Цилиндрические функции

Напомним, что цилиндрическими функциями называются частные решения уравнения Бесселя
$$z^2u'' + zu' + (z^2 - \nu^2)u = 0,$$
где z — комплексная переменная, ν — параметр, который может принимать любые вещественные или комплексные значения.

1 Уравнение Ломмеля

Заметим, что при помощи цилиндрических функций могут быть выражены частные решения широко используемого в приложениях уравнения Ломмеля:
$$v'' + \frac{1-2\alpha}{\xi}v' + \left[(\beta\gamma\xi^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - \nu^2\gamma^2}{\xi^2}\right]v = 0. \tag{1.1}$$
В самом деле, если искать решение уравнения (1.1) в виде $v(\xi) = \xi^\alpha u(\beta\xi^\gamma)$, то для функции $u(z)$ приходим к уравнению Бесселя. Подставляя выражения
$$v'(\xi) = \alpha\xi^{\alpha-1}u(\beta\xi^\gamma) + \beta\gamma\xi^{\alpha+\gamma-1}u'(\beta\xi^\gamma),$$
$$v''(\xi) = (\beta\gamma)^2\xi^{\alpha+2\gamma-2}u''(\beta\xi^\gamma) + \beta\gamma(2\alpha+\gamma-1)\xi^{\alpha+\gamma-2}u'(\beta\xi^\gamma) + \alpha(\alpha-1)\xi^{\alpha-2}u(\beta\xi^\gamma)$$
в уравнение (1.1), сокращая на $(\beta\gamma)^2\xi^{\alpha+2\gamma-2}$ и приводя подобные, получаем
$$u''(\beta\xi^\gamma) + \frac{1}{\beta\xi^\gamma}u'(\beta\xi^\gamma) + \left(1 - \frac{\nu^2}{(\beta\xi^\gamma)^2}\right)u(\beta\xi^\gamma) = 0,$$
что и требовалось доказать.

Пример 1.1. *Сведите уравнение*
$$v'' + \frac{3}{\xi}v' + \left(\xi^5 + \frac{1}{\xi^2}\right)v = 0$$

к уравнению Бесселя.

Решение. Сравнивая заданное уравнение с уравнением (1.1), получаем:

$$3 = 1 - 2\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = -1; \qquad 5 = 2\gamma - 2 \;\Rightarrow\; \gamma = \frac{7}{2};$$

$$(\beta\gamma)^2 = 1 \;\Rightarrow\; \beta = \frac{2}{7}; \qquad \alpha^2 - \nu^2\gamma^2 = 1 - \nu^2\left(\frac{7}{2}\right)^2 = 1 \;\Rightarrow\; \nu = 0.$$

Итак, если искать функцию $v(\xi)$ в виде

$$v(\xi) = \xi^{-1} u_0\left(\frac{2}{7}\xi^{7/2}\right),$$

где функция $u_0(z)$ удовлетворяет уравнению Бесселя нулевого порядка.

2 Построение частных решений уравнения Бесселя в интегральном виде

Уравнение Бесселя является частным случаем обобщенного уравнения гипергеометрического типа, для которого $\sigma = z$, $\tilde{\tau} = 1$, $\tilde{\sigma} = z^2 - \nu^2$. Как было показано ранее, замена искомой функции $u(z) = \varphi(z)y(z)$, где $\varphi(z) = z^{\pm\nu}e^{\pm iz}$ позволяет свести его к простейшему уравнению гипергеометрического типа для функции $y(z)$. Выберем, например, вспомогательную функцию $\varphi(z) = z^{\nu}e^{iz}$. При этом для функции $y(z)$ приходим к уравнению

$$zy'' + (2iz + 2\nu + 1)y' + i(2\nu + 1)y = 0. \tag{2.1}$$

В данном случае $\sigma = z$, $\tau = 2iz + 2\nu + 1$, $\lambda = i(2\nu + 1)$, откуда получаем:

$$\rho(z) = \frac{1}{\sigma(z)} e^{\int \frac{\tau(z)}{\sigma(z)}dz} = \frac{1}{z} e^{\int \left(2i + \frac{2\nu+1}{z}\right)dz} = z^{2\nu}e^{2iz}$$

с точностью до нормировочного множителя,

$$\lambda + \mu\tau' + \frac{\mu(\mu-1)}{2}\sigma'' = 0 \;\Rightarrow\; i(2\nu+1) + 2i\mu = 0 \;\Leftrightarrow\; \mu = -\nu - \frac{1}{2}.$$

Следовательно, частное решение уравнения (2.1) можно записать как

$$y(z) = \frac{a_\nu}{\rho(z)} \int\limits_C \frac{\sigma^{\mu}(s)\rho(s)}{(z-s)^{\mu+1}} ds = a_\nu z^{-2\nu} e^{-2iz} \int\limits_C [s(z-s)]^{\nu - 1/2} e^{2is} ds,$$

где a_ν — нормировочная постоянная, C — контур, концы s_1, s_2 которого удовлетворяют условиям

$$\left.\frac{\sigma^{\mu+1}(s)\rho(s)}{(z-s)^{\mu+2}}\right|_{s_1,s_2} = s^{\nu+1/2}e^{2is}(z-s)^{\nu-3/2}\Big|_{s_1,s_2} = 0. \tag{2.2}$$

При этом соответствующее частное решение уравнения Бесселя имеет вид:

$$u(z) = a_\nu z^{-\nu} e^{-iz} \int\limits_C [s(z-s)]^{\nu-1/2} e^{2is} ds. \tag{2.3}$$

Рассмотрим сначала частный случай, когда $z > 0$, $\operatorname{Re}\nu > 3/2$. При этом в качестве концов контура C можно выбрать точки $s_1 = 0$ и $s_2 = z$. Кроме того, за счет наличия в выражении (2.2) множителя e^{2is} концы контура C могут также уходить на бесконечность, так что $\operatorname{Im} s \to +\infty$.

