rightarrow t_0$ имеем $\|y(t) - y(t_0)\| \rightarrow 0$ и, следовательно,

$$\max(|t - t_0|, \|y(t) - y(t_0)\|) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow t_0.$$

Но тогда функция $f(t)$ непрерывна как композиция непрерывных отображений

$$t \xrightarrow{F} (t, y(t)) \xrightarrow{A} A(t, y(t)).$$

(Мы воспользовались свойством (A_1) .) \blacktriangle

Рассмотрим теперь в пространстве B абстрактную задачу Коши

$$\begin{cases} y'(t) = A(t, y), & t \geq 0; \\ y(0) = y_{00}; & y_{00} \in B. \end{cases} \quad (2)$$

Наряду с ней рассмотрим задачу Коши с начальным условием в произвольный момент времени $t_0 \geq 0$:

$$\begin{cases} y'(t) = A(t, y), & t \geq t_0; \\ y(t_0) = y_0; & y_0 \in B, \quad t_0 \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Очевидно, (2) — частный случай (3).

Определение 1. Пусть

$$\mathcal{T} = [t_0; T), \quad t_0 < T \leq +\infty, \quad \text{или} \quad \mathcal{T} = [t_0; T], \quad t_0 < T < +\infty.$$

Решением задачи Коши (3) на промежутке \mathcal{T} будем называть всякую абстрактную функцию

$$y(t) \in C^1(\mathcal{T}, B),$$

удовлетворяющую

- 1) начальному условию $y(t_0) = y_0$;
- 2) при каждом $t \in \mathcal{T}$ уравнению $y'(t) = A(t, y(t))$, где дифференцирование понимается в смысле сильной производной в пространстве B , причём в граничных точках промежутка \mathcal{T} , принадлежащих ему, подразумевается односторонняя производная.

Замечание 2. Если $z(t)$ — решение задачи Коши (2) на промежутке $\mathcal{T} = [0, T]$ (или $\mathcal{T} = [0, T)$), то ограничение функции $z(t)$ на любой промежуток $\mathcal{T}_1 = [t_0, t_1] \subset \mathcal{T}$ (или $\mathcal{T}_1 = [t_0, t_1) \subset \mathcal{T}$) есть решение задачи Коши (3) с $y_0 = z(t_0)$ на промежутке \mathcal{T}_1 . (Очевидно.)

Определение 2. Решение $y_1(t) \in C^1(\mathcal{T}_1, B)$ задачи Коши (2) на промежутке \mathcal{T}_1 будем называть *непродолжаемым*, если не существует решения $y_2(t) \in C^1(\mathcal{T}_2, B)$ на промежутке \mathcal{T}_2 той же задачи, удовлетворяющего условиям

- 1) $\mathcal{T}_2 \supsetneq \mathcal{T}_1$;
- 2) $\forall t \in \mathcal{T}_1 \ y_2(t) = y_1(t)$.

Нам потребуется ряд предварительных результатов.

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t A(\tau, y(\tau)) d\tau. \quad (4)$$

Определение 3. *Решением интегрального уравнения (4) на промежутке $[t_0, t_0 + T]$ назовём функцию*

$$y(t) \in C([t_0, t_0 + T]; B), \quad (5)$$

удовлетворяющую при каждом $t \in [t_0, t_0 + T]$ уравнению (4), где интеграл понимается в смысле Римана (см. лекцию 1).

Замечание 3. Как следует из леммы 1, при условии (5) имеем $A(t, y(t)) \in C([t_0, t_0 + T], B)$, а поэтому в силу результатов лекции 1 интеграл в (4) существует при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Лемма 2. Для всех $T > 0$ эквивалентны следующие утверждения:

- (diff) $y(t) \in C^1([t_0, t_0 + T], B)$ и $y(t)$ — решение задачи Коши (3) на промежутке $[t_0, t_0 + T]$;
- (int) $y(t) \in C([t_0, t_0 + T], B)$ и $y(t)$ — решение интегрального уравнения (4) на промежутке $[t_0, t_0 + T]$.

Доказательство.

