Основные свойства гипергеометрических функций

1 Рекуррентные соотношения и аналитические продолжения

1.1 Функция $f(\alpha, \beta, \gamma, z)$

Как было показано в предыдущем разделе, частным решением гипергеометрического уравнения

$$z(1-z)y'' + (\gamma - (\alpha+\beta+1)z)y' - \alpha\beta y = 0 \tag{1.1}$$

является функция

$$f(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{-\beta}dt,$$

аналитическая в области $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0$, $|\arg(1-z)| < \pi$. Дифференцируя функцию $f(\alpha, \beta, \gamma, z)$ по переменной z, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial z} f(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\beta t(1-zt)^{-(\beta+1)}dt =$$

$$= \frac{\beta\alpha}{\gamma} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\gamma+1-\alpha-1)} \int\limits_0^1 t^{(\alpha+1)-1}(1-t)^{(\gamma+1)-(\alpha+1)-1}(1-zt)^{-(\beta+1)}dt =$$

$$= \frac{\alpha\beta}{\gamma} f(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, z). \tag{1.2}$$

Пользуясь равенством (1.2), получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} f(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\beta(\beta+1)\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} f(\alpha+2, \beta+2, \gamma+2, z). \tag{1.3}$$

Подставляя (1.2) и (1.3) в уравнение (1.1) и сокращая на $\alpha\beta$, получаем рекуррентное соотношение

$$f(\alpha,\beta,\gamma,z) = \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} z(1-z) f(\alpha+2,\beta+2,\gamma+2,z) +$$

$$+\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)z}{\gamma} f(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,z). \tag{1.4}$$

Соотношение (1.4) позволяет построить аналитическое продолжение функции $f(\alpha,\beta,\gamma,z)$ в область $\operatorname{Re}\alpha < 0$ при условии $\operatorname{Re}(\gamma-\alpha) > 0$. Для этого равенство (1.4) нужно применять последовательно до тех пор, пока в правой части не будут получены гипергеометрические функции, аргументы которых лежат в области аналитичности.

Получим теперь рекуррентное соотношение, которое позволит построить аналитическое продолжение функции $f(\alpha,\beta,\gamma,z)$ в область $\operatorname{Re}(\gamma-\alpha) \leqslant 0$. Для этого формально заменим в (1.4) α на $(\gamma-\alpha)$ и β на $(\gamma-\beta)$:

$$f(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,z) = \frac{(\gamma-\alpha+1)(\gamma-\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} z(1-z) f(\gamma-\alpha+2,\gamma-\beta+2,\gamma+2,z) +$$

$$+\frac{\gamma-(2\gamma-\alpha-\beta+1)z}{\gamma} f(\gamma-\alpha+1,\gamma-\beta+1,\gamma+1,z).$$

Пользуясь равенством

$$f(\alpha,\beta,\gamma,z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} f(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,z),$$

получаем:

$$(1-z)^{-\gamma+\alpha+\beta} f(\alpha,\beta,\gamma,z) = \frac{(\gamma-\alpha+1)(\gamma-\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} z(1-z)(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma-2} f(\alpha,\beta,\gamma+2,z) +$$

$$+\frac{\gamma-(2\gamma-\alpha-\beta+1)z}{\gamma}(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma-1} f(\alpha,\beta,\gamma+1,z),$$

или же, сокращая на $(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma}$:

$$f(\alpha,\beta,\gamma,z) = \frac{(\gamma-\alpha+1)(\gamma-\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \cdot \frac{z}{1-z} \cdot f(\alpha,\beta,\gamma+2,z) +$$

$$+\frac{\gamma-(2\gamma-\alpha-\beta+1)z}{\gamma} \cdot \frac{f(\alpha,\beta,\gamma+1,z)}{1-z}. \tag{1.5}$$

Пользуясь соотношением (1.5) и последовательно уменьшая γ на 1, можно построить аналитическое продолжение функции $f(\alpha,\beta,\gamma,z)$ при $\operatorname{Re}(\gamma-\alpha) \leqslant 0$.

1.2 Функции $f(\alpha, \gamma, z)$ и $G(\alpha, \gamma, z)$

Частным решением уравнения

$$zy'' + (\gamma - z)y' - \alpha y = 0 \tag{1.6}$$

является вырожденная гипергеометрическая функция

$$f(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1} e^{zt} dt,$$

аналитическая в области $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0$ при любых z. Дифференцируя функцию $f(\alpha, \gamma, z)$ по переменной z, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial z} f(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1} t e^{zt} dt =$$

$$= \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma((\gamma+1)-(\alpha+1))} \int\limits_0^1 t^{(\alpha+1)-1}(1-t)^{(\gamma+1)-(\alpha+1)-1} e^{zt} dt =$$

$$= \frac{\alpha}{\gamma} f(\alpha+1, \gamma+1, z). \tag{1.7}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} f(\alpha, \gamma, z) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} f(\alpha+2, \gamma+2, z). \tag{1.8}$$