В качестве контура C будем выбирать один из контуров C_0, C_1 или C_2, представленных на рис. 1. При этом будем получать различные частные решения уравнения Бесселя. Для однозначного выбора ветви функции $[s(z-s)]^{\nu-1/2}$ будем считать, что $|\arg s(z-s)| < \pi$.

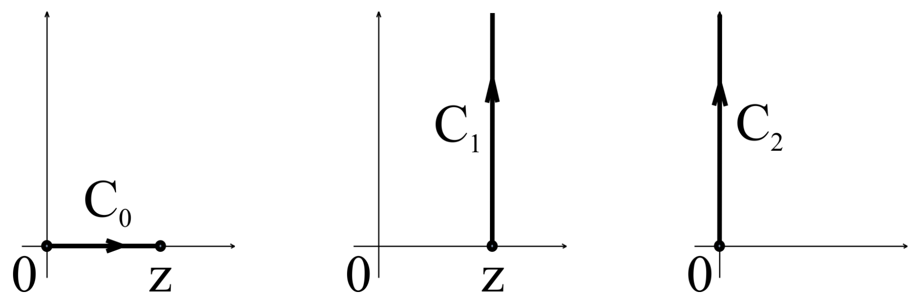

Рис. 1: Контуры C_0, C_1 и C_2.

Параметрическое представление контуров C_0, C_1 и C_2 возьмем в виде:

$$s = \frac{z}{2}(1+t), \quad t \in [-1,\, 1] \text{ для контура } C_0;$$

$$s = z(1 + \frac{it}{2}), \quad t \in [0,\, +\infty) \text{ для контура } C_1;$$

$$s = \frac{itz}{2}, \quad t \in [0,\, +\infty) \text{ для контура } C_2.$$

Используя контур C_0, получаем:

$$u_\nu^{(0)}(z) = a_\nu^{(0)} z^{-\nu} e^{-iz} \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu-1} (1-t^2)^{\nu-1/2} e^{iz(1+t)} \frac{z}{2} dt = \frac{a_\nu^{(0)} z^\nu}{2^{2\nu}} \int\limits_{-1}^{1} (1-t^2)^{\nu-1/2} e^{izt} dt =$$

$$= \frac{a_\nu^{(0)} z^\nu}{2^{2\nu}} \int\limits_{-1}^{1} (1-t^2)^{\nu-1/2} \cos(zt) dt. \tag{2.4}$$

Интегральное выражение для функции $u_\nu^{(0)}(z)$ получено в предположении, что $z > 0$ и $\operatorname{Re}\nu > 3/2$. Пусть теперь переменная z принадлежит комплексной плоскости с разрезом $(-\infty,\, 0)$, то есть $|\arg z| < \pi$. Покажем, что функция $u_\nu^{(0)}(z)$, определяемая интегралом

(2.4), является аналитической в области $\operatorname{Re}\nu > -1/2$. В самом деле, пусть $\operatorname{Re}\nu \geqslant -1/2+\delta$ и $|z| \leqslant R$, где δ и R — произвольные положительные числа. В силу оценки

$$|(1-t^2)^{\nu-1/2}\cos(zt)| \leqslant e^R(1-t^2)^{\delta-1}$$

и сходимости интеграла

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\delta-1}dt$$

получаем, что интеграл в выражении (2.4) сходится равномерно при $|\arg z| < \pi$ и $\operatorname{Re}\nu > -1/2$, то есть в соответствующей области изменения параметров z и ν функция $u_\nu^{(0)}(z)$ является аналитической.

Раскладывая $\cos(zt)$ в ряд Тейлора, можно получить представление для функции $u_\nu^{(0)}(z)$ в виде степенного ряда:

$$\cos(zt) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(zt)^{2k}}{(2k)!},$$

$$u_\nu^{(0)}(z) = \frac{a_\nu^{(0)}z^\nu}{2^{2\nu}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\nu-1/2}t^{2k}dt,$$

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\nu-1/2}t^{2k}dt = 2\int_{0}^{1}(1-t^2)^{\nu-1/2}t^{2k}dt = \{p=t^2\} = \int_{0}^{1}(1-p)^{\nu-1/2}p^{k-1/2}dp =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+1/2)\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k+\nu+1)} = \frac{\Gamma(\nu+1/2)(2k)!\sqrt{\pi}}{2^{2k}k!\Gamma(k+\nu+1)}.$$