1) (diff) \Rightarrow (int). Очевидно, $C^1([t_0, t_0 + T], B) \subset C([t_0, t_0 + T], B)$. Далее, правая часть уравнения $y'(t) = A(t, y(t))$ непрерывна (поскольку непрерывна $y(t)$), а поэтому при всех $t \in [0; T]$ существует интеграл

$$\int_{t_0}^t A(\tau, y(\tau)) d\tau. \quad (6)$$

Интегрируя обе части уравнения $y'(t) = A(t, y(t))$ от t_0 до t , в силу формулы Ньютона—Лейбница (см. лекцию 1) и начального условия $y(t_0) = y_0$ получаем:

$$\forall t \in [t_0, t_0 + T] \ y(t) - y_0 = \int_{t_0}^t A(\tau, y(\tau)) d\tau,$$

что и требовалось.

2) (int) \Rightarrow (diff). В силу леммы 1 и непрерывности функции $y(t)$ подынтегральная функция в (4) непрерывна, а поэтому интеграл (6) при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$ существует и допускает дифференцирование по верхнему пределу. Но тогда из (4) получаем: $y(t) \in C^1([0; T], B)$, $y'(t) = A(t, y(t))$ при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$, $y(t_0) = y_0$, что и требовалось. \blacktriangle

Значение леммы 2 в том, что вопрос о существовании и единственности решения задачи Коши (3) (или (2)) на конечном отрезке сводится к аналогичному вопросу для интегрального уравнения (4).

Как нетрудно доказать (см. задачу 1 предыдущей лекции), линейное пространство

$$\mathbb{B}_{t_0, T} \equiv C([t_0, t_0 + T], B)$$

является банаховым относительно нормы

$$\|y\|_{\mathbb{B}_{t_0, T}} = \sup_{t \in [t_0, t_0 + T]} \|y(t)\|. \quad (7)$$

Следовательно, для фиксированного элемента $z_0 \in B$ «полоса»

$$\mathbb{B}_{t_0, z_0, T}^R \equiv \left\{ y(t) \in \mathbb{B}_{t_0, T} \mid \sup_{t \in [t_0, t_0 + T]} \|y(t) - z_0\| \leq R \right\}$$

является замкнутым шаром в банаховом пространстве $\mathbb{B}_{t_0, T}$, а следовательно, полным метрическим пространством относительно расстояния, порождённого нормой $\|\cdot\|_{\mathbb{B}_{t_0, T}}$. Здесь параметры $t_0 \geq 0$, $z_0 \in B$, $R > 0$ произвольны.

Лемма 3. Пусть $t_0 \geq 0$, $R > 0$, $y_0 \in B$ произвольны. Тогда найдётся такое $T' > 0$, что при всех $T \in (0, T']$ решение интегрального уравнения (4) на промежутке $[t_0, t_0 + T]$ существует и единственно в классе $\mathbb{B}_{t_0, y_0, T}^R$. (Иными словами, интегральное уравнение (4) имеет некоторое решение на промежутке $[t_0, t_0 + T]$, принадлежащее множеству $\mathbb{B}_{t_0, y_0, T}^R$, а других решений из этого множества уравнение (4) не имеет.)

Доказательство.

Для доказательства воспользуемся методом сжимающих отображений. Введём оператор

$$\mathbb{A}_{t_0, y_0, T} : \mathbb{B}_{t_0, T} \rightarrow \mathbb{B}_{t_0, T}$$

(зависящий от $t_0 \geq 0$, $y_0 \in B$, $T > 0$ как от параметров) по формуле

$$(\mathbb{A}_{t_0, y_0, T} z)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t A(\tau, z(\tau)) d\tau. \quad (8)$$

(Тот факт, что при каждом значении параметров этот оператор действительно ставит в соответствие каждому элементу банахова пространства $\mathbb{B}_{t_0, T}$ некоторый элемент этого же пространства, следует из леммы 1 и непрерывности интеграла с переменным верхним пределом от ограниченной функции.)

Нам надо выбрать T' таким образом, чтобы при всех $T \in (0, T']$ а) оператор $\mathbb{A}_{t_0, y_0, T}$ отображал каждый элемент множества $\mathbb{B}_{t_0, y_0, T}^R$ снова во множество $\mathbb{B}_{t_0, y_0, T}^R$ и б) являлся в этом множестве сжимающим оператором. (В дальнейшем для сокращения записи параметры t_0, y_0, T у оператора \mathbb{A} опустим.)