Подставляя выражения (1.7) и (1.8) в уравнение (1.6) и сокращая на α, получаем рекуррентное соотношение:

$$f(\alpha, \gamma, z) = \frac{\alpha+1}{\gamma(\gamma+1)} z f(\alpha+2, \gamma+2, z) + \frac{\gamma - z}{\gamma} f(\alpha+1, \gamma+1, z). \tag{1.9}$$

Равенство (1.9) можно использовать для построения аналитического продолжения функции $f(\alpha, \gamma, z)$ в область $\operatorname{Re}\alpha \leqslant 0$ с соблюдением условия $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha) > 0$. Для этого достаточно применить (1.9), последовательно уменьшая на 1 значение α.

Для того, чтобы построить аналитическое продолжение функции $f(\alpha, \gamma, z)$ в область $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha) \leqslant 0$, формально заменим в равенстве (1.9) α на $(\gamma - \alpha)$ и z на $(-z)$:

$$f(\gamma-\alpha, \gamma, -z) = -\frac{\gamma-\alpha+1}{\gamma(\gamma+1)} z f(\gamma-\alpha+2, \gamma+2, -z) + \frac{\gamma+z}{\gamma} f(\gamma-\alpha+1, \gamma+1, -z).$$

Пользуясь равенством

$$f(\alpha, \gamma, z) = e^z f(\gamma-\alpha, \gamma, -z),$$

получаем:

$$e^{-z}f(\alpha,\gamma,z) = -\frac{\gamma-\alpha+1}{\gamma(\gamma+1)}ze^{-z}f(\alpha,\gamma+2,z) + \frac{\gamma+z}{\gamma}e^{-z}f(\alpha,\gamma+1,z),$$

или же, сокращая на e^{-z},

$$f(\alpha,\gamma,z) = -\frac{\gamma-\alpha+1}{\gamma(\gamma+1)}zf(\alpha,\gamma+2,z) + \frac{\gamma+z}{\gamma}f(\alpha,\gamma+1,z). \tag{1.10}$$

Пользуясь рекуррентным соотношением (1.10) и последовательно уменьшая значение γ на 1, можно построить аналитическое продолжение $f(\alpha,\gamma,z)$ при $\mathrm{Re}\,(\gamma-\alpha)\leqslant 0$.

Рассмотрим теперь вырожденную гипергеометрическую функцию второго рода:

$$G(\alpha,\gamma,z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}(1+t)^{\gamma-\alpha-1}e^{-zt}dt,$$

аналитическую при условии $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ и однозначную в области $-\pi < \arg z \leqslant \pi$. Дифференцируя функцию $G(\alpha,\gamma,z)$ по переменной z, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial z}G(\alpha,\gamma,z) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty t^{(\alpha+1)-1}(1+t)^{(\gamma+1)-(\alpha+1)-1}e^{-zt}dt = -\alpha G(\alpha+1,\gamma+1,z). \tag{1.11}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}G(\alpha,\gamma,z) = \alpha(\alpha+1)G(\alpha+2,\gamma+2,z). \tag{1.12}$$

Подставляя выражения (1.11) и (1.12) в уравнение (1.6) и сокращая на α, получаем:

$$G(\alpha,\gamma,z) = (\alpha+1)zG(\alpha+2,\gamma+2,z) - (\gamma-z)G(\alpha+1,\gamma+1,z). \tag{1.13}$$

Рекуррентное соотношение (1.13) позволяет построить аналитическое продолжение функции $G(\alpha,\gamma,z)$ в область $\mathrm{Re}\,\alpha \leqslant 0$.

1.3 Функция $H_\nu(z)$

Частным решением уравнения Эрмита

$$y'' - 2zy' + 2\nu y = 0 \tag{1.14}$$

является функция

$$H_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)}\int\limits_0^\infty e^{-t^2-2zt}t^{-\nu-1}dt,$$

аналитическая в области $\operatorname{Re}\nu < 0$ при всех z. Дифференцируя ее по переменной z, получаем:

$$\frac{\partial H_\nu(z)}{\partial z} = -\frac{2}{\Gamma(-\nu)}\int\limits_0^\infty e^{-t^2-2zt}t^{-(\nu-1)-1}dt = 2\nu H_{\nu-1}(z).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 H_\nu(z)}{\partial z^2} = 4\nu(\nu-1)H_{\nu-2}(z),$$

и справедливо равенство

$$4\nu(\nu-1)H_{\nu-2}(z) - 4z\nu H_{\nu-1}(z) + 2\nu H_\nu(z) = 0,$$

из которого получаем:

$$H_\nu(z) = -2(\nu-1)H_{\nu-2}(z) + 2zH_{\nu-1}(z). \tag{1.15}$$

Пользуясь рекуррентным соотношением (1.15), можно построить аналитическое продолжение функции $H_\nu(z)$ в область $\operatorname{Re}\nu \geqslant 0$.