Выбирая нормировочный множитель

$$a_\nu^{(0)} = \frac{2^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)}, \tag{2.5}$$

получаем ряд для функции $u_\nu^{(0)}(z)$ в наиболее простом виде:

$$u_\nu^{(0)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

Функция $u_\nu^{(0)}(z)$ при указанном выборе нормировочного множителя называется функцией Бесселя (первого рода) и обозначается $J_\nu(z)$. Интегральное представление функции Бесселя имеет вид:

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\nu-1/2}\cos(zt)dt. \tag{2.6}$$

Рассмотрим теперь частные решения уравнения Бесселя, соответствующие контурам C_1 и C_2:

$$u_\nu^{(1)}(z) = a_\nu^{(1)} z^{-\nu} e^{-iz} \int\limits_0^\infty z^{\nu-1/2} \left(1+\frac{it}{2}\right)^{\nu-1/2} \left(-\frac{izt}{2}\right)^{\nu-1/2} e^{2i(z+izt/2)} \frac{iz}{2} dt =$$

$$= -\frac{a_\nu^{(1)}}{\sqrt{2}} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu e^{i(z-\pi\nu/2-\pi/4)} \int\limits_0^\infty e^{-zt} \left[t\left(1+\frac{it}{2}\right)\right]^{\nu-1/2} dt, \qquad (2.7)$$

$$u_\nu^{(2)}(z) = a_\nu^{(2)} z^{-\nu} e^{-iz} \int\limits_0^\infty z^{\nu-1/2} \left(1-\frac{it}{2}\right)^{\nu-1/2} \left(\frac{izt}{2}\right)^{\nu-1/2} e^{-zt} \frac{iz}{2} dt =$$

$$= \frac{a_\nu^{(2)}}{\sqrt{2}} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu e^{-i(z-\pi\nu/2-\pi/4)} \int\limits_0^\infty e^{-zt} \left[t\left(1-\frac{it}{2}\right)\right]^{\nu-1/2} dt. \qquad (2.8)$$

В интегралах (2.7) и (2.8) аргумент выражений $\left(1 \pm \frac{it}{2}\right)$ берется наименьшим по модулю.

Заметим, что если взять $a_\nu^{(1)} = -a_\nu^{(2)}$, то функции $u_\nu^{(1)}(z)$ и $u_\nu^{(2)}(z)$ при вещественном аргументе z будут комплексно сопряженными. Если же положить $2a_\nu^{(0)} = a_\nu^{(2)} = -a_\nu^{(1)}$, то будет справедливо равенство

$$u_\nu^{(0)}(z) = \frac{1}{2}\left[u_\nu^{(1)}(z) + u_\nu^{(2)}(z)\right].$$

Для доказательства этого равенства рассмотрим интеграл

$$I_C = \int\limits_C [s(z-s)]^{\nu-1/2} e^{2is} ds, \qquad (2.9)$$

где C — замкнутый контур, представленный на рис. 2.

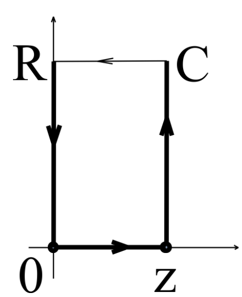

Рис. 2: Замкнутый контур C в интеграле (2.9). R>0 — произвольное число.

Так как подынтегральное выражение в (2.9) не содержит особых точек внутри контура C, то $I_C = 0$. Устремляя R к бесконечности, получаем

$$0 = 2u_\nu^{(0)} - u_\nu^{(1)} - u_\nu^{(2)} \;\;\Rightarrow\;\; u_\nu^{(0)} = \frac{1}{2}\left[u_\nu^{(1)}(z) + u_\nu^{(2)}(z)\right].$$

Если нормировочный множитель определяется выражением (2.5), то функции $u_\nu^{(1)}$ и $u_\nu^{(2)}$ называются функциями Ханкеля первого и второго рода соответственно и обозначаются $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$:

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{z^\nu e^{i(z-\pi\nu/2-\pi/4)}}{\Gamma(\nu+1/2)} \int\limits_0^\infty \left[t\left(1+\frac{it}{2}\right)\right]^{\nu-1/2} e^{-zt} dt = \left\{t \to \frac{t}{z}\right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \frac{e^{i(z-\pi\nu/2-\pi/4)}}{\Gamma(\nu+1/2)} \int\limits_0^\infty \left[t\left(1+\frac{it}{2z}\right)\right]^{\nu-1/2} e^{-t} dt; \tag{2.10}$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \frac{e^{-i(z-\pi\nu/2-\pi/4)}}{\Gamma(\nu+1/2)} \int\limits_0^\infty \left[t\left(1-\frac{it}{2z}\right)\right]^{\nu-1/2} e^{-t} dt. \tag{2.11}$$

Полученные интегральные представления для цилиндрических функций называют *представлениями Пуассона.*

3 Рекуррентные соотношения для цилиндрических функций

Получим рекуррентное соотношение, связывающее функции u_ν, u'_ν и $u_{\nu-1}$, исходя из общего вида интегрального представления частных решений уравнения Бесселя:

$$u_\nu(z) = a_\nu z^{-\nu} e^{-iz} \int\limits_C [s(z-s)]^{\nu-1/2} e^{2is} ds.$$