Для а) проведём оценку

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}z(t) - y_0\|_{\mathbb{B}_{t_0, T}} &= \sup_{t \in [t_0, t_0 + T]} \left\| \int_{t_0}^t A(\tau, z(\tau)) d\tau \right\| \leq \sup_{t \in [t_0, t_0 + T]} \int_{t_0}^t \|A(\tau, z(\tau))\| d\tau \leq \\ &\leq \int_{t_0}^{t_0 + T} \|A(\tau, z(\tau))\| d\tau \leq T \sup_{\substack{t \in [0; t_0 + T] \\ s \in [0; \|y_0\| + R]}} \lambda(t, s). \end{aligned}$$

Для б) проведём оценку

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}z_1(t) - \mathbb{A}z_2(t)\|_{\mathbb{B}_{t_0, T}} &= \sup_{t \in [t_0, t_0 + T]} \left\| \int_{t_0}^t A(\tau, z_1(\tau)) d\tau - \int_{t_0}^t A(\tau, z_2(\tau)) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \sup_{t \in [t_0, t_0 + T]} \int_{t_0}^t \|A(\tau, z_1(\tau)) - A(\tau, z_2(\tau))\| d\tau \leq \int_{t_0}^{t_0 + T} \|A(\tau, z_1(\tau)) - A(\tau, z_2(\tau))\| d\tau \leq \\ &\leq \int_{t_0}^{t_0 + T} \mu(\tau, \max(\|z_1(\tau)\|, \|z_2(\tau)\|)) \|z_1(\tau) - z_2(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq T \sup_{\substack{t \in [0; t_0 + T] \\ s \in [0; \|y_0\| + R]}} \mu(t, s) \|z_1 - z_2\|_{\mathbb{B}_{t_0, T}}. \end{aligned}$$

Итак, для выполнения условий (а), (б) при некотором T достаточно, чтобы для этого T выполнялись условия

$$\begin{cases} T \sup_{\substack{t \in [0; t_0 + T] \\ s \in [0; \|y_0\| + R]}} \lambda(t, s) \leq R, \\ T \sup_{\substack{t \in [0; t_0 + T] \\ s \in [0; \|y_0\| + R]}} \mu(t, s) \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (9)$$

Нам требуется, чтобы условия (9) выполнялись при всех $T \in (0, T']$ для некоторого T' . Выберем сначала \bar{T} произвольно, затем подберём $T' \leq \bar{T}$ такое, что

$$\begin{cases} T' \sup_{\substack{t \in [0; t_0 + \bar{T}] \\ s \in [0; \|y_0\| + R]}} \lambda(t, s) \leq R, \\ T' \sup_{\substack{t \in [0; t_0 + \bar{T}] \\ s \in [0; \|y_0\| + R]}} \mu(t, s) \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (10)$$

(это можно сделать, поскольку при фиксированном \bar{T} в левых частях обоих неравенств (10) T' умножается на константу). Но тогда тем более

$$\left\{ \begin{array}{l} T' \sup_{\substack{t \in [0; t_0 + T'] \\ s \in [0; \|y_0\| + R]}} \lambda(t, s) \leq R, \\ T' \sup_{\substack{t \in [0; t_0 + T'] \\ s \in [0; \|y_0\| + R]}} \mu(t, s) \leq \frac{1}{2}, \end{array} \right.$$

а также

$$\left\{ \begin{array}{l} T \sup_{\substack{t \in [0; t_0 + T] \\ s \in [0; \|y_0\| + R]}} \lambda(t, s) \leq R, \\ T \sup_{\substack{t \in [0; t_0 + T] \\ s \in [0; \|y_0\| + R]}} \mu(t, s) \leq \frac{1}{2}, \end{array} \right.$$

для любого $T \in (0, T']$. Теперь утверждение леммы вытекает из принципа сжимающих отображений. \blacktriangle

В силу леммы 2 результат леммы 3 полностью переносится на задачу Коши (3). Сформулируем соответствующее утверждение.

Лемма 4. Пусть $t_0 \geq 0$, $R > 0$, $y_0 \in B$ фиксированы произвольным образом. Тогда найдётся такое $T' > 0$, что для всех $T \in (0, T']$ решение задачи Коши (3) на промежутке $[t_0, t_0 + T]$ существует и единственно в классе $\mathbb{B}_{t_0, y_0, T}^R$.

Прямо сейчас выведем отсюда утверждение об отсутствии «разветвлений» решения задачи (2).

Лемма 5. Пусть $y_1(t)$, $y_2(t)$ — решения задачи (2) соответственно на промежутках \mathcal{T}_1 и \mathcal{T}_2 . Тогда одно из этих решений является продолжением другого (в частности, они совпадают, если $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$).