2 Разложение гипергеометрических функций в степенные ряды

Гипергеометрическая функция $f(\alpha,\beta,\gamma,z)$ может быть разложена в ряд по степеням z, если воспользоваться равенством

$$(1-zt)^{-\beta} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(\beta)_n (zt)^n}{n!}, \quad |zt| < 1, \tag{2.1}$$

где использовано обозначение

$$(\beta)_0 = 1, \quad (\beta)_n = \beta(\beta+1)...(\beta+n-1) = \frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta)}.$$

Если $|z| < 1$, то при $t \in [0,1]$ ряд (2.1) равномерно сходится. В области $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0$ получаем:

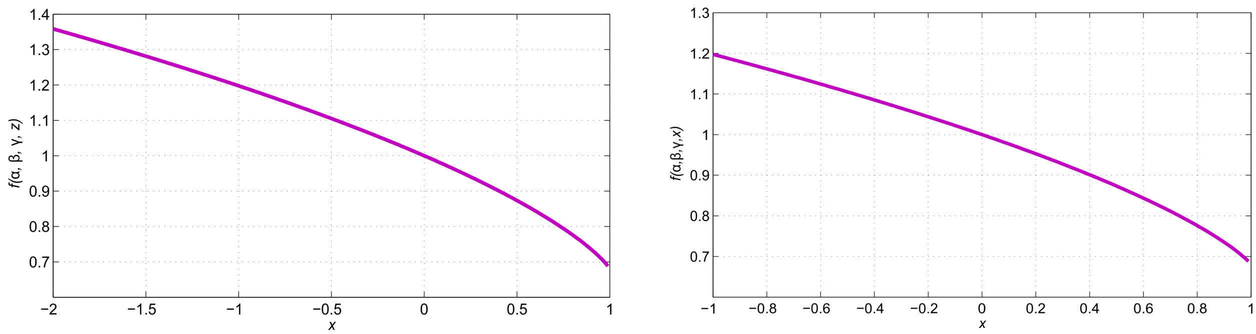
$$f(\alpha,\beta,\gamma,z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{-\beta}dt =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\sum_{n=0}^\infty \frac{(\beta)_n z^n}{n!}\underbrace{\int\limits_0^1 t^{n+\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}dt}_{=\frac{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(n+\gamma)}} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}z^n.$$

Итак, при $|z| < 1$ имеет место равенство

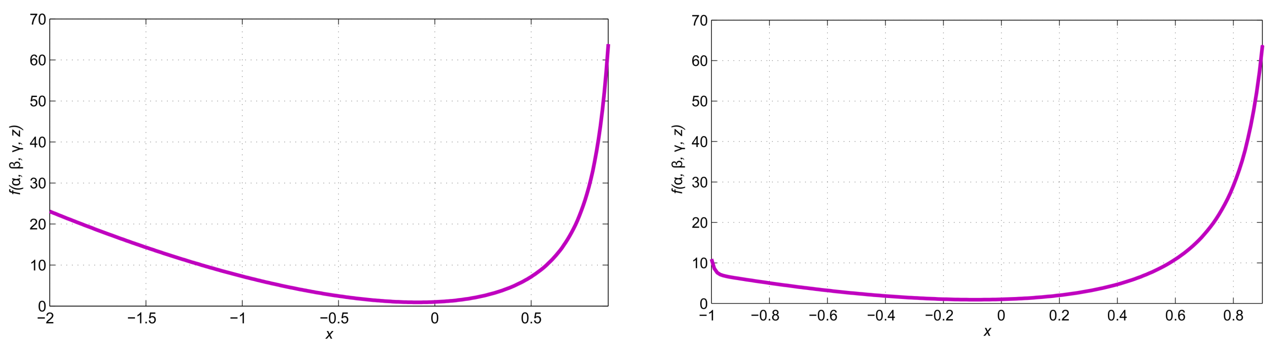
$$f(\alpha, \beta, \gamma, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} z^n. \tag{2.2}$$

Ряд (2.2) называется гипергеометрическим рядом. Изначально ряд (2.2) получен из интегрального представления гипергеометрической функции в предположении, что $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0$, но он сходится равномерно по всем переменным в области $|z| < 1$, если $\gamma \neq -k$, где $k = 0, 1, 2, ...$, то есть является аналитической функцией каждой из переменных. Это означает, что при $|z| < 1$ его можно рассматривать как аналитическое продолжение функции $f(\alpha, \beta, \gamma, z)$ в области $\operatorname{Re}\alpha \leqslant 0$ и $\operatorname{Re}\gamma < 0$.