Рассмотрим соотношение вида

$$A_1(z)u'_\nu(z) + A_2(z)u_\nu(z) + A_3(z)u_{\nu-1}(z) = 0,$$

в которое подставим интегральное представление функции $u_\nu(z)$. В результате получим:

$$e^{-iz} z^{-\nu-1} a_\nu \int\limits_C \left\{ A_1(z)\left[-(\nu+iz)s(z-s) + \left(\nu-\frac{1}{2}\right)zs\right] + \right.$$

$$\left. + A_2(z)zs(z-s) + A_3(z)\frac{a_{\nu-1}}{a_\nu}z^2 \right\} [s(z-s)]^{\nu-3/2} e^{2is} ds = 0, \tag{3.1}$$

причем, если нормировочный множитель a_ν соответствует функциям Бесселя или Ханкеля, то

$$\frac{a_{\nu-1}}{a_\nu} = \frac{\nu-1/2}{2}.$$

Равенство (3.1) будет, в частности, выполнено, если подынтегральное выражение в (3.1) имеет вид

$$\frac{d}{ds}\left\{[s(z-s)]^{\nu-1/2}e^{2is}\right\}.$$

Таким образом, коэффициенты интересующего нас рекуррентного соотношения могут быть найдены из следующего равенства:

$$A_1(z)\left[-(\nu+iz)s(z-s)+\left(\nu-\frac{1}{2}\right)zs\right]+A_2(z)zs(z-s)+A_3(z)\frac{\nu-1/2}{2}z^2=$$

$$=\left(\nu-\frac{1}{2}\right)(z-2s)+2is(z-s). \tag{3.2}$$

Так как равенство (3.2) должно быть справедливо при любых значениях параметра s, то, полагая $s=0$ и $s=z$, получаем:

$$s=0: \quad A_3(z)\frac{\nu-1/2}{2}z^2=\left(\nu-\frac{1}{2}\right)z \;\;\Rightarrow\;\; A_3(z)=\frac{2}{z},$$

$$s=z: \quad A_1(z)\left(\nu-\frac{1}{2}\right)z^2+\underbrace{\frac{2}{z}\frac{(\nu-1/2)z^2}{2}}_{=(\nu-1/2)z}=-\left(\nu-\frac{1}{2}\right)z \;\;\Rightarrow\;\; A_1(z)=-\frac{2}{z}.$$

Коэффициент $A_2(z)$ найдем, сравнивая коэффициенты при старшей степени s в правой и левой частях равенства (3.2):

$$-\frac{2}{z}(\nu+iz)-A_2(z)z=-2i \;\;\Rightarrow\;\; A_2(z)=-\frac{2\nu}{z^2}.$$

Итак, получаем следующее рекуррентное соотношение:

$$u_\nu'+\frac{\nu}{z}u_\nu=u_{\nu-1}, \tag{3.3}$$

которое можно переписать в эквивалентном виде

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left[z^\nu u_\nu(z)\right]=z^{\nu-1}u_{\nu-1}(z). \tag{3.4}$$

Аналогичным способом можно получить рекуррентное соотношение, связывающее функции $u_\nu(z)$, $u_\nu'(z)$ и $u_{\nu+1}(z)$:

$$-u_\nu'+\frac{\nu}{z}u_\nu=u_{\nu+1} \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left[z^{-\nu}u_\nu(z)\right]=z^{-(\nu+1)}u_{\nu+1}(z). \tag{3.5}$$

Из равенств (3.4) и (3.5) получаем:

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n\left[z^\nu u_\nu(z)\right]=z^{\nu-n}u_{\nu-n}, \qquad \left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n\left[z^{-\nu}u_\nu(z)\right]=z^{-(\nu+n)}u_{\nu+n}. \tag{3.6}$$

Рекуррентные соотношения (3.6) можно, в частности, использовать для построения аналитического продолжения функций $J_\nu(z)$ и $H_\nu^{(1,2)}(z)$ в область $\operatorname{Re}\nu\leqslant-\dfrac{1}{2}$.

Еще одно полезное рекуррентное соотношение можно получить, дифференцируя равенство (3.3) и пользуясь уравнением Бесселя:

$$u''_\nu - \frac{\nu}{z^2}u_\nu + \frac{\nu}{z}u'_\nu = u'_{n-1} = -\frac{\nu-1}{z}u_{\nu-1} + u_{\nu-2} \ \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{z}u'_\nu - \left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)u_\nu - \frac{\nu}{z^2}u_\nu + \frac{\nu}{z}u'_\nu = -\frac{\nu-1}{z}u_{\nu-1} + u_{\nu-2} \ \Rightarrow$$

$$\frac{\nu-1}{z}\left(-\frac{\nu}{z}u_\nu + u_{\nu-1}\right) - u_\nu + \frac{\nu^2}{z^2}u_\nu - \frac{\nu}{z^2}u_\nu + \frac{\nu-1}{z}u_{\nu-1} - u_{\nu-2} = 0 \ \Rightarrow$$

$$2\frac{\nu-1}{z}u_{\nu-1} - u_\nu - u_{\nu-2} = 0.$$

Заменяя в последнем равенстве ν на $(\nu+1)$, получаем рекуррентное соотношение

$$u_{\nu+1} + u_{\nu-1} = \frac{2\nu}{z}u_\nu. \tag{3.7}$$

4 Асимптотическое поведение цилиндрических функций при большом аргументе

Функции Ханкеля 1-го и 2-го рода могут быть представлены в виде:

$$H_\nu^{(1,2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{z^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)}e^{\pm i(z-\pi\nu/2-\pi/4)}\int\limits_0^\infty \left[t\left(1\pm\frac{it}{2}\right)\right]^{\nu-1/2} e^{-zt}dt,$$