Доказательство. Предположим противное:

$$y_1(t) \neq y_2(t) \quad \text{на } \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2.$$

Рассмотрим множество

$$\mathcal{T}^\neq \equiv \{t \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 \mid y_1(t) \neq y_2(t)\}.$$

Сразу заметим: $0 \notin \mathcal{T}^\neq$ (в силу начального условия задачи (2)). Далее, множество \mathcal{T}^\neq открыто как подмножество $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$, поскольку является прообразом множества $(0, +\infty)$ при непрерывном отображении $t \mapsto \|y_1(t) - y_2(t)\|$, определённом на $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$. Положим

$$T^* = \inf \mathcal{T}^\neq.$$

Заметим: $T^* \notin \mathcal{T}^\neq$ (следовательно, $y_1(T^*) = y_2(T^*)$). В самом деле, если $T^* = 0$, это уже доказано ранее. Если же $T^* > 0$, то T^* — граничная точка множества \mathcal{T}^\neq , а следовательно, $T^* \notin \mathcal{T}^\neq$, поскольку это множество открыто в $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$. Значит, в любой правой полуокрестности точки T^* существует такое $t_1 > T^*$, что $t_1 \in \mathcal{T}^\neq \subset \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$, причём пересечение любой правой полуокрестности точки T^* с \mathcal{T}^\neq непусто.

В силу замечания 2 функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ являются решениями задачи Коши

$$\begin{cases} y'(t) = A(t, y), & t \geq T^*; \\ y(T^*) = y_1(T^*) \end{cases} \quad (11)$$

на промежутке $[T^*, t_1]$. В силу непрерывности $y_1(t)$, $y_2(t)$ имеем

$$R_{12} = \max_{i=1,2} \sup_{t \in [T^*, t_1]} \|y_i(t) - y_1(T^*)\| < +\infty. \quad (12)$$

В силу леммы 4 существует такое $T' > 0$, что для любого $T \in (0, T']$ решение задачи Коши (11) на промежутке $[T^*, T^* + T]$, удовлетворяющее условию

$$\|y(t) - y_1(T^*)\| \leq R_{12}, \quad (13)$$

единственно. Взяв $T = \min(T', t_1 - T^*)$, получим противоречие, поскольку в силу (12) условие (13) выполнено, а $y_1 \neq y_2$ в любой правой полуокрестности T^* . \blacktriangle

Теперь мы готовы сформулировать и доказать основную теорему этой лекции.

Теорема 1. (О непродолжаемом решении.) Существует и единственно непродолжаемое решение $\tilde{y}(t) \in C^1(\mathcal{T}_0; B)$ задачи Коши (2). Оно удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\mathcal{T}_0 = [0; T_0)$, $0 < T_0 \leq +\infty$;
- 2) в случае $T_0 < +\infty$ верно предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow T_0 - 0} \|\tilde{y}(t)\| = +\infty; \quad (14)$$

- 3) всякое другое решение задачи (2) является ограничением решения $\tilde{y}(t)$ на промежуток $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}_0$.

Замечание 4. В случае $T_0 = +\infty$ соотношение $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\tilde{y}(t)\| = +\infty$ может как выполняться, так и не выполняться.

Доказательство. В силу леммы 4 существует решение задачи Коши (2) хотя бы на некотором отрезке $[0, T]$. В силу леммы 5 из любых двух решений задачи Коши (2) одно является продолжением другого (в частности, они могут совпадать).

Рассмотрим теперь для каждого $T > 0$ все функции из $C^1([0; T]; B)$. Среди них или есть решение задачи (2) на промежутке $[0; T]$, или нет. Положим

$$\mathbb{T} = \{T > 0 : \exists \text{ решение задачи (2) из } C^1([0; T], B)\}, \quad T_0 = \sup \mathbb{T}.$$

Если $T_0 = +\infty$, то существует решение $\tilde{y}(t) \in C^1([0; +\infty), B)$. В самом деле, выбирая последовательность $T_n \uparrow +\infty$ и соответствующую ей последовательность решений $\{y_n(t)\}$, в силу леммы 5

получим, что при всех $n \in \mathbb{N}$ решение y_{n+1} есть продолжение решения y_n . Поэтому функция

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y_n(t), & t \in [T_{n-1}; T_n), \quad n \geq 2, \\ y_1(t), & t \in [0; T_1) \end{cases}$$

и будет непродолжаемым решением, определённым на $[0; +\infty)$. Других же решений (не сводящихся к ограничению $\tilde{y}(t)$ на меньший промежуток) не будет в силу леммы 5.