а) б)

Рис. 1: График функции $f(\alpha, \beta, \gamma, z)$ при $\alpha = 0.5$, $\beta = -0.5$, $\gamma = 1.1$, построенный с помощью интегрального представления (а) и гипергеометрического ряда (б)

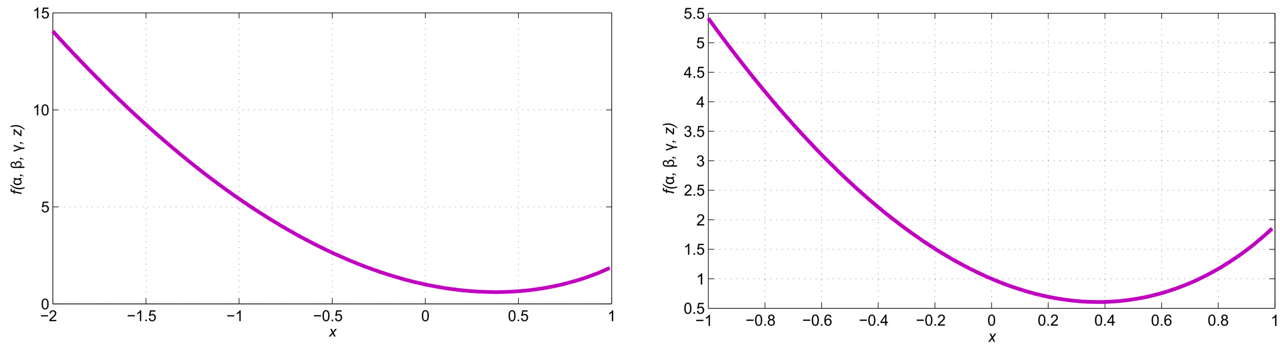


а) б)

Рис. 2: График функции $f(\alpha, \beta, \gamma, z)$ при $\alpha = -1.5$, $\beta = 1.5$, $\gamma = -1.1$, (а) — построенный с помощью аналитического продолжения (1.4), (б) — построенный с помощью гипергеометрического ряда (2.2)

Если $\alpha = -m$, где m — целое неотрицательное число, то $f(\alpha, \beta, \gamma, z)$ представляет собой полином степени m переменной z. В самом деле, так как в выражении

$$(\alpha)_n = (-m)_n = (-m)(-m+1)...(-m+n-1)$$



а) б)

Рис. 3: График функции $f(\alpha,\beta,\gamma,z)$ при $\alpha=-1.5$, $\beta=-1.5$, $\gamma=-1.1$, (а) — построенный с помощью аналитического продолжения (1.4), (б) — построенный с помощью гипергеометрического ряда (2.2)

при $n \geqslant (m+1)$ один из сомножителей обязательно обращается в ноль, то суммирование в (2.2) обрывается на $n=m$. При этом полином $f(\alpha,\beta,\gamma,z)$ будет иметь смысл и при $\gamma=-k$, если $k\geqslant m$, так как

$$(\gamma)_n=(-k)(-k+1)...(-k+n-1)\neq 0 \quad \text{при} \quad n\leqslant m\leqslant k.$$

Аналогичное утверждение справедливо при $\beta=-m$, $m=0,1,2,...$

Разложение в ряд по степеням z вырожденной гипергеометрической функции $f(\alpha,\gamma,z)$ можно получить, воспользовавшись равенством

$$e^{zt}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(zt)^n}{n!}, \tag{2.3}$$

справедливым для всех z. Подставляя (2.3) в выражение для $f(\alpha,\gamma,z)$, получаем:

$$f(\alpha,\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}e^{zt}dt=$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\underbrace{\int\limits_0^1 t^{n+\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}dt}_{=\frac{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(n+\gamma)}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n n!}z^n.$$

Следовательно, имеет место равенство

$$f(\alpha,\gamma,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n n!}z^n. \tag{2.4}$$

Как и в случае гипергеометрической функции, ряд (2.4) получен в предположении, что выполняются условия $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0$, но он сходится равномерно по всем параметрам в любой замкнутой области их изменения при условии, что $\gamma \neq -k$, где $k = 0, 1, 2...$ При $\alpha = -m$, где m — целое неотрицательное число, функция $f(\alpha, \gamma, z)$ представляет собой полином степени m. Этот полином имеет смысл также при $\gamma = -k$, если $k \geqslant m$.

Получим разложение в степенной ряд по переменной z для функции Эрмита $H_\nu(z)$:

$$H_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int\limits_0^\infty e^{-t^2-2zt} t^{-\nu-1} dt,$$

где $\operatorname{Re}\nu < 0$. Так как

$$e^{-2zt} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k (2zt)^k}{k!}$$

при любых (zt), то

$$H_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k (2z)^k}{k!} \underbrace{\int\limits_0^\infty e^{-t^2} t^{k-\nu-1} dt}_{=I},$$

где

$$I = \left\{ s = t^2,\ dt = \frac{ds}{2s^{1/2}} \right\} = \frac{1}{2} \int\limits_0^\infty e^{-s} s^{\frac{k-\nu}{2}-1} ds = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{k-\nu}{2}\right).$$