где функции

$$F_\pm(z) = \int\limits_0^\infty \left[t\left(1\pm\frac{it}{2}\right)\right]^{\nu-1/2} e^{-zt}dt$$

являются интегралами Лапласа:

$$F_\pm(z) = \int\limits_0^\infty e^{-zt}f_\pm(t)dt,$$

для которых $f_\pm(t) = \left[t\left(1\pm\frac{it}{2}\right)\right]^{\nu-1/2}$.

Точки $\pm\frac{it}{2} = -1$ являются точками ветвления функций $f_\pm(t)$ соответственно. Будем считать, что $\left|\arg\left(\frac{it}{2}\right)\right| < \pi$, то есть $\arg t \in \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. В этой области при $|t| > 0$ функции $f_\pm(t)$ являются однозначными и аналитическими.

Исследуем поведение функции $H_\nu^{(1)}(z)$ при больших z и область ее аналитичности с помощью теоремы об аналитическом продолжении и асимптотике интеграла Лапласа. Для функции $H_\nu^{(2)}(z)$ все рассуждения аналогичны.

Функция $f_+(t)$ является аналитической в угле $|t| > 0$, $\arg t \in (-\theta_2, \theta_1)$, где $\theta_1 = \dfrac{\pi}{2}$, $\theta_2 = \dfrac{3\pi}{2}$. Рассмотрим поведение этой функции в окрестности нуля:

$$\left(1 + \frac{it}{2}\right)^{\nu-1/2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu+1/2-k)} \left(\frac{it}{2}\right)^k + O(t^n) \quad \Rightarrow$$

$$f_+(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu+1/2-k)} \left(\frac{i}{2}\right)^k t^{k+\nu-1/2} + O(t^{n+\nu-1/2}),$$

то есть

$$f_+(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^{\lambda_k} + O(t^{\lambda_n}),$$

где

$$a_k = \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu+1/2-k)} \left(\frac{i}{2}\right)^k, \quad \lambda_k = k + \nu - 1/2, \ k = 0, 1, ..., n,$$

причем $-1 < \operatorname{Re}\lambda_0 < \operatorname{Re}\lambda_1 < ... < \operatorname{Re}\lambda_n$, если $\operatorname{Re}\nu > -\dfrac{1}{2}$.

При $|t| \to \infty$ функция $f_+(t)$ ведет себя как $O(t^\beta)$, где $\beta = 2\nu - 1$. Следовательно, функция

$$F_+(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f_+(t) dt$$

является аналитической в области $|z| > 0$, $|\arg z| < \dfrac{\pi}{2}$ при $\operatorname{Re}\nu > -\dfrac{1}{2}$ и может быть аналитически продолжена в секторе $|z| > 0$, $\arg z \in \left(-\dfrac{\pi}{2} - \theta_1, \dfrac{\pi}{2} + \theta_2\right)$. Так как в данном случае $-\dfrac{\pi}{2} - \theta_1 = -\pi$, а $\frac{\pi}{2} + \theta_2 = 2\pi$, то функция $F_+(z)$ может быть аналитически продолжена на комплексную плоскость с разрезом вдоль отрицательной части вещественной оси: $|z| > 0$, $|\arg z| < \pi$, так чтобы сохранялась ее однозначность ($z = 0$ — точка ветвления функции $F_+(z)$). При этом ее аналитическое продолжение имеет вид:

$$F_+(z) = \int_0^\infty e^{-(z\, e^{i\theta})\rho} f_+(\rho\, e^{i\theta}) e^{i\theta} d\rho.$$

При больших по модулю z для функции $F_+(z)$ справедливо асимптотическое представление:

$$F_+(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu+1/2-k)} \left(\frac{i}{2}\right)^k \frac{\Gamma(k+\nu+1/2)}{z^{k+\nu+1/2}} + O\left(\frac{1}{z^{n+\nu+1/2}}\right).$$

Так как

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{z^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)} e^{i(z-\pi\nu/2-\pi/4)} F_+(z),$$

то при $|z| \to \infty$ получаем:

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z-\pi\nu/2-\pi/4)} \left[\sum_{k=0}^{n-1} C_k \left(\frac{i}{z}\right)^k + O\left(\frac{1}{z^n}\right) \right],$$

где

$$C_k = \frac{\Gamma(\nu + 1/2 + k)}{2^k k! \Gamma(\nu + 1/2 - k)}.$$

Аналогично получаем асимптотическое представление для функции Ханкеля второго рода при $|z| \to \infty$:

$$H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(z-\pi\nu/2-\pi/4)} \left[\sum_{k=0}^{n-1} C_k \left(-\frac{i}{z}\right)^k + O\left(\frac{1}{z^n}\right) \right].$$