Пусть теперь $T_0 < +\infty$. Тогда гипотетически возможны два случая: а) $T_0 \in \mathbb{T}$; б) $T_0 \notin \mathbb{T}$.

В случае а) существует решение $y(t) \in C^1([0; T_0], B)$. Но тогда в силу леммы 4, применённой к задаче (3) с $t_0 = T_0$, решение можно продолжить за точку T_0 , причём обе односторонние производные $y'_-(T_0)$ и $y'_+(T_0)$ будут существовать и равняться $A(T_0, y(T_0))$: левая — по определению решения на $[0; T_0]$, правая — по определению решения задачи Коши с началом промежутка в точке T_0 . Следовательно, мы получим решение на большем промежутке и придём к противоречию с определением T_0 . Итак, случай а) исключается.

В случае б) рассуждениями, аналогичными проведённым для $T_0 = +\infty$, устанавливаем существование и единственность решения $y(t)$ задачи (2) на полуинтервале $[0; T_0)$. Случай б) распадается на два подслучая:

(б₁) $\overline{\lim}_{t \rightarrow T_0-0} \|y(t)\| = +\infty$ (т. е. решение неограничено в любой левой проколотой окрестности точки T_0);

(б₂) $\overline{\lim}_{t \rightarrow T_0-0} \|y(t)\| < +\infty$.

Покажем, что вариант (б₂) исключается. В самом деле, пусть функция $y(t)$ ограничена в некотором полуинтервале $(T_0 - \gamma; T_0)$:

$$\exists C \geq 0 \quad \forall t \in (T_0 - \gamma; T_0) \quad \|y(t)\| \leq C.$$

Тогда в силу свойства (A_4) имеем

$$\forall t \in (T_0 - \gamma; T_0) \quad \|A(t, y(t))\| \leq \sup_{\substack{t \in [0; T_0] \\ s \in [0; C]}} \lambda(t, s) =: \mathcal{L}.$$

Но тогда из уравнения задачи (2) вытекает, что производная $y'(t)$ ограничена по норме величиной \mathcal{L} при $t \in (T_0 - \gamma; T_0)$: $\|y'(t)\| \leq \mathcal{L}$. Следовательно (см. лекцию 1), функция $y(t)$ липшиц-непрерывна на $(T_0 - \gamma; T_0)$, а значит, удовлетворяет в точке T_0 слева условию Коши. Итак, существует предел

$$Y_0 = \lim_{t \rightarrow T_0-0} y(t).$$

Доопределим функцию $y(t)$ в точке T_0 значением Y_0 . Полученная функция $Y(t)$ будет непрерывной в точке T_0 слева. Тогда в силу леммы 1 функция $A(t, Y(t))$ тоже непрерывна в точке T_0 слева, а следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow T_0-0} A(t, y(t)) = \lim_{t \rightarrow T_0-0} A(t, Y(t)) = A(T_0, Y_0). \quad (15)$$

Но поскольку при $t < T_0$ верно равенство $y' = A(t, y(t))$, из (15) получаем соотношение

$$\lim_{t \rightarrow T_0 - 0} y'(t) = A(T_0, Y_0). \quad (16)$$

Однако отсюда в силу леммы о продолжении в точку следует, что функция $y(t)$ продолжима с $[0; T_0)$ на $[0; T_0]$ с сохранением непрерывной дифференцируемости (обозначим полученную функцию через $Y(t)$), причём $Y'(T_0) = A(T_0, Y_0)$, т. е. $Y(t)$ — решение на $[0, T_0]$ и мы приходим к противоречию с условием случая (б) (решения на $[0; T_0]$ не существует).