Таким образом,

$$H_\nu(z) = \frac{1}{2\Gamma(-\nu)} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \Gamma\left(\frac{k-\nu}{2}\right)}{k!} (2z)^k. \tag{2.5}$$

Функцию $H_\nu(z)$ можно представить в виде комбинации двух вырожденных гипергеометрических функций. Для этого выделим в (2.5) слагаемые с четными и нечетными степенями z:

$$H_\nu(z) = \frac{1}{2\Gamma(-\nu)} \left\{ \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma\left(n - \frac{\nu}{2}\right)}{(2n)!} (2z)^{2n} - \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma\left(n + \frac{1-\nu}{2}\right)}{(2n+1)!} (2z)^{2n+1} \right\}.$$

Воспользуемся формулой удвоения для гамма-функции:

$$(2n)! = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi}} n! \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

из которой следует, что

$$(2n+1)! = 2\left(n + \frac{1}{2}\right)(2n)! = 2\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi}} n! \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{2^{2n+1}}{\sqrt{\pi}} n! \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right).$$

При этом

$$\frac{\Gamma\left(n-\frac{\nu}{2}\right)}{(2n)!}=\frac{\Gamma\left(n-\frac{\nu}{2}\right)}{n!\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}}=\frac{\left(-\frac{\nu}{2}\right)_n}{\left(\frac{1}{2}\right)_n}\cdot\frac{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}{2^{2n}n!},$$

$$\frac{\Gamma\left(n+\frac{1-\nu}{2}\right)}{(2n+1)!}=\frac{\Gamma\left(n+\frac{1-\nu}{2}\right)}{n!\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\frac{\sqrt{\pi}/2}{2^{2n}}=\frac{\left(\frac{1-\nu}{2}\right)_n}{\left(\frac{3}{2}\right)_n}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}{2^{2n}n!},$$

так как $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}=\dfrac{1}{2}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right)$. Следовательно,

$$H_\nu(z)=\frac{1}{2\Gamma(-\nu)}\left\{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{\nu}{2}\right)_n z^{2n}}{\left(\frac{1}{2}\right)_n n!}}_{f\left(-\frac{\nu}{2},\frac{1}{2},z^2\right)}-2z\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1-\nu}{2}\right)_n z^{2n}}{\left(\frac{3}{2}\right)_n n!}}_{f\left(\frac{1-\nu}{2},\frac{3}{2},z^2\right)}\right\}.$$

Так как имеет место равенство

$$2^{2k-1}\Gamma(k)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\Gamma(2k),$$

то при $k=-\dfrac{\nu}{2}$ получаем:

$$2^{-\nu-1}\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)=\sqrt{\pi}\Gamma(-\nu).$$

Окончательно приходим к следующему выражению для функции $H_\nu(z)$:

$$H_\nu(z)=\frac{2^\nu\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}f\left(-\frac{\nu}{2},\frac{1}{2},z^2\right)-\frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}zf\left(\frac{1-\nu}{2},\frac{3}{2},z^2\right).\tag{2.6}$$

В соответствии с принципом аналитического продолжения соотношение (2.6) будет справедливым при любых значениях ν и z.

Разложение в ряд по степеням z вырожденной гипергеометрической функции второго рода

$$G(\alpha,\gamma,z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}(1+t)^{\gamma-\alpha-1}e^{-zt}dt$$

получим, представляя ее в виде линейной комбинации двух вырожденных гипергеометрических функций. Предположим сначала, что $\gamma\neq 1$. Тогда, как было показано ранее, функции $f(\alpha,\gamma,z)$ и $z^{1-\gamma}f(\alpha+1-\gamma,2-\gamma,z)$ являются линейно независимыми решениями вырожденного гипергеометрического уравнения. Так как функция $G(\alpha,\gamma,z)$ также является частным решением этого уравнения, ее можно записать в виде

$$G(\alpha,\gamma,z)=C_1(\alpha,\gamma)f(\alpha,\gamma,z)+C_2(\alpha,\gamma)z^{1-\gamma}f(\alpha+1-\gamma,2-\gamma,z).\tag{2.7}$$

Пусть $\operatorname{Re}\gamma > 1$. Тогда из соотношения (2.7) можно сначала выразить коэффициент C_2. Для этого перепишем равенство (2.7) в виде

$$C_2(\alpha,\gamma)f(\alpha+1-\gamma,2-\gamma,z) = z^{\gamma-1}G(\alpha,\gamma,z) - z^{\gamma-1}C_1(\alpha,\gamma)f(\alpha,\gamma,z)$$