Так как

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2}\left[H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)\right],$$

то при больших z имеет место следующее асимптотическое представление:

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_k}{z^k} \frac{e^{i(z-\pi\nu/2-\pi/4+\pi k/2)} + e^{-i(z-\pi\nu/2-\pi/4+\pi k/2)}}{2} + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{z^n}\right) \right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_k}{z^k} \cos\left(z - \frac{\pi}{2}(\nu - k + \frac{1}{2}\right) + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{z^n}\right) \right\} \tag{4.1}$$

Ограничение $\operatorname{Re}\nu > -1/2$ не является существенным, так как при $\operatorname{Re}\nu \leqslant -1/2$ можно построить аналитическое продолжение цилиндрических функций, пользуясь рекуррентными соотношениями.

5 Интегральное представление Зоммерфельда

Для цилиндрических функций можно также получить интегральное представление Зоммерфельда (знакомое из курса ММФ), удобное для решения задач дифракции. Для этого воспользуемся следующими соображениями. Пусть функция v двух переменных удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta v + \lambda v = 0. \tag{5.1}$$

Рассмотрим это уравнение в полярных координатах (r, φ). Так как для v должно выполняться условие периодичности по переменной φ, то ее можно разложить в ряд Фурье:

$$v = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(r\sqrt{\lambda}) e^{-in\varphi}, \qquad u_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(r, \varphi) e^{in\varphi} d\varphi.$$

Интегрируя уравнение Гельмгольца (5.1), записанное в полярных координатах, с весом $e^{in\varphi}$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ и учитывая условия периодичности для $v(r, \varphi)$, получаем для коэффициентов Фурье $u_n(r\sqrt{\lambda})$ уравнение:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_n}{dr}\right) + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2}\right)u_n = 0,$$

или же

$$\frac{1}{z}\left(zu_n'(z)\right)' + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right)u_n(z) = 0, \tag{5.2}$$

где $z = r\sqrt{\lambda}$. Уравнение (5.2) представляет собой уравнение Бесселя порядка n. Итак, функция $u_n(z)$ является цилиндрической функцией порядка n.

Предположим, что $\lambda = k^2$. Так как одним из простейших решений уравнения Гельмгольца (5.1) при $\lambda = k^2$ является комплексная амплитуда плоской волны $v = e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$, где $\vec{k}$ — волновой вектор, то, направляя ось y по направлению волнового вектора $\vec{k}$, получаем:

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-iz\sin\varphi + in\varphi}d\varphi, \quad z = kr. \tag{5.3}$$

Выражение (5.3) является интегральным представлением Зоммерфельда для цилиндрической функции порядка n. Аналогичные представления можно получить для цилиндрических функций произвольного порядка ν. Их естественно искать в виде

$$u_\nu(z) = b_\nu\int\limits_C e^{-iz\sin\varphi + i\nu\varphi}d\varphi, \tag{5.4}$$

где φ — комплексная переменная.

Получим условия на контур C, при которых (5.4) удовлетворят уравнению Бесселя, пользуясь тем, что функция $v = e^{-ikr\sin\varphi}$ является решением уравнения

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} + k^2 v = 0 \tag{5.5}$$

при любых, в том числе комплексных, значениях переменных r и φ.

Пусть φ_1 и φ_2 — концы контура C. Положим $z = kr$ и будем считать, что интеграл (5.4) сходится равномерно и его можно дифференцировать по параметру r. Тогда, интегрируя уравнение (5.5) с весом $b_\nu e^{i\nu\varphi}$ по контуру C и меняя местами интегрирование и дифференцирование, получаем:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}u_\nu(kr)\right) + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right)u_\nu(kr) + \frac{b_\nu}{r^2}e^{i\nu\varphi}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi} - i\nu v\right)\Bigg|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = 0.$$

Если

$$e^{i\nu\varphi}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi} - i\nu v\right)\Bigg|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = -i\left(kr\cos\varphi + \nu\right)e^{-ikr\sin\varphi + i\nu\varphi}\Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = 0,$$

то функция $u_\nu(z)$ удовлетворяет уравнению Бесселя при $z = kr$.

В качестве контура C можно взять, например, контур, концы которого уходят на бесконечность таким образом, что

$$\mathrm{Re}\,(-iz\sin\varphi + i\nu\varphi) = \mathrm{Re}\,\left(-\frac{|z|}{2}e^{i\theta}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) + i\nu\varphi\right) \to -\infty \text{ при } \varphi \to \infty,$$

где $\theta = \arg z$.