Таким образом, при $T_0 < +\infty$ реализуется лишь случай (б₁):

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow T_0 - 0} \|y(t)\| = +\infty. \quad (17)$$

Установим теперь, что имеет место более сильное, чем (17), соотношение

$$\lim_{t \rightarrow T_0 - 0} \|y(t)\| = +\infty. \quad (18)$$

Итак, требуется доказать:

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 \forall t \in (T_0 - \delta; T_0) \cap [0; T_0) \quad \|y(t)\| > M.$$

Предположим противное:

$$\exists M > 0 \forall \delta > 0 \exists t \in (T_0 - \delta; T_0) \cap [0; T_0) \quad \|y(t)\| \leq M. \quad (19)$$

Зафиксируем число M из (19). В силу (A₄) будем иметь

$$\forall t \in [0; T_0), \forall z \in B \quad (\|z\| \leq 2M \Rightarrow \|A(t, z)\| \leq \sup_{\substack{t \in [0; T_0] \\ s \in [0; 2M]}} \lambda(t, s) =: E). \quad (20)$$

Из (20) и уравнения $y'(t) = A(t, y)$ получаем:

$$\|y'(t)\| \leq E \quad \text{при} \quad \|y(t)\| \leq 2M, \quad t \in [0; T_0). \quad (21)$$

Выберем $\delta \leq \frac{1}{2} \frac{M}{E}$ и возьмём из (19) соответствующее $t = t^*$: $\|y(t^*)\| \leq M$, $T_0 - \delta < t^*$. В силу свойства (17) существует такое t^{**} , что $T_0 - \delta < t^* < t^{**} < T_0$ и $\|y(t^{**})\| \geq 2M$. Но тогда в силу непрерывности функции $y(t)$ («прообраз замкнутого множества замкнут») существует такое $t^{***} \in (t^*; t^{**}]$, что

$$\|y(t^{***})\| = 2M, \quad \forall t \in (t^*; t^{***}) \quad \|y(t)\| < 2M,$$

откуда в силу (21)

$$\|y'(t)\| \leq E \quad \text{при всех} \quad t \in [t^*; t^{***}].$$

Однако в этом случае одновременно

$$\begin{aligned} \|y(t^{***}) - y(t^*)\| &\leq |t^{***} - t^*| \cdot E < \delta \cdot E \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{E} \cdot E < M \quad (\text{см. лекцию 1}), \\ \|y(t^{***}) - y(t^*)\| &\geq \|y(t^{***})\| - \|y(t^*)\| \geq M. \end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает (18). \blacktriangle

Замечание 5. Функция $f(y) : B_1 \rightarrow B_2$ называется *ограниченно липшиц-непрерывной*, если существует такая функция $\mu(x) : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, ограниченная на каждом ограниченном множестве, что

$$\forall y_1, y_2 \in B_1 \quad \|f(y_1) - f(y_2)\|_2 \leq \mu(\max(\|y_1\|_1, \|y_2\|_1)) \|y_1 - y_2\|_1.$$

Иными словами, это функция, липшиц-непрерывная в каждом шаре (возможно, со своей константой Липшица).

Замечание 6. Функция $f(y) : B_1 \rightarrow B_2$ называется *локально липшиц-непрерывной*, если для каждой точки $y_0 \in B_1$ существует такая окрестность $B_\delta(y_0)$, в которой данная функция является липшиц-непрерывной, т. е.

$$\begin{aligned} \forall y_0 \in B_1 \quad \exists \delta > 0, \quad \exists L > 0 \quad \forall y_1, y_2 \in B_1 \quad (\|y_1 - y_0\|_1 < \delta, \|y_2 - y_0\|_1 < \delta) &\implies \\ &\implies \|f(y_2) - f(y_1)\|_2 \leq L \|y_2 - y_1\|_1. \end{aligned}$$

В теореме фигурирует ограниченно липшиц-непрерывная функция. Условие локальной липшиц-непрерывности является более слабым.

Задачи для самостоятельного решения

1. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} y'(t) = y^2, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (22)$$

Исследовать, конечным или бесконечным является промежуток существования решения этой задачи, в зависимости от y_0 .

2. Пусть $A(t, y)$ удовлетворяет условиям теоремы и глобально ограничена:

$$\exists C > 0 \quad \forall t \geq 0, y \in B \quad \|A(t, y)\| \leq C.$$

Доказать, что в этом случае задача Коши (2) глобально разрешима, т. е. её решение существует на $[0, +\infty)$.

Указание. Доказывайте от противного.

3*. В задаче 1 уравнение рассматривается в одномерном пространстве. Очевидно, неподходящее решение задачи (22), существующее лишь на конечном промежутке, стремится к бесконечности «вдоль одного направления». Придумать пример задачи Коши (очевидно, в пространстве размерности больше 1), решение которой, стремясь к бесконечности по норме, не остаётся в пределах никакого одномерного подпространства.