и перейдем к пределу при $z \to 0$. Так как $f(\alpha,\gamma,0) = 1$, получаем:

$$C_2(\alpha,\gamma) = \lim_{z\to 0} z^{\gamma-1}G(\alpha,\gamma,z) = \lim_{z\to 0}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty e^{-zt}t^{\alpha-1}z^{\alpha-1}(z+zt)^{\gamma-\alpha-1}z\,dt =$$

$$= \{s = zt\} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty e^{-s}s^{\alpha-1}(z+s)^{\gamma-\alpha-1}ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty e^{-s}s^{\gamma-2}ds = \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Для нахождения коэффициента $C_1(\alpha,\gamma)$ воспользуемся равенством

$$G(\alpha,\gamma,z) = z^{1-\gamma}G(\alpha+1-\gamma,2-\gamma,z). \tag{2.8}$$

Формально заменяя α на $(\alpha+1-\gamma)$ и γ на $(2-\gamma)$ в равенстве (2.7), получаем:

$$\underbrace{G(\alpha+1-\gamma,2-\gamma,z)}_{z^{\gamma-1}G(\alpha,\gamma,z)} = C_1(\alpha+1-\gamma,2-\gamma)f(\alpha+1-\gamma,2-\gamma,z)+C_2(\alpha+1-\gamma,2-\gamma)z^{\gamma-1}f(\alpha,\gamma,z),$$

откуда следует, что

$$G(\alpha,\gamma,z) = C_2(\alpha+1-\gamma,2-\gamma)f(\alpha,\gamma,z) + C_1(\alpha+1-\gamma,2-\gamma)z^{1-\gamma}f(\alpha+1-\gamma,2-\gamma,z).$$

Сравнивая полученное равенство с равенством (2.7), приходим к выводу, что

$$C_1(\alpha,\gamma) = C_2(\alpha+1-\gamma,2-\gamma) = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)}.$$

В случае $\operatorname{Re}\gamma < 1$, переходя в равенстве (2.7) к пределу при $z \to 0$ и пользуясь равенством (2.8), получаем выражение для коэффициента $C_1(\alpha,\gamma)$:

$$C_1(\alpha,\gamma) = \lim_{z\to 0} G(\alpha,\gamma,z) = \lim_{z\to 0} z^{1-\gamma}G(\alpha+1-\gamma,2-\gamma,z) =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{z^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)}\int\limits_0^\infty t^{\alpha-\gamma}(1+t)^{-\alpha}e^{-zt}dt = \lim_{z\to 0}\frac{1}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)}\int\limits_0^\infty (zt)^{\alpha-\gamma}(z+zt)^{-\alpha}e^{-zt}d(zt) =$$

$$= \{s = zt\} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)}\int\limits_0^\infty s^{\alpha-\gamma}(z+s)^{-\alpha}e^{-s}ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)}\int\limits_0^\infty s^{-\gamma}e^{-s}ds =$$

$$= \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)}.$$

Так как имеет место равенство $C_2(\alpha, \gamma) = C_1(\alpha + 1 - \gamma, 2 - \gamma)$, получаем

$$C_2(\alpha, \gamma) = \frac{\Gamma(\gamma - 1)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Итак, функцию $G(\alpha, \gamma, z)$ можно представить в следующем виде:

$$G(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(1 - \gamma)}{\Gamma(\alpha + 1 - \gamma)} f(\alpha, \gamma, z) + \frac{\Gamma(\gamma - 1)}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\gamma} f(\alpha + 1 - \gamma, 2 - \gamma, z). \tag{2.9}$$

Равенство (2.9) дает возможность получить разложение функции $G(\alpha, \gamma, z)$ в ряд по степеням z, пользуясь соответствующим рядом для функции $f(\alpha, \gamma, z)$.

3 Выбор линейно независимых решений гипергеометрического уравнения при различных значениях параметров

Случай 1) Пусть α и β произвольны, а $\gamma \neq n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ В этом случае функции $y_1 = f(\alpha, \beta, \gamma, z)$ и $y_2 = z^{1-\gamma} f(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, z)$ определены и линейно независимы, так как по-разному ведут себя при $z \to 0$.