Пусть $\varphi = \chi + i\psi$, причем $\psi \to +\infty$. Тогда величинами φ и $e^{i\varphi}$ можно пренебречь по сравнению с $e^{-i\varphi}$, и условие на контур C примет вид

$$\mathrm{Re}\, e^{i(\theta-\varphi)} = \cos(\theta - \chi)\cdot e^{\psi} \to -\infty \text{ при } \psi \to +\infty.$$

Это условие будет выполнено, если

$$\cos(\theta - \chi) < 0.$$

Если $\psi \to -\infty$, то условие на контур C примет вид $\cos(\theta + \chi) > 0$. Следовательно, в качестве контура C можно выбрать контур, представленный на рис. 3 , если выполнены условия

$$\cos(\theta - \alpha) < 0, \qquad \cos(\theta + \beta) > 0, \tag{5.6}$$

причем второе из этих условий будет следствием первого, если выбрать $\beta = -\alpha \pm \pi$. Соответствующие контуры назовем C_+ и C_-.

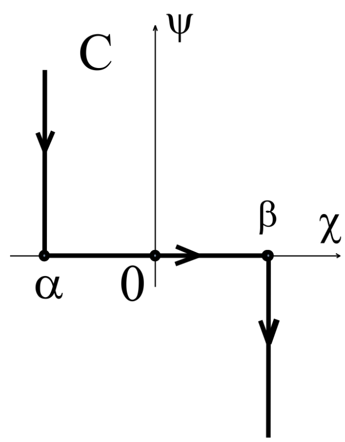

Рис. 3: Контур C в интегральном представлении (5.4) Зоммерфельда для цилиндрической функции $u_\nu(z)$

Итак, контур C в интегральном представлении (5.4) Зоммерфельда задается парой чисел α и β, которые в соответствии с теоремой Коши можно сдвигать, деформируя контур и не меняя при этом значение интеграла, так чтобы оставались выполнены соотношения (5.6).

Рассмотрим частный случай $z > 0$ (то есть $\theta = 0$). При этом можно взять $\alpha = -\pi$. Рассмотрим интеграл (5.4), где в качестве контура C взят соответствующий контур C_-, для которого $\beta = 0$:

$$u_\nu(z) = b_\nu \int\limits_{C_-} e^{-iz\sin\varphi + i\nu\varphi} d\varphi.$$

Пользуясь методом перевала, можно получить асимптотику функции $u_\nu(z)$ при $z \to +\infty$.

Метод перевала: если $f(\varphi)$ и $g(\varphi)$ являются аналитическими функциями аргумента φ в области G, содержащей контур интегрирования C, то при $z \to +\infty$ имеет место асимптотическая формула

$$F(z) = \int\limits_C e^{zf(\varphi)} g(\varphi) d\varphi = e^{zf(\varphi_0)} \left\{ \sqrt{\frac{2\pi}{z|f''(\varphi_0)|}} g(\varphi_0) e^{i\gamma} + O\left(z^{-3/2}\right) \right\}, \tag{5.7}$$

где φ_0 определяется из условия $f'(\varphi_0) = 0$, а $\gamma = \dfrac{1}{2}\left(\pi - \arg f''(\varphi_0)\right)$.

Применяя (5.7) к функции $u_\nu(z)$ при $z \to +\infty$, получаем

$$u_\nu(z) = b_\nu e^{iz} \left\{ \sqrt{\frac{2\pi}{z}} e^{-i\pi\nu/2} e^{-i\pi/4} + O(z^{-3/2}) \right\}.$$

Сравнивая полученное выражение с асимптотикой функций Ханкеля при большом аргументе, приходим к выводу, что при $b_\nu = \dfrac{1}{\pi}$ функция $u_\nu(z)$ совпадает с функцией Ханкеля первого рода, то есть

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{C_-} e^{-iz\sin\varphi + i\nu\varphi} d\varphi.$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$H_\nu^{(2)}(z) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{C_+} e^{-iz\sin\varphi + i\nu\varphi} d\varphi,$$

где контур C_+ соответствует параметрам $\alpha = 0$ и $\beta = \pi$.

Пользуясь связью функций Бесселя с функциями Ханкеля, получаем:

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2}\left(H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)\right) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{C_0} e^{-iz\sin\varphi + i\nu\varphi} d\varphi. \tag{5.8}$$

Контур C_0 в выражении (5.8) состоит из трех участков: $\varphi = -\pi + i\psi$, где ψ изменяется от $+\infty$ до 0; $\varphi = x$, где $x \in [-\pi, \pi]$; $\varphi = \pi + i\psi$, где ψ изменяется от 0 до $+\infty$ (рис. 4).

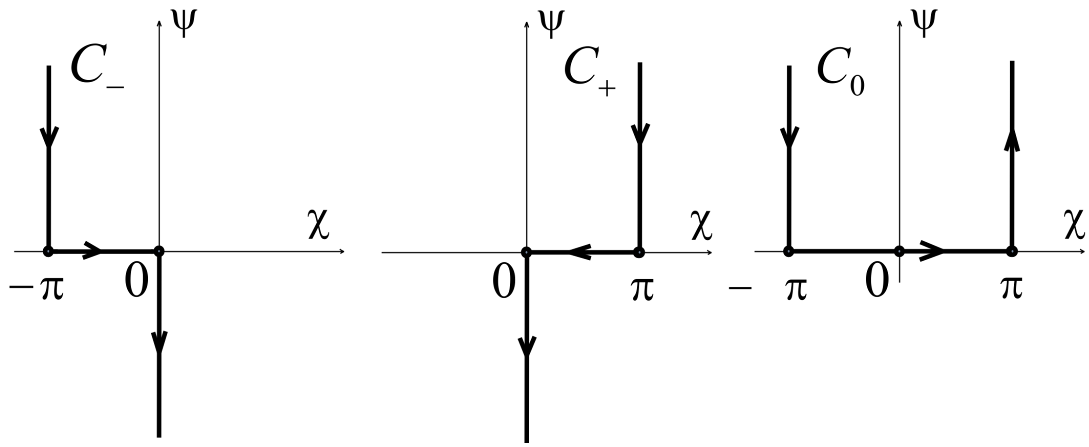

Рис. 4: Контуры $C_\pm$ и C_0 в интегральных представлениях Зоммерфельда функций $H_\nu^{(1,2)}(z)$ и $J_\nu(z)$

6 Функции Бесселя второго рода

В качестве второго линейно независимого по отношению к функции Бесселя вещественного (при вещественном ν и положительном z) решения уравнения Бесселя часто удобно использовать функцию

$$N_\nu(z) = \frac{1}{2i}\left\{H_\nu^{(1)}(z) - H_\nu^{(2)}(z)\right\},$$

которую называют функцией Бесселя второго рода (или же функцией Неймана, а иногда функцией Вебера). Ее также иногда обозначают $Y_\nu(z)$. Функция $N_\nu(z)$ является аналитической при всех ν и при $z \neq 0$, $|\arg z| < \pi$.

При $z \to \infty$ имеет место следующее асимптотическое поведение функции Неймана:

$$N_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\sin\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{z}\right)\right\}.$$

7 Цилиндрические функции полуцелого порядка

Специальный класс цилиндрических функций образуют функции полуцелого порядка (соответствующие $\nu = n - \dfrac{1}{2}$). Они могут быть выражены через элементарные функции:

$$H_{1/2}^{(1,2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{\pm i(z-\pi/2)} \quad \Rightarrow \quad J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z, \quad N_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z.$$

Пользуясь рекуррентными соотношениями, получаем:

$$H_{n-1/2}^{(1,2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot z^n \cdot \left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n e^{\pm iz},$$

$$J_{n-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot z^n \cdot \left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n \cos z,$$

$$N_{n-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot z^n \cdot \left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n \sin z.$$

8 Функции Бесселя мнимого аргумента

При замене z на iz уравнение Бесселя принимает вид:

$$z^2u'' + zu' - (z^2 + \nu^2)u = 0. \tag{8.1}$$

Специальные классы решений этого уравнения называются функциями Бесселя мнимого аргумента или модифицированными функциями Бесселя. Обычно в качестве пары линейно независимых решений уравнения (8.1) используют функции

$$I_\nu(z) = e^{-i\pi\nu/2}J_\nu(iz), \qquad K_\nu(z) = \frac{\pi}{2}e^{i\pi(\nu+1)/2}H_\nu^{(1)}(iz),$$

называемые функцией Инфельда и функцией Макдональда соответственно.

Интегральное представление Пуассона для функций Инфельда и Макдональда имеют вид:

$$I_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} \int\limits_{-1}^{1} (1-t^2)^{\nu-1/2} \mathrm{ch}\,(zt)dt,$$

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \frac{e^{-z}}{\Gamma(\nu+1/2)} \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{\nu-1/2}\left(1+\frac{t}{2z}\right)^{\nu-1/2} dt.$$

Функцию Инфельда можно представить в виде степенного ряда

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{\nu+2k}}{k!\Gamma(k+\nu+1)}. \tag{8.2}$$

Пользуясь определением функций $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ и связью функций Ханкеля и Бесселя, получаем

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \pi\nu}, \quad (\nu \neq n). \tag{8.3}$$

Соотношения (8.2) и (8.3) позволяют, в частности, оценить поведение функций $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ при малом аргументе.

Имеют место равенства:

$$I_{-n}(z) = I_n(z), \;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

$$K_\nu(z) = K_{-\nu}(z).$$

Асимптотическое поведение функций Инфельда и Макдональда при $z \to +\infty$:

$$I_\nu(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right], \qquad K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right].$$

Рекуррентные соотношения:

$$I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z}I_\nu(z), \qquad I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z) = 2I'_\nu(z);$$

$$K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) = -\frac{2\nu}{z}K_\nu(z), \qquad K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) = -2K'_\nu(z).$$

Функции $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ полуцелого порядка можно выразить через элементарные функции:

$$I_{n-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}z^n\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n \operatorname{ch} z, \quad K_{n-1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}z^n\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n e^{-z}, \quad n = 0, 1, ...$$

В частности, при $n = 1$ получаем:

$$I_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\operatorname{sh} z, \qquad K_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}.$$

Интегральное представление Зоммерфельда для $K_\nu(z)$ при $z > 0$:

$$K_\nu(z) = \int\limits_0^\infty e^{-z\operatorname{ch}\psi}\operatorname{ch}(\nu\psi)d\psi.$$

Если использовать замену $\frac{z}{2}e^{-\psi} = t$, то можно также получить следующее видоизменение интегрального представления Зоммерфельда:

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int\limits_0^\infty e^{-t-\frac{z^2}{4t}} \cdot t^{-\nu-1}dt.$$