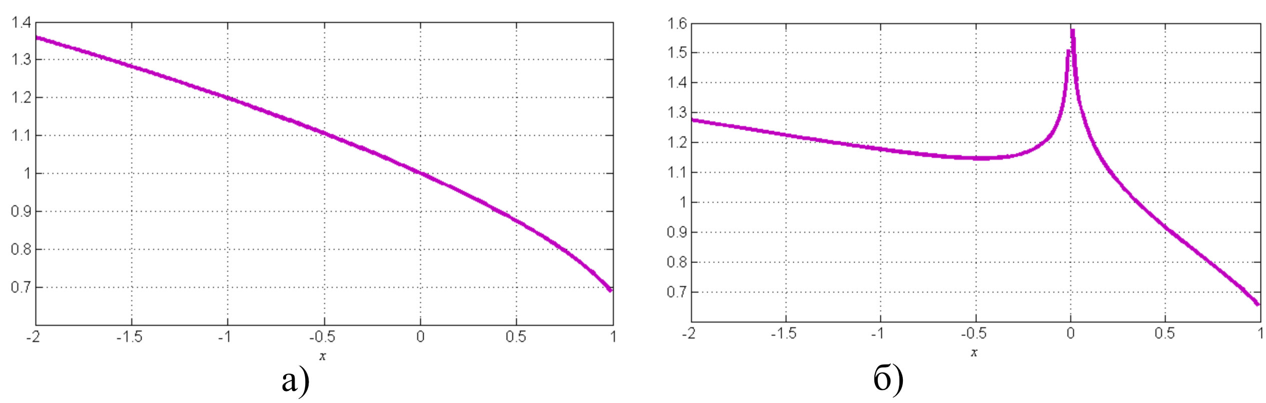
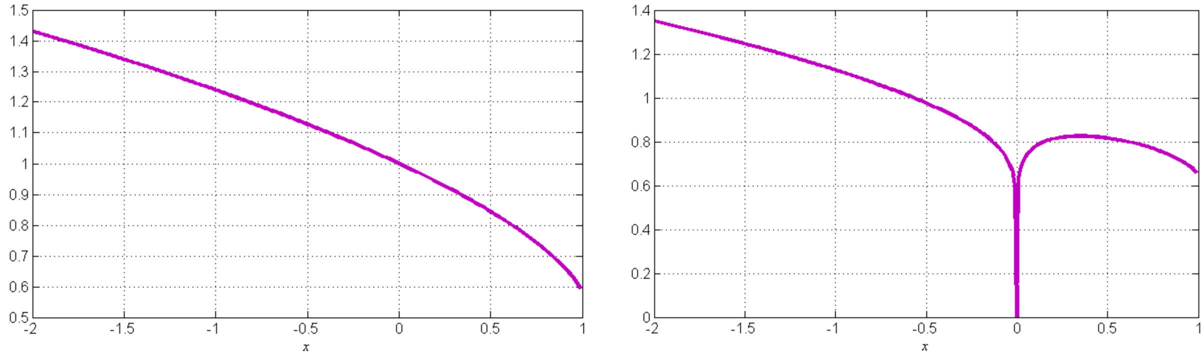


Рис. 4: График функции $f(\alpha, \beta, \gamma, z)$ (а) и $z^{1-\gamma} f(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, z)$ (б) при $\alpha = 0.5$, $\beta = -0.5$, $\gamma = 1.1$

Случай 2) Пусть $\gamma = n$, где $n = 1, 2, ...$ В этом случае функция $y_2 = z^{1-n} f(\alpha + 1 - n, \beta + 1 - n, 2 - n, z)$ теряет смысл при $n \geqslant 2$, если $(\alpha + 1 - n)$ или $(\beta + 1 - n)$ не является целым отрицательным числом, а при $n = 1$ функции y_1 и y_2 не являются линейно независимыми.

Рассмотрим функцию $\tilde{y}_2 = f(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - n, 1 - z)$. В случае произвольных α и β эта функция определена, если $\gamma' = \alpha + \beta + 1 - n$ не является целым неположительным числом,



а) б)

Рис. 5: График функции $f(\alpha,\beta,\gamma,z)$ (а) и $z^{1-\gamma}f(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma,z)$ (б) при $\alpha=0.5$, $\beta=-0.5$, $\gamma=0.9$

то есть если $\alpha+\beta$ не является целым числом, таким что $(\alpha+\beta)\leqslant n-1$. При этом функции y_1 и $\tilde{y}_2$ по-разному ведут себя при $z\to 0$, а значит, являются линейно независимыми.

При $\gamma\neq n$, где $n=0,\pm1,\pm2,...$ функцию $\tilde{y}_2$ можно записать как линейную комбинацию функций y_1 и y_2:

$$\tilde{y}_2=\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)\left\{\frac{\Gamma(1-\gamma)f(\alpha,\beta,\gamma,z)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)}+\frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}z^{1-\gamma}f(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma,z)\right\}.$$

В случае $\gamma\to n$ для раскрытия неопределенности это равенство удобнее записать в виде:

$$\tilde{y}_2=\tilde{C}_1(\alpha,\beta,\gamma)\frac{f(\alpha,\beta,\gamma,z)}{\Gamma(\gamma)}+\tilde{C}_2(\alpha,\beta,\gamma)z^{1-\gamma}\frac{f(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma,z)}{\Gamma(2-\gamma)}$$

и использовать правило Лопиталя. В результате при $\gamma=n$ получим:

$$\tilde{y}_2=\tilde{\tilde{C}}_1(\alpha,\beta,n)f(\alpha,\beta,n,z)+\Phi(\alpha,\beta,n,z),$$

где

$$\Phi(\alpha,\beta,\gamma,z)=\frac{\partial}{\partial\gamma}f(\alpha,\beta,\gamma,z)-\frac{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(z^{1-\gamma}\frac{f(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma,z)}{\Gamma(2-\gamma)}\right).$$

Так как функция $\Phi(\alpha,\beta,n,z)$ является линейной комбинацией функций $f(\alpha,\beta,n,z)$ и $f(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-n,1-z)$, то она удовлетворяет гипергеометрическому уравнению. Поэтому при $\gamma=n$, $n=1,2,...$ в качестве линейно независимых решений гипергеометрического уравнения можно использовать функции $y_1=f(\alpha,\beta,\gamma,z)$ и $\tilde{\tilde{y}}_2=\Phi(\alpha,\beta,\gamma,z)$, если функция Φ определена, то есть при выполнении условия

$$\frac{\Gamma(\alpha+1-n)\Gamma(\beta+1-n)\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}=\frac{\Gamma(n)}{(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(\beta-1)...(\beta-n+1)}\neq\infty. \quad (3.1)$$

Условие (3.1) выполнено, если $\alpha \neq 1, 2, ..., n-1$ и $\beta \neq 1, 2, ..., n-1$.

Случай 3) Пусть $\gamma = n$, где $n = 2, 3, ...$, и при этом $\alpha = p$ или $\beta = p$, где $p = 1, 2, ..., n-1$. Тогда функция $y_2 = z^{1-\gamma} f(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, z)$ определена и линейно независима по отношению к $y_1 = f(\alpha, \beta, n, z)$. В этом случае $f(\alpha', \beta', \gamma', z)$, где $\alpha' = \alpha+1-n$, $\beta' = \beta+1-n$, $\gamma' = 2-n$, представляет собой полином степени $(-\alpha')$ либо, соответственно, полином степени $(-\beta')$. В самом деле, так как

$$\alpha' = p+1-n = -n+2, -n+3, ..., -1, 0 \quad \text{или} \quad \beta' = p+1-n = -n+2, -n+3, ..., -1, 0,$$

то α' или β' является целым неположительным числом. Если $\alpha = p$, $p = 1, 2, ..., n-1$, то выполнено условие $-\gamma' + \alpha' \geqslant 0$:

$$-\gamma' + \alpha' = n - 2 + p + 1 - n = p - 1 \geqslant 0,$$

а значит, функция $f(\alpha', \beta', \gamma', z)$ является полиномом степени $(-\alpha')$.

В случае $\beta = p$, $p = 1, 2, ..., n-1$, справедливо неравенство $-\gamma' + \beta' \geqslant 0$, то есть функция $f(\alpha', \beta', \gamma', z)$ является полиномом степени $(-\beta')$.

Случай 4) Пусть $\gamma = -n$, $n = 0, 1, ...$. В результате замены $y(z) = z^{1-\gamma} u(z)$ этот случай сводится к случаю 2 или 3. В самом деле, для функции $u(z)$ получаем гипергеометрическое уравнение с параметрами $\alpha' = \alpha + 1 - \gamma$, $\beta' = \beta + 1 - \gamma$, $\gamma' = 2 - \gamma$, где $\gamma' = 2, 3, ...$. Следовательно, функция

$$y_2 = z^{1-\gamma} \underbrace{f(\alpha+1+n, \beta+1+n, 2+n, z)}_{u_1 = f(\alpha', \beta', \gamma', z)}$$

определена.

Если $\gamma'' = \alpha' + \beta' + 1 - \gamma' = \alpha + \beta + 1 + n$ не является целым неположительным числом, то в качестве $u_2(z)$ можно взять функцию

$$u_2(z) = f(\alpha', \beta', \alpha' + \beta' + 1 - \gamma', 1 - z),$$

откуда получаем

$$\tilde{y}_1(z) = z^{1-\gamma} u_2(z) = z^{1+n} f(\alpha+1+n, \beta+1+n, \alpha+\beta+1+n, 1-z).$$

В более общем случае в качестве $\tilde{y}_1(z)$ можно взять функцию

$$\tilde{y}_1(z) = z^{1+n} \Phi(\alpha+1+n, \beta+1+n, 2+n, z),$$

если $\Phi(\alpha', \beta', \gamma', z)$ определена, то есть при выполнении условия

$$\frac{\Gamma(\alpha'+1-\gamma')\Gamma(\beta'+1-\gamma')}{\Gamma(\alpha')\Gamma(\beta')} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+1+n)\Gamma(\beta+1+n)} =$$

$$= \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n-1)...\alpha(\beta+n)(\beta+n-1)...\beta} \neq \infty. \qquad (3.2)$$

Условие (3.2) выполнено, если $\alpha \neq -p$ и $\beta \neq -p$, где $p = 0, 1, ..., n$.

Случай 5) Если $\gamma = -n$, где $n = 0, 1, ...$ и $\alpha = -p$ либо $\beta = -p$, где $p = 0, 1, ..., n$, то функция $y_1 = f(\alpha, \beta, -n, z)$ определена и является полиномом степени p. Фундаментальную совокупность решений гипергеометрического уравнения в этом случае, как и в случае 1, составляют функции

$$y_1 = f(\alpha, \beta, -n, z), \quad y_2 = z^{1+n} f(\alpha+1+n, \beta+1+n, 2+n, z).$$